§4. Случайные величины и функции распределения

Лекция 6

В применениях методов теории вероятностей исследователь чаще всего имеет дело с числовыми характеристиками наблюдаемого объекта, которые являются функциями элементарных исходов – состояний объекта. При использовании различных характеристик важным является то обстоятельство, что все они определены на одном и том же пространстве Ω, и если мы приступаем к построению вероятностной модели, на основании которой будет получено распределение наблюдаемой характеристики $\xi = \xi(\omega)$, то мы должны понимать, что это распределение индуцировано исходным распределением P на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω. Напомним, что такого рода построения проводились при выводе гипергеометрического и биномиального распределений.

Итак, мы приступаем к теории распределений функций $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных исходов, фиксируя некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Областью значений функции ξ служит эвклидово пространство R, и это пространство является новым пространством элементарных исходов. Поскольку нас, в основном, будут интересовать вероятности попадания значений ξ в интервалы, то естественно рассмотреть булеву σ-алгебру подмножеств R, порожденную всевозможными интервалами на прямой R. Как нам известно из общего курса анализа, такая σ-алгебра $\mathcal{B}$, состоящая из всевозможных объединений и пересечений счетного числа интервалов, называется *борелевским полем*, и для ее построения достаточно рассмотреть открытые интервалы вида $(-\infty,\ x)$.

Введем измеримое пространство $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$ значений ξ и рассмотрим следующий, совершенно естественный метод "наведения" распределения P^{ξ} на $\mathcal{B}$ посредством вероятности P на $\mathcal{A}$. Каждому борелевскому множеству $B \in \mathcal{B}$ сопоставим его *прообраз* $\xi^{-1}(B) = \{\omega :\ \xi(\omega) \in B\} \subset \Omega$. Если $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, то естественно определить вероятность попадания значения ξ в B как $P^{\xi}(B) = P(\xi^{-1}(B))$. Функции, которые обладают свойством $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ при любом $B \in \mathcal{B}$, называются *измеримыми*, и в дальнейшем будут рассматриваться только такие характеристики наблюдаемого объекта. Мы подошли к основному понятию теории распределений на подмножествах R.

Определение 4.1. *Случайной величиной* $\xi = \xi(\omega)$ называется измеримое отображение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ на *борелевскую* *прямую* $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$, распределение которой на σ-алгебре $\mathcal{B}$ индуцируется распределением P на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω.

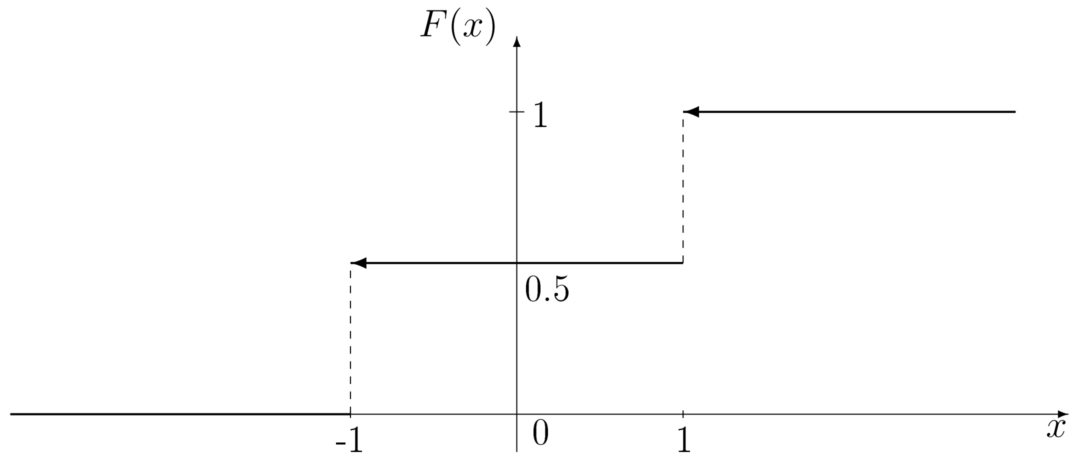
Легко понять, что, с точки зрения практических приложений, мы могли бы не обращаться к определению случайной величины как измеримой функции, а просто сказать, что сейчас мы займемся построением вероятностных моделей, в которых пространство элементарных исходов есть числовая прямая. Тем не менее, чтобы описать класс возможных распределений наблюдаемой случайной величины ξ иногда просто необходимо знать причину изменчивости состояний объекта (или инструмента исследования), которая обуславливает разные значения в повторных наблюдениях ξ.

