КЕРЕШ

Тормышта кеше һәрвакыт оптимальләүче ролен үти. Ул үзенең табигате белән тумыштан оптимальләүче. Чөнки аңа гомере буена үзенең чикләнгән ресурсларын, энергиясен, вакытын экономияләргә кирәк. Ул мөмкин кадәр кыска вакыт эчендә максимум нәтиҗә алырга тырыша. Берәр яры барасы, нәрсәдер ташыйсы булса безгә иң кыска юл, иң очсыз транспорт төре кирәк. Төзү эшенә тотынсак, безгә иң нык, әмма шул ук вакытта иң җиңел һәм очсыз конструкция, төзү материалы кирәк. Хезмәтебезнең нәтиҗәсе иң яхшы, ягъни оптималь булырга тиеш.

Ләкин объектның халәте, проблеманың чишелеше бөтен яктан да иң яхшы була алмый. Мәсәлән, әгәр максималь тыгызлыкка һәм ныклыкка ия булган төзелеш бетоны булдырсак, аның бәясе минималь булмаячак. Иң очсыз күпер проектлаганда аның максималь йөк күтәрүчәнлеген исәпкә алырга кирәк. Кайсы вариант яхшырак – иң нык булганымы, әллә иң очсызымы? (Кемне катырак яратасың – әтиеңнеме, әниеңнеме?) Бу сорауга бертөрле генә җавап биреп булмый. Төрле ситуациядә төрле вариантлар мәслихәт булырга мөмкин. Димәк, чишелеш (халәт) бер мәгънәдә генә (конкрет күрсәткеч буенча гына) иң яхшы, оптималь була ала. Шул күрсәткечне оптимальләүнең *критерие* яисә *максат функциясе* дип атыйлар.

Максат функциясеннән тыш, мәсьәләнең тигезлек яисә тигезсезлек рәвешендә бирелгән шартлары яисә чикләмәләре була. Алар мәсьәләнең параметрлары арасында функциональ бәйләнешләр урнаштыралар һәм аларның үзгәрү чикләрен билгелиләр. Үзгәрешлеләрнең (параметрларның) өстәмә шартларны канәгатьләндергән кыйммәтләре оптимальләү мәсьәләсенең *чишелешләр күплеген* билгели.

Әйтергә кирәк, әгәр шартлар каршылыклы булса, яисә алар үзгәрешлеләргә берденбер кыйммәт бирсә, оптимальләүнең мәгънәсе югала. Чөнки оптимальләү мәсьәләсен чишү чишелешләр күплегеннән

иң яхшысын, максат функциясенә оптималь кыйммәт бирә торган чишелешне сайлап алуга кайтып кала. Әгәр мөмкин булган чишелеш бердәнбер булса, сайлау проблемасы ягъни оптимальләү мәсьәләсе югала.

1. ОПТИМАЛЬЛӘҮ МӘСЬӘЛӘЛӘРЕН ТӨРКЕМЛӘҮ

Мәсьәләне иң гомуми рәвештә куйыйк:

$$F(\bar{x}) \longrightarrow min(max), \tag{1.1}$$

$$h_k(\bar{x}) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,K, \tag{1.2}$$

$$g_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,J. \tag{1.3}$$

Биредә $F(\bar{x})$ – максат функциясе, $h_k(\bar{x})$ һәм $g_j(\bar{x})$ – чикләмә функцияләре, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – идарә итү параметрлары. (1.1)-(1.3) язмалары оптимальләү мәсьәләсенең *математик моделе* дип атала. Мәсьәләне чишү методлары математик модельләрнең төренә, классына карап сайлана.

Оптимальләү мәсьәләләрен төрлечә төркемләргә мөмкин. Әйтик, куллану өлкәсе буенча, мәсьәләнең әчтәлеге буенча, математик моделенең төре буенча. Математик моделенең төре буенча алар түбәндәгечә бүленәләр.

Максат функцияләренең саны буенча *беркритерийлы* һәм *күпкритерийлы* оптимальләү мәсьәләләре була. Беркритерийлы мәсьәләләрдә чишелешләр күплеге һәм максат функциясе төгәл, ачык итеп билгеләнә. Мәсьәлә күп очракта бердәнбер чишелешкә ия була. Күпкритерийлы мәсьәләләрнең бердәнбер чишелеше юк, алар канәгатьләнерлек вариантлар сайлау дәрәҗәсендә генә чишелә.

Әгәр язылган математик модельнең шартлары булса, мәсьәлә *шартлы*, булмаса – *шартсыз* дип атала. Шартлы мәсьәләне чишү күпкә авыррак. Функциональ шартлар тигезлек һәм тигезсезлек рәвешендә булырга мөмкин. Ләкин монда принципиаль аерма юк. Чөнки тигезлекне тигезсезлекләр системасы итеп язарга да, яңа параметр өстәп, тигезсезлекне тигезлеккә китерергә дә мөмкин. Мәсәлән, $g(\bar{x}) = 0$

шарты $g(\bar{x}) \leq 0$ һәм $g(\bar{x}) \geq 0$ тигезсезлекләре системасына тиңдәш. Ә $\varphi(\bar{x}) \leq 0$ тигезсезлеге уңай кыйммәтле x_{n+1} билгесезен кулланып $\varphi(\bar{x}) + x_{n+1} = 0$ тигезлеге рәвешендә языла.

Математик модельдәге $F(\bar{x})$, $\varphi_i(\bar{x})$, $g_i(\bar{x})$ функцияләренең төре буенча оптимальләү мәсьәләләре сызыкча һәм нәсызыкча төрләргә бүленәләр. Әгәр ул функцияләрнең бәтенесендә сызыкча булса, мәсьәлә *сызыкча* дип атала. Сызыкча булмаган функцияләр кулланганда, мәсьәлә *нәсызыкча* дип атала. Нәсызыкча мәсьәләне чишә торган туры методлар юк. Алар өчен итерация, ягъни оптимумга әкренләп якынаю, методлары кулланыла. Минимум эзләгәндә $F(\bar{x}^{(k+1)}) < F(\bar{x}^{(k)})$ булырга, димәк һәр адым алдагы чишелешне күпмегәдер яхшыртырга тиеш. Сызыкча мәсьәлә өчен симплекс-метод исемле универсаль метод бар.

Оптимальләү мәсьәләләрен алда күрсәтелгәнчә классларга бүлеп карау әһәмияткә ия. Чөнки чишү методлары аерым төр мәсьәләләрнең үзенчәлекләрен исәпкә алып төзелә.

Оптимальләү мәсьәләләрен өлек-өлектән ***математик программалау*** дип атыйлар. Биредә программалау сүзе чишелешне табу, эш итү программасын төзү мәгънәсендә әйтелә.

2. СЫЗЫКЧА ПРОГРАММАЛАУ МӘСЬӘЛӘЛӘРЕ

Математик модельнең барлык функцияләре дә сызыкча булганда мәсьәлә ***сызыкча программалау мәсьәләсе*** (СПМ) дип атала. Ул түбәндәгечә языла:

$$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \longrightarrow min(max), \qquad (2.1)$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &< b_i, \quad i = \overline{1, m_1}; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &> b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \qquad (2.2) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &= b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}. \end{aligned}$$

Биредә x_j параметрлары уңай кыйммәтле дип санала. Әгәр мәсьәләнең математик моделендә тискәре кыйммәтле параметр булса, аны уңай

кыйммәтле ике яңа параметрның аермасы итеп күрсәтәләр. Практикада СПМ *симплекс-метод* ярдәмендә чишелә. Әлеге методны куллану өчен мәсьәләне кануни рәвешкә китерергә кирәк. Әгәр шартлар тигезлек рәвешендә язылган, ә x_i һәм b_j зурлыклары уңай кыйммәтле булса, мәсьәлә *кануни (стандарт рәвешле)* СПМ дип атала. Тигезсезлек шартлары булса, өстәмә билгесез кертеп аларны тигезлеккә китерәләр.

Хәзер СПМны кануни рәвештә язйык

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow min; \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, j = \overline{1,m}; \tag{2.4}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$$

Монда min һәм max очракларын аерым карауның кирәге юк. Чөнки $max\ f(\bar{x}) = -\ min\ [-f(\bar{x})]$ була.

Әлеге кануни СПМны чишү (2.4)-нче сызыкча алгебра тигезләмәләре системасын чишүгә һәм чишелешләр арасыннан (2.3) функциясен минималь итә торганын сайлап алуга кайтып кала. Әгәр параметрлар һәм тигезләмәләр саны тигез ($n = m$) булса, (2.4) системасы бердәнбер чишелешле була. Бу очракта оптималь чишелеш эзләүнең мәгънәсе калмый – әлеге бердәнбер чишелеш (2.3)–(2.4) мәсьәләсенең чишелеше була. Реаль мәсьәләләр чишкәндә $n > m$ һәм шуңа күрә (2.4) системасы чиксез күп чишелешкә ия була.

График ысул

СПМның геометрик мәгънәсен карыйк. Әйтик, оптимальләү мәсьәләсе

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow min; \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j, j = \overline{1,m}; \tag{2.6}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$$

рәвешенә китерелгән ди. (2.6) тигезсезлекләренең һәрберсе n–үлчәмле фәзаның яртысын бүлеп күрсәтә. Әгәр шартлар каршылыксыз булсалар, өлеге тигезсезлекләр n-үлчәнешле *чишелешләр күпкырлыгын* төзи. Мәсьәлә шул күпкырлык эченнән максат функциясен оптималь итә торган ноктаны эзләүгә кайтып кала. СПМның чишелеше күпкырлыкның эчендә түгел, ә берәр түбәсендә ята. Димәк, мәсьәлә шул түбәләр арасыннан иң яхшысын сайлауга кайтып кала. График ысул гадәттә ике үлчәнешле мәсьәлә чишкәндә кулланыла. Методның асылын түбәндәге мисал өстендә карыйк.

2.1-нче мисал. Завод өч төрле чимал кулланып ($j = 1, 2, 3$), бер данәсе c_i зурлыгында табыш китерә торган ике төрле продукция ($i = 1, 2$) чыгара. i төрдәге бер данә продукцияне булдырганда j-нчы төр чимал a_{ji} күләмендә тотыла. Һәр төр чималның запасы b_j билгеле булганда заводка максималь табыш китерә торган эш планын төзергә кирәк.

