211

Определение кинематических параметров молекул воздуха

Решаемые задачи

- Изучение физических положений, связывающих кинематические параметры с вязкостью воздуха;
- Освоение метода Пуазейля измерения вязкости газа;
- Измерение вязкости воздуха методом Пуазейля;
- Оценка средней длины свободного пробега, частоты столкновении и эффективного сечения молекул воздуха.

Введение

С точки зрения молекулярно-кинетической теории газ представляет собой совокупность отдельных микрочастиц (молекул, атомов, ионов). Для простоты можно считать их абсолютно твердыми шариками. Наблюдение броуновских частиц позволяет предположить, что молекулы находятся в непрерывном движении. Большая сжимаемость газов заставляет думать о том, что их молекулы находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Закономерно встает вопрос об оценке кинематических параметров этой картины. К ним относятся средняя длина свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle$ (расстояние, которое пролетает молекула между двумя столкновениями) и среднее эффективное сечение столкновения $\langle\sigma\rangle = \frac{\pi}{4}\langle D\rangle^2$ (где D — максимальное расстояние между центрами сталкивающихся молекул, при котором происходит изменение их скорости: эффективный диаметр молекулы). Среднее эффективное сечение столкновения является количественной мерой интенсивности столкновений. Чем чаще сталкиваются молекулы, тем больше сечение столкновения.

Очевидно, что сечению столкновения будет пропорциональна средняя частота столкновений $\langle\omega\rangle$. Если концентрация молекул равна n, а средняя скорость теплового движения молекул $\langle u\rangle$, то

$$\langle\omega\rangle = \sqrt{2} = \langle\sigma\rangle\langle n\rangle\langle u\rangle\ . \tag{1}$$

В этой формуле учтено, что средняя относительная скорость движения молекул в $\sqrt{2}$ больше средней скорости их движения $\langle u\rangle$.

Среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ можно получить, поделив средний путь, проходимый молекулой за единицу времени, на число столкновений $\langle z\rangle = 1/\langle\sigma\rangle$ за это же время. Так как путь, проходимый в единицу времени, численно равен скорости, то:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle u\rangle}{\langle\omega\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle\langle n\rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\langle D\rangle^2 n}\,. \tag{2}$$

Таким образом, простейшие соображения механики позволяют связать между собой микропараметры газа.

С другой стороны, на основании представлений молекулярно-кинетической теории газов, в случае справедливости распределения Максвелла по скоростям можно найти связь между динамической вязкостью η и этими параметрами:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \langle\lambda\rangle \langle u\rangle \,, \tag{3}$$

(ρ — плотность газа).

В состоянии равновесия, когда справедливо распределение Максвелла по скоростям

$$\langle u\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\,, \tag{4}$$

где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа.

Таким образом, выражение для средней длины свободного пробега через макропараметры:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{\rho\langle u\rangle} = \frac{3\eta}{\rho}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}\,. \tag{5}$$

Т.е., измерив температуру, коэффициент вязкости и, зная молярную массу воздуха, можно вычислить по формуле (5) длину свободного пробега, и далее по формуле (2) оценить среднее сечение столкновения.

Описание эксперимента

Идея эксперимента основана на использовании формулы Пуазейля для объемного расхода газа Q, ламинарно протекающего по цилиндрической трубе радиуса r и длины l под действием постоянного перепада давления Δp на концах трубы:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\Delta p\,. \tag{6}$$

Таким образом, для нахождения коэффициента вязкости воздуха необходимо измерить его объемный расход через трубку-капилляр известной длины и внутреннего радиуса и разницу давлений на концах капилляра:

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8l}\frac{\Delta p}{Q}\,. \tag{7}$$

Эксперимент выполняется на установке, схема которой показана на рисунке 1. Капилляр К соединен с