Борелевское поле $\mathcal{B}$, на котором будет определяться распределение ξ, является чрезвычайно сложным объектом с точки зрения строений его элементов, поэтому задание функции $P(B),\ B \in \mathcal{B}$ представляется совершенно неразрешимой проблемой. Однако мы знаем, что $\mathcal{B}$ порождается интервалами вида $(-\infty, x)$ (событиями $\xi < x$), и это указывает простой путь к заданию распределения случайной величины ξ. Что если начать с задания вероятности только на событиях, порождающих $\mathcal{B}$, то есть с определения функции $F(x) = P(\xi < x),\ x \in \mathrm{R}$, потом распространить ее аддитивным образом на булеву алгебру конечных объединений всевозможных интервалов на R, показать, что полученная таким образом аддитивная функция на булевой алгебре обладает свойством непрерывности относительно монотонно убывающих последовательностей событий (является вероятностью), и, наконец, закончить построение вероятности на $\mathcal{B}$ ссылкой на теорему об единственности продолжения вероятности с булевой алгебры объединений интервалов на порожденную этой алгеброй σ-алгебру борелевских подмножеств R.

Мы приступаем к реализации этой программы и введем сначала

Определение 4.2. Функция $F(x) = P(\xi < x)$, определенная на всей числовой прямой R, называется *функцией распределения* случайной величины ξ.

Пример 4.1. Пусть случайная величина ξ принимает с ненулевой вероятностью всего два значения: $x = -1$ с вероятностью $1/2$ и $x = +1$ с той же вероятностью $1/2$ (игра в орлянку со ставкой 1 рубль). Тогда функция распределения ξ имеет следующий вид.



Действительно, для любого $x < -1$ множество $(-\infty, x)$ не содержит значений ξ, которые она могла бы принять с положительной вероятностью, так что $F(x) = P(\xi < x) = 0$. Далее, $F(-1) = P(\xi < -1) = 0$, но если $-1 < x \leqslant +1$, то $F(x) = P(\xi = -1) = 1/2$. В области $x > +1$ содержатся все значения случайной величины ξ, которые она принимает с положительной вероятностью, поэтому $F(x) = 1$ при $x > +1$.

Исследуем некоторые особенности поведения функции F.

Предложение 4.1. *Функция $F(x)$, $x \in \mathrm{R}$ обладает следующими свойствами.*

$(F1)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

$(F2)$ *$F(x)$ – неубывающая функция $x \in \mathrm{R}$.*

$(F3)$ *Функция $F(x)$ непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to a-} F(x) = F(a)$.*

$(F4)$ *Вероятности попадания значений случайной величины ξ в интервалы на R вычисляются по формулам*

$$P\{\xi \in [a,\ b)\} = F(b) - F(a), \quad P\{\xi \in [a,\ b]\} = F(b+) - F(a),$$

$$P\{\xi \in (a,\ b]\} = F(b+) - F(a+), \quad P\{\xi \in (a,\ b)\} = F(b) - F(a+).$$

$(F5)$ *Функция $F(x)$ имеет не более чем счетное множество скачков.*

Доказательство. $(F1)$. Рассмотрим последовательность событий

$$\{A_n = (-\infty,\ x_n),\ n \geqslant 1\}.$$

Если $x_n \searrow -\infty$ при $n \to \infty$, то, очевидно, $A_n \downarrow \emptyset$, и, аналогично,

$$A_n \uparrow \mathrm{R}(= \Omega),$$

если $x_n \nearrow +\infty$. Так как

$$F(x_n) = P(\xi < x_n) = P(A_n),$$

то свойства $(F1)$ вытекают из аксиомы непрерывности $(P3)$.

