

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

**Современные проблемы математики и ее
приложений ,
Международная (53-я всероссийская) молодежная
школа-конференция**

31 января – 4 февраля 2022 г.

Тезисы докладов

Екатеринбург 2022

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (53-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, Уральский Федеральный университет, 2022.

Настоящее издание включает тезисы Международной (53-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 31 января по 4 февраля 2022 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и дискретная математика; математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных; теория функций; численные методы решения дифференциальных уравнений; оптимальное управление и дифференциальные игры; стохастическая динамика; машинное обучение. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Ответственный редактор
к.ф.-м.н. Чистяков П.А.

Ответственный за выпуск
Н.А. Минигулов

© ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», 2022

Содержание

Алгебра и дискретная математика (председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)	6
Бабенко М. В., Марков Р. В. Аналог теоремы Гильберта о базисе для полуколец косых многочленов	7
Болтаев Х. Х., Азимова Т. Э. О построении вещественных AW*-факторов	8
Быков А. А. Алгебры длины 2	10
Голубятников М. П., Маслова Н. В. Графы Деза, связанные с пересечениями сопряжённых подгрупп в группах $SL_2(q)$	11
Горепекина А. А. О свойствах τ -минимальных не \mathfrak{F} -групп	13
Кухарев А. В. Локально конечные группы насыщенные специальными унитарными группами	14
Лисицына М. А. О тестовых фрагментах совершенных раскрасок циркулянтных графов .	15
Махнев А. А., Белоусов И. Н., Голубятников М. П. О дистанционно регулярных графах Γ с сильно регулярным графом Γ_2	16
Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К. О графах Шилла с $b = 6$ и $b_2 \neq c_2$	17
Махнев А. А., Го Вэнь-бинь, Ефимов К. С. Граница Кулена-Пака и дистанционно регулярные графы без t -лап	18
Махнев А. А., Исакова М. М., Токбаева А. А. О дистанционно регулярных графах с массивами пересечений $\{(q^2 + q - 1)(q^2 + q + 1), (q^2 + q)q^2, q^3; 1, (q^2 + q), q^2(q^2 + q + 1)\}$. .	20
Махнев А. А., Ван Ч. Несуществование некоторых Q -полиномиальных графов Шилла с $b = 6$	21
Мелехина Д. В. Единицы целочисленного группового кольца прямого произведения двух целочисленных групп порядка 8	22
Новиков А. А., Абед С.А., Николаева И. Меры центральности в конечно и счетно разложимых алгебрах фон Неймана	24
Ушаков Ю. Ю., Шлепкин А. А. Локально конечные группы насыщенные унитарными группами	27
Циовкина Л. Ю. Об одном классе абелевых вершинно-транзитивных антиподальных дистанционно регулярных графов	28
Шлепкин А. А. Симметричность слов в бернсайдовой группе $B_0(2, 5)$	30
Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. On pronormality of subgroups of odd index in finite groups	31
Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw	32
Mala F. A. Speaking sequences	34
Maslova N.V. Finite simple groups with two maximal subgroups of coprime orders	35
Skuratovskii R. V. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric and alternating groups	37
Skuratovskii R. V. On the verbal width in the alternating group A_n and Matieu groups	39
Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай)	41
Васёв П. А., Бахтерев М. О., Манаков Д. В. Новый язык описания сцен научной визуализации	42
Дорофеева Ю. А., Вершинин Э. А. Численное моделирование динамики мнений с помехами	43
Ковалева Е. П. О задаче разработки численных методов решения обратных задач динамической интерпретации в сейсморазведке	45
Кривоногова А.Е., Касаткин А.А. Задача решения переопределенных СЛАУ для обработки данных каротажа	47
Марков П. И., Маякова С. А. Проблема автоматизации методов локальной аппроксимации для прогноза хаотических временных рядов	48

Михайлов А. В., Кумков С. С. Выработка управления ВС для приведения в контрольную точку трассы в указанное время	50
Мотин К. В., Байков В. А. Применение методов оптимизации для расстановки портов и пакеров на основе математического моделирования	52
Спиридонов А. А., Кумков С. С. Выбор оптимального порядка при слиянии потоков разнотипных самолётов как задача смешанного целочисленного линейного программирования	53
Теория функций (председатель к.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)	55
Авдеев Н. Н. О мере множеств, разделяющих банаховы пределы	56
Борцов В. В., Нестеров А. С. Ограниченные интегральные операторы в областях с углами	58
Ермакова Д. С. Характеристика нулей аналитических функций из класса A_α^∞ , где $\alpha > -1$, на односвязной области комплексной плоскости	60
Итарова С. Ю. Порядковые проекторы в пространстве регулярных ортогонально аддитивных операторов	63
Кувшинов О. А. О некоторых свойствах геометрии овала Кассини и некоторых невыпуклых множеств на плоскости	65
Салимова А. Е. Распространение теоремы Мальявена-Рубела на распределения комплексных нулей	66
Rozikov U. A., Safarov J. K. Limit points of a p -adic dynamical system	68
Rozikov U. A., Shoyimova F. B. Dynamical systems of a rational function	70
Численные методы решения дифференциальных уравнений (председатель д.ф.-м.н. В.Г. Пименов)	72
Закирзянов Ш. И., Байков В. А. Математическое моделирование фильтрации степенной жидкости через флюидоупор, связанной с потерей сплошности среды	73
Хайиткулов Б. Х. Численное моделирование нестационарной задачи конвекции-диффузии в одномерном случае	74
Лекомцев А. В. Сходимость численного метода решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием	76
Романенко А. Д. Численное решение динамической модели среднего поля с производной дробного порядка	77
Саттарова Р. Р. Моделирование процесса подъема керна на поверхность после выбуривания	78
Фаязов К. С., Хажиев И. О. Начально-краевая задача для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с одной линией вырождения	80
Фаязова З. К. Единственность начально-краевой задачи для уравнения диффузии с дробной производной	83
Baltaeva U., Khasanov B., Sul-tonboeva Z. Extension of the Tricomi Problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation	85
Оптимальное управление и дифференциальные игры (председатель к.ф.-м.н. П.Г. Сурков)	87
Баталова С. А. Управление дифференциально-разностной системой в пространстве функций с переменной, изменяющейся на геометрическом графе	88
Волков А. М., Авербух А. В. Регуляризация задачи планирования для марковской игры среднего поля	90
Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Качественное поведение равновесных траекторий в динамических биматричных играх	91
Куянцев В. П., Родионов А. С. Перестроение кратчайших путей в гиперсети	92
Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритм построения сингулярной поверхности решения для одного класса трехмерных задач быстрого действия и формулы её крайних точек в терминах инвариантов границы целевого множества	94

Мачтакова А. И. Об одной линейной задаче группового преследования с дробными производными	96
Осипов И. О. О применимости метода линеаризации в задаче локального синтеза на малом интервале времени	97
Родин А. С. Критерий нахождения точек бифуркаций кусочно-гладкого минимаксного решения уравнения Гамильтона-Якоби и их связь с размерностью сингулярного множества, когда гамильтониан зависит от времени и сопряжённой переменной.	100
Стародубец К. А. Метод характеристик для уравнения эйконала в задачах Дирихле и Коши	102
Усова А. А., Полушин И. Г. Стабилизация группового взаимодействия (Q,S,R)-диссипативных систем с постоянными задержками	103
Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В., Кувшинов О. А. Задачи наведения интегральных воронок дифференциальных включений посредством выбора параметра	106
Чупин И. А. Импульсное управление вертикальным движением инерционного манипулятора	108
Щелчков К. А. Односторонняя поимка в нелинейных дифференциальных играх двух лиц	110
Юровских П. А. Оценивание среднего состояния стаи систем	111
Стохастическая динамика (председатель д.ф.-м.н. Л.Б. Ряшко)	113
Башкирцева И. А., Чухарева А. А. Моделирование и анализ опухолево-иммунной динамики в условиях химиотерапии и случайных возмущений	114
Белохолов О. В., Перевалова Т. В. Анализ стохастической модели хищник-жертва с Олли-эффектом	115
Беляев А. В., Ряшко Л. Б. Динамическое взаимодействие равновесной и хаотической популяционных подсистем	116
Колениченко А. П., Ряшко Л. Б. Параметрический анализ стохастической чувствительности паттернов в нелинейных моделях с диффузией	117
Панкратов А. А., Башкирцева И. А. Влияние шума на генерацию паттернов в модели гликолиза с диффузией	118
Павлецов М. М., Перевалова Т. В. Стохастические переходы между аттракторами с фрактальными бассейнами	119
Слепухина Е. С. Стохастическое расщепление колебаний в зоне циклов-канардов трехмерной модели сердечного потенциала действия	120
Khamroyev A.Yu. The canonical form of a Volterra cubic stochastic operator	121
Машинное обучение (председатель к.ф.-м.н. А.В. Коньгин)	122
Ефимов К.Д., Бакланов А.П. Об одном методе оценки вероятности сговора между участниками аукционов	123
Проницкий Ю. В., Кумсков М. И. Оценка Позы Человека Как Задача Классификации . .	125
Чистяков П. А. Кластерный и дискриминантный анализ. Применение в задачах обработки данных в социологии.	127

Алгебра и дискретная математика
(председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)

Аналог теоремы Гильберта о базисе для полуколец косых многочленов

Бабенко М.В., Марков Р.В.

Вятский государственный университет, Киров, Россия

Вятский государственный университет, Киров, Россия

usr11391@vyatsu.ru, usr11935@vyatsu.ru

Пусть S — полукольцо [1], φ — эндоморфизм полукольца S , сохраняющий единицу, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S , записываемых слева от степеней x . Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $R = S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Одним из способов получения информации об алгебраических свойствах полуколец косых многочленов является попытка переноса известных кольцевых результатов на случай полуколец. Выяснилось, что не все свойства колец обычных и косых многочленов справедливы для полуколец, поэтому нами была поставлена задача — доказать аналоги для некоторых из этих свойств. Для этого были использованы m -идеалы.

Левый идеал L полукольца $S[x, \varphi]$ назовем *левым m -идеалом*, если из того, что многочлен $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ принадлежит L следует, что $a_k x^k \in L$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$. Аналогично определяется правый m -идеал.

В известной теореме Гильберта о базисе утверждается, что кольцо многочленов над нётеровым слева кольцом нётерова слева. Для кольца косых многочленов $S[x, \varphi]$ в случае, если φ является автоморфизмом, из правой (или левой) нётеровости кольца S следует правая (соответственно, левая) нётеровость кольца $S[x, \varphi]$ [2, theorem 2.9]. Для полуколец теорема Гильберта о базисе не верна. Привлечение m -идеалов позволило получить следующий полукольцевой аналог теоремы Гильберта о базисе (для полукольца косых многочленов).

Теорема. Пусть φ — автоморфизм полукольца S . Тогда равносильны следующие утверждения:

1. S — нётерова слева (справа) полукольцо;
2. $S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m -идеалов.

Требование к φ быть автоморфизмом является существенным, так как в случае инъективного эндоморфизма теорема не будет верна.

Список литературы

- [1] J. S. Golan, Semirings and their applications. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1999.
- [2] J. C. McConnell, J. C. Robson, Noncommutative Noetherian rings. Graduate studies in mathematics, 2000. V. 30. 636 p.

О построении вещественных AW*-факторов

Болтаев Х.Х., Азимова Т.Э.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент,
Узбекистан
bkhhabibzhan2020@mail.ru

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H . Слабо замкнутая *-подалгебра M в $B(H)$, содержащая единичный оператор $\mathbf{1}$, называется W^* -алгеброй. Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ с $\mathbf{1}$ называется вещественной W^* -алгеброй, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$. Комплексная или вещественная W^* -алгебра R называется фактором, если ее центр тривиален, т.е. состоит из скалярных кратных единичного оператора $\mathbf{1}$. Вещественная W^* -алгебра R имеет тип I_n , I_∞ , II_1 , II_∞ или III_λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$), если ее обертывающая W^* -алгебра $R + iR$ имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W^* -алгебры.

Линейное отображение α алгебры M в себя с $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ называется *-автоморфизмом, если $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$; инволютивный *-антиавтоморфизмом, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$ и $\alpha^2(x) = x$. Если α - инволютивный *-антиавтоморфизм W^* -алгебры M , то через (M, α) мы обозначим вещественную W^* -алгебру, порожденная антиавтоморфизмом α , т.е. $R = (M, \alpha) = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$. Обратно, всякая вещественная W^* -алгебра R имеет вид (M, α) , где $M = R + iR$ - обертывающая W^* -алгебра и α - инволютивный *-антиавтоморфизм M , определенный как $\alpha(x + iy) = x^* + iy^*$ (см. [1], [2]).

Под вещественной C^* -алгеброй мы понимаем вещественную банахову *-алгебру R такую, что выполняется отношение $\|a^*a\| = \|a\|^2$ и элемент $1 + a^*a$ обратимый для любого $a \in R$. Пусть A - вещественная C^* -алгебра с комплексным отображением $M = A + iA$. Тогда M - комплексная C^* -алгебра и, если A - вещественная AW*-алгебра, то M может не быть (комплексной) AW*-алгеброй.

Предложение 1. Пусть A - вещественная C^* -алгебра и пусть $M = A + iA$ - ее комплексное отображение. Тогда A является вещественной AW*-алгеброй тогда и только тогда, когда M является AW*-алгеброй.

Предложение 2. Существуют вещественные AW*-факторы, которые не являются вещественными W^* -факторами.

Теорема 1. Вещественная AW*-алгебра A является вещественной W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда

- (i) A обладает разделяющим семейством нормальных состояний;
- (ii) Его комплексное преобразование является AW*-алгеброй.

Теорема 2. Пусть α и β - инволютивные *-антиавтоморфизмы (комплексного) AW*-фактора M . Тогда вещественные AW*-факторы $A = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ и $B = \{x \in M : \beta(x) = x^*\}$ вещественно *-изоморфны тогда и только тогда, когда инволютивные *-антиавтоморфизмы α и β сопряжены, т.е. $\beta = \theta\alpha\theta^{-1}$ для подходящего *-автоморфизма AW*-фактора M .

Список литературы

- [1] Li Bing-Ren, Real operator algebras. World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd., (2003), 241p.

- [2] A. SH. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov, Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. *The Book: Kluwer Academic Publishers, MAIA (1997), V.418, 235p.*

Алгебры длины 2

Быков А.А.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург, Россия

bykov_antony@mail.ru

Пусть A – алгебра над полем F (здесь и далее будем предполагать, что алгебра ассоциативная). Обозначим множество всех ее подалгебр через $L(A)$ и определим на этом множестве две бинарные операции.

$$\forall B, C \in L(A) \quad B \wedge C = \{x \in A \mid x \in B \wedge x \in C\}$$

$$\forall B, C \in L(A) \quad B \vee C = \langle B \cup C \rangle$$

Из данных определений следует, что $B \wedge C = B \cap C$, что является также подалгеброй алгебры A ; $B \vee C$ – наименьшая из подалгебр алгебры A , содержащая подалгебры B, C .

Обозначим размерность алгебры A над полем F – $\dim A$; $\text{ind } A$ – индекс нильпотентности алгебры A ; $l(A)$ – длина максимальной цепи подалгебр.

Теорема 1. Пусть A – алгебра над полем F . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $l(A) \leq \dim(A)$;
2. если алгебра A нильпотентна, то $l(A) = \dim(A)$;
3. длина алгебры конечна тогда и только тогда, когда её размерность конечна;
4. $l(A) = 1$ тогда и только тогда, когда в A содержится ненулевой элемент a такой, что $a^2 = 0$ или $a^2 = a$.

Следствие 1. Если $l(A) < \dim A$, то алгебра A – нильпотентна.

Следствие 2. $l(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $\dim A = 1$.

Теорема 2. Пусть A – алгебра над полем F . Тогда $(L(A), \wedge, \vee)$ – решетка.