Әгәр завод эшләп чыгарган i-нче төр продукциянең санын x_i итеп билгеләсәк, мәсьәләнең математик моделе түбәндәгечә языла

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \longrightarrow max, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Әйтик $b = (b_1, b_2, b_3) = (36; 12; 6)$, $c = (c_1, c_2) = (4; 2)$,

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

булсын ди. Ул вакытта

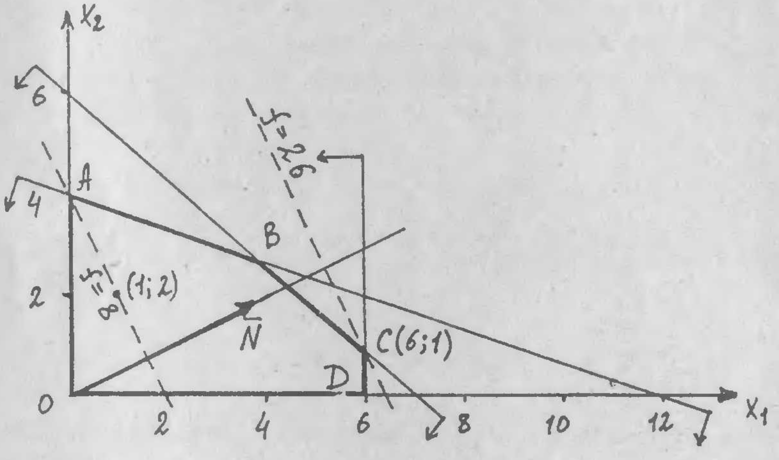
$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \longrightarrow max, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 &\leq 36, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Әлеге тигезсезлекләрне декартча координатлар системасына күчерсәк, $OABCD$ чишелешләр күппочмагы кисеп алына (2.1 рәс.). Шушы өлкәдән $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ноктасын алып, максат функциясенең кыйммәтен исәплик $Z_0 = f(1;2) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$.

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 = 4x_1 + 2x_2 = Z_0 \tag{2.11}$$

тигезләмәсе яссылыкта туры сызыкны билгели. Ул турының теләсә кайсы ноктасы $f(x_1, x_2)$ функциясенә Z_0 кыйммәтен бирә. Әгәр Z_0-гә төрле кыйммәтләр бирсәк, үзара параллель булган башка турылар төзелә. Алар *тигез кыйммәтләр сызыгы* дип аталалар. Бер турыдан икенчесенә күчкәндә f-ның кыйммәте үзгәрә. 2.1-нче рәсемдә $Z_0 = (8;26)$ кыйммәтләрен бирә торган турылар күрсәтелгән.



2.1 рәс.

Шушы турыларга перпендикуляр булган һәм максат функциясе иң тиз үскән юнәлеш белән туры килгән вектор $f(x_1, x_2)$ функциясенең *градиенты* дип атала ($\bar{N} = grad\ f = (c_1, c_2) = (4;2)$). Әгәр тигез

кыйммәтләр сызыгын $\bar{N}$ векторы юнәлешендә үз-үзенә параллель итеп күчерсәк, f функциясенең кыйммәте үсә, кирегә күчерсәк – кими. Димәк, (2.9)-нчы максат функциясенең иң зур кыйммәтен табу өчен ул туры сызыкны $\bar{N}$ юнәлешендә чишелешләр күппочмагының кырый ноктасына чаклы күчерергә кирәк. Безнең мәсьәләдә $C(6;1)$ түбәсе кырый нокта була һәм оптималь чишелешне бирә

$$max\ f = f(6;1) = 4\cdot 6 + 2\cdot 1 = 26.$$

Шулай итеп, булган чималны рациональ кулланып иң зур табыш алу өчен 6 данә беренче төр, 1 данә икенче төр продукцияне эшләп чыгарырга кирәк. Нәтиҗәдә завод 26 берәмлек табыш алачак.

2.2-нче мисал. Завод бер данәсе c_i табыш китерә торган ике төрле продукция ($i = 1,2$) эшләп чыгара. Һәртөр продукция бер-бер артлы дүрт төрле машинада ($j = \overline{1,4}$) эшкәртелә. Әгәр i-нче төр продукция j-нчы төр машинада a_{ij} сәгать эшкәртелсә һәм j-нчы төр машинаның бер тәүлектә эшләү ресурсы b_j билгеле булса, максималь табыш китерә торган эш планын төзергә.

Завод эшләп чыгарган продукциянең беренче төрен x_1, икенче төрен x_2 дип билгелик. Әйтик, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (18;12;12;9)$, $c = (c_1, c_2) = (4;6)$,

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

булсын. Ул вакытта мәсьәлә түбәндәгечә языла

$$f(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \longrightarrow max,$$

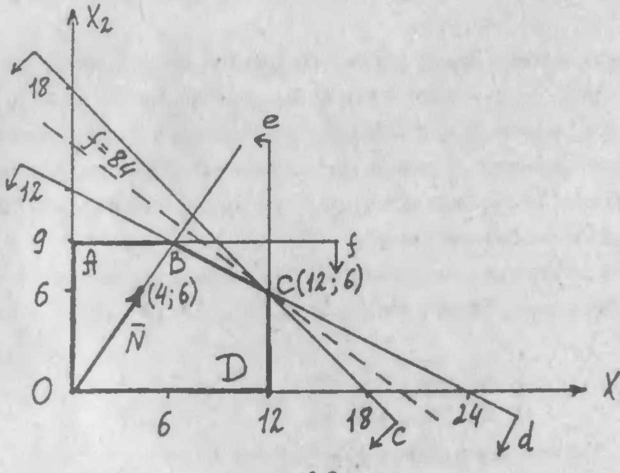
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & (a)\\ x_2 &\geq 0, & (b)\\ x_1 + x_2 &\leq 18, & (c)\\ 0,5x_1 + x_2 &\leq 12, & (d)\\ x_1 &\leq 12, & (e)\\ x_2 &\leq 9. & (f) \end{aligned}$$

Мәсьәләне график ысул белән чишү өчен шартлар ярдәмендә бирелгән $OABCD$ чишелешләр күппочмагын билгелик (2.2 рәс.). Ко-

ординатлар башын $(c_1, c_2) = (4; 6)$ ноктасы белән тоташтырып, максат функциясенең градиентын төзибез. Тигез кыйммәтләр сызыгын градиент юнәлешендә күчереп, чишелешләр күппочмагының кырый ноктасын табабыз. Рәсемнән күренгәнчә, ул – C ноктасы була. Бу нокта (c) һәм (d) турылары кисешү нәтиҗәсендә барлыкка килгән иде. Шуңа күрә аның координатларын табу өчен

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 &= 12, \\ x_1 &= 12 \end{aligned}$$

тигезләмәләр системасын чишәргә кирәк. Нәтиҗәдә $x_1 = 12$, $x_2 = 6$ (ягъни $C(12; 6)$) һәм $max\ f = f(12; 6) = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 = 84$ икәнен табабыз.



2.2 рәс.

Димәк, максималь табыш алу өчен 12 данә беренче төр, 6 данә икенче төр продукция эшләп чыгарырга кирәк. Ул вакытта завод 84 берәмлек табыш алачак.

Симплекс-метод

Чишелешләр күпкырлыгының һәрбер түбәсе мәсьәләнең базис чишелеше булып санала. Базис чишелешләр арасыннан функциягә

оптималь кыйммәт бирә торганын сайлап алырга кирәк. n билгесезле һәм m шартлы мәсьәләне чишкәндә C_n^m түбәле чишелешләр күпкырлыгы төзелә. n белән m зур булганда бөтен түбәләрне тикшереп чыгу бик озак булыр иде. Шуңа күрә түбәләрне билгеле бер тәртип белән тикшереп, оптималь ноктага иң кыска юл белән ирешү схемасы кирәк.

Мондый схема *симплекс-метод* дип атала. Методның идеясен түбәндәгечә аңлатырга мөмкин. Чишелешләр күпкырлыгының берәр түбәсен ягъни шул түбәнең координатларын башлангыч чишелеш итеп алабыз. Шул түбәдән чыккан барлык кабыргаларны тикшереп чыгабыз. Кайсы кабырга буенча хәрәкәтләнү максат функциясен оптимальли (үстерә яисә кечерәйтә), шул кабырганың икенче очындагы түбәне икенче чишелеш итәбез. Барлык кабыргалар тагын тикшерелә һәм өченче түбәгә күчәбез. Шушындый хәрәкәтне оптималь ноктага җиткәнче дәвам итәргә кирәк. Әгәр максат функциясе чишелешләр күпкырлыгында чиксез кечкенә (зур) кыйммәтле булса, симплекс-метод исәпләүләр барышында бу хәлне ачыклый.

Әйтик, СПМ түбәндәгечә язылган булсын

$$f(\bar{x}) = c'_1x_1 + c'_2x_2 + \ldots + c'_nx_n \longrightarrow min; \qquad (2.12)$$

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1; \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n &= b'_m; \end{aligned} \qquad (2.13)$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}; \ b'_j \geq 0, \ j = \overline{1,m}.$$

(2.13) системасының r тигезләмәсе сызыкча бәйләнештә тормаса, системаны беренче r билгесезгә ($r \leq m$) карата чишеп, түбәндәгечә язабыз

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n), \\ x_2 &= b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n), \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_r = b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n).$$

$$b_j \geq 0, \; j = \overline{1,r}.$$

Биредә $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – *базис параметрлар*, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – *ирекле параметрлар* дип аталалар. Ирекле параметрларны нульгә тигезләсәк, ягъни $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$ дип алсак, (2.14) системасыннан базис параметрлар табыла: $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $\ldots$, $x_r = b_r$. Табылган $(b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$ векторы *беренче базис чишелеше* була.

Оптимальлек критерием ирекле параметрлар функциясе итеп язабыз

$$f(\bar{x}) = c_0 - (c_{r+1}x_{r+1} + c_{r+2}x_{r+2} + \cdots + c_nx_n). \tag{2.15}$$

Беренче базис чишелеше максат функциясенең $f_1 = c_0$ кыйммәтен билгеле. Әгәр (2.15) максат функциясенең барлык $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ коэффициентлары да тискәре сан булса, табылган базис чишелеше оптималь нокта, ягъни (2.12)-(2.13) мәсьәләсенең чишелеше була. Чөнки без (2.15) максат функциясенең минимумын эзлибез. Ә тискәре коэффициентлы $-c_{r+1}x_{r+1}, -c_{r+2}x_{r+2}, \ldots, -c_nx_n$ буыннарының иң кечкенә
кыйммәтләре нуль була.

Әгәр $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ коэффициентлары арасында уңай кыйммәтләре булса, аларга туры килгән x_i-ләрне үстереп, максат функциясен тагын да кечерәйтергә була. Әмма, конкрет x_i-не үстергәндә $x_1, x_2, \ldots, x_r$ базис параметрлары уңай булу шарты бозылмаска тиеш.

Уңай коэффициентлар арасыннан берсен сайлап алыйк. Әйтик, $c_k > 0$ ($k \geq r+1$) булсын. x_k-дан кала барлык ирекле параметрларга нуль кыйммәте бирсәк, (2.14) һәм (2.15) түбәндәгечә язылалар

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_1 - a_{1k}x_k, \\ x_2 & = & b_2 - a_{2k}x_k, \\ \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \\ x_r & = & b_r - a_{rk}x_k, \end{array} \tag{2.16}$$

$$f(\bar{x}) = c_0 - c_kx_k. \tag{2.17}$$

x_k-ны үстерү чиген караганда, бирөдә ике очрак булырга мөмкин:

1) Барлык $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}$ коэффициентлары да тискәре сан булсалар, x_k-ны чиксез үстерергә була. Чөнки $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$ шарты бозылмый. Бу очракта максат функциясе чиксез кыйммәт ала ($min\ f(\bar{x}) = -\infty$) һәм оптималь чишелеш юк дип санала.