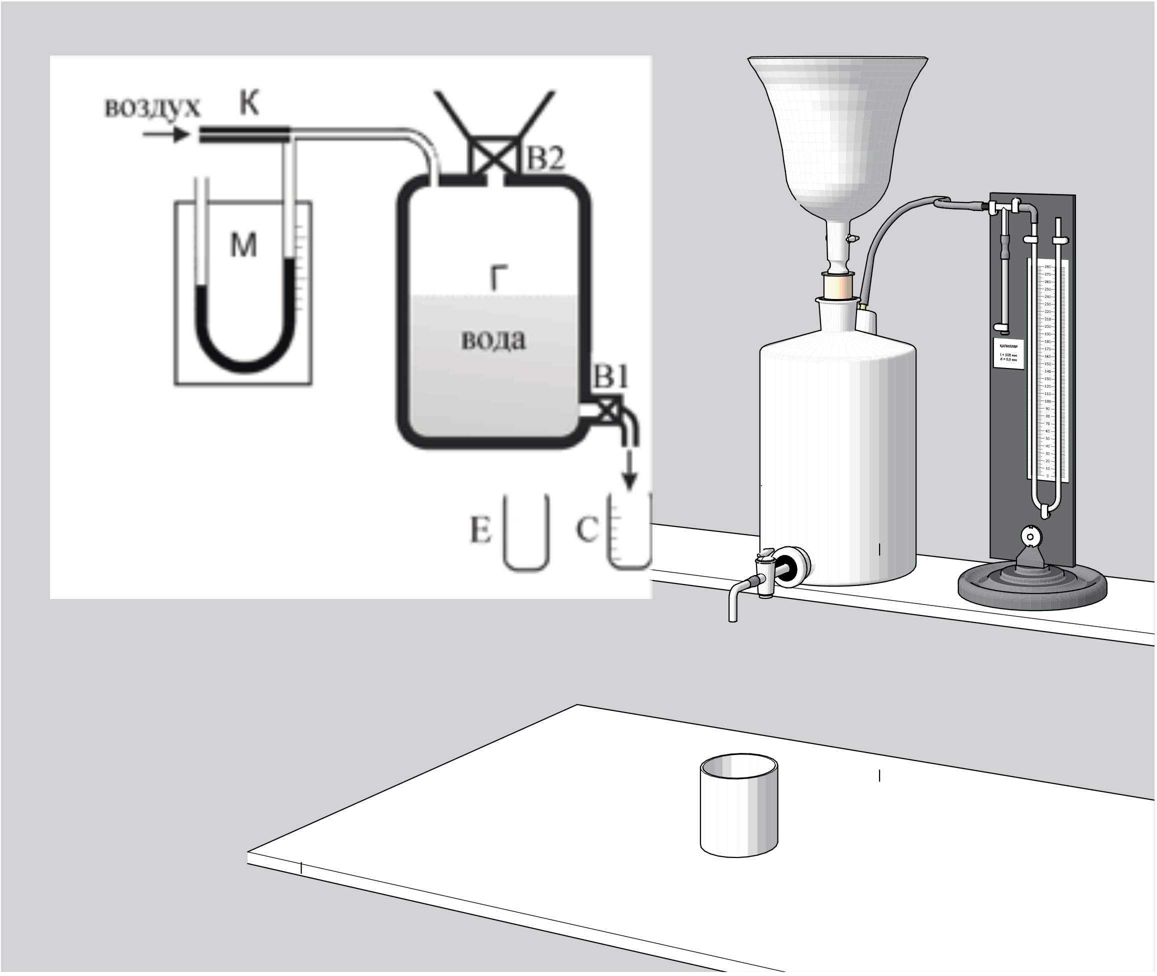

Рис. 1. Схема экспериментальной установки

наполненным водой сосудом Г и водяным манометром М трубкой. Воду выпускают через регулируемый вентиль В1, чтобы создать нужный перепад давления Δp на концах капилляра (вентиль В2 при этом должен быть закрыт). Создаваемое разряжение контролируют манометром М (чем больше разница высот Δh столбиков воды в манометре, тем больше $\Delta p = \rho_в g \Delta h$, где $\rho_t ext$в — плотность воды при температуре опыта, g — ускорение свободного падения). В результате воздух всасывается через капилляр в сосуд Г. Объем воды, вытекающей в единицу времени, измеряют мерным стаканом С и секундомером. Он равен объему воздуха, протекающего через капилляр за это время. Вентиль В2 с воронкой служит для возвращения воды из мерного стакана в сосуд Г перед очередным измерением.

Порядок выполнения работы

1. Подставить вспомогательную емкость Е под вентиль В1 и, аккуратно открыть его, создав максимально возможный перепад Δh в манометре. Подождать до тех пор, пока показания манометра перестанут заметно изменяться (течение стабилизируется) и измерить Δh_1. Не трогая вентиль, заменить емкость Е мерным стаканом С. Измерить время[1] t вытекания некоторой заранее определенной порции воды V, и соответствующую этому измерению конечную разность уровней в манометре Δh_2. Закрыть вентиль В1. Воду из стакана и вспомогательной емкости вылить в воронку над вентилем В2. Сливать воду в сосуд Г можно после заполнения воронки наполовину.
2. Вычислить среднее значение перепада давления на концах капилляра:
$$\Delta p = \rho_{\text{в}} g \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{2}.$$
3. Измерить температуру воды для определения ее плотности.
4. Вычислить объемный расход воздуха по формуле $Q = V/t$.
5. Проделать измерения и расчеты, указанные в пунктах 1–3, при 8–10 меньших значениях Δp, чтобы построить график зависимости $Q(\Delta \text{p})$. Откладывать значения Q вдоль оси ординат, а Δp — вдоль оси абсцисс.
6. Проанализировать полученную зависимость $Q(\Delta \text{p})$ на соответствие формуле Пуазейля (6). В области малых Δp зависимость должна быть линейной, причем $Q(0) = 0$. В противном случае измерения и расчеты нужно выполнить более аккуратно.
7. Используя экспериментальные данные и формулу (7), вычислить среднее значение вязкости воздуха. Длина капилляра l и его радиус r указаны на установке.

[1] Объем вытекшей воды V задается, исходя из необходимой точности измерений времени. Пусть, например, Вам необходимо проводить измерения с относительной погрешностью 10%. Т.к. время фиксируется ручным секундомером, проводить измерения точнее 0,3 с (время реакции человека) невозможно. Значит, заданная относительная погрешность может быть обеспечена при измерении промежутков времени не менее 3 с. Следовательно, необходимо заполнять стакан не менее 3 с.

8. Вычислить длину свободного пробега молекул воздуха по формуле (5).

9. Измерить атмосферное давление p барометром.

10. По формуле (2) вычислить среднее эффективное сечение столкновения, учитывая, что $\langle n \rangle = \dfrac{p}{kT}$.