Теорема 3. Пусть алгебра A является нильпотентной алгеброй длины 2. Тогда $\text{ind } A \leq 3$.

Теорема 4. Пусть алгебра A алгебра над полем F и $l(A) = 2$. Тогда алгебра A изоморфна одной из следующих алгебр:

1. $B_1 = \langle r \rangle$, где $r^2 \neq 0$, $r^3 = 0$;
2. $B_2 = \langle r_1 \rangle \dot{+} \langle r_2 \rangle$, где $r_i \neq 0$, $r_i^2 = 0$; $i \in \{1, 2\}$
3. $B_3 = \langle e \rangle \oplus \langle r \rangle$, где $er = r$, $re = 0$; $e^2 = e \neq 0$; $r \neq 0$, $r^2 = 0$;
4. $B_4 = \langle e \rangle \oplus \langle r \rangle$, где $re = r$, $er = 0$; $e^2 = e \neq 0$; $r \neq 0$, $r^2 = 0$;
5. $B_5 = \langle e \rangle \dot{+} \langle r \rangle$, где $e^2 = e \neq 0$; $r \neq 0$, $r^2 = 0$;
6. $B_6 = \langle e_1 \rangle \dot{+} \langle e_2 \rangle$, где $e_i^2 = e_i \neq 0$; $i \in \{1, 2\}$;
7. B_7 – поле длины 2;
8. $B_8 = \langle e \rangle \oplus \langle r \rangle$, где $re = er = 0$; $e^2 = e \neq 0$; $r \neq 0$, $r^2 = 0$;

Список литературы

- [1] Б.Л. Ван дер Варден, Алгебра. М: Наука, 1976.

Графы Деза, связанные с пересечениями сопряжённых подгрупп в группах $SL_2(q)^1$

Голубятников М.П., Маслова Н.В.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия

mike_ru1@mail.ru, butterson@mail.ru

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [6].

Обыкновенный граф Γ называется графом Деза с параметрами (v, k, b, a) , если он имеет v вершин, регулярен степени k и любые две различные вершины u и v имеют либо a , либо b общих соседей (см. [2]).

Пусть G – конечная группа и $H \leq G$ и d – натуральное число. Через $\mathcal{H} = \{H^g \mid g \in G\}$ обозначим множество всех подгрупп G , сопряжённых в G с H . Построим граф $\Gamma(G, H, d)$ следующим образом. Вершинами графа являются элементы множества \mathcal{H} , и две вершины $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ смежны тогда и только тогда, когда $|H_1 \cap H_2| = d$. Для некоторых групп G и подгрупп H возникают графы, обладающие хорошими комбинаторными свойствами. Приведём несколько примеров.

Пример 1 Пусть $G = A_5$ и $H = \langle (3, 4, 5), (1, 2)(4, 5) \rangle < G$. Тогда $H \cong S_3$ и $\Gamma(G, H, 2)$ является графом Петерсена.

Пример 2 Пусть $G = A_6$ и $H = \langle (3, 6)(4, 5), (1, 2)(3, 4) \rangle < G$. Тогда $H \cong D_4$ и $\Gamma(G, H, 4)$ является дистанционно транзитивным графом (см. [6, стр. 230]) с массивом пересечений $\{4, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 2\}$ (рёберный граф 8-клетки Татта).

Зафиксируем простое число p и целое число $m > 0$. Пусть $\mathbb{F} = GF(q)$ – поле порядка $q = p^m$ и $SL_2(q) = SL_2(\mathbb{F})$ – специальная линейная группа, т. е. группа обратимых 2×2 матриц над \mathbb{F} с определителем, равным 1.

Мы изучаем граф $\Gamma(G, H, 8)$ для случая $G = SL_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod{4}$,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}^* \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}^* \right\}.$$

Основная цель работы доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Граф $\Gamma(G, H, 8)$ является связным рёберно-регулярным, транзитивным на дугах графом Деза обхвата 3 с параметрами:

$$\left(\frac{q(q+1)}{2}, \frac{q-1}{2}, 1, 0 \right).$$

Теорема 2. Множество вершин

$$C = \left\{ \Delta^{P_a} \mid P_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F} \right\},$$

является совершенным 1-кодом (см [3]) в графе $\Gamma(G, H, 8)$.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Список литературы

- [1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag, 1989).
- [2] M. Erickson, S. Fernando, W.H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter, Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs, *J. Combin. Des.*, **7**: 6 (1999), 395–405.
- [3] N. Biggs, Perfect codes in graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **15** (1973), 288–296.

О свойствах τ -минимальных не \mathfrak{F} -групп

Горепекина А.А.

Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, Брянск, Россия
e-mail@nastya3296@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть τ – подгрупповой функтор, т.е. отображение, сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую совокупность $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^\varphi = \tau(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ группы G . Для класса групп \mathfrak{F} τ -минимальной не \mathfrak{F} -группой называют группу, не принадлежащую классу \mathfrak{F} , каждая собственная τ -подгруппа которой классу \mathfrak{F} принадлежит [1]. В теоремах 1 и 2 установлены свойства τ -минимальных не \mathfrak{F} -групп в случае, когда \mathfrak{F} – $\bar{\omega}$ -веерная формация групп.

Используемые определения и обозначения стандартны (см., например, [2]). Пусть ω – непустое множество простых чисел, $\bar{\omega}$ – произвольное разбиение множества ω , \mathfrak{G}_ω – класс всех ω -групп, т.е. таких групп G , что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ – совокупность всех простых делителей порядка группы G ; $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω -подгруппа группы G ; $f: \bar{\omega} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(0) \neq \emptyset$, и $\gamma: \bar{\omega} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$, где $\mathfrak{G}_{\omega_i} \subseteq \gamma(\omega_i)$, – функции. Для любой группы G полагаем $\bar{\omega} \cap \pi(G) = \{\omega_i \in \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$. Формация

$$\mathfrak{F} = \{G \mid G/O_\omega(G) \in f(0) \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)\}$$

называется $\bar{\omega}$ -веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником f [3], где $G_{\gamma(\omega_i)}$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу $\gamma(\omega_i)$.

Теорема 1. Пусть γ – p -направление $\bar{\omega}$ -веерной формации, τ – регулярный γ -радикальный подгрупповой функтор, \mathfrak{F} – τ -замкнутая $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником f , $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Если G – τ -минимальная не \mathfrak{F} -группа и $G/O_\omega(G) \in f(0)$, то $G/G_{\gamma(\omega_i)}$ является τ -минимальной не $f(\omega_i)$ -группой для некоторого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$.

Теорема 2. Пусть G – группа, $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G)$, γ – p -направление $\bar{\omega}$ -веерной формации, τ – регулярный $\mathfrak{G}_{\omega_i, \gamma(\omega_i)}$ -радикальный подгрупповой функтор, \mathfrak{F} – τ -замкнутая $\bar{\omega}$ -веерная формация с направлением γ и $\bar{\omega}$ -спутником f . Если $G/G_{\gamma(\omega_i)}$ – τ -минимальная не $f(\omega_i)$ -группа, $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G_{\gamma(\omega_i)} \subseteq K$ для любой $K \in \tau(G)$, то G является τ -минимальной не \mathfrak{F} -группой.

Список литературы

- [1] А. Н. Скиба, Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
- [2] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
- [3] М. М. Сорокина, А. А. Горепекина, $\bar{\omega}$ -Веерные формации конечных групп. *Чебышевский сборник*, **22**: 3 (79) (2021), 233–246.

Локально конечные группы насыщенные специальными унитарными группами ¹

Кухарев А.В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
kukharev.av@mail.ru

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X , если любая конечная подгруппа в K из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из X (множество X называется насыщающим множеством для G) [1]. Из [2] следует, что произвольная локально конечная группа, насыщенная группами из множества групп $\{L_m(p^n)\}$, где m является фиксированной, а p и n не фиксированны, изоморфна $L_m(Q)$ над некоторым локально конечным полем Q . Естественно возникает задача рассмотреть случай, когда локально конечная группа G насыщена специальными унитарными группами степени m .

Пусть P — множество простых чисел, N — множество положительных целых чисел, $\{SU_3(p^n)\}$ — специальная унитарная группа степени 3 над конечным полем, состоящим из p^{2n} элементов.

Теорема 1. Локально конечная группа G , насыщенная группами из множества групп $\{SU_3(p^n)\}$, где $p \in P$ и $n \in N$, изоморфна $SU_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q .

Теорема 1 и [3, Theorem 4.18] позволяют получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества групп

$$\mathfrak{S} = \{SU_3(F_1), PSL_n(F_2), PGL_n(F_3), PSU_3(F_4), Sz(F_5)\},$$

где F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 — некоторое множество конечных полей. Тогда группа G изоморфна одной из групп множества

$$\{SU_3(F), PSL_n(F), PGL_n(F), PSU_3(F), Sz(F)\}$$

для подходящего локально конечного поля F .

Список литературы

- [1] А. К. Shlepin, On some periodic groups saturated with finite simple groups. *Mathematical works.*, **1** (1998), 129–138.
- [2] V. V. Belyaev, Locally finite Chevalley groups. Studies on the theory of groups. Sverdlovsk: Publishing House of the UNC of the USSR Academy of Sciences, 1984. P. 39–50.
- [3] O. N. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, Locally Finite Groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

О тестовых фрагментах совершенных раскрасок циркулянтных графов

Лисицына М.А.

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург,
Россия
lisitsynama@gmail.com

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф. Раскраску вершин графа G назовём *совершенной*, если цветовой состав всякой сферы радиуса 1 в этом графе зависит только от цвета её центра.

Подграф T графа G является *k-тестовым фрагментом*, если сужения двух различных совершенных раскрасок графа G в k цветов на подграф T всегда различны. *Длиной k-тестового фрагмента* назовём мощность множества его вершин. Для перечисления совершенных раскрасок G естественно использовать компьютерную программу, перебирающую все варианты раскраски такого фрагмента T : для каждого из них программа либо продолжает его до совершенной раскраски G , либо устанавливает, что такого продолжения нет. Найти форму *k-тестового фрагмента* T и его длину для произвольного графа G – содержательная и интересная задача.

Объектами данного исследования являются *k-тестовые фрагменты* бесконечных циркулянтных графов. *Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями* $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ – это граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а рёбрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Граф $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций*.

Ряд результатов для совершенных раскрасок циркулянтных графов в 2 цвета получен Д. Б. Хорошиловой [3, 4]. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций охарактеризованы в [2]. В [1] описаны совершенные раскраски графа $C_\infty(1, 2)$ в произвольное конечное число цветов. В [5] приведена бесконечная серия совершенных раскрасок графов $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ с новыми параметрами.

Для тестовых фрагментов бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Длина 2-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $2n + 2$.*

Теорема 2. *Длина 3-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $4n + 1$.*

Теорема 3. *Длина 4-тестового фрагмента графа $C_\infty(1, 2, \dots, n)$ не превосходит $4n + 2$.*

В общем случае – для совершенных раскрасок бесконечного циркулянтного графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ в k цветов – оценка получается менее точная.

Теорема 4. *Длина k-тестового фрагмента графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ не превосходит $2d_n(k+1) + 1$.*

Список литературы

- [1] М. А. Лисицына, О. Г. Паршина, Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **24**: 3 (2017), 20–34.
- [2] О. Г. Паршина, Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **21**: 2 (2014), 76–83.
- [3] Д. Б. Хорошилова, О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **18**: 6 (2011), 82–89.
- [4] Д. Б. Хорошилова, О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **16**: 1 (2009), 80–92.
- [5] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina, New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses. *Sib. Electron. Math. Rep.*, **18** (2021), 530–533.

О дистанционно регулярных графах Γ с сильно регулярным графом Γ_2 ¹

Махнев А.А., Белоусов И.Н., Голубятников М.П.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

makhnev@imm.uran.ru, i_belousov@mail.ru, mike_ru1@mail.ru

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$, $a = a_3$.

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_i может быть сильно регулярным в случаях $i = 2$ или $i = 3$. Дж. Кулен [1] с соавторами нашли параметры сильно регулярного графа Γ_2 по массиву пересечений графа Γ , в этом случае Γ имеет собственное значение $\theta = a_2 - c_3$.

В данной работе изучаются графы с собственными значениями $\theta_2 = 0$ и $\theta_3 = a_2 - c_3$.

Теорема 1. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_2 и собственным значением $\theta = 0$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{yx + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$ и неглавные собственные значения $a_1 = xy + y - 1$, 0 , $-z$ кратностей $m_1 = (yx + yz + z)(x + z)(y - 1)y(z - 1)/((xy + y + z - 1)(xy + y - 1)z)$, $m_2 = (yx + yz + z)(yz - y + 1)xy(z - 1)/((xy + y - 1)z^2)$ и $m_3 = (yz - y + 1)(x + z)^2y^2/((xy + y + z - 1)z^2)$.

Для $x \leq 3$ получаются следующие примеры:

- 1) $\{12, 6, 2; 1, 4, 9\}$, спектр $12^1, 5^6, 0^{14}, -3^{14}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(35, 18, 9, 9)$;
- 2) $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, спектр $60^1, 14^{45}, 0^{207}, -10^{69}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(322, 225, 160, 150)$;
- 3) $\{63, 42, 12; 1, 9, 49\}$, спектр $63^1, 20^{42}, 0^{258}, -7^{129}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(430, 294, 203, 196)$;
- 4) $\{72, 45, 16; 1, 8, 54\}$, спектр $72^1, 26^{45}, 0^{345}, -6^{207}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(598, 405, 276, 270)$;
- 5) $168, 140, 18; 1, 24, 147$, спектр $168^1, 27^{140}, 0^{940}, -21^{188}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(1269, 980, 763, 735)$ и спектром $980^1, 35^{188}, -7^{1080}$;
- 6) $180, 140, 27; 1, 18, 150$, спектр $180^1, 39^{140}, 0^{1316}, -15^{376}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(1833, 1400, 1075, 1050)$;
- 7) $208, 156, 36; 1, 16, 169$, спектр $208^1, 51^{156}, 0^{1884}, -13^{628}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(2669, 2028, 1547, 1521)$;
- 8) $240, 176, 45; 1, 15, 192$, спектр $240^1, 63^{176}, 0^{2596}, -12^{944}$, граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(3717, 2816, 2140, 2112)$.

Теорема 2. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{2x(2x^2 + 3x + 1), (x + 1)(4x^2 - 1), 2x^2; 1, 2x(x + 1), x(2x + 1)^2\}$ не существуют (грант РНФ).

Теорема 2 дает новое доказательство несуществования графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ ($x = 2$), полученное в [2].

Следствие 1. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{yx + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$ и $v \leq 3800$ изоморфен графу Джонсона $J(7, 3)$ с массивом пересечений $\{12, 6, 2; 1, 4, 9\}$ (грант РНФ).

Список литературы

- [1] Q. Iqbal, J. H. Koolen, J. Park, M. Rehman, Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$. *Linear Algebra and Appl.*, **587** (2020), 271–290.
- [2] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15** (2018), 1506–1512.

¹Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект 19-71-10067).

О графах Шилла с $b = 6$ и $b_2 \neq c_2$

Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
gutnovaalina@gmail.com

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, a_1 — степень локального подграфа (окрестности вершины).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1 , равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Допустимые массивы пересечений графов Шилла найдены в [1] для $b \in \{2, 3\}$ и в [2] для $b \in \{4, 5\}$. В [2] доказано, что Q -полиномиальные графы Шилла с $b = 5$ не существуют. Там же найдены Q -полиномиальные графы Шилла с $b = 6$.

Предложение. Q -полиномиальный граф Шилла с $b = 6$ имеет массив пересечений

- (1) $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, где $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$;
- (2) $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ или $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$;
- (3) $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ или $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$.

В [3] доказано, что графы Шилла с массивами пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ и $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ не существуют.

В данной работе изучаются Q -полиномиальные графы Шилла с массивами пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ и $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$.

Теорема 1. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$ и $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ не существуют.

Теорема 2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$ не существует.