2) Әгәр $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}$ коэффициентлары арасында уңай саннар булса, x_k-ны билгеле бер кыйммәткә кадәр генә үстерергә ярый. Уңай коэффициентларны a_{pk} $(p \leq r)$ итеп билгелик. Ул вакытта x_k-ны b_p/a_{pk} чигенә кадәр генә үстерергә ярый, чөнки $x_p \geq 0$ шарты бозыла. Хәзер, k индексын үзгәртмичә, шул чикләрнең иң кечкенәсен табыйк

$$\rho = \frac{b_i}{a_{ik}} = min \left(\frac{b_p}{a_{pk}} \right) \geq 0;$$
$$a_{pk} < 0; \quad p = \overline{1, r}.$$

Иң кечкенә чиккә туры килгән a_{ik} $(i \leq r)$ коэффициенты *хәлиткеч (чишә торган) элемент* дип атала. Әгәр k-нчы ирекле параметрга ρ кыйммәтен бирсәк, i-нче базис параметры нуль кыйммәтен ала $(b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0, \rho, 0, \ldots, 0)$. Нәтиҗәдә, (2.16) - (2.17) системасы түбәндәгечә языла

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & b_1 - a_{1k}\rho, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\
x_{i-1} & = & b_{i-1} - a_{i-1,k}\rho, \\
x_i & = & 0, \\
x_{i+1} & = & b_{i+1} - a_{i+1,k}\rho, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\
x_r & = & b_r - a_{rk}\rho,
\end{array}$$

$$f(\bar{x}) = c_0 - c_k\rho.$$

Шуның белән симплекс-методның беренче адымы тәмамлана. Адым нәтиҗәсендә максат функциясенең кыйммәте кечерәя $f_2 = c_0 - c_k\rho < c_0 = f_1$ һәм уңай c_i коэффициентларының саны бергә кими.

Икенче адымны ясау өчен иске базистан нуль кыйммәтле x_i-не чыгарып һәм аның урынына x_k-ны кертеп яңа базиска күчәргә кирәк.

Моның өчен хәлиткеч a_{ik} элементы кергән тигезләмәне x_k-га карата чишәләр һәм килеп чыккан бәйлелекне (2.14) тигезләмәләренә куялар. Шулай итеп, $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \ldots, x_r$-лар яңа базис параметрларына, ә $x_{r+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ – иректе параметрларга әвереләләр. Шуннан соң яңа базис өчен оптимальлек критерие коэффициентларын яңабаштан анализлый башлыйлар. Шундый адымнарны барлык $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ коэффициентлары тискәре санга әверелеп беткәнче башкаралар. Иң соңыннан табылган базис (2.12)-(2.13) мәсьәләсе өчен оптималь чишелеш була.

2.3-нче мисал.

$$f(\bar{x}) = x_2 - x_1 \longrightarrow min, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

сызыкча программалау мәсьәләсен чишәргә.

Чикләмәләр системасын кануни рәвешкә китерәбез

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5. \end{aligned}$$

Биредә базис итеп коэффициентлары берәмлеккә тигез булган x_3, x_4, x_5-ләрне сайлау җайлы була. Системаны шуларга карата чишәбез

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - (-2x_1 + x_2), \\ x_4 &= 2 - (x_1 - 2x_2), \\ x_5 &= 5 - (x_1 + x_2), \\ f &= 0 - (x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Иректе параметрларга нуль кыйммәте биреп, базисны исәплибез: $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Димәк, $(0;0;2;2;5)$ векторы беренче адымдагы чишелеш була. Бу очракта максат функциясе $f_1 = 0$ кыйммәтен ала.

Мәсьәләнең шарты буенча максат функциясендәге x_1 уңай булырга тиеш. Димәк, x_1-не үстереп, максат функциясенең кыйммәтен кечерәйтергә була. Әмма, x_1-не үстергәндә $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ шарты бозылмаска тиеш. $x_2 = 0$ икәнен исәпкә алсак, (2.20)-нче системага анализ ясау x_1 үзгәрешлесен 2-гә кадәр үстерергә яраганны күрсәтә. Ул вакытта $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $(2;0;6;0;3)$ векторы икенче чишелештәге базис була, ә максат функциясе $f_2 = -2$ кыйммәтен ала.

Хәзер x_4 урынына x_1-не кертеп, яңа базис төзик. Моның өчен (2.20)-нче системаның икенче тигезләмәсен x_1-гә карата чишеп, килеп чыккан $x_1 = 2 - (-2x_2 + x_4)$ бәйләлеген башка тигезләмәләргә һәм максат функциясенә куябыз

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - (-3x_2 + 2x_4), \\ x_1 &= 2 - (-2x_2 + x_4), \\ x_5 &= 3 - (3x_2 - x_4), \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$f = 0 - (2 + 2x_2 - x_4 - x_2) = -2 - (x_2 - x_4).$$

Максат функциясендә x_2-нең коэффициенты тискәре. Димәк, x_2-не үстереп, максат функциясен тагын да кечерәйтергә була. (2.21)-дән күренгәнчә, x_2-не 1-гә кадәр үстерергә мөмкин. Ул вакытта $x_3 = 9$, $x_1 = 4$, $x_5 = 0$, ә $f_3 = -3$ була. Хәлиткеч элемент кергән өченче тигезләмәне x_2-гә карата чишеп, килеп чыккан $x_2 = 1 - (-x_4/3 + x_5/3)$ бәйләлеген башка формулаларга куябыз

$$\begin{aligned} x_3 &= 9 - (x_4 + x_5), \\ x_1 &= 4 - (x_4/3 + 2x_5/3), \\ x_2 &= 1 - (-x_4/3 + x_5/3), \end{aligned}$$

$$f = -3 - \left(-\frac{2x_4}{3} - \frac{x_5}{3}\right).$$

Максат функциясендәге барлык параметрларның да коэффициентлары тискәре саннар. Шуңа күрә x_4 һәм x_5-не үстереп f-ны кечерәйтеп булмый. Димәк,

$$min\ f = f_3 = -3,$$

һәм ул $(4;1;9;0;0)$ базис чишелешендә ирешелә.

Биредә шуны әйтеп үтәргә кирәк: әгәр максат функциясенең максимумы эзләнелсә, мәсьәләне минимум эзләүгә кайтарып калдыралар.

2.4-нче мисал.

$$\varphi(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \longrightarrow max, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 18, \\ 0.5x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\ 0 \leq x_1 &\leq 12, \\ 0 \leq x_2 &\leq 9 \end{aligned} \tag{2.23}$$

сызыкча программалау мәсьәләсен чишәргә. Бу мәсьәлә график ысул белән чишелгән иде инде (2.2-нче мисал). Хәзер аны симплекс-метод белән чишәбез. Мәсьәләне минимум эзләүгә кайтарып калдырыйк:

$$f(\bar{x}) = -\varphi(\bar{x}) = 0 - (4x_1 + 6x_2) \longrightarrow min.$$

Өстәмә билгесезләр кертеп, мәсьәләнең шартларын тигезләк рәвешенә китерәбез

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 18, \\ 0.5x_1 + x_2 + x_4 &= 12, \\ x_1 + x_5 &= 12, \\ x_2 + x_6 &= 9, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

1. Базис итеп x_3, x_4, x_5, x_6, ирекле итеп x_1 һәм x_2 параметрларын алабыз

$$\begin{aligned} x_3 &= 18 - (x_1 + x_2), \\ x_4 &= 12 - (0.5x_1 + x_2), \\ x_5 &= 12 - x_1, \\ x_6 &= 9 - x_2, \\ f &= 0 - (4x_1 + 6x_2) \longrightarrow min. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Беренче базис чишелеше (0;9;18;12;12;9) һәм $f_1 = 0$ була.

2. Максат функциясе f-ны кечерәйтү өчен x_1 һәм x_2-не зурайтырга кирәк. Әйтик, x_2-не үстерәбез ди. (2.25)-нче системадан күренгәнчә, x_2-не 9-га хәтле үстерергә ярый. Хәзер, x_1 һәм x_2-не ирекле калдырып, x_3, x_4, x_5, x_2 базис параметрларын һәм максат функциясен алар аша күрсәтәбез

$$\begin{aligned} x_3 &= 9-(x_1-x_6), \\ x_4 &= 3-(0,5x_1-x_6), \\ x_5 &= 12-x_1, \\ x_2 &= 9-x_6, \end{aligned} \qquad (2.26)$$

$$f = 0-(4x_1+6(9-x_6)) = -54-(4x_1-6x_6).$$

Икенче базис чишелеше (0;9;9;3;12;0) һәм $f_2 = -54$ була.

3. Максат функциясен тагын да үстерү өчен, x_1-не зурайтырга кирәк. (2.26)-дан күренгәнчә, ул 6-дан да зур була алмый. Хәзер x_3, x_1, x_5, x_2 базисына күчәбез

$$\begin{aligned} x_3 &= 3-(-2x_4+x_6), \\ x_1 &= 6-(2x_4-2x_6), \\ x_5 &= 6-(-2x_4+2x_6), \\ x_2 &= 9-x_6, \end{aligned} \qquad (2.27)$$

$$f = -54-(4(6-2x_4+2x_6)-6x_6) = -78-(-8x_4+2x_6).$$

Өченче базис чишелеше (6;9;3;0;6;0) һәм $f_3 = -78$ була.

4. Хәзер максат функциясен x_6-га 3 кыйммәтен биреп үстерәбез. x_1, x_6, x_5, x_2 параметрларыннан торган базиска күчәбез

$$\begin{aligned} x_6 &= 3-(x_3-2x_4), \\ x_1 &= 12-(2x_3-2x_4), \\ x_5 &= -(-2x_3+2x_4), \\ x_2 &= 6-(-x_3+2x_4), \end{aligned} \qquad (2.28)$$

$$f = -78-(-8x_4+2(3-x_3+2x_4)) = -84-(-2x_3-4x_4).$$

Базис чишелеше (12;6;0;0;0;3) һәм $f_4 = -84$ була.

Максат функциясендәге параметрларның коэффициентлары тискәре, димәк f-ны башка кечерәйтеп булмый. Шуңа күрә $max\ \varphi = -min\ f = -f_4 = 84$ була һәм ул $x_1 = 12, x_2 = 6$ ноктасында ирешелә.

Әлеге чишү процессын 2.2-нче рәсемдә күрсәтелгән график ысул белән чагыштыру кызыклы. Беренче базис чишелеше O ноктасына, икенче базис чишелеше A ноктасына, өченче чишелеш B һәм дүртенче чишелеш C нокталарына туры килә. Димәк, алда әйтелгәнчә, симплекс-методның идеясы чишелешләр күпочмагында түбәдән түбәгә күчеп оптималь ноктаны эзләүгә кайтып кала.

Симплекс-методтагы исәп-хисапларны таблица рәвешендә алып бару бик уңай. Түбәндә (2.25)-нче мисал симплекс-таблица ярдәмендә чишелә.

Таблицаларны тутыру алгоритмын аңлатып узыйк. Беренче таблицага максат функциясенең һәм тигезлек рәвешенә китерелгән шартларның коэффициентлары языла. Беренче баганада базис параметрлары күрсәтелә.

Таблицадан таблицага күчү өчен түбәндәге гамәлләрне эшләргә кирәк.