11. Оценить диаметр молекулы и частоту столкновений молекул воздуха.

212

Измерение коэффициента Пуассона и изохорической теплоемкости воздуха

Решаемые задачи

- Знакомство с результатами расчета коэффициента Пуассона в рамках молекулярно-кинетической теории;
- Знакомство с теоретическими основами метода Клемана-Дезорма определения коэффициента Пуассона;
- Измерение коэффициента Пуассона;
- Оценка количества степеней свободы молекул воздуха;
- Измерение изохорической теплоемкости воздуха.

Введение

Коэффициентом Пуассона называется отношение изобарической и изохорической теплоемкостей

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \tag{1}$$

Этот коэффициент входит в уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Так как для идеальных газов справедливо уравнение Майера

$$C_p - C_V = R, \tag{3}$$

то измерение γ позволяет определить изохорическую теплоемкость:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{4}$$

Измерив γ и пользуясь выводами молекулярно-кинетической теории, можно получить информацию о количестве i возбужденных при данной температуре степеней свободы молекулы, поскольку:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \tag{5}$$

и сделать предположение о количестве атомов в молекуле воздуха.

Описание эксперимента

В дальнейших рассуждениях будем исходить из знания о том, что воздух при комнатной температуре проявляет свойства идеального газа.

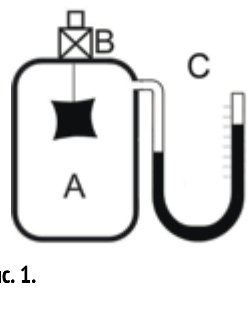

Рис. 1.

Прибор Клемана – Дезорма показан на рисунке . Стеклянный баллон A с мешочком силикагеля для осушения воздуха внутри может сообщаться с атмосферой при помощи крана B. Манометр C служит для регистрации разности давлений в баллоне и атмосфере. Изначально при открытом кране B в сосуде A устанавливается атмосферное давление p_0 и комнатная температура T_0. Если в сосуд A быстро закачать небольшое количество воздуха и закрыть кран, то давление и температура в сосуде повысятся. Благодаря теплопроводности стенок температура внутри сосуда через некоторое время сравняется с температурой окружающей среды, давление несколько понизится и станет равным:

$$p_1 = p_0 + h_1\,, \tag{6}$$

где h_1 — показание манометра. Назовем это состояние газа с $T_1 = T_0$ и p_1 первым. После быстрого открытия крана воздух в сосуде А адиабатически расширится, давление станет равно атмосферному, а температура понизится до T_2. Это будет второе состояние с параметрами T_2 и $p_2 = p_0$. Если тут же закрыть кран, то температура внутри сосуда начнет расти, стремясь достичь T_0, и давление достигнет нового равновесного значения p_3. Таким образом газ перейдет в третье состояние с параметрами $T_3 = T_0$ и

$$p_3 = p_0 + h_3\,, \tag{7}$$

где h_3 — показание манометра в третьем состоянии газа.

Законы идеального газа сформулированы лишь для неизменного его количества, поэтому дальнейшие рассуждения будем проводить для некоторого мысленно выделенного объема газа, никогда не выходящего из баллона.

Для этого объема с учетом того, что переход от первого состояния ко второму адиабатический, а от второго к третьему — изохорический, справедливы уравнения:

$$\frac{p_1^{\gamma-1}}{T_1^{\gamma}} = \frac{p_0^{\gamma-1}}{T_2^{\gamma}} \tag{8}$$

и

$$\frac{p_3}{T_1} = \frac{p_0}{T_2}\,. \tag{9}$$

Из уравнений (6) и (8) получим:

$$\left(\frac{p_0 + h_1}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma} \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2}\right)^{\gamma} = \left(1 + \frac{h_1}{p_0}\right)^{\gamma-1}.$$

Если $\dfrac{h_1}{p_0} \ll 1$ и $\dfrac{T_1 - T_2}{T_2} \ll 1$, то можно разложить оба двучлена в ряд и ограничиться членами первого порядка малости:

$$1+\gamma\frac{T_1-T_2}{T_2}=1+(\gamma-1)\frac{h_1}{p_0},$$

откуда

$$p_0\frac{T_1-T_2}{T_2}=\frac{\gamma-1}{\gamma}h_1.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, есть не что иное, как h_3. Действительно, подставив в уравнение (9) значение p_3 из уравнения (7) и решив его относительно h_3, получим:

$$h_3=p_0\frac{T_1-T_2}{T_2}=\frac{\gamma-1}{\gamma}h_1.$$

откуда

$$\gamma=\frac{h_1}{h_1-h_3}, \tag{10}$$

т. е. для нахождения коэффициента Пуассона по данной методике нет необходимости градуировать манометр, достаточно быть уверенным, что градуировочный график $h(p)$ прямолинеен.

Порядок выполнения работы

1. Проверить наличие воды в U-образном манометре. Открыть кран В и подождать 2–3 минуты. Аккуратно надеть резиновую грушу на штуцер крана В. Закачать воздух в сосуд А резким сжатием груши и перекрыть кран. Быстро повторить закачку, чтобы разность уровней h в манометре достигла 20–40 см.

2. Подождать, чтобы давление стабилизировалось в результате теплообмена (обычно 5–6 мин), и произвести отсчет h_1.