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [4].

Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park, Shilla distance-regular graphs. *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010), 2064–2073.
- [2] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$. *Ural Mathem. journal*, **7**: 2 (2021), 51–58.
- [3] А. А. Махнев, Ч. Ван, О Q -полиномиальных графах Шилла с $b = 6$. *Владикавказский математический журнал*, **1** (2022).
- [4] A. Jurishich, J. Vidali, Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, **65** (2012), 29–47.

Граница Кулена-Пака и дистанционно регулярные графы без m -лап¹

Махнев А.А., Го Вэнь-бинь, Ефимов К.С.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия

Институт науки и технологии Академии наук Китая, Хефэй, Китай

Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург, Россия

konstantin.s.efimov@gmail.com

В [1] найдена следующая граница для максимального размера s -клик в окрестности вершины дистанционно регулярного графа.

Предложение 1 Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, s – максимальный размер клики в окрестности вершины графа Γ . Тогда

$$c_2 - 1 \geq \frac{s(a_1 + 1) - k}{\binom{s}{2}}.$$

Для графа Γ с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ достигается равенство в границе Кулена-Пака для $s = 4$. По [1, теорема 4] Γ является графом Тервиллигера и не существует.

Заметим, что $s \leq 3$ в графах Хэмминга $H(3, n)$, Джонсона $J(n, 3)$, в точечных графах обобщенных шестиугольников $GH(q, 1)$.

Предложение 2 Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 3 без 4-лап с не более чем 1024 вершинами, отличный от графа Хэмминга $H(3, n)$, Джонсона $J(n, 3)$ и точечного графа обобщенного шестиугольника $GH(q, 1)$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 6, 5; 1, 1, 4\}$, $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$, $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$, $\{56, 36, 9; 1, 3, 48\}$ или $\{65, 44, 11; 1, 4, 55\}$.

Граф с массивом пересечений $\{12, 6, 5; 1, 1, 4\}$ является реберным графом графа Хофмана-Синглтона. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ не существует по [2]. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ и $\{56, 36, 9; 1, 3, 48\}$ не существуют по [3]. По [1, теорема 4] граф с массивом пересечений $\{65, 44, 11; 1, 4, 55\}$ не существует.

Кроме того, граф с массивом пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$ также не содержит 4-лап.

Предложение 3 Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 3 с не более чем 1024 вершинами без 5-лап, но содержащий 4-лапу. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ или $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$.

Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ и $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ не существуют по [4].

Кроме того, граф с массивом пересечений $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$ также не содержит 5-лап.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{83, 54, 21; 1, 6, 63\}$ не существует.

Для графов Γ с массивами пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ и $\{80, 54, 12; 1, 6, 60\}$ достигается равенство в границе Кулена-Пака для $s = 5$. По [1, теорема 4] Γ – граф Тервиллигера. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ (это локально петерсеновский граф).

Теорема 2 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{80, 54, 12; 1, 6, 60\}$ не существует.

Теорема 3 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$ не существует.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ и ГФЕН Китая (проект №20-51-53013) и Национального Естественного научного фонда Китая (проект № 12171126).

Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park, Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31** (2010), 2064–2073.
- [2] A.L. Gavriilyuk, A.A. Makhnev, Distance-regular graph with intersection array $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ does not exist. *Discrete Math. Appl.*, **23** (2013), 225–244.
- [3] A.L. Gavriilyuk, Distance-regular graphs with intersection arrays $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ and $\{56, 36, 9; 1, 3, 48\}$ do not exist. *Dokl. Math.*, **84** (2011), 444–446.
- [4] A.L. Gavriilyuk, A.A. Makhnev, Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist. *Des. Codes Cryptogr.*, **65** (2012), 49–54.
- [5] S. Bang, Geometric distance-regular graphs without 4-claws. *Linear Algebra Appl.*, **438** (2013), 37–46.
- [6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1989

О дистанционно регулярных графах с массивами пересечений

$$\{(q^2 + q - 1)(q^2 + q + 1), (q^2 + q)q^2, q^3; 1, (q^2 + q), q^2(q^2 + q + 1)\}^1$$

Махнев А.А., Исакова М.М., Токбаева А.А.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Кабардино-Балкарский госуниверситет, Нальчик, Россия

makhnev@imm.uran.ru, isakova2206@mail.ru, tok2506@mail.ru

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$, $a = a_3$.

Q -полиномиальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$, где $(t^2 - a - 1)(c_2 + 1) = a(a + 1)$ ([1]). Скажем, что Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a , — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$, — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$.

Граф Γ типа (I) является формально самодуальным. Если этот граф имеет классические параметры d, b, α, β , то $d = 3$, $b = \alpha + 1 = q$, $\beta = q^2 + q - 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(q^2 + q - 1)(q^2 + q + 1), (q^2 + q)q^2, q^3; 1, (q^2 + q), q^2(q^2 + q + 1)\}$.

Нами изучен случай $q = 3$.

Теорема. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ не существует.*

Список литературы

- [1] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, M. S. Nirova, On Q -polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 . *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **16** (2019), 1358–1365.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013).

Несуществование некоторых Q -полиномиальных графов Шилла с $b = 6$ ¹

Махнев А.А., Ван Ч.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Университет провинции Хайнань, Китай

makhnev@imm.uran.ru, wzhighang@hainanu.edu.cn

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1 , равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ (см. [1]). Белоусов И.Н. и Махнев А.А. нашли допустимые массивы пересечений Q -полиномиальных графов Шилла с $b = 6$ [2].

Предложение. Q -полиномиальный граф Шилла с $b = 6$ имеет массив пересечений

(1) $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, где $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$;

(2) $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ или $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$;

(3) $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ или $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$.

Нами изучен случай графов с массивами пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ и $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$.

Теорема. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ и $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ не существуют.

Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park, Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31** (2010), 2064–2073.
 [2] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$. *Urals Mathematical Journal*, **7**: 2 (2021), 51–58.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013) и Естественно научного фонда Китая провинции Хайнань (проект № 120RC453).

Единицы целочисленного группового кольца прямого произведения двух целочисленных групп порядка 8

Мелехина Д.В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
daryamelekhina0112@gmail.com

Аннотация: в работе изучаются единицы (=обратимые элементы) целочисленного группового кольца прямого произведения двух циклических групп порядка 8. Для этого описаны классы алгебраически сопряженных характеров, вид и свойства единиц.

Пусть группа $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ — прямое произведение двух циклических групп порядка 8.

Обозначим через α — примитивный корень из единицы степени 8. Без ограничения общности можем выбрать, например,

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{8} + i \sin \frac{2\pi}{8} = e^{i\frac{2\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Неприводимые характеры группы G задаются согласно [2] следующим образом. Для каждой пары чисел $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ определяется характер

$$\chi_{a,b} : G \rightarrow \langle \alpha \rangle,$$

где для любых $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$

$$\chi_{a,b}(x^k, y^j) = \alpha^{ak+bj}.$$

Для $m = \{1, 3, 5, 7\}$ определим автоморфизм группы $\langle \alpha \rangle$ так:

$$\varphi_m : \langle \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha \rangle,$$

где для любого $j \in \{0, 1, \dots, 7\}$

$$\varphi_m(\alpha^k) = \alpha^{mj}.$$

Предложение. *Классы эквивалентности алгебраически сопряженных характеров таковы.*

Из одного характера

$$\{\chi_{0,0}\}; \{\chi_{0,4}\}; \{\chi_{4,0}\}; \{\chi_{4,4}\}.$$

Из двух характеров

$$\{\chi_{0,2}, \chi_{0,6}\}; \{\chi_{2,0}, \chi_{6,0}\}; \{\chi_{4,2}, \chi_{4,6}\}; \{\chi_{2,4}, \chi_{6,4}\}; \{\chi_{2,2}, \chi_{6,6}\}; \{\chi_{2,6}, \chi_{6,2}\}.$$

Из четырёх характеров

$$\begin{aligned} & \{\chi_{1,0}, \chi_{3,0}, \chi_{5,0}, \chi_{7,0}\}; \{\chi_{0,1}, \chi_{0,3}, \chi_{0,5}, \chi_{0,7}\}; \{\chi_{1,4}, \chi_{3,4}, \chi_{5,4}, \chi_{7,4}\}; \{\chi_{4,1}, \chi_{4,3}, \chi_{4,5}, \chi_{4,7}\}; \\ & \{\chi_{1,2}, \chi_{3,6}, \chi_{5,2}, \chi_{7,6}\}; \{\chi_{2,1}, \chi_{6,3}, \chi_{2,5}, \chi_{6,7}\}; \{\chi_{6,1}, \chi_{2,3}, \chi_{6,5}, \chi_{2,7}\}; \{\chi_{1,6}, \chi_{3,2}, \chi_{5,6}, \chi_{7,2}\}; \\ & \{\chi_{1,1}, \chi_{3,3}, \chi_{5,5}, \chi_{7,7}\}; \{\chi_{1,3}, \chi_{3,1}, \chi_{5,7}, \chi_{7,5}\}; \{\chi_{1,5}, \chi_{3,7}, \chi_{5,1}, \chi_{7,3}\}; \{\chi_{1,7}, \chi_{3,5}, \chi_{5,3}, \chi_{7,1}\}. \end{aligned}$$

Пусть χ — характер группы G и $I(\chi)$ — множество всех алгебраически сопряженных с χ характеров. Определим

$$\Phi(\chi) = \{\varphi \in \{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_7\} \mid \varphi(I(\chi)) = I(\chi)\},$$

также определим подкольца

$$\mathbf{Z}_\chi = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{если } I_\chi = \{\chi\}; \\ \mathbf{Z}[i], & \text{если } I_\chi = \{\chi, \chi_1\}; \\ \mathbf{Z}[\alpha], & \text{если } I_\chi = \{\chi, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}. \end{cases}$$

Известно, что $\mathbf{Z}[i]$ — кольцо гауссовых целых чисел:

$$\mathbf{Z}[i] = \{a_0 + a_1 i \mid a_0, a_1 \in \mathbf{Z}\},$$

а кольцо $\mathbf{Z}[\alpha]$ имеет следующий вид (см. [2])

$$\mathbf{Z}[\alpha] = \{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}\}.$$

Хорошо известны [1] группы единиц колец $\text{Un}(\mathbf{Z}) = \{-1; 1\}$, $\text{Un}(\mathbf{Z}[i]) = \{-1; 1; -i; i\}$ и $\text{Un}(\mathbf{Z}[\alpha]) = \langle \alpha \rangle \times \langle 1 + \sqrt{2} \rangle$, где $1 + \sqrt{2} = 1 + \alpha + \alpha^7$.

Пусть $\mu \in \mathbf{Z}_\chi$ и $e(\varphi(\chi))$ — минимальный идемпотент, соответствующий характеру $\varphi(\chi) \in I(\chi)$. Тогда согласно [1] *локальным элементом* рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$, соответствующим характеру χ и элементу μ , называется элемент

$$u_\chi(\mu) = (1, 1) + \sum_{\varphi \in \Phi(\chi)} (\varphi(\mu) - 1) e(\varphi(\chi)).$$

Если $\mu \in \text{Un}(\mathbf{Z}_\chi)$, то

$$u_\chi(\mu)u_\chi(\mu^{-1}) = u_\chi(1) = (1, 1)$$

и $u_\chi(\mu)$ — *локальная единица* групповой алгебры $\mathbf{Q}G$.

Лемма. Пусть заданы характер χ и элемент $\mu \in \mathbf{Z}_\chi$. Тогда имеем для случаев I_χ .

Из одного характера

$$u_\chi(\mu) = (1, 1) + (\mu - 1) e(\chi).$$

Из двух характеров

$$u_\chi(\mu) = (1, 1) + (\mu - 1) e(\chi) + (\bar{\mu} - 1) e(\varphi_7(\chi)).$$

Здесь $\bar{\mu}$ — комплексно сопряжённое с μ число.

Из четырёх характеров

$$u_\chi(\mu) = (1, 1) + (\mu - 1) e(\chi) + (\bar{\mu} - 1) e(\varphi_7(\chi)) + (\varphi_3(\mu) - 1) e(\varphi_3(\chi)) + (\overline{\varphi_3(\mu)} - 1) e(\varphi_5(\chi)).$$

Изучается вопрос при каких условиях на единицу $\mu \in \text{Un}(\mathbf{Z}_\chi)$ локальная единица $u_\chi(\mu)$ будет в целочисленном групповом кольце $\mathbf{Z}G$.

Теорема.

1. Если $\mu \in \{-1; 1; -i; i\}$, то $u_\chi^2(\mu) \in \mathbf{Z}G$.

2. Пусть $\mu \in \langle \alpha \rangle \times \langle 1 + \sqrt{2} \rangle$. Тогда

$$u_{\chi_{a,b}}^8(\mu) \times u_{\chi_{c,d}}^8(\mu) \times \dots \times u_{\chi_{k,l}}^8(\mu) \in \mathbf{Z}G \iff \begin{cases} a + c + \dots + k \equiv 0 \pmod{2}, \\ b + d + \dots + l \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

и $u_\chi^{16}(\mu) \in \mathbf{Z}G$.

Список литературы

- [1] Р. Ж. Алеев, Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. *Математические труды*, **3**: 1 (2000), 3–37.
- [2] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, Теория чисел. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1989.
- [3] Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1969.

Меры центральности в конечно и счетно разложимых алгебрах фон Неймана¹

Новиков А. А., Абед С.А., Николаева И.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

College of Administration and Economics, Diyala University, Baquba, Diyala Governorate, Republic of Iraq

Akvelon inc., Казанский офис, Казань, Российская Федерация

a.hobukob@gmail.com, samialbarkish@gmail.com, irina.nikolaeva@akvelon.com

Аннотация: в данной работе представлены результаты в области исследования мер центральности для алгебр фон Неймана типа I. Определение меры центральности введено для алгебры фон Неймана вообще.

Пусть \mathcal{A} – алгебра фон Неймана, тогда $\mathcal{A}^{sa}, \mathcal{A}^+$ – ее самосопряженная и положительная части, соответственно. \mathcal{A}^* – сопряженное пространство линейных функционалов. $B(H)$ обозначает алгебру всех ограниченных операторов над некоторым гильбертовым пространством H . Центр алгебры мы обозначаем как $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$.

Определение 1. Рассмотрим функционал

$$\Delta(x) = \inf_{A \in \mathbb{R}^+} \left\{ \left\| \mathbf{1} - \frac{x}{A} \right\| \right\}, \text{ где } x \in B(H)^+.$$

Для простых алгебр он иллюстрирует близость элемента к тривиальному центру.

Заметим, что если $x = \mathbf{1}$, то $\Delta(\mathbf{1}) = 0$ ($A = 1$) и $\Delta(\mathbf{0}) = 1$.

Предложение 1. Пусть x положительный оператор ($x \in B(H)^+$), тогда $\Delta(x) \leq 1$.

Предложение 2. Если x необратим (вырожден), тогда

$$\Delta(x) = 1.$$

Теорема 1. Пусть x обратимый положительный оператор ($x \in B(H)^+$) с обратным x^{-1} , тогда

$$\Delta(x) = \frac{\|x\| \|x^{-1}\| - 1}{\|x\| \|x^{-1}\| + 1}. \quad (1)$$

Замечание 1. Заметим, что для любого обратимого оператора $x \in B(H)^+$ соблюдается равенство $\Delta(x) = \Delta(x^{-1})$.

Следствие 1. Пусть $x \in B(H)^+$ обратим, тогда $\Delta(x) < 1$.

Теорема 2. Пусть $x, y \in B(H)^+, \lambda \in \mathbb{R}^+$, тогда

1) $\Delta(\lambda x) = \Delta(x)$;

2) если x, y обратимы, то

$$\begin{aligned} & \left(\|x + y\| + \frac{1}{\|(x + y)^{-1}\|} \right) \Delta(x + y) \leq \\ & \leq \left(\|x\| + \frac{1}{\|x^{-1}\|} \right) \Delta(x) + \left(\|y\| + \frac{1}{\|y^{-1}\|} \right) \Delta(y). \end{aligned}$$

если $x = \lambda y$, то неравенство превращается в равенство.