$(F2)$. Если $x_1 \leqslant x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, так как

$$A_1 = (-\infty,\, x_1) \subset A_2 = (-\infty,\, x_2)$$

и, в силу свойства монотонности вероятности (см. (3) в предложении 2.2),

$$F(x_1) = P(A_1) \leqslant P(A_2) = F(x_2).$$

$(F3)$. Пусть последовательность $x_n \uparrow x$ при $n \to \infty$, так что соответствующая последовательность событий

$$A_n = (-\infty,\, x_n) \uparrow A = (-\infty,\, x).$$

Используя свойство $(P3)$ непрерывности P, получаем

$$F(x_n) = P(A_n) \to P(A) = F(x),$$

что, по определению, означает непрерывность слева функции $F(x)$.

$(F4)$. Если $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ (см. (3) в предложении 2.2). Из этого свойства вероятности и только что доказанного свойства непрерывности вытекает, что, например, замкнутый интервал $[\,a,\, b\,] = (-\infty,\, b\,] \setminus (-\infty,\, a)$, и поскольку множество $(-\infty,\, a) \subset (-\infty,\, b\,]$, то

$$P\{\xi \in [\,a,\, b\,]\} = P\{\xi \in (-\infty,\, b\,]\} - P\{\xi \in (-\infty,\, a)\} =$$

$$P(\xi \leqslant b) - P(\xi < a) = F(b+) - F(a).$$

В последнем равенстве мы использовали запись $F(b+)$ для выражения вероятности события $\{\xi \leqslant b\}$. Дело в том, что $P(\xi < b) = F(b)$, и если в точке b функция $F(x)$ имеет скачок, то его величина равна $F(b+) - F(b)$.

$(F5)$. В этом пункте предложения утверждается, что все скачки (точки разрыва) функции $F(x)$ можно занумеровать. Поступим следующим образом: рассмотрим последовательность множеств $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$, где A_n

есть множество точек разрыва функции $F(x)$ с величиной скачка, не меньшей $1/n$. Поскольку $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, то множество A_n конечно и содержит не более чем n точек. Следовательно, мы можем занумеровать все скачки функции $F(x)$ в порядке убывания их величины, осуществляя последовательную нумерацию точек множества A_1, потом A_2 и так далее, возможно, до бесконечности, если число скачков $F(x)$ не конечно. При таком способе нумерации любому, сколь угодно малому по величине скачку функции $F(x)$ рано или поздно будет присвоен номер.

Итак, мы убедились, что функция распределения является хорошим и достаточно простым инструментом для вычисления вероятностей попадания значений случайной величины в интервалы на действительной прямой. Однако, если мы определим только вероятности элементов борелевского поля $\mathcal{B}$, имеющих вид интервалов, то сможем ли на основании их вычислять вероятности других событий из $\mathcal{B}$? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4.1. *Пусть функция* $F(x)$, $x \in \mathrm{R}$, *обладает свойствами*

$(F1)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

$(F2)$ $F(x)$ – *неубывающая функция* $x \in \mathrm{R}$;

$(F3)$ $F(x)$ *непрерывна слева:* $\lim\limits_{x \to a-} F(x) = F(a)$.