1) Таблицаның f өчен язылган юлыннан нульдән зур бер элементны сайлыйлар һәм ул элемент язылган баганаһы "ук" белән билгелиләр.

2) Сайланган (ук белән билгеләнгән) баганаһың уңай элементларын табалар. Иректе буыннарның шул баганадагы уңай элементларга чагыштырмаларын исәпләп чыгаралар. Чагыштырмасы иң кечкенә булган юлны сайлап "ук" белән билгелиләр. Тамгаланган багана белән юлның кисешкән урынындагы элемент *хәлиткеч элемент* була. Аны турыпочмаклы рамага алалар.

3) Хәлиткеч элемент кергән юлны шул санга бүлеп, икенче таблицаның беренче юлына язалар. Шул ук вакытта юлның башында язылган базис параметрын хәлиткеч элемент торган баганаһың параметры белән алыштыралар.

4) Үзгәртелгән юл ярдәмендә "ук" белән тамгаланган баганаһың калган элементларын нульгә әйләндерәләр. Моның өчен Гаусс методындагыча башка юллардан үзгәртелгән юлны алырга (кушарга)

кирәк. Үзгәртелгән юлларны базис параметрларын саклап бер-бер артлы икенче таблицага күчереп язалар.

Симплекс-таблица

Базис	Иректә буыннар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Чагыштырмалар
x_3	18	1	1	1	0	0	0	$18/1 = 18$
x_4	12	0,5	1	0	1	0	0	$12/1 = 12$
x_5	12	1	0	0	0	1	0	
→ x_6	9	0	[1]	0	0	0	1	$9/1 = 9$
f	0	4	↑ 6	0	0	0	0	
x_2	9	0	1	0	0	0	1	
x_3	9	1	0	1	0	0	-1	$9/1 = 9$
→ x_4	3	[0,5]	0	0	1	0	-1	$3/0,5 = 6$
x_5	12	1	0	0	0	1	0	$12/1 = 12$
f	-54	↑ 4	0	0	0	0	-6	
x_1	6	1	0	0	2	0	-2	
x_2	9	0	1	0	0	0	1	$9/1 = 9$
→ x_3	3	0	0	1	-2	0	[1]	$3/1 = 3$
x_5	6	0	0	0	-2	1	2	$6/2 = 3$
f	-78	0	0	0	-8	0	↑ 2	
x_6	3	0	0	1	-2	0	1	
x_1	12	1	0	2	-2	0	0	
x_2	6	0	1	-1	2	0	0	
x_5	0	0	0	-2	2	1	0	
f	-84	0	0	-2	-2	0	0	

5) Килеп чыккан яңа таблица өчен югарыда тасвирланган 1-4 гамәлләрен яңадан кабатлыйлар. Мондый кабатлаулар максат функциясенең коэффициентлары (f өчен язылган юлның элементлары) нульгә тигез яки нульдән кечерәк булганчы башкарыла.

6) Ин ахырда килеп чыккан таблицадан оптимум ноктасының координатларын һәм максат функциясенең шул ноктадагы кыйммәтен язып

алалар.

Соңгы таблицадан күренгәнчә, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ – ирекле, ә $x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3$ – базис параметрларның оптималь кыйммәтләре булалар. Максат функциясе $max\ \varphi = -min\ f = -(-84) = 84$ кыйммәтен ала.

Транспорт мәсьәләсе

Регионда, эшләп чыгару куәтләре a_i булган, төзү материаллары җитештерүче m завод бар. Алар ихтыяҗлары b_j булган n төзү объектын материаллар белән тәэмин итеп тора. Бер берәмлек товарны i-нче заводтан j-нчы объектка илтүнең бәясе c_{ij} сум тора. Минималь транспорт чыгымнары тотып, материалларны заводтан төзү объектларына илтү планын төзергә. Мондый мәсьәлә *транспорт мәсьәләсе* дип атала.

Әгәр i-нче заводтан j-нчы объектка илткән материаллар күләмен x_{ij} дип тамгаласак, мәсьәләнең математик моделе түбәндәгечә языла

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow min; \tag{2.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}; \tag{2.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}; \tag{2.31}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \tag{2.32}$$

Биредә (2.29)-нчы максат функциясе суммар транспорт чыгымнарын күрсәтә. (2.30)-нчы шарт i-нче заводтан төрле объектларга җибәрелгән материаллар күләме заводның эшләп чыгару куәтенә тигез булырга тиешлекне күрсәтә. (2.31)-нче шарт j-нчы объектка төрле заводлардан килгән төзү материалларының күләме кулланучының ихтыяҗларын төгәл канәгатьләндерергә тиеш икәнне аңлата. (2.32)-нче шарт материаллар бер генә юнәлештә ташылырга тиеш дигән таләп куя.

(2.29)-(2.32) белән бирелгән транспорт мәсьәләсе бары тик

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

очрагында гына оптималь чишелешле була. Бу шарт үтәлгәндә (2.29)-(2.32) *йомык мәсьәлә* дип атала. Әгәр заводларның суммар куәтләре кулланучылар ихтыяҗыннан кечерәк булса, мәсьәлә чишелми. Киресенчә булса, мәсьәләне формаль рәвештә өстәмә кулланачы кертеп чишәләр.

Транспорт мәсьәләсе СПМ-ның бер төре булып тора һәм универсаль симплекс-метод ярдәмендә чишелә. Әмма аның үзенә генә хас үзенчәлекләре бар. Мәсәлән, аның барлык шартлары тигезлек рәвешендә бирелә, ә максат функциясенең коэффициентлары бергә тигез була. Бу сыйфатлар аны гадиләштерә һәм чишү өчен махсус ысуллар кулланырга мөмкинлек бирә. Гадәттә, транспорт мәсьәләсен *потенциаллар методы* белән чишәләр.

Потенциаллар методында иң әлек (2.30)-(2.32) шартларын үти торган башлангыч чишелеш (ярдәмче план) төзиләр. Моның өчен мәсьәләнең шартын транспорт таблицасына язу уңайлы. Таблицаның юллары материал җибәрүче заводларга, ә баганалары кулланучыларга туры килә (2.2 табл.). Таблицаның эчке шакмакларына кечкенә генә итеп c_{ij} зурлыкларын язалар. Шуннан соң таблицаны "төньяк – көнбатыш почмагы" яки "минималь элемент" методын кулланып тутыралар.

2.2 табл.

	1-нче объект	2-нче объект	3-нче объект		n-нче объект	
1-нче завод	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
2-нче завод	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
m-нчы завод	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

Төньяк – көнбатыш почмагы методында шакмакларга максималь кыйммәтләр язып, таблицаны өске сулъяк почмактан тутырып киләләр. **Минималь элемент** методында c_{ij} иң кечкенә кыйммәтле булган шакмакларны тутыралар. Нәтиҗәдә $m+n-1$ шакмак тутырылган булырга тиеш. Тутырылган шакмаклар саны җитмәсә, буш шакмакларның берничәсенә нульләр язып, аларны $m+n-1$ гә җиткерәләр.

Ярдәмче планның ***потенциалы*** дип тутырылган шакмаклар өчен

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{2.33}$$

тигезләмәсе үтәлерлек $u_i \quad (i = \overline{1,m})$ һәм $v_j \quad (j = \overline{1,n})$ зурлыкларын атыйлар. Әлеге, $m+n-1$ сызыкча тигезләмәдән торган системаның $m+n$ билгесезе бар. Димәк, бер билгесезгә ирекле кыйммәт биреп башкаларын бик тиз исәпләп алырга була. Әгәр табылган потенциаллар барлык буш шакмаклар өчен язылган

$$u_i + v_j \le c_{ij} \tag{2.34}$$

шартларына буйсынса, ярдәмче план транспорт мәсьәләсенең ***оптималь чишелеше*** дип атала.

Әгәр план оптималь булмаса, $u_r + v_s > c_{rs}$ булган берәр буш (r, s) шакмагын кертеп яңа транспорт схемасы төзиләр. Бер буш шакмакка сан язганда ким дигәндә өч шакмакта саннар үзгәрәчәк. Чөнки план үзгәргәндә таблицаның аерым юлларындагы һәм баганаларындагы саннарның суммасы үзгәрмәскә тиеш. Шуңа күрә буш шакмакны үзгәртү өчен бер түбәсе шул (r, s)-та, калганнары тулы шакмакларда яткан цикл төзиләр. Циклның кабыргалары я үрә (вертикаль), я ятма (горизонталь) булырга тиешләр. Икенче төрле әйткәндә, алар уртак түбәдә перпендикуляр булып кисешәләр. Димәк, иң гади цикл квадрат яки турыпочмаклык рәвешендә була.

Циклның түбәләренә чиратлаштырып "+" яки "−" тамгалары куеп чыгалар. Яңа план төзегәндә буш (r, s) шакмагын тутырырга кирәк, шуңа күрә аңа "+" тамгасы куялар, ә калган түбәләрдә тамганы чиратлаштыралар. "−" тамгалы шакмаклардагы саннарның иң кечкенәсен ρ итеп билгелик. Шуннан соң түбәндәге кагыйдә буенча яңа план төзелә:

а) цикл түбәләренә эләкмәгән шакмаклар үзгәрмиләр;

б) "+" тамгалы шакмакларга ρ санын өстиләр $(x_{ij}+\rho)$;

в) "−" тамгалы шакмаклардан ρ санын алалар $(x_{ij}-\rho)$.

Шуннан соң яңа транспорт планының тутырылган шакмаклары өчен (2.33)-нче тигезләмәләр системасын төзеп, потенциалларны табалар. Табылган потенциалларны буш шакмаклар өчен (2.34)-нче шартка куеп, планның оптимальлеген тикшерәләр. Оптимальлек шарты үтәлмәсә, яңа цикл сайлап исәпләүне дәвам итәләр.

2.5-нче мисал. Регионда куәтләре $(a_1,a_2,a_3)=(90;70;50)$ булган өч завод һәм ихтыяҗлары $(b_1,b_2,b_3,b_4)=(80;60;40;30)$ булган дүрт кулланучы бар. Әгәр i-нче заводтан j-нчы кулланучыга бер берәмлек продукция илтүнең

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

бәясе билгеле булса, йөкне оптималь ташу планын төзергә.

Бирелгән саннарны куйгач, (2.29)-(2.32) түбәндәгечә языла

$$f(\bar{x}) = 2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+2x_{21}+3x_{22}+3x_{23}+$$

$$x_{24}+3x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+x_{34}\longrightarrow min,$$

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 70, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 50, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 80, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 60, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 40, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &= 30, \\ x_{ij}\geq 0, \quad i=\overline{1,3} \quad &, \quad j=\overline{1,4}. \end{aligned}$$

1. Төньяк - көнбатыш почмагы ысулын кулланып, беренче транспорт планын төзик. Иң элек өске сулъяк шакмакны мөмкин булганча

күп итеп тутырабыз. Әлеге мәсьәлә өчен $x_{11} = 80$ һәм беренче куллануычының ихтияжы тулысынча канәгатьләндерелә. Беренче заводта тагын 10 берәмлек продукция калды, димәк, $x_{12} = 10$.