¹Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Теорема 3. Пусть $x, y \in B(H)^+$, тогда $\Delta(x + y) \leq \max\{\Delta(x), \Delta(y)\}$.

Основываясь на теоремах 2 и 2 для $B(H)$ можно ввести конусы

$$K_c = \{x \in B(H)^+ | \Delta(x) \leq c\},$$

которые будут замкнутыми конусами конуса положительных элементов, причем если $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$, то

$$\mathbb{R}^+ \mathbf{1} \subset K_0 \subset K_{c_1} \subset K_{c_2} \subset K_1 = \mathcal{B}^+(H).$$

Отсюда следует, например, возможность построить расслоение конуса положительных элементов, параметризованного отрезком $[0, 1]$.

Теорема 4. Пусть $x, y \in B(H)^+$, тогда

- 1) $\Delta(xy) \leq \max(\Delta(x^2), \Delta(y^2))$;
- 2) $\Delta(x^2) \leq 2\Delta(x)$;
- 3) $\Delta(x) \leq \Delta(x^2)$.

Пусть \mathcal{N} – W^* -алгебра с центром $\mathfrak{C}(\mathcal{N})$, имеющая представление $\pi : \mathcal{N} \mapsto B(H)$.

Определение 2. За $\Delta_{\mathcal{N}} : x \in \mathcal{N}^+ \mapsto [0, 1]$ обозначим следующий функционал

$$\Delta_{\mathcal{N}}(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^+, z \in \mathfrak{C}(\mathcal{N})} \left\{ \left\| z - \frac{x}{a} \right\| \right\}.$$

Δ также описывает близость элемента к центру, однако, теперь уже нетривиальному. Разумеется, если в качестве алгебры мы рассмотрим $B(H)$ мы получим функционал Δ . Заметим также, что

$$\Delta_{\mathcal{N}}(x) \leq \Delta_{B(H)}(\pi(x)).$$

В общем случае определения, разумеется, различны,

Пример 1. Пусть $\mathcal{A} = \ell_{\infty}$ – коммутативная W^* -алгебра. Тогда $\Delta_{\mathcal{A}} = 0$ даже для всех проекторов из ℓ_{∞} .

Предложение 3. Пусть \mathcal{N} – алгебра фон Неймана и $x, y \in \mathcal{N}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, тогда

- 1) $\Delta_{\mathcal{N}}(\lambda x) = \Delta_{\mathcal{N}}(x)$;
- 2) $\Delta_{\mathcal{N}}(x) \leq 1$;
- 3) если x обратим (невырожден), тогда $\Delta_{\mathcal{N}}(x) < 1$.

Определение 3. Пусть $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in I}$ – семейство факторов, тогда если $x \in \oplus_{i \in I} \mathcal{N}_i^+ = \mathcal{M}^+$ имеет разложение $x = \oplus_{i \in I} x_i$ такое, что $x_i \in \mathcal{N}_i^+$, то определим $\Delta'_{\mathcal{M}}$ равенством

$$\Delta'_{\mathcal{M}}(\oplus_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} \{\Delta_{\mathcal{N}_i}(x_i)\}.$$

Теорема 5. Пусть $x, y \in \mathcal{N}^+$, \mathcal{N} – не более чем счетно разложимые алгебры фон Неймана, тогда

- 1) $\Delta'_{\mathcal{M}}(xy) \leq \max(\Delta'_{\mathcal{M}}(x^2), \Delta'_{\mathcal{M}}(y^2))$;
- 2) $\Delta'_{\mathcal{M}}(x^2) \leq 2\Delta'_{\mathcal{M}}(x)$;
- 3) $\Delta'_{\mathcal{M}}(x) \leq \Delta'_{\mathcal{M}}(x^2)$;
- 4) $\Delta'_{\mathcal{M}}(x + y) \leq \max\{\Delta'_{\mathcal{M}}(x), \Delta'_{\mathcal{M}}(y)\}$.

Список литературы

- [1] D. Viosztek, Connections between centrality and local monotonicity of certain functions on C^* -algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, **453**: 1 (2016), 221–226.
- [2] An. An. Novikov, O.E. Tikhonov, Characterization of central elements of operator algebras by inequalities. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**: 2 (2015), 208–210.
- [3] A. Novikov, L_1 -space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra. *Positivity*, **21**: 1 (2017), 359–375.
- [4] A. Novikov, C^* -algebra Positive Element Invertibility Criteria in Terms of L_1 -norms Equivalence and L_∞ -norms Equivalence. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **40**: 5 (2019), 549–552.

Локально конечные группы насыщенные унитарными группами ¹

Ушаков Ю.Ю., Шлепкин А.А.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
yuron@akadem.ru, shlyopkin@gmail.com

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X , если любой конечная подгруппа в K из G содержится в подгруппе группы G , изоморфна некоторой группы от переменной X (набор переменной X называется фиттинга насыщающим множеством для группы G) [1]. Из [2] следует, что произвольное локально конечных группа насыщена группами из множества групп $\{L_m(p^n)\}$, где m является фиксированной и p и n являются не фиксированными, изоморфна $L_m(Q)$ над некоторым локально конечным полем Q . Естественно было рассмотреть случай, когда локально конечная группа, насыщена унитарными группами. из множества групп $\{U_m(p^n)\}$ при тех же ограничениях на m, n, p .

Пусть P — множество простых чисел, N - множество положительных целых чисел, $\{U_3(p^n)\}$ — унитарная группа степени 3 над конечным полем из p^{2n} элементов.

Theorem 1. Локально конечная группа G , насыщенная группами из множества групп $\{U_3(p^n)\}$, where $p \in P$ and $n \in N$, изоморфна $U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q .

Теорема 1 и [3, Теорема 4.18] позволяют получить следующий результат.

Theorem 2. Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества групп

$$\mathfrak{S} = \{U_3(F_1), PSL_n(F_2), PGL_n(F_3), PSU_3(F_4), Sz(F_5)\},$$

где F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 некоторое множество конечных полей. Тогда группа G изоморфна одной из групп множества

$$\{U_3(F), PSL_n(F), PGL_n(F), PSU_3(F), Sz(F)\}$$

для подходящего локально конечного поля F .

Список литературы

- [1] A. K. Shlepin, On some periodic groups saturated with finite simple groups. *Mathematical works.*, **1** (1998), 129–138.
- [2] V. V. Belyaev, Locally finite Chevalley groups. Studies on the theory of groups. Sverdlovsk: Publishing House of the UNC of the USSR Academy of Sciences, 1984. P. 39–50.
- [3] O. N. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, Locally Finite Groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

Об одном классе абелевых вершинно-транзитивных антиподальных дистанционно регулярных графов¹

Циовкина Л.Ю.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
tsiovkina@imm.uran.ru

Группа всех автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа Φ , фиксирующих (как множество) каждый его антиподальный класс, обозначается через $\mathcal{CG}(\Phi)$. Если Φ — антиподальный дистанционно регулярный граф и группа $\mathcal{CG}(\Phi)$ является абелевой и действует транзитивно на каждом антиподальном классе, то в соответствии с терминологией из [1] граф Φ будет называться *абелевым*. В настоящей работе исследуется предложенная в [2] задача классификации абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством:

- (*) Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов G , которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов.

При этом, не умаляя общности, можно полагать, что G совпадает с полным прообразом группы G^Σ в $\text{Aut}(\Gamma)$. Нетрудно понять, что в случае, когда подстановочный ранг $\text{rk}(G^\Sigma)$ группы G^Σ равен 2, группа G действует транзитивно на дугах графа Γ . Более того, при условии $\text{rk}(G^\Sigma) = 2$ данная задача недавно была полностью решена (см. обзоры в [3, 4]).

Целью настоящей работы является изучение класса абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 со свойством (*) в случае, когда $\text{rk}(G^\Sigma) \geq 3$.

Как известно, все примитивные почти простые группы подстановок ранга 3 классифицированы. Согласно этой классификации при условии $\text{rk}(G^\Sigma) = 3$ цоколь группы G^Σ является либо спорадической простой группой, либо знакопеременной группой, либо простой группой исключительного лиева типа, либо классической простой группой. В [2] рассматриваемая задача была решена при условии, что $\text{rk}(G^\Sigma) = 3$ и цоколь группы G^Σ является спорадической простой группой. При этом в [2] был получен ряд существенных ограничений на спектр и параметры графа Γ со свойством (*). С применением этих ограничений здесь мы исследуем случай, когда цоколь группы G^Σ является знакопеременной группой. Основным результатом работы представлен в следующей теореме.

Теорема. *Предположим, что абелев недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ обладает свойством (*), причем $\text{rk}(G^\Sigma) = 3$ и $T := \text{Soc}(G^\Sigma)$ — знакопеременная группа. Тогда либо (i) $T \simeq A_5$, $k = 9$ и $r\mu = 8$, либо (ii) $T \simeq A_8$, $k = 27$ и $r\mu \in \{20, 32\}$, либо (iii) $T \simeq A_9$, $k = 119$ и $r\mu \in \{108, 128\}$, либо (iv) $T \simeq A_{10}$, $k = 125$ и $r\mu \in \{104, 144\}$.*

С применением компьютерных вычислений в работе проведена классификация графов из заключения теоремы, а также найдены допустимые массивы пересечений графов Γ , обладающих свойством (*) при следующих ограничениях на ранг и степень группы G^Σ : $3 \leq \text{rk}(G^\Sigma) \leq 5$ и $|\Sigma| \leq 2500$.

Список литературы

- [1] C. D. Godsil, A. D. Hensel, Distance regular covers of the complete graph. *J. Comb. Theory Ser. B.*, **56** (1992), 205–238.
- [2] Л. Ю. Циовкина, Об одном классе вершинно-транзитивных дистанционно регулярных накрытий полных графов. *Сиб. электр. матем. изв.*, **18**: 2 (2021), 758–781.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00122).

- [3] A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, L. Yu. Tsiovkina, Edge-symmetric distance-regular coverings of complete graphs: the almost simple case. *Algebra and Logic*, **57**: 2 (2018), 141–152.
- [4] L. Yu. Tsiovkina, On a class of edge-transitive distance-regular antipodal covers of complete graphs. *Ural Math. J.*, **2** (2021), 136–158.

Симметричность слов в бернсайдовой группе $B_0(2, 5)^1$

Шлепкин А.А.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
shlyopkin@gmail.com

В работе А.А. Кузнецова и А.К. Шлёпкина «О различии бернсайдовых групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ ». [1] определено достаточное условие для бесконечности группы $B(2, 5)$. Указанная группа будет бесконечной при невыполнении хотя бы одного из 2337 соотношений в указанном массиве. В настоящей работе проведен сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ по указанным соотношениям до длины 36 включительно. Начиная с длины 30, найдены соотношения, доказать которые в $B(2, 5)$, используя алгоритмы из работы [1] не удаётся. Проведен анализ всех соотношений такого типа на предмет симметричности слов данных соотношений. Алфавит – упорядоченная совокупность символов: $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Слово – последовательность символов в заданном алфавите: $v = \beta_1 \dots \beta_s$, где $\beta_i \in A$. Длина слова – количество символов в слове: $L(v) = s$. Для заданного слова v определим множество

$$M_v = \{i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq [s/2], \beta_i \neq \beta_{s-(i-1)}\}$$

Мощность данного множества обозначим через $card(M_v)$. Если $card(M_v) = n \neq 0$, то слово v имеет асимметрию порядка n . Если $card(M_v) = 0$, то слово v является симметричным. Все 2337 соотношений из работы [1] были занумерованы. Далее была найдена асимметрия левой и правой части каждого соотношения. Пусть есть соотношение $v = w$ с номером k из работы [1] и $card(M_v) = m$, $card(M_w) = n$. Запись

$$k \ m. \ 0. \ n.$$

означает, что указанное соотношение имеет номер k , асимметрию левой части – m , асимметрию правой части – n . Например, для $k = 383$ имеем

$$383 \ 5. \ 0. \ 7.$$

Алгоритм определения асимметричности слова был реализован на базе программы *Scilab-5.2.2*. В результате реализации алгоритма была получена асимметричность слов в левой и правой частях 2337 соотношений из [1]. Результаты вычислений:

1. Число симметричных соотношений, т.е. соотношений вида $k \ n. \ 0. \ n.$ равно 530.
2. Число соотношений $k \ m. \ 0. \ n.$ для которых $m < n$ равно 884.
3. Число соотношений $k \ m. \ 0. \ n.$ для которых $m > n$ равно 923.
4. Для всех 2337 соотношений был вычислен параметр $\Delta = m - n$ и определен интервал значений указанного параметра – $[-10, 10]$.

Список литературы

- [1] А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин, О различии бернсайдовых групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$. Труды ИММ УрО РАН, **16**: 2 (2010), 133–138.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10007).

On pronormality of subgroups of odd index in finite groups¹

Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia

a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru, revin@math.nsc.ru

We consider only finite groups, and henceforth the term group means finite group. Our terminology and notation are mostly standard and can be found, for example, in [1]. Let m and n be non-negative integers with the binary expansions $m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$ and $n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot 2^i$, where $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ for every i . We write $m \leq n$ if $a_i \leq b_i$ for each i and $m < n$ if additionally $m \neq n$.

A subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G (notation $H \text{ prn } G$) if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g \rangle$ for each $g \in G$. In 2012, E. P. Vdovin and D. O. Revin [5] proved that the Hall subgroups (when they exist) are pronormal in all simple groups and, guided by the analysis in their proof, they conjectured that any subgroup of odd index of a simple group is pronormal in this group. We have disproved this conjecture in [4], in [2] and [3] we have completed a classification of finite simple groups G such that the subgroups of odd indices are pronormal in G and $C_G(S) \leq S$ for a Sylow 2-subgroup S of G or G is a simple exceptional group of Lie type, respectively. Thus, at this moment the problem of classification of nonabelian simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal is still open for the following groups: $PSL_n(q)$ and $PSU_n(q)$, where q is odd and n is not a power of 2.

In this talk we discuss a recent progress in the classification of finite simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal. In particular, we prove the following theorem.

Theorem. *Let $n \geq 3$ be an integer, q be a power of an odd prime, and $G = PSL_n^\varepsilon(q)$ for $\varepsilon \in \{+, -\}$, where $PSL_n^+(q) = PSL_n(q)$ and $PSL_n^-(q) = PSU_n(q)$. If $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ and there exists a positive integer m such that $m < n$ and $\text{g.c.d.}(m, q - \varepsilon 1)$ is not a power of 2, then the group G contains a non-pronormal subgroup of odd index.*

Список литературы

- [1] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [2] A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin, Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal. *Journal of Group Theory*, **23** (2020), 999–1016, doi: <https://doi.org/10.1515/jgth-2020-0072>.
- [3] A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin, On pronormal subgroups in finite simple groups. *Doklady Mathematics*, **98**:2 (2018), 405–408, doi: <https://doi.org/10.1134/S1064562418060029>.
- [4] A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin, A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, **296**:Suppl. 1 (2017), S145–S150, doi: <https://doi.org/10.1134/S0081543817020134>.
- [5] E. P. Vdovin, D. O. Revin, Pronormality of Hall Subgroups in Finite Simple Groups. *Siberian Math. J.* **53**:3 (2012), 419–430, doi: <https://doi.org/10.1134/S0037446612020231>.

¹This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw¹

Kondrat'ev A.S., Minigulov N.A.

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia
 a.s.kondratiev@imm.uran.ru, n.a.minigulov@imm.uran.ru

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group G is a graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of G and two different vertices p and q are adjacent if and only if there exists an element of order pq in G . The paw is a graph on four vertices whose degrees are 1, 2, 2, and 3.