3. На короткое время открыть кран В, и быстро его закрыть сразу после того как прекратится шипение вышедшего из баллона воздуха. Подождать, чтобы давление стабилизировалось. Произвести соответствующий отсчет h_3.

4. Повторить измерения по пунктам 1–3 не менее 8 раз.

5. По формуле (10) найти величину γ и оценить ее погрешность, считая, что γ получена в результате прямого измерения.
6. Рассчитать по формулам (4) и (3) молярные теплоемкости воздуха C_V и C_p.
7. Вычислить по формуле (5) число степеней свободы молекулы воздуха.
8. Сделать вывод о справедливости молекулярно-кинетических и квантовых представлений о строении молекул воздуха.
9. Сделать вывод о количестве атомов в молекуле воздуха.

223

Измерение вязкости глицерина с помощью металлического шарика

Решаемые задачи

- Знакомство с теоретическими основами метода Стокса
- Определение коэффициента вязкости жидкости

Оборудование

Цилиндр с вакуумным маслом	1 шт.
Набор одинаковых стальных шариков	1 шт.
Штатив	1 шт.
Секундомер	1 шт.

Введение

В курсе молекулярной физики и термодинамики обычно рассматривают три явления переноса: диффузию, теплопроводность и внутреннее трение (вязкость).

Диффузия — процесс, приводящий к равновесному распределению концентрации данного вещества в объеме системы. В случае диффузии происходит перенос вещества. Интенсивность переноса в данной точке характеризуется вектором потока вещества $\mathbf{j}$. Его направление совпадает с направлением наиболее быстрого уменьшения плотности данного вещества в пространстве. Модуль $\mathbf{j}$ численно равен массе диффундирующего вещества, проходящей в единицу времени через мнимую поверхность единичной площади, перпендикулярную $\mathbf{j}$. В смеси двух веществ при малых неравновесных концентрациях вещества A справедлив закон Фика:

$$\mathbf{j}_A = -D\,\mathrm{grad}(\rho_A)\,, \tag{1}$$

где D — коэффициент диффузии, ρ_A — плотность вещества A.

Теплопроводность — один из видов переноса теплоты, не сопровождающийся совершением работы и не связанный с переносом вещества (диффузией, конвекцией). Т.е. при теплопроводности осуществляется перенос энергии за счет ее непосредственной передачи от частиц с большей энергией частицам с меньшей энергией. Теплопроводность является единственным механизмом теплопередачи в твердых диэлектриках. В проводниках отмечается прямая зависимость теплопроводящих свойств от электропроводности. В газах основная роль в теплопередаче принадлежит другим механизмам, в частности конвекции. Жидкости характерны тем, что при разных температурах относительные вклады в теплопередачу теплопроводности и других механизмов заметно меняются.

Локальной характеристикой теплопроводности служит вектор теплового потока $\mathbf{q}$. Его направление противоположно градиенту температуры, т.е. совпадает с направлением наиболее быстрого уменьшения температуры в пространстве. Модуль $\mathbf{q}$ численно равен количеству теплоты, переносимой в единицу времени через мнимую поверхность единичной площади, перпендикулярную градиенту температуры. По закону Фурье вектор $\mathbf{q}$ прямо пропорционален градиенту температуры:

$$\mathbf{q} = -\varkappa\,\mathrm{grad}(T)\,. \tag{2}$$

Величина $\varkappa$ называется коэффициентом теплопроводности.

Вязкость. При возникновении движения некоторой части жидкой или газообразной среды вслед за ней увлекаются и соседние, *расположенные в перпендикулярном скорости направлении*. Ситуация очень похожа на ту, которая возникает при попытке вытащить книгу из стопки — вслед за нужной потянутся и другие. Пользуясь такой аналогией говорят, что соседние части среды вовлекаются в движение благодаря *вязкому (внутреннему) трению*. Свойство среды, благодаря которому имеет место внутреннее трение, называется вязкостью. Из сказанного ясно, что при внутреннем трении происходит перенос импульса от быстрых участков потока к медленным в направлении перпендикулярном скорости. Вязкие свойства проще всего исследовать в случае ламинарного потока, т.е. такого, который можно разбить на не перемешивающиеся слои. Пусть вектор скорости **v** в каждой точке ламинарного потока направлен вдоль оси z, а его величина v меняется только вдоль оси x. Поток импульса $\boxtimes$, по закону Ньютона пропорционален градиенту скорости:

$$\boxtimes = -\eta\,\mathrm{grad}(v) = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \qquad (3)$$

Коэффициент η называется *динамическим коэффициентом вязкости* (или просто — вязкостью). Он определяет быстроту передачи импульса из слоя в слой.

Величины D, $\varkappa$, η, входящие в законы (1)-(3) определяются межмолекулярными взаимодействиями и интенсивностью теплового движения молекул.

В газовой фазе, когда межмолекулярные взаимодействия пренебрежимо малы, величины коэффициентов D, $\varkappa$, η, можно связать с кинематическими характеристиками движения молекул, например:

$$D = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle u\rangle\,, \qquad \eta = \rho\frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\langle u\rangle = \rho D, \qquad (4)$$

где $\langle u\rangle$ — средняя скорость движения молекул, $mean\lambda$ — средняя длина их свободного пробега, ρ — плотность газа. В случае газа из многоатомных молекул имеет место также связь:

$$\varkappa = \frac{\eta C_V}{4}(9\gamma - 5)\,, \tag{5}$$

где $\gamma = C_p/C_V$, C_p и C_V — теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме.