Хәзер икенче юлга күчәбез һәм (2;2) шакмагын тутырабыз. Икенче куллануычыга тагын 50 берәмлек продукция кирәк: $x_{22} = 50$. Ул вакытта икенче заводта 20 берәмлек йөк кала. Анысын өченче куллануычыга язабыз: $x_{23} = 20$. Өченче кулланачыга тагын 20 берәмлек продукция кирәк: $x_{33} = 20$. Өченче заводтагы калган продукцияне дүртенче куллануычыга җибәрәбез: $x_{34} = 30$ (2.3 табл.).

Беренче план өчен максат функциясе $f_1 = 80 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 450$ була.

2.3 табл.

	1-нче объект	2-нче объект	3-нче объект	4-нче объект	
1-нче завод	80 −	+ 10			90
2-нче завод	+	− 50	20		70
3-нче завод			20	30	50
	80	60	40	30	

Потенциаллар өчен (2.33)-нче тигезләмәләр системасын төзибез

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 2,\\
u_1 + v_2 &= 1,\\
u_2 + v_2 &= 3,\\
u_2 + v_3 &= 3,\\
u_3 + v_3 &= 2,\\
u_3 + v_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

Ирекле билгесезгә нуль кыйммәте биреп (мәсәлән, $u_1 = 0$), системаның бер чишелешен табабыз: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, $v_3 = 1$, $v_4 = 0$.

Буш шакмаклар өчен (2.34) шартын тикшерәбез

$$
\begin{array}{lcl}
u_1 + v_3 \le 3 & \Longrightarrow & 1 \le 3, \\
u_1 + v_4 \le 2 & \Longrightarrow & 0 \le 2, \\
u_2 + v_1 \le 2 & \Longrightarrow & 4 \le 2, \\
u_2 + v_4 \le 1 & \Longrightarrow & 2 \le 1, \\
u_3 + v_1 \le 3 & \Longrightarrow & 3 \le 3, \\
u_3 + v_2 \le 3 & \Longrightarrow & 2 \le 3.
\end{array}
$$

Биредә ике тигезсезлек үтәлми, димәк, план оптималь түгел. Өченче тигезсезлек 2 берәмлеккә, ә дүртенчесе 1 берәмлеккә генә үтәлми. Шуңа күрә (2;1) шакмагын да планга кертергә кирәк.

2.4 табл.

	1-нче объект	2-нче объект	3-нче объект	4-нче объект	
1-нче завод	30	60			90
2-нче завод	50		20 −	+	70
3-нче завод			20 +	− 30	50
	80	60	40	30	

2. Бер түбәсе (2;1) шакмагында яткан цикл төзибез (2.3 табл.) һәм "−" тамгалы шакмаклардагы саннарның кечерәген билгелибез: $\rho = min(x_{11}, x_{22}) = 50$. Табылган санны x_{21} һәм x_{12}-гә кушып, x_{11} һәм x_{22}-дән аны алып яңа ташу планын төзибез (2.4 табл.). Икенче план өчен $f_2 = 350$.

Тутырылган шакмаклар өчен система төзибез

$$
\begin{array}{lcl}
u_1 + v_1 & = & 2, \\
u_1 + v_2 & = & 1, \\
u_2 + v_1 & = & 2, \\
u_2 + v_3 & = & 3, \\
u_3 + v_3 & = & 2, \\
u_3 + v_4 & = & 1
\end{array}
$$

һәм аның бер чишелешен табабыз: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = -1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$.

Буш шакмаклар өчен оптималлек шартын тикшерәбез

$$\begin{aligned}
u_1 + v_3 &\le 3 & &\Longrightarrow & 3 &\le 3,\\
u_1 + v_4 &\le 2 & &\Longrightarrow & 2 &\le 2,\\
u_2 + v_2 &\le 3 & &\Longrightarrow & 1 &\le 3,\\
u_2 + v_4 &\le 1 & &\Longrightarrow & 2 &\le 1,\\
u_3 + v_1 &\le 3 & &\Longrightarrow & 1 &\le 3,\\
u_3 + v_2 &\le 3 & &\Longrightarrow & 0 &\le 3.
\end{aligned}$$

Дүртенче тигезсезлек ($u_2 + v_4 \le 1$) үтәлми. Димәк, план оптималь түгел һәм (2;4) шакмагын кертеп яңа план төзергә кирәк.

2.5 табл.

	1-нче объект	2-нче объект	3-нче объект	4-нче объект	
1-нче завод	30	60			90
2-нче завод	50			20	70
3-нче завод			40	10	50
	80	60	40	30	

3. Бер түбәсе (2;4)-тә яткан цикл төзибез (2.4 табл.) һәм $\rho = min(x_{23}, x_{34}) = 20$ икәнен билгелибез. Циклга кергән шакмакларның саннарын 20-гә үзгәртеп, яңа план алабыз (2.5 табл.). Бу план өчен $f_3 = 2 \cdot 30 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 330$.

Тутырылган шакмаклар өчен система төзибез

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 2,\\
u_1 + v_2 &= 1,\\
u_2 + v_1 &= 2,\\
u_2 + v_4 &= 1,\\
u_3 + v_3 &= 2,\\
u_3 + v_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Аның бер чишелешен табып ($u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ v_1 = 2,\ v_2 = 1,\ v_3 = 2,\ v_4 = 1$) (2.34) шартына кулбыз

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 \le 3 &\quad\Longrightarrow\quad 2 \le 3, \\ u_1 + v_4 \le 2 &\quad\Longrightarrow\quad 1 \le 2, \\ u_2 + v_2 \le 3 &\quad\Longrightarrow\quad 1 \le 3, \\ u_2 + v_3 \le 3 &\quad\Longrightarrow\quad 2 \le 3, \\ u_3 + v_1 \le 3 &\quad\Longrightarrow\quad 2 \le 3, \\ u_3 + v_2 \le 3 &\quad\Longrightarrow\quad 1 \le 3. \end{aligned}$$

Барлык тигезләмәләр дә үтәләләр. Димәк, $x_{11} = 30$, $x_{12} = 60$, $x_{21} = 50$, $x_{24} = 20$, $x_{33} = 40$, $x_{34} = 10$ чишелеше оптималь ташу планы һәм $min\ f = f_3 = 330$ була.

Шулай итеп, беренче заводтан икенче кулланучыга 60, икенче заводтан беренче кулланучыга 50 һәм дүртенче кулланучыга 20, өченче заводтан өченче кулланучыга 40 һәм дүртенче кулланучыга 10 берәмлек продукция җибәрергә кирәк.

3. НӘСЫЗЫКЧА ПРОГРАММАЛАУ МӘСЬӘЛӘЛӘРЕ

Шартсыз оптимәлләү мәсьәләләре

Нәсызыкча программалауда шартсыз мәсьәләләр һәм аларны чишү методлары бик әһәмиятле урын алып тора. Чөнки ул методларның куллану өлкәсе шартсыз очрак белән генә чикләнми. Шартлы мәсьәләләрне чишә торган методларның шактый зур төркеме аларны шартсыз мәсьәләләр чишүгә кайтарып калдыра.

Әйтик, бирелгән максат функциясенең минимумын табарга кирәк булсын ди, ягъни

$$f(\bar{x}) \longrightarrow min. \qquad (3.1)$$

Бу мәсьәләдә функциянең максимумын эзләү аерым өйрәнелми. Чөнки $f(\bar{x})$ урынына $-f(\bar{x})$ алсак ул минимумны эзләүгә кайтып кала.

Әйтик, оптимальлек критерие бербилгесезле функция аша бирелсен ди. Андый мәсьәләне чишү методлары ике төркемгә – максат функциясенең чыгарылмасын куллана һәм кулланмый торган методларга бүленәләр.

Функциянең чыгарылмасы кулланылмый торган методларда иң әлек бер экстремаль нокта кергән интервал билгеләнә. Шуннан соң интервалны кечерәйтә барып экстремаль ноктаның якынча кыйммәте эзләнә. Интервалны кечерәйтү өчен ике алгоритм – ***кисемтәне урталай бүлү*** һәм ***алтын кисем*** методларын карап үтик.

Кисемтәне урталай бүлү методы

Функциянең бер экстремумы $[a, b]$ интервалында ята ди. Бу методта интервалның $x_m = (a + b)/2$ урта ноктасы табыла һәм аңа карата симметрияле урнашкан $x_1 = x_m - \epsilon/2$, $x_2 = x_m + \epsilon/2$ нокталары алына. Әгәр $f(x_2) > f(x_1)$ булса, функциянең минимумы x_m ноктасыннан сулдарак ята. Димәк, уң ярымкисемтәдә экстремум юк, сул ярымкисемтәне генә тикшерергә кирәк. Киресенчә булса, уң ярымкисемтәне тикшерәбез. Шуннан соң әлеге ярымкисемтәнең уртасы табыла һәм шундый ук исәпләүләр яңадан башкарыла. Минимумны эзләү калган кисемтәнең зурлыгы ϵ төгәллегеннән кечерәйгәч туктатыла.

Алтын кисем методы

Әйтик, A һәм B нокталары белән бирелгән кисемтәне C ноктасы ике кисәккә бүлсен ($AC > CB$). Әгәр кечерәк кисәкнең зурысына чагыштырмасы зур кисәкнең кисемтә озынлыгына чагыштырмасына тигез булса, ягъни

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

кисемтәгә ***алтын кисем*** үткәрелгән диләр. Чагыштыру коэффициентын $\tau = AC/AB$ дип тамгалып, $CB = AB - AC$ икәнен исәпкә алсак, бу бәйлелек

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0$$

квадрат тигезләмәсенә китерелә. Аның чишелеше

$$\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

итеп языла. Чагылдыру коэффициентының билгеләмәсе буенча $\tau > 0$ икәнен исәпкә алсак,

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

икәнен табабыз. Димәк, алтын кисем кисемтәне 0,618 : 0,382 чагыштырмасында бүлә. Бу саннар алтын кисем ысулында кулланыла.

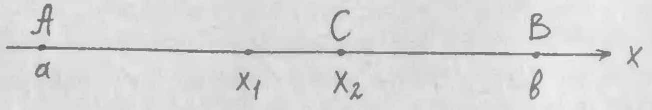
A һәм B нокталарының координатларын a, b итеп билгеләсәк, алтын кисем методында бирелгән интервал эчендә түбәндәге ике нокта алына (3.1 рәс.)

$$x_1 = a + \tau^2(b - a) = a + 0,382(b - a), \tag{3.2}$$

$$x_2 = a + \tau(b - a) = a + 0,618(b - a). \tag{3.3}$$

Әгәр $f(x_1) < f(x_2)$ булса, $[a, x_2]$ кисемтәсе гено карала. Яңа итерация өчен (3.2) ярдәмендә x_1 исәпләнә, ә x_2 итеп алдагы итерациянең x_1 ноктасы алына.

Әгәр $f(x_1) \geq f(x_2)$ булса $[x_1, b]$ кисемтәсе карала. Яңа итерация өчен (3.3) ярдәмендә x_2 исәпләнә, ә x_1 итеп алдагы итерациянең x_2 ноктасы алына.



3.1 рәс.