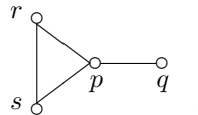
A. S. Kondrat'ev has described finite groups with the same Gruenberg–Kegel graphs as groups $Aut(J_2)$ (see [1]) and A_{10} (see [2]). The Gruenberg–Kegel graphs of all these groups are isomorphic as abstract graphs to the paw.

We establish the following more general problem: to describe finite groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw.

As a part of the solution of this problem, in [3] we have proved that if G is a finite non-solvable group and the graph $\Gamma(G)$ as abstract graph is isomorphic to the paw, then the quotient group $G/S(G)$ (where $S(G)$ is the solvable radical of G) is almost simple, and have classified all finite almost simple groups such that their Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the paw. Also we have classified in [4] finite non-solvable groups G whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to the paw in the followings two cases:

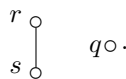
- (1) G has no elements of order 6;
- (2) G contains element of order 6 and the vertex of degree 1 in the graph $\Gamma(G)$ divides $|S(G)|$.

In the futher, let G be a finite solvable group whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to the paw, i.e., the graph $\Gamma(G)$ has the following form:



where $r, s, p,$ and q are some pairwise distinct primes.

By Ph. Hall Theorem, G contains a p -complement L , i.e., L is a $\{r, s, q\}$ -Hall subgroup of G . The graph $\Gamma(L)$ disconnected and has following the form:



By Gruenberg-Kegel Theorem, the group L is either a Frobenius group of the form $L = A \rtimes B$ ($A = F(L)$) or a 2-Frobenius group of the form $L = A \rtimes (B \rtimes C)$, where $A \rtimes B$ and $B \rtimes C$ are Frobenius groups and $A = F(L)$.

Set $\pi = \{p, q\}$, and $\bar{G} = G/O_\pi(G)$. We proved following three theorems.

Theorem 1. *Let L is a 2-Frobenius group and $O_q(L) \neq 1$. Then*

- (1) A is a Sylow q -subgroup of $O_\pi(G)$;
- (2) B is a cyclic $\{r, s\}$ -Hall subgroup of odd order in G ;
- (3) C is a cyclic q -subgroup;
- (4) $F(\bar{G}) = \bar{B}$, \bar{G} is isomorphic to a subgroup of $Hol(\bar{B})$, in particular, \bar{G}/\bar{B} is an abelian $\{p, q\}$ -group.

Theorem 2. *Let L is a Frobenius group and $O_q(L) \neq 1$. Then $A = F(L)$ is a Sylow q -subgroup of $O_\pi(G)$, B is a $\{r, s\}$ -Hall subgroup in G and one of the following statements holds:*

¹The work is supported by Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

(a) r and s are odd, Sylow r -subgroups and Sylow s -subgroups of B are cyclic, $F(\overline{G}) = \overline{F(B)}$ is a cyclic subgroup of order divisible by rs , \overline{G} is isomorphic to a subgroup of $\text{Hol}(\overline{F(B)})$, in particular, $\overline{G}/\overline{B}$ is an abelian group;

(b) we can suppose that $r = 2$, A is abelian, a Sylow 2-subgroup B_2 of B is cyclic or (generalized) quaternion, the Sylow s -subgroup $O(B)$ of B is cyclic, and one of the following statements holds:

(b1) $G = O(G)B_2$, $O_\pi(G) = O_\pi(O(G))$, $F(\overline{O(G)}) = \overline{O(B)}$, $\overline{O(G)}/\overline{O(B)}$ is a cyclic p -group, $\overline{O(G)}$ is isomorphic to a subgroup of $\text{Hol}(\overline{O(B)})$;

(b2) $G/O(G)$ is isomorphic to $SL_2(3)$ or $SL_2(3) \cdot 2$, $B = O(B)B_2$, $p = 3$, $s > 3$, the group $O(G)B_2$ satisfies to the statement (b1);

(b3) $G/O(G) \cong B/O(B)$ is isomorphic to $SL_2(3)$ or $SL_2(3) \cdot 2$, $s = 3$, $p > 3$, $G = O_\pi(G)B$, $O(G) = O_\pi(G)O(B)$.

Theorem 3. Let $q = 2$. Then one of the following statements holds:

(1) $O_q(L) \neq 1$ (and the structure of G is known by Theorems 1 or 2);

(2) $O_\pi(G) = O_p(G)$, L is a Frobenius group of the form $A \rtimes B$, where $A = F(L)$ is an abelian $\{r, s\}$ -Hall subgroup of G , B is a cyclic or (generalized) quaternion Sylow 2-subgroup of G , $F(\overline{G}) = \overline{A}$, and either $G = O(G)B$, or $p = 3$ and $G/O(G)$ is isomorphic to $SL_2(3)$ or $SL_2(3) \cdot 2$.

References

- [1] A. S. Kondrat'ev, Finite groups with prime graph as in the group $\text{Aut}(J_2)$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283**: 1 (2013), 78–85.
- [2] A. S. Kondrat'ev, Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10} . *Proc. Steklov Inst. Math.*, **285**: 1 (2014), 99–107.
- [3] A.S. Kondrat'ev, N.A Minigulov, Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10} . *Siberian Electr. Math. Rep.*, **15** (2018), 1378–1382.
- [4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Commun. Math. Stat.*, (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40304-021-00242-x>

Speaking sequences

Mala F.A.

Govt. Degree College Sopore, Jammu and Kashmir, India

Chandigarh University, Mohali, India

firdousmala@gmail.com

ABSTRACT. The relation between maths and music has a pretty long history. Though it would be difficult to assign an integer sequence to every sound, yet a sound could be assigned to every integer sequence. In other words, every integer sequence could be listened to. In this paper, we explore the “listen” functionality available for every integer sequence in the Online Encyclopedia of Integer Sequences. In particular, we single out some of the most melodious sequences listed in the OEIS database of over 3,50,000 integer sequences.

CONCLUSION. The paper brings to the fore another angle from which integer sequence could be viewed. One could choose to listen to an integer sequence, rather than just using it. Ears can hear what the eyes may fail to see.

On the further scope of the paper, one may feel motivated to see if there is a way to find exactly what music would correspond to an integer sequence.

Finite simple groups with two maximal subgroups of coprime orders¹

Maslova N.V.

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
Ural Mathematical Center, Yekaterinburg, Russia
 butterson@mail.ru

In 1962, V. A. Belonogov [1] proved that if a finite group G contains two maximal subgroups of coprime orders, then either G is one of known solvable groups or G is simple. Basing on results by M. Liebeck and J. Saxl [2] on odd order maximal subgroups in finite simple groups we determine possibilities for triples (G, H, M) , where G is a finite nonabelian simple group, H and M are maximal subgroups of G with $(|H|, |M|) = 1$.

We proved the following theorem.

Theorem. *Let G be a nonabelian simple group.*

(i) *If G is sporadic, then G contains two maximal subgroups H and M with $(|H|, |M|) = 1$ if and only if one of the following conditions holds:*

(1) $G \cong M_{23}$, $H \cong 23 : 11$, and M is one of the following subgroups: $PSL_3(4).2_2$, $2^4.A_7$, A_8 , $2^4 : (3 \times A_5).2$;

(2) $G \cong F_2 = B$, $H \cong 47 : 23$ and M is one of the following subgroups: $2.^2E_6(2) : 2$, $2^{9+16}.S_8(2)$, Th , $(2^2 \times F_4(2)) : 2$, $2^{2+10+20}.(M_{22} : 2 \times S_3)$, $[2^{30}].PSL_5(2)$, $S_3 \times Fi_{22} : 2$, $[2^{35}].(S_5 \times PSL_3(2))$, $HN : 2$, $O_8^+(3) : S_4$, $3^{1+8}.2^{1+6}.PSU_4(2).2$, $(3^2 : D_8 \times PSU_4(3).2^2).2$, $5 : 4 \times HS : 2$, $S_4 \times {}^2F_4(2)$, $[3^{11}].(S_4 \times 2S_4)$, $S_5 \times M_{22} : 2$, $(S_6 \times PSL_3(4) : 2).2$, $5^3.PSL_3(5)$, $5^{1+4}.2^{1+4}.A_5.4$, $(S_6 \times S_6).4$, $5^2 : 4S_4 \times S_5$, $PSL_2(49).2_3$, $PSL_2(31)$, M_{11} , $PSL_3(3)$, $PSL_2(17) : 2$, $PSL_2(11) : 2$.

(ii) *If G is an alternating group of degree at least 5 or an exceptional group of Lie type, then G does not contain two maximal subgroups of coprime orders.*

(iii) *Let G be a simple classical group of Lie type, assume that G contains two maximal subgroups H and M with $(|H|, |M|) = 1$, and without loss of generality assume that $|H|$ is odd. Then one of the following statements holds:*

(1) $G \cong PSL_2(q)$, where $7 < q \equiv 3 \pmod{4}$, $H \cong E_q : \frac{q-1}{2}$ and $M \cong D_{2(q+1)}$;

(2) $G \cong PSL_2(q)$, where q is prime and $q \equiv 23 \pmod{24}$, $H \cong E_q : \frac{q-1}{2}$ and $M \cong S_4$;

(3) $G \cong PSL_2(q)$, where q is prime and $q \equiv 83, 107 \pmod{120}$, $H \cong E_q : \frac{q-1}{2}$ and $M \cong A_4$;

(4) $G \cong PSL_2(q)$, where q is prime and $q \equiv 59 \pmod{60}$, $H \cong E_q : \frac{q-1}{2}$ and $M \cong A_5$;

(5) $G \cong PSL_n(q)$, where n is an odd prime, q is not a power of n , and $ord_n(q) = n - 1$, $H \cong \frac{q^n - 1}{(q-1)(q-1, n)} : n$ and M is the stabilizer in G of a subspace of dimension m of the natural projective module of G , where $2 \leq m \leq n - 2$;

(6) $G \cong PSU_n(q)$, where n is an odd prime, q is not a power of n , and either $n \equiv 1 \pmod{4}$, $ord_n(q) = n - 1$ and $(n, q) \neq (5, 2)$ or $n \equiv 3 \pmod{4}$ and $ord_n(q) = \frac{n-1}{2}$, $H \cong \frac{q^n + 1}{(q+1)(q+1, n)} : n$ and M is the stabilizer of a non-degenerate subspace of dimension m of the natural projective module of G , where $2 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$;

(7) $G \cong PSU_3(q)$, where $q \neq 5$ and $(q+1)_3 = 3$, $H \cong \frac{q^3 + 1}{(q+1)(q+1, 3)} : 3$ and M is the stabilizer of a totally singular subspace of dimension 1 of the natural projective module of G .

(8) $G \cong PSU_n(q)$, where $n \geq 5$ is a prime, q is not a power of n , $(n, q) \neq (5, 2)$, $H \cong \frac{q^n + 1}{(q+1)(q+1, n)} : n$, M is the stabilizer of a totally singular subspace of dimension m of the natural projective module of G , and one of the following statements holds:

(8i) either $n \equiv 1 \pmod{4}$ and $ord_n(q) = n - 1$ or $n \equiv 3 \pmod{4}$ and $ord_n(q) = \frac{n-1}{2}$, and $1 \leq m < n/3$;

¹This work was funded by RFBR and BRFFR, project no. 20-51-00007.

(8ii) $\text{ord}_n(q) = n - 1$ and $m \geq n/3$;

(8iii) $n \equiv 3 \pmod{4}$, $\text{ord}_n(q) = n - 1$, and $\frac{n+1}{4} < m < n/3$;

(9) $G \cong PSL_n^\varepsilon(q)$, where $n \geq 13$ is a prime and $\varepsilon \in \{+, -\}$, $H \cong \frac{q^n - \varepsilon 1}{(q - \varepsilon 1)(q - \varepsilon 1, n)}$: n and M is almost simple.

Moreover, H is always a subgroup from the union of Aschbacher classes of G , and all the possibilities when M is a subgroup from the union of Aschbacher classes of G are listed in statements (iii)(1)–(iii)(8).

References

- [1] V. A. Belonogov, On maximal subgroups. II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, **5** (1962), 3–11 (in Russian).
- [2] M. Liebeck, J. Saxl, On point stabilizers in primitive permutation groups. *Communications in Algebra*, **19**: 10 (1991), 2777–2786.

Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric and alternating groups

Skuratovskii R.V.

NAU, Kiev, Ukraine

ruslan.skuratovskii@nau.edu.ua, ruslan@imath.kiev.ua, ruslcomp@mail.ru

The lattice of normal subgroups and their properties for finite iterated wreath products $S_{n_1} \wr \dots \wr S_{n_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ are found. Special classes of normal subgroups and their orders and generators are found. Further, the monolith (i.e. the unique minimal normal subgroup) of these wreath products has been investigated.

Further, the monolith (i.e. the unique minimal normal subgroup) of these wreath products is investigated.

The trivial subgroup we denote by E .

We consider the following generalization of diagonal subgroup of the wreath product base.

Definition 1. A subgroup in $S_n \wr S_n$ is of the type \widetilde{T}_n if it contains:

1. elements of the form $E \wr A_n$,
2. elements with the tableau [1] presentation $[e]_1, [\pi_1 \dots, \pi_n]_2$, that $\pi_i \in S_n \setminus A_n$.

The minimal number of transpositions in factorization of a permutation corresponding to element $a_i \in S_n$ on transposition we will denote by $rnk(a_i)$. We set $rnk(e) = 0$.

If $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, then the following formula holds:

$$rnk(\pi_1 \cdot \pi_2) = rnk(\pi_1) + rnk(\pi_2) - 2m, m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Note, that a rank of permutation's product $\pi_1 \pi_2$ can be lesser then rank of each permutation π_1, π_2 .

Let $k(\pi)$ be the number of cycles in decomposition of permutation π of degree n .

The number $n - k(\pi)$ is denoted by $dec(\pi)$ and calls a decrement of permutation π . As well known [8] that the rank of π is equal to $dec(\pi)$. Therefore the rank of n -cycle is $n - 1$.

Definition 2. The set of elements from $S_n \wr S_n$, $n \geq 5$ of the form: $[e]_1, [a_1, a_2, \dots, a_n]_2$, satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^n rnk([a_i]_2) = 2k, k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

we will call set of type $\widetilde{A}^{(0)}$.

Proposition 1. The set of elements of type $\widetilde{A}^{(0)}$ forms the subgroup $E \wr \widetilde{A}_n \triangleleft S_n \wr S_n$.

The intersection of all non-trivial normal subgroups $Mon(G)$ of G is called the monolith of a group G . If $Mon(G) \neq \langle 1 \rangle$, then the group G is called monolithic, and, in this case, $Mon(G)$ is the least non-trivial normal subgroup of G .

The **monolith** of $S_n \wr S_m$ is $e \wr A_m$.

Note that if we remove E by A_n or by S_n in $E \wr \widetilde{A}_n \triangleleft S_n \wr S_n$ we obtain the new subgroup again.

Theorem 1. Proper normal subgroups in $S_n \wr S_m$ (active is on the left), where $n, m \geq 3$ with $n, m \neq 4$ are of the following types:

1. subgroups that act only on second level (stabilizing the first level) are

$$E \wr \widetilde{A}_m, \widetilde{T}_m, E \wr S_m,$$

2. subgroups that acts on both levels are

$$A_n \wr \widetilde{A}_m, A_n \wr E, S_n \wr \widetilde{A}_m, A_n \wr S_m, S_n \wr E.$$

In total there are 8 proper normal subgroups in $S_n \wr S_m$. Further, all of these groups are splittable groups [1].

The subgroup $S_n \wr \widetilde{A}_m$ appears only in $S_n \wr S_m$. Thus, the total number of proper normal subgroups in $S_n \wr S_m$, where $n, m \geq 3$ with $n, m \neq 4$ is 8.

The subgroups $A_n \wr \widetilde{A}_m = W'$ and $A_n \wr S_m$ are the new normal proper subgroups of $S_n \wr S_m$ relative to the normal subgroups of $S_n \wr A_m$.

