Числовые ряды.

<u>Опр.1.</u> Выражение $x_1+x_2+\dots+x_n+\dots$ нзв числовым рядом, или, что то же самое $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sum\limits_{1}^{\infty} x_k$.

Опр.2. x_n – общий член ряда; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ – n-я частичная сумма ряда.

<u>Опр.2.</u> Если сущ. $\lim S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$ нзв сходящимся, а число S его суммой и пишут $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = S$.

Примеры на нахождение суммы ряда:

(1.) $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\dots+\frac{2}{5^n}+\dots = ?$

$$S_n = \frac{2}{5}+\dots+\frac{2}{5^n} = 2\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{5^n}\right) = 2\cdot\frac{1}{5}\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \to \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \left(\frac{1}{5}\right)^n \to 0; \quad S = \frac{1}{2}.$$

(2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\dots = ?$

$$S_n = 1-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\dots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{4/3} \to$$

$$\to \frac{3}{4}, \text{ т.к. } \left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0; \quad S = \frac{3}{4}.$$

(3) $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots = ?$

$$S_n = \frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3} \to \frac{1}{3}; \quad S = \frac{1}{3}.$$

(4.) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\dots = ?$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{3}+\dots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1} \to \frac{1}{3}. \quad S = \frac{1}{3}$$

5. $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots = ?$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Положим $b_n = -\frac{1}{2n(n+1)}$. Тогда $a_n = b_{n+1} - b_n$. $\Rightarrow$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots$$

$$\ldots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n) = -b_1 + b_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \Rightarrow S_n \to S = \frac{1}{4}.$$

6. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^2 - 8k - 3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-3)(4n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4(n-1)-3} - \frac{1}{4(n-1)+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)\right] \Rightarrow S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right). \Rightarrow$$

$$S_n \to \frac{1}{4}.$$

Примеры для самостоятельной работы.

Кудрявцев Л.Д., А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин, т. 2.
гл. 4. 1(3), 1(5), 2(3), 2(4).

Необходимым условием сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty x_k$ является условие: $\lim x_k = 0$.

Доказать расходимость рядов, используя необходимое условие сходимости.

(1.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2k^2+3k+4}{2k^2+1}$

Реш. $|x_k| = \dfrac{2k^2+3k+4}{2k^2+1} = \dfrac{k^2\left(2+\frac{3}{k}+\frac{4}{k^2}\right)}{k^2\left(2+\frac{1}{k^2}\right)} \to 1. \Rightarrow$

$\lim x_k \neq 0$ и $\Rightarrow$ Ряд $\sum\limits_1^\infty x_k$ расходится.

(2.) $x_k = \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)^k = \dfrac{\cancel{k^k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}{\cancel{k^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \dfrac{e^{-1}}{e} = \dfrac{1}{e^2} \to$

$\lim x_k \neq 0$ и $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_1^\infty x_k$ — расх.

(3.) $\cancel{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{\ln^2(k+1)}}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{k+2}$.

~~Реш.~~ Реш $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{k+2} \sim \dfrac{1}{k+2}$, при $k \to +\infty \Rightarrow$

$x_k = (k+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{k+2} \sim (k+1) \cdot \dfrac{1}{k+2} \to 1. \Rightarrow \lim x_n \neq 0$ и

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_1^\infty x_k$, где $x_k = (k+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{k+2}$ расх.

Примеры для самостоятельной работы.

Кудрявцев Л.Д., Кутасов В.И. и др., т. 2., гл. 4., № 11,2, 11(4), 11(6), 12(4).

Ряды с неотр.

<u>Теорема</u>. Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$, где $x_k \geq 0$, сходится ттогда последовательность (S_n) – ограничена.

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$, установив ограниченность сверху последовательности (S_n).

① $\dfrac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)}$.

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{4}.$$ Ряд сходится.

Примеры для самостоятельной работы.

Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., и др., т. 2.

гл 4, № 2(2), 2(3), 2(4).