Исәпләүләр эзлекле бүлү нәтиҗәсендә калган кисемтәнең зурлыгы бирелгән төгәллектән кечерәйгәч туктатыла.

3.1-нче мисал. $60 \geq x \geq 150$ интервалында $f(x) = (100 - x)^2$ функциясенең минимумын табарга.

Алтын кисем методын кулланабыз.

1-нче итерация. [60; 150] интервалында (3.2)-(3.3) формулалары ярдәмендә ике нокта билгелибез

$$x_1 = 60 + 0.382(150 - 60) = 94,38;$$

$$x_2 = 60 + 0,618(150 - 60) = 115,62.$$

Әлеге нокталарда $f(94,38) = 31,584$; $f(115,62) = 243,984$. Биредә $f(x_1) < f(x_2)$, димәк, [60; 115,62] кисемтәсен тикшерәбез.

2-нче итерация. [60; 115,62] кисемтәсендә $x_2 = 94,38$ итеп алабыз, ә x_1-не (3.2) ярдәмендә табабыз

$$x_1 = 60 + 0,382(115,62 - 60) = 81,247.$$

Бу ноктада функциянең кыйммәтен исәплибез $f(81,247) = 351,675$. $f(81,247) > f(94,38)$ булганга, [81,247; 115,62] кисемтәсен сайлыйбыз.

3-нче итерация. Әлеге кисемтәдә $x_1 = 94,38$, ә x_2-не (3.3) ярдәмендә табабыз

$$x_2 = 81,247 + 0,618(115,62 - 81,247) = 102,49.$$

$f(94,38) = 31,584 > f(102,49) = 6,2$. Димәк, [94,38; 102,49] кисемтәсен сайлыйбыз.

Исәпләүләр кисемтәнең зурлыгы ε төгәллегеннән кечерәйгәч туктатыла.

Әгәр максат функциясе дифференциаллана торган булса, аның чыгарылмасын куллану мәслихәт. Оптимум булуның зарури шарты $\varphi(x) = f'(x) = 0$ итеп языла. Димәк, экстремаль нокталарны табу өчен итерация методлары ярдәмендә $\varphi(x) = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк. Монда кисемтәне урталай бүлү, Ньютон (орынма), гади итерация методларын кулланырга була. Мәсәлән, Ньютон методында

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

формуласы буенча эзлекле исәпләүләр алып барыла.

3.2-нче мисал. $f(x) = 2x^2 + 16/x$ функциясе бирелгән. Башлангыч ноктаны $x_1 = 1$ дип алып, аның минимумын табарга.

Функциянең беренче һәм икенче чыгарылмаларын табабыз

$$f'(x) = 4x - \frac{16}{x^2}; \quad f''(x) = 4 + \frac{32}{x^3}.$$

Ул вакытта

$$x_2 = 1 - \frac{f'(1)}{f''(1)} = 1 - \frac{-12}{36} = 1,33$$

$$x_3 = 1,33 - \frac{f'(1,33)}{f''(1,33)} = 1,33 - \frac{-3,73}{17,6} = 1,54$$

була. Шундый исәпләүләр $|f'(x_k)| < \varepsilon$ яисә $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ шарты үтәлгәнче башкарылалар.

Күпаргументлы функция

Оптимальләү критерие күпаргументлы функция булсын ди. Мондый мәсьәләне чишкәндә максат функциясенең чыгарылмасын кулланмый торган методлар *турыдан эзләү алгоритмнары* дип аталалар. Шуларның берничәсен карап үтик.

Челтәр методы

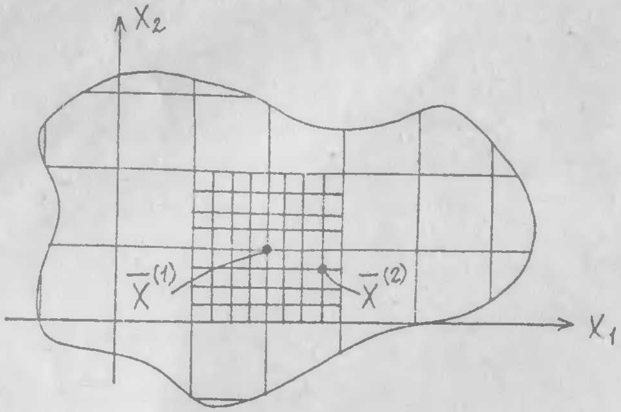
Идарә итү параметрларының үзгәрү өлкәсендә координатлар челтәре билгеләнә (3.2 рәс.). Һәрбер төен өчен максат функциясенең кыйммәтен исәпләп оптималь (max яисә min) $\bar{x}^{(1)}$ ноктасын табалар. Төгәллекне арттыру өчен, табылган нокта тирәсендәге кечкенә өлкәдә (гомуми очракта ул – үзәгендә $\bar{x}^{(1)}$ ноктасы яткан n-үлчәнешле гиперпараллелепипед була) вак координатлар челтәре билгеләнә. Төен нокталарын үзара чагыштырып, оптимумга якынрак $\bar{x}^{(2)}$ ноктасын табалар.

Шундый исәпләүләрне бирелгән төгәллек үтәлгәнче дәвам итәләр. Итерация процессы

$$|f(\bar{x}^{(k+1)}) - f(\bar{x}^{(k)})| < \varepsilon,$$

$$|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}| < \varepsilon \qquad (3.1)$$

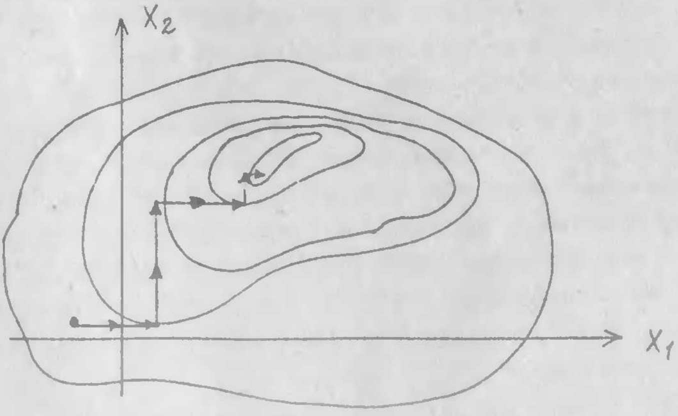
шартлары үтәлгәндә туктатыла.



3.2 рәс.

Координатлар буенча төшү методы

Бу методта идарә итү параметрларын чират белән генә үзгәртеп, (3.1) мәсьәләсен берүзгәрешле мәсьәләләр эзлеклеген чишүгә кайтарып калдыралар.



3.3 рәс.

Беренче x_1 билгесезеннән кала, бөтен параметрларга башлангыч кыйммәтләр бирелә һәм бирүлчәнешле $f(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \longrightarrow min$ мәсьәләсе чишелә. Табылган кыйммәт $x_1^{(1)}$ булсын. Хәзер x_2 ирекле калдырыла һәм кабат бирүлчәнешле $f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \longrightarrow min$ мәсьәләсе чишелә. Бөтен параметрларны яңартып чыгуны $M_0(\bar{x}^{(0)})$ ноктасыннан $M_1(\bar{x}^{(1)})$ ноктасына күчү дип атыйк. Төгәллек шарты үтәлгәнче, шул рәвештә ноктадан ноктага күчәбез (3.3 рәс.)

$$f(M_0) \geq f(M_1) \geq f(M_2) \geq \ldots$$

Сынап карау методы

Бу методта башлангыч ноктаны сайлыйлар һәм чиратлап һәрбер параметрны үзгәртеп карыйлар

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)},$$

(биредә i – билгесезнең номеры, k – итерация номеры). Һәр очракта максат функциясе исәпләнә. Ул иң тиз кечерәйгән юнәлештә чын адым ясала. Яңа ноктада кабат сынау үткәрелә. Исәпләүләр (3.4) шарты үтәлгәнче башкарыла.

Очраклы эзләү методлары

Объектларны ЭВМда имитацияләп модельләгәндә очраклы эзләү методларын кулланырга мөмкин. Алар очраклы сан генераторын куллануга нигезләнәләр. Ике ысулны – *сукырдай эзләү* һәм *очраклы юнәлештә эзләү* ысулын кыскача гына карап китик.

Сукырдай эзләү методында чишелеш өлкәсендә очраклы рәвештә бер нокта алына һәм шул ноктада максат функциясенең кыйммәте исәпләнә. Аннан соң икенче очраклы ноктада максат функциясенең кыйммәте исәпләнә. Аларны чагыштырып карап кечерәк кыйммәтлесен һәм шул ноктаның координатларын хәтердә калдыралар. Өченче нокта алып, хәтерләгәне белән чагыштыралар. Әгәр шундый исәпләү-

ләрне җитәрлек калдәр башкарып, кечерәк кыйммәтле ноктаны гына хәтерләп кылсак, оптимумны табарга була.

Очраклы юнәлеш методы түбәндәге алгоритмга нигезләнә:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + h\bar{\alpha}^{(k)}.$$

Монда h – параметр (адым), $\bar{\alpha}$ – очраклы вектор (юнәлеш).

Яңа ноктада максат функциясенең кыйммәте исәпләнә һәм $\bar{x}^{(k)}$ ноктасындагы кыйммәт белән чагыштырыла. Әгәр минимум эзләгәндә $f(\bar{x}^{(k+1)}) < f(\bar{x}^{(k)})$ булса, адым уңышлы санала. Адым уңышлы булса, бу нокта хәтердә калдырыла, ә $\bar{x}^{(k+1)}$ ноктасыннан очраклы юнәлештә яңа адым ясала. Әгәр адым уңышсыз булса $\bar{x}^{(k)}$ ноктасында очраклы яңа юнәлеш сайлана.

Градиентлы методлар

Хәзер шартсыз оптимальләү мәсьәләләре өчен градиент методларын карап китик. Максат функциясенең аерым чыгарылмаларын куллану – аның үсү яисә кечерәю юнәлешен билгеләп, оптимумны иң кыска юл белән табарга мөмкинлек бирә. Функциянең аерым чыгарылмаларыннан төзелгән

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{3.5}$$

векторы функциянең *градиенты* дип атала. Аның юнәлеше функциянең иң тиз үсү юнәлеше белән туры килә. Шуңа күрә максимумны градиент юнәлешендә, минимумны градиентка каршы юнәлештә эзләү мәслихәт. Түбәндә ике градиент методы карала.

Градиент методы

Градиент методында иң әлек башлангыч $\bar{x}^{(0)}$ ноктасы билгеләнә. Шул ноктада исәпләнгән градиент юнәлешен кулланып, бер адым ясала. Яңа $\bar{x}^{(1)}$ ноктасында кабат градиент табыла. Исәпләүләрне түбәндәге формула белән күрсәтергә мөмкин

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \pm h_i^{(k)} \frac{\partial f(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_i}; \quad i = \overline{1,n}; \; k = 1,2, \; \dots \; . \qquad (3.6)$$

Максимумны эзлэгэндэ уңай, минимумны эзлэгэндэ тискэре тамга алырга кирэк. Адым зурлыгы даими дэ, үзгэреп торырга да мөмкин.