Тогда на борелевской прямой $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$ *существует единственная вероятность* P, *для которой* $P\{(-\infty, x)\} = F(x)$ *для всех* $x \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Функция $F(x)$ определяет функцию множеств P' на семействе $\mathcal{C}$ открытых интервалов вида $C = C_x = (-\infty, x)$ посредством равенства $P'(C_x) = F(x)$, причем в силу свойства $(F1)$,

$$P'(\Omega) = P'(\mathrm{R}) = 1.$$

Распространим эту функцию множеств на булеву алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, порожденную семейством $\mathcal{C}$. Элементы A булевой алгебры $\mathcal{A}$ очевидно имеют вид

$$A = \sum\nolimits_1^k [\, a_i,\, b_i),$$

и поэтому естественно положить (см. $(F4)$ в предложении 4.1)

$$P'(A) = \sum\nolimits_1^k \left[\, F(b_i) - F(a_i) \,\right].$$

Очевидно, функция множеств $P'(A)$ на булевой алгебре $\mathcal{A}$ обладает такими свойствами вероятности, как нормируемость $(P\,1)$ и конечная аддитивность $(P\,2)$. Если мы покажем, что P' обладает свойством σ-аддитивности $P(2')$, то утверждение теоремы будет простым следствием общей теоремы о продолжении меры на порожденную булевой алгеброй σ-алгебру, ибо, как известно, борелевское поле порождается алгеброй $\mathcal{A}$ (более того, – семейством $\mathcal{C}$).

Рассмотрим произвольную последовательность не пересекающихся множеств

$$A_n = \sum_{i=1}^{k_n} [\,a_{ni};\, b_{ni}),\ \ n = 1, 2, \ldots,$$

для которой множество $A = \sum_1^\infty A_n$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$. По определению алгебры $\mathcal{A}$ это означает, что множество A можно представить в виде конечного объединения интервалов, не имеющих точек соприкосновения: $A = \sum_1^m [\,c_j;\, d_j)$. После соответствующей перестановки интервалов внутри объединения множеств A_n, можно добиться для каждого из интервалов $[\,c_j;\, d_j)$ представления вида

$$[\,c_j;\, d_j) = \sum_1^\infty [\,a_{jk};\, b_{jk}),\ \ j = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, достаточно доказать, что для любых $c < d$

$$F(d) - F(c) = \sum_{j=1}^{\infty} [\,F(b_j) - F(a_j)\,], \tag{1}$$

если интервал

$$[\,c; d) = \sum_1^\infty [\,a_j;\, b_j).$$

Очевидно,

$$F(d) - F(c) \geqslant \sum_1^n [\,F(b_j) - F(a_j)\,],$$

ибо дополнение множества

$$\sum_1^n [\,a_j;\, b_j)$$

до интервала $[\,c,\, d)$ можно представить в виде конечного объединения не пересекающихся полуоткрытых интервалов. Устремляя n к бесконечности, получаем

$$F(d) - F(c) \geqslant \sum_1^\infty [\,F(b_j) - F(a_j)\,].$$

Покажем теперь, что имеет место противоположное неравенство, и, следовательно, справедливо равенство (1).

Предположим сначала, что $-\infty < c < d < \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Исходный интервал $[\,c;\, d)$ сузим до замкнутого интервала $[\,c;\, d'\,]$ так, чтобы $d' < d$ и $F(d') \geqslant F(d) - \varepsilon$. Этого всегда можно добиться в силу непрерывности слева функции F. Аналогично, каждый из интервалов $[\,a_n; b_n)$ расширим до открытого интервала $(a_n';\, b_n)$ так, чтобы $a_n' < a_n$ и

$$F(a_n') \geqslant F(a_n) - \varepsilon/2^n.$$

В результате получим покрытие

$$[\,c;\, d'\,] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n';\, b_n)$$

ограниченного замкнутого множества семейством открытых интервалов.

В силу известной леммы Гейне-Бореля найдется конечное покрытие

$$[\,c; d'\,] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_{n_i}';\, b_{n_i}),$$

в котором $a_{n_1}' < c$, $b_{n_N} > d'$ и $b_{n_{i-1}} > a_{n_i}'$ для всех $i = 2, \ldots, N$. Точки $b_{n_1}, \ldots, b_{n_{N-1}}$ образуют разбиение интервала $[\,a_{n_1}',\, b_{n_N})$, который содержит интервал $[\,c,\, d')$, и поэтому

$$F(d') - F(c) \leqslant F(b_{n_N}) - F(a_{n_1}') = F(b_{n_1}) - F(a_{n_1}') +$$

$$\sum_{i=2}^{N} [\,F(b_{n_i}) - F(b_{n_{i-1}})\,] \leqslant \sum_{i=1}^{N} [\,F(b_{n_i}) - F(a_{n_i}')\,] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [\,F(b_n) - F(a_n')\,].$$