В конденсированном состоянии заметную роль в явлениях переноса играют силы межмолекулярного взаимодействия. В этом случае коэффициенты D, $\varkappa$, η проявляют заметную зависимость от температуры, а их связь с микропараметрами системы становится значительно более трудной для анализа, т.к. обладает рядом специфических для конкретных взаимодействий особенностей.

Раздел физики, посвященный методам измерения вязкости, называется вискозиметрией. Существующее разнообразие методов и конструкций приборов для измерения вязкости — вискозиметров — обусловлено как широким диапазоном значений вязкости (от 10^{-5} Па · с — у газов до 10^{12} Па · с — у ряда полимеров), так и необходимостью измерять вязкость в условиях низких или высоких температур и давлений (например, сжиженных газов, расплавленных металлов, водяного пара при высоких давлениях и т.д.). Наиболее распространены три метода измерения вязкости газов и жидкостей: капиллярный, падающего шара и соосных цилиндров (ротационный). В основе их лежат соответственно: формула Пуазейля, формула Стокса и закон течения жидкости между соосными цилиндрами. Вязкость определяют также по затуханию периодических колебаний пластины, помещенной в исследуемую среду. Особую группу образуют методы измерения вязкости в малых объёмах среды (микровязкость). Они основаны на наблюдении броуновского движения, подвижности ионов, диффузии частиц.

Как и в любых других экспериментальных методах, в вискозиметрии требуется четко представлять границы применимости используемых физических законов. Закон Ньютона (3) имеет два очень существенных ограничения. Во-первых, он оказался справедлив только для жидкостей, состоящих из относительно простых молекул с короткодействующими силами притяжения между ними. Для жидкостей с большим содержанием макромолекул (например, растворы полимеров, коллоидные системы, кровь и т.п.) эта формула не справедлива. Соответственно, жидкости, для которых выполняется закон Ньютона (3) называются *ньютоновскими*, а все другие — *неньютоновскими*. Вторым ограничением является ламинарность потока жидкости. Режим течения жидкости характеризуется *числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \tag{6}$$

где ρ, η и v плотность, вязкость и характерная скорость жидкости, l — некий характерный линейный размер потока. Например, диаметр трубы, или радиус падающего в жидкости шарика. По прядку величины число Рейнольдса есть отношение кинетической энергии жидкости к ее потере, обусловленной вязким трением.

Для каждого потока существует некоторое критическое значение числа Рейнольса $\mathrm{Re_К}$. Если $\mathrm{Re} < \mathrm{Re_К}$, поток ламинарен, если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re_К}$ — турбулентен. Турбулентный поток не стационарен. Он характеризуется появлением вихрей, перемешивающих слои жидкости. При $\mathrm{Re} \approx \mathrm{Re_К}$ течение является неустойчивым – достаточно небольшого возмущения (например, небольшой неровности на стенке трубы), чтобы течение стало турбулентным. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от вида рассматриваемого течения. Так при течении жидкости в круглых прямолинейных трубах значение $\mathrm{Re_К} \approx 2300$, если в качестве характерной скорости считать среднюю по сечению скорость, а характерным размером — диаметр трубы. При движении в жидкости твердого шарика $\mathrm{Re_К}$ значительно меньше.

Описание эксперимента

На шарик, падающий в вязкой жидкой среде, действуют силы тяжести $mg = V\rho_{ш}g$, сила Архимеда $F_{А} = V\rho_g$ и сила сопротивления среды $F_с$:

$$F_с = 6\pi\eta r_{ш} v, \tag{7}$$

где V — объем шарика, $\rho_{ш}$ — его плотность, ρ — плотность среды, g — ускорение свободного падения. Равенство (7) называется формулой Стокса. Оно впервые было получено английским физиком Д. Стоксом с использованием ряда предположений: 1) $\mathrm{Re} \ll 1$; 2) жидкость заполняет все пространство; 3) жидкость смачивает шарик, т.е. прилегающий к шарику слой жидкости движется вместе с ним.

По второму закону Ньютона:

$$V\rho_{\text{ш}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = V(\rho_{\text{ш}} - \rho) - 6\pi\eta r_{\text{ш}}v\,.$$

После разделения переменных, получим:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{q\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_{\text{ш}}}\right) - \left(\dfrac{6\pi\eta r_{\text{ш}}}{V\rho_{\text{ш}}}\right)} = \frac{\mathrm{d}v}{a - bv}\,.$$

где значения новых переменных a и b очевидны.