3.3-нче мисал. Градиент методы белэн $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2$ функциясенең минимумын табарга. Башлангыч ноктаның координаталары $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 1$ һэм итерация адымы $h_1 = h_2 = 0,1$ бирелгэн.

Функциянең аерым чыгарылмаларын табабыз

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + x_1.$$

Градиентка каршы юнэлештэ бер адым ясыйбыз:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{(0)} = 1 - 0,1 \cdot 3 = 0,7;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{(0)} = 1 - 0,1 \cdot 5 = 0,5.$$

Башлангыч ноктада функция $f(\bar{x}^{(0)}) = 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 = 4$ иде. Яңа ноктада $f(\bar{x}^{(1)}) = 0,7^2 + 2 \cdot 0,5^2 + 0,7 \cdot 0,5 = 1,34$. Функциянең кыйммэте кечерэя: $f(\bar{x}^{(1)}) < f(\bar{x}^{(0)})$, димэк, уңышлы адым ясалган.

Икенче адымны ясыйбыз:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 0,7 - 0,1 \cdot 1,9 = 0,51;$$

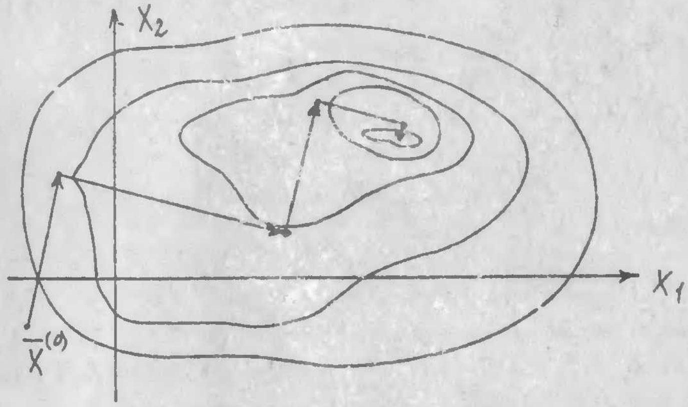
$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{(1)} = 0,5 - 0,1 \cdot 2,7 = 0,23.$$

Яңа ноктада $f(\bar{x}^{(2)}) = 0,51^2 + 2 \cdot 0,23^2 + 0,51 \cdot 0,23 = 0,49$. Функциянең кыйммэте кечерэя: $f(\bar{x}^{(2)}) < f(\bar{x}^{(1)})$, димэк, бу адым да уңышлы. Эгэр адым уңышсыз булса параметрларның үзгэрү адымын кечерэйтэлэр.

Шундый итерацияле исэплэү процессы (3.4) шарты үтэлгэнче башкарыла.

Иң тиз төшү методы

Градиент методында градиентның юнәлеше һәр адым саен яңабаштан табыла. Шуңа күрә ул метод зур күләмле исәпләүләр башкаруны таләп итә. Иң тиз төшү методында градиентны тапкач та бу юнәлеш буенча минимумга житкәнче хәрәкәтләнәләр. Шушы юнәлеш буенча минимум табылгач, яңадан градиент исәпләнә һәм яңа юнәлештә бер үлчәмешле мәсьәлә чишелә. Яңа юнәлеш алдагысына перпендикуляр була (3.4 рәс.).



3.4 рәс.

Шулай итеп, бу метод координатлар буенча төшү методына охшаган. Тик исәпләүләр (төшү) координатлар буенча түгел, ә градиент буенча башкарыла.

Шартлы оптимальләү мәсьәләләре

Әгәр максат функциясеннән тыш тигезлек яисә тигезсезлек рәвешле шартлар бирелгән булса, мәсьәлә шартлы оптимальләү мәсьәләсе дип атала. Шартлар мәсьәләнең параметрлары арасында функциональ бәйләнешләр урнаштыра һәм аларның үзгәрү чикләрен билгеләп.

Әйтик, шартлы экстремум табу мәсьәләсе бирелгән булсын:

$$f(\bar{x}) \longrightarrow min(max), \tag{3.7}$$

$$h_k(\bar{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K \ , \tag{3.8}$$

$$g_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J \ . \tag{3.9}$$

Бу мәсьәлә өчен оптимум булуның зарури шартын $f'(\bar{x}) = 0$ рәвешендә язып булмый. Чөнки өлеге тигезләмә ярдәмендә билгеләнүче экстремум ноктасы (3.8)-(3.9) шартлары ярдәмендә бирелгән чишелешләр күплегенә кермәскә мөмкин. Шуңа күрә шартлы мәсьәләдә оптимумның зарурлык һәм җитәрлек шартлары башкача билгеләнәләр.

Лагранж тапкырлаучылары методы

Әйтик, шартлары тигезлек рәвешендә булган оптимальләү мәсьәләсе бирелгән ди

$$f(\bar{x}) \longrightarrow min(max), \tag{3.10}$$

$$h_k(\bar{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \ \ldots \ , K \ . \tag{3.11}$$

Әгәр (3.11) шартлары гади һәм аз санлы булсалар, аларны аерым билгесезләргә карата чишеп, мәсьәләне шартсыз итәргә була. Әгәр дә ул шартлар аерым-аерым чишелмәсәләр *лагранж тапкырлаучылары* методын куллану мәслихәт.

Бу методта шартлар максат функциясе составына кертелә һәм (3.10)-(3.11) мәсьәләсе түбәндәге шартсыз мәсьәләне чишүгә китерелә:

$$L(\bar{x}, \bar{v}) = f(\bar{x}) - \sum_{k=1}^{K} v_k h_k(\bar{x}) \longrightarrow min. \tag{3.12}$$

Биредә $L(\bar{x}, \bar{v})$ – лагранж функциясе, ә v_k – өлегә билгесез лагранж тапкырлаучылары. Мондый мәсьәләнең N данә x_i һәм K данә v_k билгесезләре бар. Димәк, аларны табу өчен $N + K$ тигезләмә төзергә кирәк. Оптимум булуның зарури шарты буенча $L(\bar{x}, \bar{v})$ функциясенең аерым чыгарылмалары нульгә тигез булырга тиеш:

$$\frac{\partial L(\bar{x},\bar{v})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{K} v_k \frac{\partial h_k(\bar{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}; \tag{3.13}$$

$$h_k(\bar{x}) = 0, \quad k = \overline{1,K}. \tag{3.14}$$

Монлагы v_k-ларны параметр итеп карап, (3.13) системасын аерым чишәргә, ә соңыннан v_k-ларга (3.14) тигезләмәләре үтәлердәй кыйммәтләр бирергә кирәк . Әгәр алай итеп булмаса, $N + K$ тигезләмәдән торган (3.13)-(3.14) системасын $x_1, x_2, \ldots, x_n, v_1, v_2, \ldots, v_k$ билгесезләренә карата чишәләр. Табылган чишелеш экстремаль ноктаны бирә. Шуннан соң, икенче дәрәҗә чыгарылмаларны кулланып, табылган ноктаның максимум яки минимум икәнен тикшерергә кирәк.

3.4-нче мисал. Күләме бирелгән, ә өслек мәйданы минималь булган цилиндрсыман савыт проектларга кирәк.

Савытның биеклеген H, шигез диаметрын d дип билгеләсәк, аның өслек мәйданы

$$S = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d H,$$

ә күләме

$$V = \frac{\pi d^2}{4} H$$

формулалары ярдәмендә исәпләнә. Димәк, шартлы оптимумны табу мәсьәләсе түбәндәгечә куела:

$$f(H,d) = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d H \longrightarrow min,$$

$$h(H,d) = \frac{\pi d^2}{4} H - V = 0.$$

Лагранж функциясен төзибез

$$L(H,d,v) = \left(\frac{\pi d^2}{2} + \pi d H\right) + v\left(\frac{\pi d^2}{4} H - V\right).$$

Ул вакытта оптимум булуның (3.13)-(3.14) зарури шартлары болай языла:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \pi d + \pi H + v\frac{\pi d H}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \pi d + v\frac{\pi d^2}{4} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = h(H,d,v) = \frac{\pi d^2}{4}H - V = 0.$$

Әлеге тигезләмәләр системасын чишеп, цилиндрга минималь өслек тәэмин итә торган параметрларны табабыз

$$H = d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Кун һәм Таккер исемле галимнәр лагранж тапкырлаучылары методын шартлары тигезсезлек рәвешендә булган мәсьәлә өчен җайлаганнар. Әйтик, (3.7)-(3.9) рәвешле мәсьәлә бирелгән булсын. Әлеге шартлы оптимальләү мәсьәләсенең чишелеше түбәндеге тигезләмә һәм тигезсезлекләрдән торган системаны чишеп табыла

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{K} v_k \frac{\partial h_k(\bar{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{J} u_j \frac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}; \\ &h_k(\bar{x}) = 0, \quad k = \overline{1,K}; \\ &g_j(\bar{x}) \geq 0, \quad j = \overline{1,J}; \\ &u_j g_j(\bar{x}) = 0, \quad j = \overline{1,J}; \\ &u_j \geq 0, \quad j = \overline{1,J}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15) системасы Кун - Таккер шартлары диеп атала. Биредә v_k коэффициентларының тамгасына бернинди дә таләпләр куелмый, ә u_j тапкырлаучылары уңай булырга тиешләр.

Штраф функцияләре методы

Шартлы мәсьәләләрне шартсыз рәвешкә китереп чишү идеясе штраф функцияләре методында үсеш ала. Методның үзенчәлеге асылда тигезсезлек шартларын исәпкә алганда чагыла. Чөнки тигезләмәле шартлар төрле методларда берчама исәпкә алыналар.

Әйтик, оптимальләү мәсьәләсе түбәндәгечә бирелгән ди:

$$f(\bar{x}) \longrightarrow min, \tag{3.16}$$

$$g_j(\bar{x}) \geq 0, \quad j = \overline{1,J}. \tag{3.17}$$

Бу методта куелган шартлар *штраф функцияләре* рәвешендә оптимальлек критериена кертелә. Шунын нәтиҗәсендә шартлы мәсьәлә шартсыз мәсьәләләр эзлеклеге белән алмаштырыла

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{J} \Psi(g_j(\bar{x})) \longrightarrow min. \tag{3.18}$$

Биредә $\Psi(g_j(\bar{x}))$ - штраф функциясе дип атала. Мәсьәләнең шартлары үтәлгәндә штраф функциясе нульгә омтылырга, үтәлмәгәндә бик зур кыйммәт алырга тиеш. Шулай булганда, әгәр исәпләүләр барышында шартларнын үтәлмәү чигенә якынайсак, $\Psi(g_j(\bar{x}))$ функциясе һәм $grad\ F(\bar{x})$ чиксез зур булып үсеп китә. Минимум градиентка каршы юнәлештә ятканга күрә, нәтиҗәдә, чишелеш шартлар белән билгеләнгән өлкәдә эзләнелә.