Theorem 2. *There are exactly 5 proper normal subgroups in the wreath product $W = A_n \wr S_n$. The list of these subgroups is:*

1. $E \wr A_n$, this is the subgroup of the stabilizer of the first level $St_W(1)$ [7],
2. subgroup of type \widetilde{T}_n , that is the subgroup of $St_W(1)$ whose elements have the form $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, where either all $g_i \in A_n$ or all $g_i \in S_n \setminus A_n$,
3. $St_{W'}(1)$, this is a subgroup of the the first type in terms of Theorem 1 and has the structure $E \wr \widetilde{A}_n$,
4. W' , this is a subgroup of the second type and W' has structure $A_n \wr \widetilde{A}_n$,
5. $St_W(1)$, this is a proper normal subgroup of W . In this case as well as in case if $W = S_n \wr S_n$ its normal subgroup $St_W(1)$ has structure $E \wr S_n$.

Proposition 2. *The normalizer of subgroup T_n of type \widetilde{T}_n in $W = S_n \wr S_n$ is $N_W(T_n) = S_n \wr A_n$.*

The lattice of normal subgroups of the finite iterated wreath product $S_{n_1} \wr \dots \wr S_{n_m}$ is investigated by us too.

References

- [1] V. I. Sushchansky, Normal structure of the isometric group of metric spaces of p-adic integers. *Visn of KNU. Algebraic structures and their application. Kiev*, **8**. (1988). 113–121.
- [2] smallA. Rotbart, Generator sets for the alternating group. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* **65** (2011), Article B65b.
- [3] smallP. J. Cameron, P. Cara, Independent generating sets and geometries for symmetric groups. *Journal of Algebra*, **258**: 2 (2002), 641–650.
- [4] R. V. Skuratovskii, On commutator subgroups of Sylow 2-subgroups of the alternating group, and the commutator width in wreath products. *European Journal of Mathematics.*, **7**: 1. (2021), 353–373. doi.org/10.1007/s40879-020-00418-9.
- [5] smallY. A. Drozd, R. V. Skuratovskii, Generators and relations for wreath products of groups. *Ukr. Math. J.*, **60** (2008), 1168–1171.

On the verbal width in the alternating group A_n and Matieu groups

Skuratovskii R.V.

NAU, Kiev, Ukraine

ruslan.skuratovskii@nau.edu.ua, ruslan@imath.kiev.ua, ruslcomp@mail.ru

The width of a verbal subgroup $V(G, W)$ [1–3] over a set W is equal to a least value $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ such that every element from $V(G, W)$ can be represented as the product of at most m values of words from W .

A sharp bound for the p -width of A_n ($n > p$) the alternating group of even permutations on n letters, was found in the paper [5].

In a group G , the set of squares of its elements is denoted by $\mathbb{S}(G)$. We consider the set of all squares $\mathbb{S}(A_n)$ of the alternating group A_n as a generating set for A_n [7].

The conditions when an arbitrary $g \in A_n$ as well as $h \in PSL_2(\mathbb{F}_p)$ can be presented as a square of one element from one of these groups are found by us.

The minimal number of transpositions in factorization of a permutation corresponding to element $a_i \in S_n$ on transposition we will denote by $rnk(a_i)$. We set $rnk(e) = 0$.

If $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, then the following formula holds:

$$rnk(\pi_1 \cdot \pi_2) = rnk(\pi_1) + rnk(\pi_2) - 2m, m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Note, that a rank of permutation's product $\pi_1\pi_2$ can be lesser then rank of each permutation π_1, π_2 .

Let $k(\pi)$ be the number of cycles in decomposition of permutation π of degree n .

The number $n - k(\pi)$ is denoted by $dec(\pi)$ and calls a decrement of permutation π . As well known [8] that the rank of π is equal to $dec(\pi)$. Therefore the rank of n -cycle is $n - 1$.

Theorem 1. *The set of all squares $\mathbb{S}(A_n)$ from A_n does not coincide with the whole alternating group A_n and does not form a proper subgroup of A_n . The set $\mathbb{S}(A_n)$ is generating set for A_n . The verbal width of $V(A_n, \mathbb{S}(A_n)) = 2$ for $n > 3$.*

Theorem 2. *An arbitrary element $g \in A_n$ having the cyclic structure $[(2k)^1, (2r)^1]$ can be presented in the form of a product of 2 squares of $h_1, h_2 \in A_n$ with 2 joint letters in their cyclic presentation on n -letters alphabet, $2k + 2r - 2$ ways.*

Theorem 3. *If in cyclic structure of $g \in A_n$ every even cycle appears an even number of times, i.e. $m_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$, and at least one of the two following conditions holds:*

1)

$$\begin{cases} |Fix(g)| > 1 & (a) \\ \max_{k \in \mathbb{N}} (m_{2k-1}) > 1, & (b) \end{cases}$$

2) $\sum_{l=1}^L p_{2l} \equiv 0 \pmod{2}$,

then this g can be presented as $g = h^2$, $h \in A_n$. The vice versa is also true.

If we express the conditions for the existence of a square root over S_n then condition 2) becomes to be a more simple: $m_{2l} \equiv 0 \pmod{2}$ for all l .

Remark 1. Note that condition 2 is a sufficient condition for an element from A_n be quadratic without the condition $m_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$.

Example. The element $g = (10, 11, 12)(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7)$ satisfying conditions (a) and (b) of item (1) of our Criterion is square in A_{12} . Indeed, consider $\sqrt{g} = (10, 12, 11)(1, 3, 2)(4, 6, 5, 7)(8, 9) = h$, then $h^2 = (10, 11, 12)(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7) = g$. The cyclic structure of the element g satisfies to conditions (a) and (b) of item 1 from Criterion 1 because of $Fix_{A_{12}}(g) = \{10, 11, 12\}$.

Also another element h_2 is root too: $g = (10, 11, 12)(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7) = ((10, 1, 11, 2, 12, 3)(4, 6, 5, 7))^2 = h_2^2$.

Corollary. An element with asymmetric cyclic structure $[m^1, l^1]$, where $m \neq l$, $m = 2t$, $l = 2s$, can not generated as a product of squares of mutually coprime cycles. Example of such cycle is $(c_1 \dots c_m)(b_1 \dots b_l)$, $l \neq m$.

Example. The element $g = (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8, 10)(9, 11, 12)$ is not product of mutually coprime elements $h, t \in S(A_{12})$.

Proposition. The permutation $\pi \in S_n$ is square in S_n iff $m_{2l} \equiv 0 \pmod{2}$ for each $l \in \mathbb{N}$.

The conditions when an arbitrary $g \in A_n$ as well as $h \in PSL_2(\mathbb{F}_p)$ can be presented as a square of one element from one of these groups are found by us.

Theorem 4. Let $A \in PSL_2(F_p)$, where \mathbb{F}_p is some field. For matrix $A \in PSL_2(F_p)$, there is a matrix B in $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ such that

$$B^2 = A$$

if and only if, $tr(A) + 2$ or $-tr(A) + 2$ is a quadratic residue in \mathbb{F}_p .

Remark 2. Note that in the case in multiple eigenvalues the last condition is simplified to $(\frac{2}{p})(\frac{\lambda+1}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}(\frac{\lambda+1}{p})$.

Theorem 4. The verbal width of the verbal subgroups generated by squares of the following M_8, M_9, M_{10} Mathieu groups are equal to 1. The structure of $V(\mathbb{S}(M_9), M_9)$ is $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$.

Theorem 5. The following Mathieu groups $M_{11}, M_{12}, M_{20}, M_{21}, M_{22}, M_{23}$ and M_{24} have the verbal width $vw(M_{ij}, \mathbb{S}(M_{ij})) = 2$.

Following Mitsuhashi's generating set M is the nearest to Coxeter for S_n : $a_{ij} := s_1 s_i = (1, 2)(i, i+1)$, $(2 \leq i < j \leq n-1)$ [4].

As well known the set T of transpositions $T = \{(1, 2); (2, 3); \dots; (n-1, n)\}$ is generating set of involutive type for S_n .

Sufficient and necessary conditions for the squareness of an element represented in the generating set T in the group S_n and for a certain class of elements represented in the generating set M in the group A_n are found.

References

- [1] D. Z. Kagan. The width of verbal subgroups in anomalous products. The width of verbal subgroups in anomalous products. *Scientific news. Series Mathematics. Physics.*, **255**: 6 Issue 46 (2017), 24–29.
- [2] R. C. Lyndon, M. F. Newman, Commutators as products of squares. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **39** (1973), 267–272.
- [3] S. Sarkar, Commutators and squares in free group. *Algebra Geometry Topology.*, **4**: 1. (2004), 595–602.
- [4] smallA. Rotbart, Generator sets for the alternating group. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* **65** (2011), Article B65b.
- [5] A. J. Malcolm, On the p -width of finite simple groups. *Isr. J. Math.*, **7** (2021), 127–143. <https://doi.org/10.1007/s11856-021-2174-5>
- [6] smallP. J. Cameron, P. Cara, Independent generating sets and geometries for symmetric groups. *Journal of Algebra*, **258**: 2 (2002), 641–650.
- [7] R. V. Skuratovskii, On commutator subgroups of Sylow 2-subgroups of the alternating group, and the commutator width in wreath products. *European Journal of Mathematics.*, **7**: 1. (2021), 353–373. doi.org/10.1007/s40879-020-00418-9.
- [8] V. N. Sachkov, Combinatorial methods in discrete Mathematics. Encyclopedia of mathematics and its applications 55. Cambridge Press, 2008. 305.

**Математическое программирование,
некорректные задачи и анализ данных
(председатель д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай)**

Новый язык описания сцен научной визуализации

Васёв П.А., Бахтерев М.О., Манаков Д.В.
ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия
vasev@imm.uran.ru

Решение задач научной визуализации так или иначе требует написания программы визуализации. Наш опыт позволяет утверждать, что такие программы обычно состоят из следующих частей (подробнее в [1], [2]):

1. Считывание данных и различные преобразования над ними в интересах визуализации.
2. Трёхмерная графическая часть.
3. Интерфейсная (двумерная) часть.

В работе предлагается новый язык программирования, созданный для удобного и лаконичного описания всех этих частей. Пример программы на языке:

```
1  dat: load-file "a.csv" | parse_csv ;
2
3  render3d target=@view1 {
4    @dat | points radius=@sl->radius ;
5  }
6
7  screen auto_activate {
8    sl: slider min=10 max=100 step=5;
9    view1: view3d fill_parent ;
10 }
```

В строке 1 описана загрузка файла и разбор его содержимого по формату CSV (можно загружать и разбирать файлы других форматов). Результат сохраняется по метке `dat`.

В строке 3 описана сцена трёхмерной визуализации.

В строке 4 указана команда рендеринга содержимого `dat` как набора точек. Подразумевается, что считанный файл содержит колонки X,Y,Z с координатами точек. При необходимости можно использовать и другие имена колонок.

В строке 7 описан двумерный интерфейс и далее задано его содержимое - слайдер для управления радиусом точек и двумерная область для вывода трёхмерной сцены.

Язык разрабатывается в форме программной среды, запускаемой на компьютере пользователя. Эта среда основана на веб-технологиях, что позволяет работать создаваемым программам визуализации в среде Интернет. Исходные коды и инструкция по запуску среды размещены на сайте <https://github.com/viewzavr/vrungle>.

Список литературы

- [1] В. Л. Авербух, Д. В. Манаков, Анализ и визуализация “больших данных”. *Труды международной научной конференции “Параллельные Вычислительные Технологии” (ПаВТ’2015)*. Екатеринбург, 31 марта - 2 апреля 2015. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015, 332–340. URL: <http://www.cv.imm.uran.ru/e/3241533>
- [2] П. А. Васёв, А. В. Свалухин, О конвейере визуализации. *Тезисы XVII Международной конференции Супервычисления и математическое моделирование, 15-19 октября 2018, г. Саров*. с. 40. URL: <http://www.cv.imm.uran.ru/e/3241722>

Численное моделирование динамики мнений с помехами

Дорофеева Ю.А., Вершинин Э.А.

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия
julana2008@yandex.ru, elvershin@icloud.com

В работе представлены результаты численного моделирования динамики мнений участников социального сообщества с подключением помех. Основной характеристикой системы является наличие консенсуса. Помехи являются одной из составляющих взаимодействия всех членов коллектива. В связи с этим появляется необходимость оценить их влияние на сходимость мнений.

Понятие шума подробно рассмотрено в работе [1], [2].

В данном случае помехи "подключаются" ко всем участникам вместе, то есть как игроку и агентам, так и по отдельности к каждому из них. Помехи имеют распределение по Парето. Выбор именно этой закономерности объясняется ограниченностью параметров. Рассматриваются следующие сценарии: динамика с помехами для сообщества с полной и неполной связью, динамика без помех.

Социальное сообщество представимо в виде графа, где вершины - участники, а ребра являются показателем связи между ними. Динамика мнений в данном сообществе имеет следующий вид [?]:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\sum_{j \in S_i} \frac{x_j(t)}{|S_i|} - x_i(t) \right) + u_i(t), i \in N, \quad (1)$$

где $S_i = \{j : (i, j) \in E\}$ множество соседей вершины i в графе g , a_i - это индивидуальный коэффициент "восприимчивости" к возможному изменению мнений.

Целью игрока является "приведение" мнения участников к наперед заданному значению. При этом в процессе взаимодействия и влияния друг на друга участники могут исказить информацию либо потерять часть содержания.

Динамика мнений с помехами:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\sum_{j \in S_i} \frac{x_j(t)}{|S_i|} - x_i(t) \right) + u_i(t) + \xi_i(t), i \in N, \quad (2)$$

случайная величина $\xi_i(t)$ имеет распределение вида:

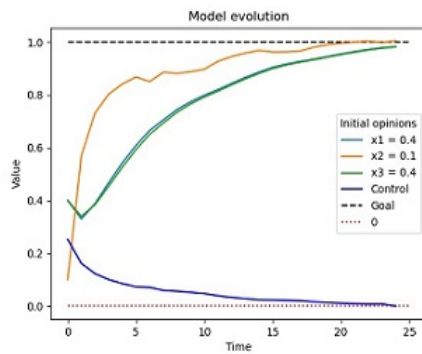
$$Y(t) = \frac{\alpha L^{\alpha} t^{-\alpha-1}}{1 - \left(\frac{L}{H}\right)^{-1}} \quad (3)$$

Для моделирования были использованы следующие параметры: $L = 0.01$, $H = 1$, $\alpha = 0.1$, знак помех может быть как положительный, так и отрицательный. Таким образом, функция $Y(t)$ задает угасающие помехи на дистанции t .

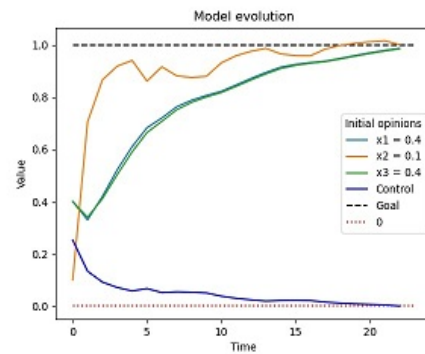
Ниже на Рис.1 и Рис.2 представлены результаты численного моделирования процесса изменения мнений с помехами. Моделирование было выполнено с помощью языка программирования Python. Во втором случае был увеличен период помех.

В результате многочисленных экспериментов для сообществ с полной и неполной связью, можно сделать однозначный вывод о том, что консенсус наступает даже при "сильных" помехах. При незначительных отклонениях траектории как функции оптимального управления, так и мнений участников, сходимость наступает в среднем при $t = 30$.