Сделав замену переменных $z = a - bv$, получим удобное для интегрирования уравнение:

$$-b\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{z}\,.$$

Проинтегрировав это уравнение, отсчитывая время с момента начала падения ($v(t = 0) = 0$)

$$-b\int\limits_0^t \mathrm{d}t = \int\limits_{z(0)}^{z(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

получим

$$-bt = \ln\left\{\frac{Z(t)}{Z(0)}\right\} \quad \text{или} \quad z(t) = z(0)e^{-bt}\,.$$

С учетом введенных ранее обозначений:

$$z(t) = a - bv(t) = ae^{-bt}\,,$$

или

$$v(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) = \frac{gV(\rho_{\text{ш}} - \rho)}{6\pi\eta r_{\text{ш}}}\left(1 - \exp\left(\frac{6\pi\eta r_{\text{ш}}}{m}t\right)\right),$$

Таким образом, скорость шарика экспоненциально приближается к постоянному предельному значению:

$$v_{\text{п}} = \frac{gV(\rho_{\text{ш}} - \rho)}{6\pi\eta r_{\text{ш}}}\,. \tag{8}$$

Время, необходимое для достижения равновесного значения скорости, называется временем релаксации:

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta r_{ш}}. \tag{9}$$

Если время падения в несколько раз больше τ, процесс установления скорости можно считать закончившимся.

Подставив в формулу (8) выражение для объема шара $V = \frac{4}{3}\pi r_{ш}^3$, получим:

$$\eta = \frac{2gr_{ш}^2(\rho_{ш} - \rho)}{9v_{п}}. \tag{10}$$

Т.е. коэффициент внутреннего трения можно определить экспериментально, измерив $v_{п}$, зная $r_{ш}$, $\rho_{ш}$ и ρ.

Формула Стокса выведена в предположении, что шарик, падает в безграничной среде. При проведении эксперимента необходимо учитывать соотношение между $r_{ш}$ и радиусом цилиндрического сосуда R путем введения поправочного множителя:

$$\eta = \frac{2gr_{ш}^2(\rho_{ш} - \rho)}{9v_{п}\left(1 + 2{,}4\frac{r_{ш}}{R}\right)}. \tag{11}$$

Порядок выполнения работы

1. Измерить внутренний радиус цилиндра R и расстояния между метками.

2. Опустить шарик в воронку, из которой он должен упасть вдоль оси цилиндра.

3. Вычислить скорость падения шарика. Измерения времени падения между крайними метками провести для 10-и одинаковых шариков и найти среднее значение их скорости $v_{п}$.

4. Определить по формуле (11) вязкость жидкости и оценить погрешность. Плотность жидкости указана на установке.

5. По формуле (9) вычислить время релаксации скорости шарика.

6. По формуле Стокса (7) вычислить силу сопротивления среды.
7. Вычислить число Рейнольдса для движения шарика по формуле (6).

224

Измерение вязкости методом Пуазейля

Решаемые задачи

- Знакомство с теоретическими основами метода Пуазейля;
- Знакомство с устройством вискозиметра Оствальда;
- Калибровка вискозиметра Оствальда;
- Измерение вязкости спирта методом Пуазейля.

Оборудование

Термометр	1 шт.
Секундомер	1 шт.
Вискозиметр Оствальда	2 шт.

Описание эксперимента

Метод Пуазейля основан на определении расхода жидкости или газа, протекающей через капилляр известных размеров, под действием заданного перепада давлений на краях капилляра.

Объёмный расход Q (объем жидкости, протекающей за единицу времени) через трубку радиуса R и длины l равен (формула Пуазейля):

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}\,, \tag{1}$$

где η — вязкость жидкости, Δp — разность давлений с двух сторон трубки. Пользуясь этой формулой, можно найти вязкость жидкости:

$$\eta = \frac{\pi \Delta p R^4}{8Ql}\,. \tag{2}$$

Непосредственное измерение коэффициента вязкости η по формуле Пуазейля затруднительно, так как требует точного измерения многих величин, входящих в формулу (2). Поэтому предпочтительнее измерять не абсолютную величину η, а её отношение к вязкости эталонной жидкости, например, воды $\eta_{\text{В}}$, перетекающей между метками данного вискозиметра за время $t_{\text{В}}$. Учитывая, что перепады давления на концах вертикального капилляра пропорциональны плотностям жидкостей ρ и $\rho_{\text{В}}$, на основе (2) можно записать

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{В}}} = \frac{\dfrac{\pi \Delta p R^4}{8Ql}}{\dfrac{\pi \Delta p_{\text{В}} R^4}{8Q_{\text{В}} l}} = \frac{\dfrac{\Delta p}{Q}}{\dfrac{\Delta p_{\text{В}}}{Q_{\text{В}}}} = \frac{\dfrac{\Delta p}{V/t}}{\dfrac{\Delta p_{\text{В}}}{V/t_{\text{В}}}} = \frac{\rho t}{\rho_{\text{В}} t_{\text{В}}}\,. \tag{3}$$

или

$$\eta = \eta_{\text{В}} \frac{\rho t}{\rho_{\text{В}} t_{\text{В}}}\,. \tag{4}$$

Конструкция прибора

Вискозиметр Оствальда представляет собой два стеклянных сообщающихся сосуда переменных диаметров (см. рис. 1), в которые через широкую горловину колена В наливают исследуемую жидкость. Он работает на основе измерения времен перетекания через капилляр одинаковых объемов исследуемой и эталонной жидкостей с