Из построения интервалов следует, что

$$F(d) - F(c) \leqslant F(d') - F(c) + \varepsilon$$

и

$$F(b_n) - F(a_n') \leqslant F(b_n) - F(a_n) + \varepsilon/2^n,$$

откуда

$$F(d) - F(c) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем окончательное доказательство равенства (1) для конечных интервалов.

Для бесконечных интервалов вида $[\,c;\,\infty)$ достаточно, воспользовавшись свойствами функции F, рассмотреть конечный интервал $[\,c;\,d)$, удовлетворяющий условию $1 - F(d) \leqslant \varepsilon$. Открытое покрытие исходного интервала $[\,c;\,\infty)$ индуцирует естественным образом открытое покрытие интервала $[\,c;\,d\,)$, к которому применимы все предыдущие рассуждения, приводящие к неравенству (2). Очевидно, разность $1-F(c)$ не превосходит правой части (2) с заменой $2\,\varepsilon$ на $3\,\varepsilon$, что завершает доказательство теоремы.

Тема VI. Случайные величины. Распределения случайных величин

[1, стр. 41-48; 2, стр. 166-168, стр. 186-190]

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство.
Случайной величиной (коротко с.в.) называется любая измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathcal{R}^1$, то есть функция, для которой события

$$\{\, \xi < x \,\} = \{\, \omega \, : \, \xi(\omega) < x \,\} \ \in \ \mathfrak{F}, \ -$$

измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$ при всех вещественных x.

$\mathcal{Z}$ 1 Строго говоря, необходимо уметь вычислять вероятности для всех борелевских множеств $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{R}^1)$. Достаточность данного определения вытекает из того, что борелевская σ-алгебра порождается всеми интервалами вида $(-\infty; x)$ (см. задачу 55, стр. 23).

Функцией распределения (коротко ф.р.) с.в. ξ называется функция

$$F(x) = F_\xi(x) := \mathbf{P}\,\{\xi < x\}\,, \quad x \in \mathcal{R}^1.$$

Тот факт, что ф.р. с.в. ξ равна $F(x)$, записывается как $\xi \backsim F(x)$.

1. Докажите справедливость следующих свойств для ф.р. $F(x)$:

$\mathcal{F}1$) $F(x)$ *не убывает*;

$\mathcal{F}2$) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1;$

$\mathcal{F}3$) $F(x)$ *всюду непрерывна слева.*

$\mathcal{Z}$ 2 Иногда ф.р. определяют как $F(x) = \mathbf{P}\,\{\xi \leqslant x\}$. Принципиальных различий здесь нет, однако надо помнить, что в этом случае справедливо свойство

$\mathcal{F}3'$) $F(x)$ *всюду непрерывна справа.*

* * *

Теорема.

Любая вещественная функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям $\mathcal{F}1$, $\mathcal{F}2$, $\mathcal{F}3$ (или $\mathcal{F}3'$), является ф.р. некоторой с.в.

* * *

2. Воспользовавшись свойствами вероятностной меры (непрерывность и аддитивность), докажите, что вероятности попадания с.в. ξ в различного вида промежутки можно вычислять через её ф.р. $F(x)$:

i) $\mathbf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a)$;

ii) $\mathbf{P}\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = F(b+0) - F(a)$;

iii) $\mathbf{P}\{a < \xi < b\} = F(b) - F(a+0)$;

iv) $\mathbf{P}\{a < \xi \leqslant b\} = F(b+0) - F(a+0)$;

v) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant a\} = 1 - F(a)$;

vi) $\mathbf{P}\{\xi = b\} = F(b+0) - F(b)$;

- $\mathbf{P}\{\xi = b\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ф.р. F непрерывна в точке $x = b$.