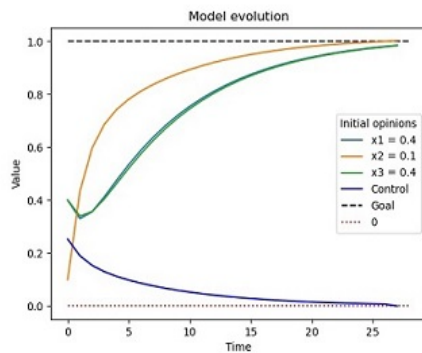
В качестве сравнения на Рис. 3 представлен сценарий изменения мнений в сообществе без искажения мнений при взаимодействии. Консенсус в этом случае наступает относительно быстро. Функция управления имеет убывающий вид. На Рис.4 представлен результат моделирования для графа с неполной связью и усиленными помехами.



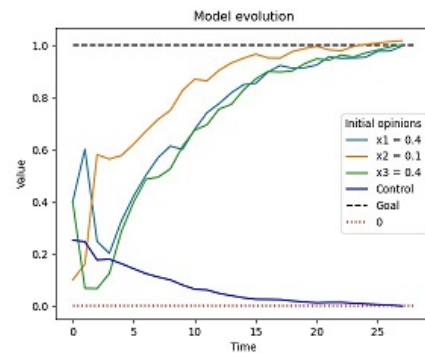
1: Динамика сходимости мнений участников с помехами (граф с полной связью)



2: Динамика сходимости мнений с помехами (граф с полной связью)



3: Динамика сходимости мнений участников без помех (граф с неполной связью)



4: Динамика сходимости мнений участников с усилением помех (граф с неполной связью)

Важно отметить, что вид траекторий с помехами и без них мало отличается. Это еще раз доказывает, что система достаточно устойчива, консенсус наступает не зависимо от наличия (отсутствия) связей между участниками, скорость сходимости зависит от варьирования параметров моделирования для обоих случаев – с помехами и без них.

Список литературы

- [1] E. Konovalchikova, Yu. Dorofeeva, Opinion dynamics models with noise. *Stochastic Modeling and Applied Research of Technology, Petrozavodsk, Russia, August 16-20, 2020* – Volume 2792, N 2 – P. 176–190.
- [2] M. Pineda, R. Toral, Noisy continuous – opinion dynamics. *J.stat. Mech.*, **08** (2009), P08001.
- [3] V. V. Mazalov, J. A. Dorofeeva, E. N. Parilina, Opinion Control in a Team with Complete and Incomplete Communication. *Contributions to Game Theory and Management*, **XIII** (2020), 324–334.

О задаче разработки численных методов решения обратных задач динамической интерпретации в сейсморазведке

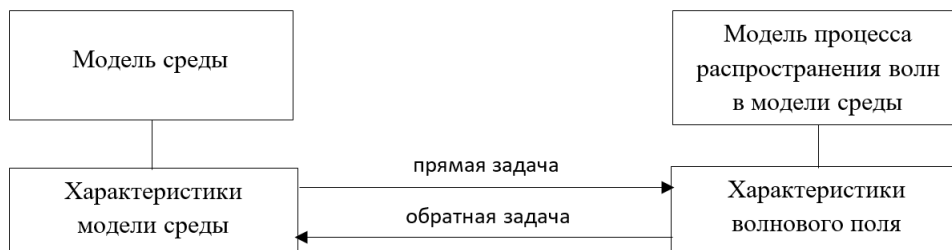
Ковалева Е.П.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
8lizabethstark@gmail.com

В настоящее время сейсмическая разведка является достаточно значимой отраслью современного нефтяного инжиниринга, а также одним из главных методов геофизического исследования земной коры. Данный метод основывается на возбуждении и регистрации упругих сейсмических волн, отраженных и преломленных на геологических границах раздела сред с различными физическими свойствами, и позволяет прогнозировать разработку геологического разреза на основе исследуемых физических свойств пород [1].

Одной из важнейших задач сейсмической разведки является задача восстановления упругих параметров геологической среды по зарегистрированным данным (волновому полю), которая по своей сути является обратной динамической задачей и ее принято называть сейсмической инверсией. Таким образом, сейсмическая инверсия позволяет трансформировать сейсмический временной разрез в разрез упругого импеданса (акустического в частном случае). В зависимости от выбранной модели среды возможно также получать дополнительные параметры среды [2].

Сейсмическую инверсию можно также интерпретировать как методику создания модели среды, использующей сейсмические данные в качестве входных, что представляет собой уже прямую задачу [3]. На Рис. 1 представлена связь между прямой и обратной задачами сейсморазведки.



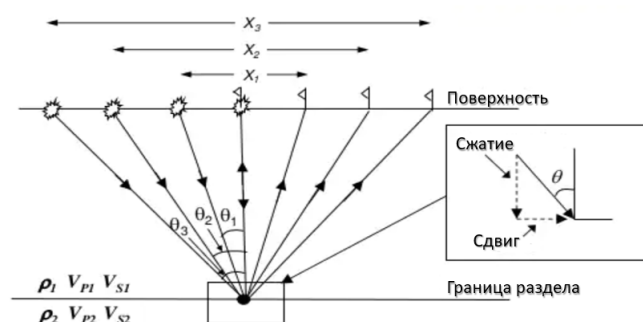
1: Прямая и обратная задача сейсморазведки

К сожалению, построение аналитических решений реальных практических задач сейсмической инверсии является практически невозможным. Поэтому крайне важны различные эффективные методы их численного решения, для которых необходима корректная постановка обратных задач динамической интерпретации, чему и посвящена данная работа.

Рассматривается процесс возбуждения и регистрации упругих сейсмических волн, отраженных и преломленных на геологических границах раздела сред с различными физическими свойствами. Волны в конкретной рассматриваемой точке отражаются от подповерхностного слоя под увеличивающимися углами падения, связанными со сдвигом (смещением) точки подачи импульса на поверхности. Схематический пример возбуждения и регистрации упругих сейсмических волн продемонстрирован на Рис. 2.

Данные сейсморазведки представляют собой набор сейсмических трасс, которые в свою очередь выражают отклик системы геологического строения на внешние воздействия в виде упругих сейсмических колебаний. Сейсмическая трасса может быть описана в рамках сверточной модели среды:

$$S = W * R + N, \quad (1)$$



2: Процесс возбуждения и регистрации упругих сейсмических волн

где W – сейсмический импульс, R – временная последовательность коэффициентов отражения, а N – шум. В общей постановке задачи упругой инверсии модель коэффициентов отражения R описывается уравнениями Цеппритца [4], а модель сейсмического импульса W в рамках сверточной модели среды является передаточной функцией, выражающей связь между входным и выходным сигналами. На сверточной модели среды базируется многочисленное количество методов динамической интерпретации.

Важно отметить, что обратная задача в сейсмической инверсии является некорректной. Наблюдаемые данные могут отличаться только на уровне шума, при этом соответствующие им распределения упругих параметров среды могут оказаться совершенно различными. Следовательно, необходимо решать оптимизационную задачу, в которой выбор оптимального параметра регуляризации оказывает существенное влияние на точность и корректность получаемых решений [5]. В данной работе выполняется корректная постановка рассматриваемой задачи, выбираются методы ее решения, а также обсуждаются возможные оптимизационные алгоритмы оценивания сейсмического импульса и автоматического подбора параметра регуляризации.

Список литературы

- [1] Л. А. Сердобольский, Распространение сейсмических волн. М.:РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина, 2012. 256 с.
- [2] Ю. П. Ампилов, А. Ю. Барков, И. В. Яковлев. Почти все о сейсмической инверсии. Часть 1. *Технологии сейсморазведки*, 4 (2009), 3–16.
- [3] В. Н. Russell, Introduction to Seismic Inversion Methods. Course Notes Series, Society of Exploration Geophysicists.
- [4] Karl Zoeppritz, Erdbebenwellen VII. VIIIb. Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. *Mathematisch-physikalische Klasse*, (1919), 66-84.
- [5] А. А. Самарский, А. В. Гулин, Численные методы: Учеб. пособие для вузов. –М.:Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 432 с.

Задача решения переопределенных СЛАУ для обработки данных каротажа

Кривоногова А.Е., Касаткин А.А.

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, Уфа, Россия

programmer.adm@gmail.com, alexei_kasatkin@mail.ru

На практике встречаются случаи, когда в связи с какими-то обстоятельствами полученные данные геофизических исследований скважин (ГИС) не могут быть использованы в расчёте в связи с проблемами при их получении [1], [2], например:

некорректно работающие датчики,
аномальные данные,
ошибки при сборе данных.

Результаты серии экспериментов можно представить в виде переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений, где n переменных и m линейно независимых уравнений, причём $m > n$. Систему уравнений имеет вид $Ax = b$.

При наличии шума, СЛАУ с прямоугольной матрицей размера $m \times n$ (при $m > n$, т. е. при числе уравнений большем числа неизвестных) вовсе не имеет „классического“ решения, т. е. является несовместной, или переопределенной.

Вместо точного решения системы уравнений следует организовать поиск такого вектора x , который будет наилучшим образом удовлетворять всем уравнениям, т. е. минимизировать их невязку (расхождение между вектором Ax и вектором b правой части СЛАУ) [3]. Поскольку невязка $Ax - b$ является векторной величиной, то, исходя из практических соображений, минимизации надо подвергать ее норму $|Ax - b| \rightarrow \min$.

В данной работе были изучены следующие методы решения переопределенных СЛАУ: метод наименьших квадратов, QR-разложение и сингулярное разложение (SVD). Была проведена проверка устойчивости псевдорешений путем введения шумов.

Список литературы

- [1] Б. А. Головин, К. Б. Головин, М. В. , Калинникова. Учебное пособие по геофизическим исследованиям скважин. Саратов: Саратовский ГУ, 2005.
- [2] В. М. Теплоухов, Д. О. Морозов, Проблемы петрофизического моделирования и интерпретации материалов геофизических исследований скважин в отложениях с аномально низкими фильтрационно-емкостными свойствами. *ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти*, **3**: 5 (2017), 12–18.
- [3] Д. В. Кирьянов, Е. Н. Кирьянова. Вычислительная физика. Полибук Мультимедиа, 2006.

Проблема автоматизации методов локальной аппроксимации для прогноза хаотических временных рядов

Марков П.И., Маякова С.А.
УГАТУ, Уфа, Российская Федерация
door323@yandex.ru, mayakovasa@mail.ru

В экономике, климатологии, эпидемиологии и других областях потребность в составлении качественного прогноза для сложных систем, то есть предсказание будущих значений наблюдаемого процесса, основываясь на анализе сигналов, произведенных исходной системой, в разные моменты времени (временной ряд), удовлетворяется через построение различных моделей прогнозирования, подразделяющихся на две группы: глобальные и локальные. На сегодняшний день, большинство методов, используемых для прогнозирования временных рядов, так или иначе связаны с построением авторегрессионных моделей, относящихся к классу моделей глобальной аппроксимации. Методы выбора параметров этих моделей хорошо проработаны, а сами алгоритмы этих методов входят во многие программные пакеты [1]: EViews, STATA, R Studio, SAS, MATLAB и т.д.

Локальные методы основаны на принципе локальной аппроксимации и методе задержек [2] и имеют много общего с авторегрессионными методами, но в то же время обладают одним явным преимуществом – оно заключается в том, что вместо использования единой для всего ряда глобальной аппроксимации применяется кусочно-линейная, что позволяет успешно прогнозировать нерегулярные (квазипериодические, хаотические) временные ряды без дополнительной обработки (выделения периодической, трендовой, хаотической составляющей ряда). Методы ЛА сложны для автоматизации (каждый параметр требуется подбирать вручную) из-за этого они отсутствуют в популярных статистических пакетах.

Для прогноза на несколько шагов существует три варианта методов локальной аппроксимации: итеративный – параметры рассчитываются на первом шаге и более не пересчитываются, а только что спрогнозированное значение используется для построения нового стартового вектора, но существует предпосылка, что все последующие стартовые вектора соседни первого. Итеративный с пересчётом – спрогнозированный вектор, также как и в предыдущем случае, становится стартовым, но все соседни и параметры считаются заново, но существует опасность выбора ложных соседней при пересчете. Прямой метод – прогноз строится независимо для всех моментов времени, как если это прогнозы на один шаг, без пересчета стартового вектора и матрицы соседней.

В работах [3–5] рассматривалось влияние параметров методов ЛА таких, как размер матрицы соседней, количество векторов-соседней и длина вектора задержек.

Целью настоящей работы является построение критерия выбора оптимальных параметров и оптимального метода прогноза на основе анализа размерности пространства вложений и анализа ряда Фурье.

Наименьшее число независимых переменных, однозначно определяющих установившееся движение исходной системы, называют размерность вложения. Ненулевые коэффициенты Фурье указывают, какие из гармоник ряда являются значимыми. Это возможно использовать для анализа ширины интервала прогноза, как аналог пространства вложений для сглаженного преобразованием Фурье временного ряда.

На данном этапе исследований были установлены эмпирические правила: при малом размере пространства вложений предпочтение отдается прямому методу ЛА; при увеличении числа размерности пространства вложений и количества ненулевых коэффициентов разложения в ряд Фурье, следует выбрать итерационные методы, в зависимости от динамики порождающего процесса, увеличить длину вектора задержки и уменьшить количество рассматриваемых векторов в матрице соседней.

Получив критерии оптимальных настроек методов ЛА, дальнейшая работа будет проводиться в направлении объединения методов ЛА в единое программное приложение на основе нейронной

оболочки, которое будет позволять делать оптимальный выбор параметров аппроксимации без анализа полученных графиков и без применения пользователем математического аппарата, тем самым уменьшив человеческий фактор. Это позволит большему количеству пользователей воспользоваться методами ЛА.

Список литературы

- [1] А. П. Цыпин, А. С. Сорокин, Статистические пакеты программ в социально-экономических исследованиях. *Азимут научных исследований: экономика и управление*, **5**: 4(17) (2016), 379–383.
- [2] И. А. Истомин, О. Л. Котляров, А. Ю. Лоскутов, К проблеме обработки временных рядов: расширение возможностей метода локальной аппроксимации посредством сингулярного спектрального анализа. *Теоретическая и математическая физика*, **142**: 4 (2009), 149–152.
- [3] П. И. Марков, С. А. Маякова, Анализ особенностей применения методов локальной аппроксимации к прогнозу нерегулярных временных рядов. *Мавлютовские чтения: материалы XIV Всероссийской молодежной научной конференции*. Уфа: РИК УГАТУ, 2020.
- [4] П. И. Марков, С. А. Маякова, Оценка факторов, влияющих на границы прогноза, в методе локальной аппроксимации нерегулярных временных рядов. *МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА - 2020»: сборник тезисов (г. Уфа, 11-14 ноября 2020 г.)*. Уфа: Аэтерна, 2020.
- [5] П. И. Марков, С. А. Маякова, Исследование влияния параметров нерегулярных временных рядов на длительность прогноза методов локальной аппроксимации *Мавлютовские чтения: материалы XV Всероссийской молодежной научной конференции*. Уфа: РИК УГАТУ, 2021.

Выработка управления ВС для приведения в контрольную точку трассы в указанное время

Михайлов А.В., Кумков С.С.

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия

anton.mikhailov@urfu.me, sskumk@gmail.com

В настоящее время в связи с возрастающей плотностью воздушного сообщения актуальными становятся задачи автоматизации работы диспетчеров управления воздушным движением. Одной из важных задач является выработка управления движением воздушного судна (ВС) для приведения его в контрольную точку трассы в требуемый момент времени. Такая задача возникает, например, при слиянии двух или более потоков ВС, в том числе, перед заходом на посадку. В таком случае выход ВС в точку слияния трасс в указанный момент времени связан с безопасностью прохода всех судов, которая обеспечивается наличием безопасного временного интервала между соседними судами.

Изменение момента прихода ВС в путевую точку возможно изменением траектории его движения (ускорение при использовании участков спрямления, замедление при использовании различных схем задержки), а также при изменении скорости движения ВС.