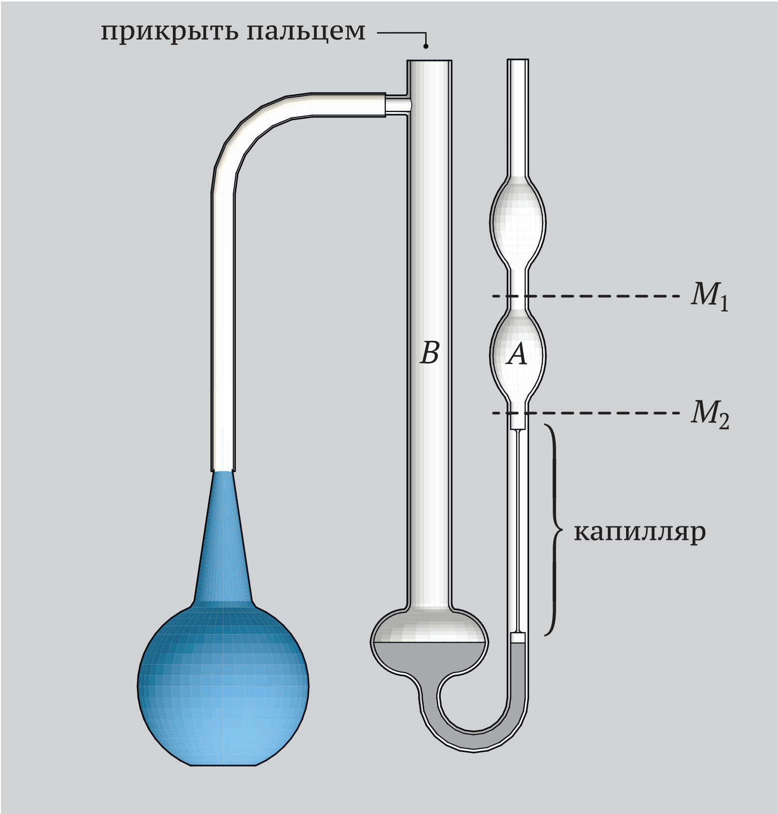

Рис. 1. Вискозиметр Оствальда

известными плотностями. С помощью резиновой груши жидкость закачивают из колена B в утолщение A выше метки M_1 и предоставляют ей возможность перетекать обратно под действием силы тяжести. Время t прохождения уровнем жидкости расстояния между метками M_1 и M_2 засекают секундомером.

Порядок выполнения работы

Вискозиметр Оствальда является хрупким устройством. Поэтому для сохранности под прозрачный кожух установки помещены два одинаковых вискозиметра с грушами, предварительно заполненные соответственно водой и спиртом (рис. 2).

1. Закрыть пальцем трубку B вискозиметра и грушей выдавить воду из колена B в утолщение A выше метки M_1. (Во избежание грубых погрешностей необходимо, что-