Әгәр штраф функциясен кире пропорциональ функция яисә логарифмик функция рәвешендә төзесәк, (3.18) түбәндәгечә язылыр иде

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}) + r_k \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{g_j(\bar{x})} \longrightarrow min, \quad k = 0, 1, 2, \ \ldots\ , \tag{3.19}$$

яисә

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}) - r_k \sum_{j=1}^{J} \ln g_j(\bar{x}) \longrightarrow min, \quad k = 0, 1, 2, \ \ldots . \tag{3.20}$$

Биредә r_k штраф параметрлары кими бара торган уңай саннар эзлеклелеге булырга тиеш. Моның өчен, мәсьәлән, $r_k = r_0/q^{k-1}$, $q > 0$ яисә $r_k = r_{k-1}/2$ формулаларын кулланырга була. Монда $50 < r_0 < 100$ булырга мөмкин.

Исәпләүләр түбәндәге тәртиптә башкарыла. Шартлар белән билгеләнгән өлкәдән $\bar{x}^{(0)}$ башлангыч чишелеше алына һәм r_0 параметры белән (3.19) яисә (3.20) шартсыз мәсьәләсе чишелә. Табылган $\bar{x}^{(1)}$ чишелеше өчен әлегә $minF(\bar{x}^{(1)}) \neq minf(\bar{x}^{(1)})$ була. Икенче

адымда $\bar{x}^{(1)}$ башлангыч чишелеше һәм r_1 параметры белән яңабаштан шартсыз мәсьәлә чишелә. Һәрбер табылган чишелешне чираттагы итерациядә башлангыч нокта итеп кулланып, исәпләүләрне $r_k \longrightarrow 0$ булганчы дәвам итсәк, (3.18)-нче шартсыз мәсьәләнең чишелеше шартлы (3.16)-(3.17) мәсьәләсе чишелешенә омтылачак

$$\lim_{r_k \to 0}[minF(\bar{x})] = minf(\bar{x}).$$

3.5-нче мисал. Шарты тигезсезлек рәвешендә бирелгән

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \longrightarrow min,$$

$$g(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

оптимальләү мәсьәләсен чишәргә.

Логарифм рәвешендәге штраф функциясе кулланcак, (3.20) түбәндәгечә языла

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - r_k \ln(5 - x_1 - x_2) \longrightarrow min.$$

Оптимум булуның зарури шартын төзибез

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + \frac{r_k}{5 - x_1 - x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + \frac{r_k}{5 - x_1 - x_2} = 0.$$

Моннан $x_2 = x_1$ икәне ачыклана һәм x_1 өчен

$$2(x_1 - 4) + \frac{r_k}{5 - 2x_1} = 0$$

тигезләмәсе табыла. Бу тигезләмә квадрат тигезләмә рәвешенә китерелә

$$2x_1^2 - 13x_1 + 20 - \frac{r_k}{2} = 0.$$

Аның чишелеше

$$x_1 = \frac{13}{4} \pm \frac{\sqrt{9 + 4r_k}}{4}$$

итеп языла. Биредә $x_2 = x_1$ булганга күрә, $5 - x_1 - x_2 \geq 0$ шарты $x_1 \leq 2,5$ рәвешен ала. Димәк, квадрат тигезләмәнең бер тамыры гына

чишелешләр өлкәсенә керә. Шул тамыр өчен штраф параметрын нульгә омтылдырсак,

$$x_1 = \lim_{r_k \to +0} \left(\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{9 + 4r_k}}{4} \right) = 2,5$$

икәнен табабыз. Шулай итеп, максат функциясенең минимумы $(x_1, x_2) = (2,5; 2,5)$ ноктасында ята һәм $min\ f = f(2,5; 2,5) = 4,5$ була.

4. КҮПКРИТЕРИЙЛЫ МӘСЬӘЛӘЛӘР

Күпкритерийлы мәсьәләнең гомуми куелышын карыйк. Әйтик, $f_i \quad (i = \overline{1,m})$ максат функцияләренең минималь (максималь) кыйммәтләрен табарга кирәк ди:

$$f_1(\bar{x}) \longrightarrow min(max),\ f_2(\bar{x}) \longrightarrow min(max),\ \ldots\ ,f_m(\bar{x}) \longrightarrow min(max). \quad (4.1)$$

Биредә $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – үзгәрү яисә идарә итү параметрлары. Параметрларның үзгәрү интервалы

$$a_i \le x_i \le b_i, \quad i = \overline{1,n} \quad (4.2)$$

һәм функциональ шартлар

$$C_i \le \varphi(\bar{x}) \le D_i, \quad i = \overline{1,l} \quad (4.3)$$

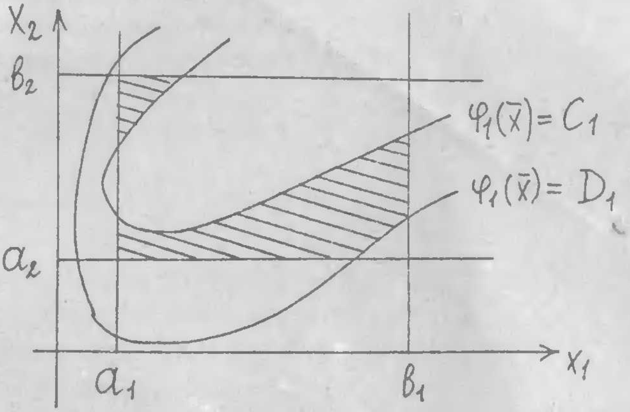
бирелгән булсын. Оптимальләү критерийларына да шартлар куелырга мөмкин

$$E_i \le f_i(\bar{x}) \le H_i, \quad i = \overline{1,m}. \quad (4.4)$$

Монда $a_i, b_i, C_i, D_i, E_i, H_i$ – бирелгән даимиләр.

(4.2) шартлары n-үлчәнешле фәзада гиперпараллелепипед билгеләү. Ә (4.3)-(4.4) шартлары шул параллелепипедта асткүплек бүлеп ала. Әйтергә кирәк, ул күплек үзара тоташмаган өлкәләрдән дә торырга мөмкин (4.1 рәс.). (4.2)-(4.4) шартлары белән билгеләнгән өлкә *рөхсәтле чишелешләр күплеге* яисә *альтернатив күплек* дип атала.

Күпкритерийлы (4.1)-(4.4) мәсьәләсенең бердәнбер чишелеше булмый. Хәтта, күп очракта, иң яхшы альтернативаны тәгъбирләү дә каршылыклар тудыра. Мәсьәләне чишү канәгатьләнерлек (компромисс) вариантлар эзләүгә кайтып кала.



4.1 рәс.

Чишү методларының өһәмиятле ике төрен карап үтик.

1. **Пареточа оптималь альтернатив күплекне төзү һәм аңардан** ***карар кабул итүче кеше*** **фикере буенча иң кулай оптимумны сайлау методы.**

Бу методта мәсьәләне чишә башлагач башка критерийларны "бозмыйча" гына һәрбер максат функциясен берәм-берәм "яхшырталар". Идарә итү параметрларын шулай үзгәртә торгач, мәсьәлә чик халәткә барып җитә – кайсы критерийны яхшырта башласаң да, башка берәрсе начарая башлый. Бу – *пареточа оптималь халәт* дип атала. Парето принцибы оптимальләү мәсьәләсен чишми, ә альтернатив күплекне кечерәйтергә мөмкинлек бирә. Карар кабул итүче кеше шул күплектән иң кулай вариантны сайлап ала.

2. **Априор процедура** куллану ягъни күпкритерийлы мәсьәләне килешү нигезендә беркритерийлыга китерү методы.

Априор методлар күпкритерийлы мәсьәләне беркритерийлыга китерү мөмкинлеге булганда кулланыла. Күпкритерийлы мәсьәләләрдә

һәрбер критерий объектның нииндидер локаль (җирле) сыйфатын билгели. Әгәр карар кабул итүче кеше фикеренчә иң әһәмиятле критерийны аерып алып булса, башкаларын (4.4) шартлары рәвешендә язып, мәсьәлә беркритерийлыга китерелә.

Кайвакыт әһәмиятле берничә критерийның сызыкча комбинациясен төзеп, башкаларын шарт итеп калдыралар. Ул вакытта мәсьәлә локаль критерийларның сызыкча комбинациясенә карата куела

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\bar{x}) \longrightarrow min, \tag{4.5}$$

$$c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

Биредәге c_i коэффициентлары канәгатьләнерлек вариантларны тикшерү нәтиҗәсендә билгеләнә. Әгәр төрле локаль критерийлар төрле үлчәнештә булсалар, аларны үлчәнешсез рәвешкә китерәләр.

4.1-нче мисал. Күләме максималь, бәясе минималь булган турыпочмаклы параллелепипед формасында бак проектларга кирәк. Бакның күләме $V = abH$, бәясе $C = \alpha S + \beta L$ итеп исәпләнә. Биредә a, b – бакның нигезе яклары; H – биеклеге; S – бак өслегенең мәйданы; α – материалның берәмлек мәйданы бәясе; L – әретеп ябыштырган җөй озынлыгы; β – бер берәмлек озынлыгында җөй салу бәясе.

Турыпочмаклы параллелепипедта өслек мәйданы $S = 2ab + 2(a+b)H$, кабыргаларының гомуми озынлыгы $L = 4(a + b + H)$ була. Димәк, бирелгән ике критерийлы мәсьәлә түбәндәгечә куела:

$$f_1(a, b, H) = abH \longrightarrow max,$$

$$f_2(a, b, H) = 2\alpha(ab + aH + bH) + 4\beta(a + b + H) \longrightarrow min, \tag{4.6}$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad H > 0.$$

Әлбәттә, бу мәсьәләнең бердәнбер чишелеше юк һәм аны бер критерийлыга китереп чишү уңай була. Шушы процедураның ике вариантын карап үтик.

Бакның бәясен үзебез билгеләп, иң зур күләмне эзләсәк, мәсьәлә

$$f(a,b,H) = abH \longrightarrow max,$$

$$2\alpha(ab + aH + bH) + 4\beta(a + b + H) = C, \tag{4.7}$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad H > 0.$$

итеп языла. Бирелә C – бакның алдан бирелгән бәясе. Әгәр, киресенчә, алдан бирелгән V күләмле бак өчен минималь бәя бирә торган үлчәмнәр эзләсәк, мәсьәлә түбәндәгечә язылыр иде:

$$f(a,b,H) = 2\alpha(ab + aH + bH) + 4\beta(a + b + H) \longrightarrow min,$$

$$abH = V, \tag{4.8}$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad H > 0.$$

Бу мәсьәләләрнең бер шарты тигезлек рәвешендә бирелгән. Аны берәр билгесезгә карата чишсәк, идарә итү параметрлары икәү генә кала. Мәсәлән, соңгы мәсьәләдә бакның биеклеген $H = V/(ab)$ итеп күрсәтсәк, (4.8) гадиләшә

$$f(a,b) = 2\alpha(ab + V/b + V/a) + 4\beta(a + b + V/(ab)) \longrightarrow min,$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Бу мәсьәләне штраф функцияләре методын кулланып чишәргә мөмкин.

Оптимальләү мәсьәләләрен чишү методлары буенча тулырак мәгълүматны түбәндәге китаплардан табарга мөмкин.

ӘДӘБИЯТ

1. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 183 с.

2. Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я. Методы оптимизации. – М.: Просвещение, 1978. – 175 с.

3. Справочник по математике для экономистов. Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.