3.* Докажите, что число точек разрыва ф.р. не более чем счетно.

С.в. ξ имеет дискретный тип распределения, если найдется такое конечное или счетное множество $\mathcal{X} = \langle x_k \rangle_{k=1}^{N}$, $N \leqslant \infty$, что

$$p_k := \mathbf{P}\{\xi = x_k\} > 0 \qquad \text{и} \qquad \textstyle\sum_1^N p_k = 1. \qquad (*)$$

Множество $\mathcal{X}$ называется носителем с.в. или множеством её значений.

ℤ 3 Ф.р. $F(x)$ дискретной с.в. имеет ступенчатый вид (см. ниже пример 2). В силу утверждения задачи 2**vi**) высота ступеньки $F(x)$ в точке x_k как раз равна вероятности p_k попадания в эту точку.
Иногда с.в. дискретного типа определяют как с.в., функция распределения которой имеет ступенчатый вид.

Дискретную с.в. с конечным и не очень большим числом N точек носителя можно задать посредством таблицы вероятностей

$\mathcal{X}$	x_1	$\cdots$	x_N
$\mathbf{P}$	p_1	$\cdots$	p_N

При этом необходимо следить за выполнением свойств $(*)$.

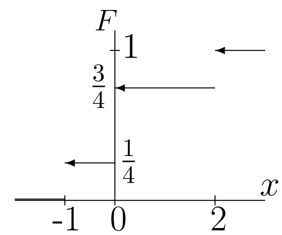
Пример 1. Самое популярное дискретное распределение – это классическое распределение на конечном носителе:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} \mathcal{X} & x_1 & \cdots & x_N \\ \hline \mathbf{P} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{array}.$$

Пример 2. Таблица вероятностей с.в. ξ задана не полностью:

$$\begin{array}{c||c|c|c|} \mathcal{X} & 2 & -1 & 0 \\ \hline \mathbf{P} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & C \end{array}.$$

Понятно, что неизвестная константа может равняться только $C = {}^1\!/_2$. На рисунке справа приведен график соответствующей функции распределения.



Пример 3. С.в. ξ принимает все натуральные значения с вероятностями, обратно пропорциональными квадратам этих значений. Во сколько раз вероятность получения нечетного числа больше вероятности четного числа?

<u>Решение</u>. Носитель распределения $\mathcal{X} = \langle 1, 2, \ldots \rangle$, а вероятности

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{C}{k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Из курса анализа (тема ряды Фурье) известно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Чтобы соблюсти свойство $(*)$, необходимо положить константу $C = {}^6\!/_{\pi^2}$:

$$p_k = \frac{6}{(\pi k)^2}.$$

Поскольку сумма нечетных членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

то вероятность получения нечетного числа равна ${}^{(6\,\pi^2)}\!/_{(8\,\pi^2)} = {}^3\!/_4$, что втрое больше вероятности для четного числа $({}^1\!/_4 = 1 - {}^3\!/_4)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

19. Выяснить, являются ли функции $F(x)$ функциями распределения. В случае отрицательного ответа, предложить вариант исправления. Построить графики $F(x)$. Определить к какому типу они принадлежат.

i) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0.3, & x \in (0;1], \\ 0.5, & x \in (1;2], \\ 1, & x > 2; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

ii) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{10}, & x \in (0;5], \\ 0.4, & x \in (5;6], \\ 1, & x > 6; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0.001, & x \leqslant -1, \\ 0.01, & x \in (-1,0], \\ 0.1, & x \in (0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

iii) $F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x < 0, \\ 0.8, & x \in [0;1), \\ 1, & x \geqslant 1; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.3, & x \in [-1;0], \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

iv) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0.5, & x \in (0;1), \\ 0.7, & x \in [1;2], \\ 1, & x > 2; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

v) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right], \\ 1, & x > 0; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0.3, & x \in (0;1], \\ 0.2, & x \in (1;2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

vi) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & x > 0; \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$