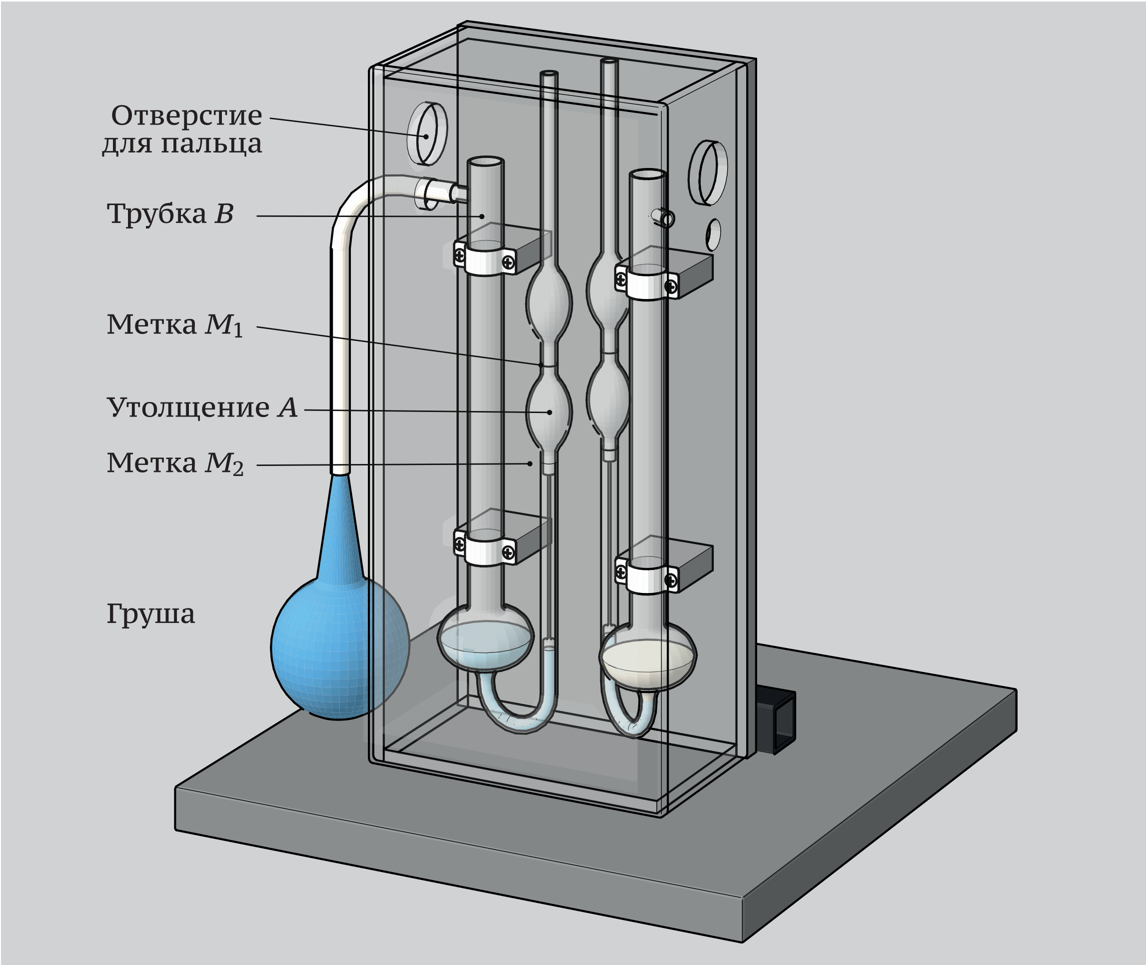

Рис. 2. Эксперементальная установка

бы после закачки жидкости в утолщение А, утолщение в трубке B оставалось частично заполненным. Необходимо также следить за тем, чтобы капелька жидкости случайно не перекрыла отверстие выше утолщения A. Для устранения таких неполадок обращаться к инженеру).

2. Убрать палец. Засечь секундомером время t_B прохождения уровнем воды расстояния между метками M_1 и M_2. Результаты занести в таблицу.

Вода

№	$t_В$, с	$\langle t_В \rangle$, с	$\Delta t_В$, с
1			
2			
3			
4			
5			

Спирт

№	$t_С$, с	$\langle t_С \rangle$, с	$\Delta t_С$, с
1			
2			
3			
4			
5			

3. Провести измерения 5 раз для нахождения среднего значения $\langle t_В \rangle$ и погрешности $\Delta t_В$:

$$\langle t_В \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_{Вi},$$

$$\Delta t_В = t_{\alpha,N} \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \left(t_{Вi} - \langle t_В \rangle\right)^2}.$$

В данном случае количество измерений $N = 5$, доверительная вероятность $\alpha = 0{,}95$, коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,N} = 2{,}7$.

4. Повторить пункты 1–3 для спирта. Результаты занести в таблицу.

5. Измерить температуру в лаборатории. По справочным таблицам найти для спирта и воды ρ, $\rho_В$ и $\eta_В$.

6. Вычислить вязкость спирта и оценить погрешность эксперимента.

$$\eta = \eta_В \frac{\rho \langle t_С \rangle}{\rho_В \langle t_В \rangle},$$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial t_С}\Delta t_С\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t_В}\Delta t_В\right)^2} = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta t_С}{\langle t_С \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t_В}{\langle t_В \rangle}\right)^2}.$$

7. Объясните полученные результаты.

Приложение

Вывод формулы Пуазейля

Рассмотрим цилиндрическую трубку радиуса R и длины l. Пусть по ней течет жидкость, характеризуемая плотностью ρ и вязкостью η. Пусть также на концах трубки поддерживается постоянная разница давлений Δp.

Мысленно выделим в жидкости коаксиальный трубке цилиндрический объем радиуса r и высоты l. Из-за перепада давлений на концах трубки на него действует внешняя сила:

$$F_{\text{внеш}} = S_{\text{осн}}\Delta p = \pi r^2 \Delta p\,, \tag{5}$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь сечения выбранной цилиндрической трубки.

Этой силе противодействует сила внутреннего трения, определяемая формулой Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = -\eta S_{\text{бок}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\eta 2\pi r l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,, \tag{6}$$

где $S_{\text{бок}}$ и l — площадь боковой поверхности и длина выделенного объема жидкости. В случае стационарного потока (т.е. когда скорость течения жидкости не изменяется со временем) эти две силы уравновешивают друг друга:

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{внеш}} \quad \text{или} \quad -\eta 2\pi r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \pi r^2 \Delta p\,. \tag{7}$$

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению:

$$\mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r\,\mathrm{d}r\,. \tag{8}$$

Если жидкость смачивает стенки трубки, можно считать, что вблизи них она неподвижна (т.е. на стенках, при $r = R$ скорость $v = 0$). Тогда уравнение (4) можно решить, взяв интеграл от обоих частей:

$$\int\limits_0^{v(r)} \mathrm{d}v = -\int\limits_R^r \frac{\Delta p}{2\eta l} r\mathrm{d}r. \tag{9}$$

В результате интегрирования получаем, что на расстоянии r от оси трубки жидкость имеет скорость:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2. \tag{10}$$

Смысл $v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l}$ очевиден — это скорость на оси трубки (при $r = 0$).

Если выделить тонкий цилиндрический слой с внутренним радиусом r и внешним $(r + \mathrm{d}r)$, можно считать, что вся жидкость в нем движется с указанной скоростью v. Тогда объем жидкости, протекающей через его поперечное сечение $\mathrm{d}S$ в единицу времени (объёмный расход):

$$\mathrm{d}Q = v\,\mathrm{d}S = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)(2\pi r\mathrm{d}r). \tag{11}$$

Расход через все сечение S трубки в этом случае равен:

$$Q = \int \mathrm{d}Q = \int\limits_0^R \frac{\pi\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) 2r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}. \tag{12}$$

Это равенство называется формулой Пуазейля, в честь английского экспериментатора, занимавшегося исследованием течения жидкости. Пользуясь этой формулой, можно найти вязкость, пропуская жидкость через трубку длиной l и радиусом R. При этом необходимо измерить перепад давления ΔP на её концах, а также объемный расход Q.