Таким образом, основными входными данными для задачи является информация о геометрии трасс потока, в котором движется ВС. Здесь подразумеваются известными следующие данные:

1. информация о всех путевых точках, которые может проходить судно: координаты, диапазон разрешенных скоростей;
2. информация о предшествовании-последовании точек;
3. информация об участках спрямления (то есть об участках, на каждом из которых можно уходить не на его конечную точку, а на какую-то другую);
4. информация о зонах задержки: об альтернативных траекториях прохождения, удлиняющих путь судна, и о зонах ожидания (то есть, областях пространства, в которых судно может кружить, обрабатывая нужную задержку прибытия).

Также входные данные включают информацию о начальном положении судна (момент времени, положение, скорость, следующая путевая точка) и о желаемом моменте прибытия ВС в конечную точку трассы.

Под решением задачи понимаются траектория ВС (последовательность путевых точек) и скоростной режим движения по ней. При этом решение должно быть оптимальным; критерием оптимальности служит количество взаимодействий диспетчер–пилот, необходимых для выдачи всех указаний по пилотированию ВС в выбранном режиме.

Процесс решения задачи подразумевает два момента: перебор возможных траекторий движения ВС по трассе потока и выбор режима движения вдоль каждой траектории, который обеспечивает приход в конечную точку трассы в требуемый момент. При этом выбирается режим, который может быть обеспечен наименьшим количеством взаимодействий диспетчер–пилот.

В рамках реальных трасс перебор траекторий не является слишком обременительным: чаще всего возможное количество траекторий исчерпывается двумя-тремя десятками; редко их количество доходит до сотни.

Поскольку для каждой траектории уже понятно количество взаимодействий, необходимых для направления движения судна по ней, то остается выбрать только оптимальный скоростной режим, удовлетворяющий ограничениям в путевых точках.

Подзадача выбора оптимального скоростного режима формализуется в рамках смешанного квадратичного целочисленного программирования (mixed integer quadratic programming, MIQP).

Значениям 1 и 0 целых бинарных переменных соответствует наличие/отсутствие изменения скорости на каждом из участков траектории. Изменение скорости подразумевает одно взаимодействие с пилотом. Поэтому оптимизируемый функционал — сумма значений этих переменных.

Нелинейность решаемой задачи обусловлена выбранной моделью кусочно-равномерного движения судна: считается, что изменение скорости ВС происходит мгновенно, за промежуток времени, достаточно малый в сравнении с длительностями других процессов. Формула равномерного движения есть $S = v \cdot \Delta t$, в которой непрерывными переменными являются скорость, время движения от точки до точки и, вообще говоря, расстояние, если речь идет об участке спрямления. То есть в ограничениях присутствуют и произведения неизвестных, что выводит задачу из области линейного программирования.

Подзадачи выбора скоростного режима движения вдоль заданной траектории решаются численно посредством МІQR-решателя, предоставляемого библиотекой Gurobi [1]. В целом, количество дискретных переменных (которое, чаще всего, и определяет сложность задачи с точки зрения численного решения) не слишком велико. Поэтому каждая такая подзадача решается достаточно быстро — от сотой до десятой доли секунды. Вся задача с учетом перебора траекторий решается за одну-две секунды.

Скорость решения всей задачи является существенной, так как, в целом, она решается для каждого судна, находящегося в зоне обслуживания. Обычное количество таких судов — от единиц до десятка одновременно; в случае пиковой загрузки пространство — до трёх десятков. При этом задача обработки всех судов хорошо распараллеливается: разные суда и разные траектории одного судна могут обрабатываться независимо. Можно констатировать, что, в целом, задача решается за приемлемое время.

Список литературы

- [1] Официальный сайт коммерческой библиотеки Gurobi, <https://www.gurobi.com>

Применение методов оптимизации для расстановки портов и пакеров на основе математического моделирования

Мотин К.В., Байков В.А.

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, Уфа, Россия
kostya.motin@mail.ru, baikov441@gmail.com

Основной целью работы является постановка математической задачи оптимизации расстановки портов и пакеров на основе математического моделирования и данных ГИС. На текущий момент расстановка портов выполняется в ручном режиме, при визуальном анализе данных ГИС и РИГИС, что значительно увеличивает время расстановки портов и пакеров МГРП, и снижает качество расстановки. Была предпринята попытка автоматизировать расстановку портов и пакеров с помощью программного алгоритма, который позволяет совершить равномерную расстановку с учётом успеха раскрытия порта, но не учитывается человеческий фактор и дебит нефти, полученный с помощью геолого-гидродинамического моделирования [3]. Для автоматизированной расстановки портов и пакеров используются следующие данные: гамма-гамма плотностной каротаж, ультразвуковая квернометрия. Так же в текстовом файле присутствует полный набор данных ГИС во время бурения и данные ГТИ. Для решения оптимальной задачи необходимо иметь геолого-гидродинамическую секторную модель скважины для расчёта рейтинга добычи для соответствующих данных файла ГИС. После того, как были изучены исходные данные и проведено моделирование можно поставить экстремальную задачу расстановки портов для начала внутри каждого интервала

$$G(g) = \left(\sum k_j \cdot R(g_{i+j}) \cdot C(g_{i+j}) + \sum v_l \cdot S(g_{i+l}) \cdot C(g_{i+l}) \right) \rightarrow \max$$

где $d = d_0, d_1 \dots d_z$ – таблица дискретной сетки по стволу скважины с данными;

$C(d) = 0, 1$ – параметр наличия коллектора;

$R(d_{i+j})$ – моделируемый дебит нефти;

$k = 0 \leq k \leq 1; k_j = k_{-j}$ – весовые коэффициенты дебита при отдалении от порта;

$S(d_{i+j})$ – оценка успеха раскрытия портов;

$v = 0 \leq v \leq 1; v_j = v_{-j}$ – весовые коэффициенты успеха при отдалении от порта;

Благодаря оценкам в некоторой окрестности и правильно заданным весовым коэффициентам производится минимизация человеческого фактора, что позволяет избежать аварий и убытков при этом получая максимум дебита нефти. В процессе данной работы были изучены исходные данные и основы моделирования для решения задачи оптимальной расстановки портов и пакеров. Поставлена экстремальная задача расстановки портов с условием равномерности.

Список литературы

- [1] М. П. Моклячук, Вариационное исчисление. Экстремальные задачи. Учебник. Москва Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, Институт компьютерных исследований, 2006. 430 с.
- [2] В. М. Тихомиров, Теория экстремума и экстремальные задачи классического анализа. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **65** (1999), 188–258.
- [3] Р. Д. Каневская, Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
- [4] Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук, Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 240 с.
- [5] Г. А. Блисс, Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950. 347 с.

Выбор оптимального порядка при слиянии потоков разнотипных самолётов как задача смешанного целочисленного линейного программирования

Спиридонов А.А., Кумков С.С.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
spiridonov.arseniy@gmail.com, sskumk@gmail.com

На текущий момент плотность воздушного трафика вблизи аэропортов, особенно крупных хабов, предельно высока. Поэтому в рамках управления воздушным движением (УВД) актуальность задачи бесконфликтного слияния потоков воздушных судов (ВС) остаётся на высоком уровне. Основным требованием для обеспечения безопасности является наличие заданного безопасного временного интервала между соседними судами в точке слияния. Обеспечение данного требования выполняется за счёт регулирования скорости ВС или изменения траектории движения ВС с использованием элементов воздушных трасс: схем задержки, участков спрямления и др. В виду конструктивных особенностей ВС разных типов временные интервалы безопасности между ними могут различаться.

Входная информация для задачи кроме общих данных (величины интервалов безопасности между судами различных типов) включает в себя данные по каждому из рассматриваемых судов: его тип, номинальный момент прибытия, а также возможные наиболее ранний и наиболее поздний момент прибытия судна в точку слияния потоков. Последние данные отражают возможности по варьированию момента прибытия ВС и вычисляются на основе текущего положения судна и наличия тех или иных элементов воздушных трасс на его траектории до точки слияния.

Основные ограничения в задаче связаны с принадлежностью назначаемых моментов прибытия ВС в точку слияния соответствующим интервалам и выдерживанием безопасных интервалов между судами в точке слияния. Заметим, что последние ограничения задают невыпуклое множество (более того, несвязное!), поэтому задача не входит напрямую в область линейного программирования.

Оптимизируемый критерий так или иначе связан с отклонениями назначенных моментов прибытия ВС в точку слияния от номинальных. Всякое отклонение подразумевает дополнительные манёвры, что приводит к затратам топлива. Кроме того, если рассматриваемое слияние потоков происходит перед посадкой, то отклонение от номинальных моментов вызывает нарушения пассажиропотока, например, на стыковочных рейсах. Также оптимизируемый критерий может отражать технические требования диспетчеров УВД.

В литературе по задачам построения расписаний и слияния потоков самолётов представлен достаточно широкий спектр методов решения, как точных, так и приближенных. Предлагаемые методы поиска оптимального порядка опираются на эвристические подходы, поиск с отсечением, детерминированный или случайный, на динамическое программирование. Выбор оптимальных моментов прибытия может осуществляться на основе процедур теории расписаний, смешанного целочисленного линейного программирования, генетических алгоритмов. Весьма обширный обзор работ на эту тему, вышедших до 2011 года, представлен в [1]. Более или менее полный обзор работ, вышедших позже, имеется в [2, 3].

Авторами доклада исследовались различные кусочно-линейные критерии оптимальности, являющиеся суммами кусочно-линейных скалярных функций штрафов для отдельных судов. Ранее авторы исследовали [4] нелинейные критерии, однако результаты их численной оптимизации были неудовлетворительными.

В целом, задача бесконфликтного слияния потоков судов носит дискретно-непрерывный характер. В дискретной части задачи происходит выбор порядка судов. Это обусловлено тем, что смена порядка между судами может давать более плотную очередь из-за меньшей суммы длин интервалов безопасности. В непрерывной части устанавливаются новые моменты прибытия ВС в точку слияния, оптимальность которых определяется выбранным критерием качества.

При зафиксированном порядке прихода судов в точку слияния непрерывная подзадача решается методами линейного программирования. Однако, как было сказано выше, в целом, задача должна

решаться иными методами. В рамках доклада представлена процедура решения задачи слияния разнотипных судов в точке соединения потоков, основанная на подходах смешанного целочисленного линейного программирования. Использование целочисленных переменных позволяет внести в общее решение задачи и дискретную, и непрерывную части, а также формализовать дополнительные требования к слитой очереди, возникающие у диспетчеров управления воздушным движением.

Список литературы

- [1] Bennell J.A., Mesgarpour M., Potts C.N., Airport runway scheduling // *4OR – Q. J. Oper. Res.* — 2011. — Vol. 9. — No. 2. — P. 115–138.
- [2] Г. С. Вересников, Н. А. Егоров, Е. Л. Кулида, В. Г. Лебедев, Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку, Ч.1. Методы точного решения // *Проблемы управления*, **4** (2018), 2–13.
- [3] Г. С. Вересников, Н. А. Егоров, Е. Л. Кулида, В. Г. Лебедев, Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку, Ч.2. Методы приближенного решения // *Проблемы управления*, **5** (2018), 2–13.
- [4] A. A. Spiridonov, Numerical Optimization of Non-Conflict Aircraft Flow Merging // *CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol.2783: Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems, dedicated to the memory of Nikolai Botkin, Munich (Germany), November 19-20, 2020: proceedings.* 208–215.

Теория функций
(председатель к.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)

О мере множеств, разделяющих банаховы пределы¹

Авдеев Н.Н.

Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия

nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Обозначим через ℓ_∞ пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой $\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$, где \mathbb{N} — множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью. Естественным обобщением предела с пространства сходящихся последовательностей c на ℓ_∞ является понятие банахова предела.

Определение. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для $x \geq 0$,
2. $B\mathbb{I} = 1$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \dots)$,
3. $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Кратко пишем: $B \in \mathfrak{B}$. Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром в 1929 г. и доказано С. Банахом [1]. Сачестон установил [2], что для любых $x \in \ell_\infty$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) \leq Bx \leq p(x), \quad \text{где} \quad q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k$$

суть нижний и верхний функционалы Сачестона соотв. Множество таких $x \in \ell_\infty$, что $p(x) = q(x)$, образует [3] пространство почти сходящихся последовательностей ac . На каждом $x \in ac$ все $B \in \mathfrak{B}$ принимают одинаковые значения.

Представляет интерес вопрос об объекте, в некотором смысле двойственном пространстве ac : насколько малым можно взять подмножество пространства ℓ_∞ , чтобы для любых двух несовпадающих банаховых пределов в этом подмножестве всё ещё находился элемент, на котором эти банаховы пределы будут различаться? Так возникает понятие разделяющего множества [4, §3].

Множество $Q \in \ell_\infty$ называют разделяющим, если для любых неравных $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует такая последовательность $x \in Q$, что $B_1x \neq B_2x$. В частности, разделяющим является [5] множество всех последовательностей из 0 и 1, которое в дальнейшем мы будем обозначать через Ω . Множество Ω , вообще говоря, интуитивно воспринимается малым по сравнению со всем пространством ℓ_∞ . Однако можно ли найти ещё меньшее подмножество? Критерием малости теперь можно взять классическую меру. Каждой последовательности $(x_1, x_2, \dots) \in \Omega$ поставим в соответствие число

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k \in [0, 1]. \quad (1)$$

С точностью до счётного множества это соответствие взаимно однозначно и определяет на множестве Ω меру, которую мы будем отождествлять с мерой Лебега на $[0, 1]$. Оказывается, что из Ω можно выделить некоторые подмножества, которые также будут разделяющими, например [4, §3, Теорема 11], $U = \{x \in \Omega : q(x) = 0, p(x) = 1\}$. Однако множество U имеет меру 1 [5].

В статье [6] пример разделяющего множества, являющегося подмножеством Ω и имеющего меру нуль, а именно

$$\{x \in \ell_\infty : p(x) = a, q(x) = b\}, \quad 0 < b < a < 1. \quad (2)$$

Для построения такого множества используется следующий факт.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00197).

Лемма [4, §3, замечание 6] Пусть X — разделяющее множество и $X \subset \text{Lin } Y$, где $\text{Lin } Y$ обозначает линейную оболочку Y . Тогда Y также является разделяющим множеством.

Наряду с использованным при построении разделяющего множества меры нуль включением

$$\Omega \subset \text{Lin}\{x \in \Omega : p(x) = a, q(x) = b\} \quad (3)$$

для любых $0 \leq b < a \leq 1$, имеет место равенство

$$\ell_\infty = \text{Lin}\{x \in \ell_\infty : p(x) = a, q(x) = b\} \quad (4)$$

для любых $a > b$. Возникает закономерный вопрос: для каких ещё подмножеств пространства ℓ_∞ верны аналогичные соотношения? Оказывается, что этим свойством обладает и ещё одно подмножество пространства ℓ_∞ : подпространство $A_0 = \{x \in \ell_\infty : \alpha(x) = 0\}$, где [7]

$$\alpha(x) = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \max_{i < j \leq 2i} |x_i - x_j|.$$

Пространство A_0 обладает и другими интересными свойствами.

Теорема. [8, следствие 2] Пусть $x \in ac$, т.е. $p(x) = q(x)$. Тогда $x \in c$ если и только если $\alpha(x) = 0$. Таким образом, $c = ac \cap A_0$. Включение $c \subset A_0$ собственное.

В [9] показано, что, хотя сама функция $\alpha(x)$ не инвариантна относительно оператора сдвига T , подпространство A_0 такой инвариантностью обладает; из доказанного в [10] соотношения $\alpha(Cx) \leq \alpha(x)$, где Cx есть оператор Чезаро $(Cx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, следует инвариантность пространства A_0 относительно оператора Чезаро. В статье [6] доказывается, что пространство A_0 инвариантно относительно операторов растяжения σ_n и усредняющего сжатия $\sigma_{1/n}$.

Список литературы

- [1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Reprint of the 1932 original, Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993, iv+128, ISBN: 2-87647-148-5.
- [2] L. Sucheston, Banach limits, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 308–311, ISSN: 0002-9890, DOI: 10.2307/2316038.
- [3] G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.*, bf 80: 1 (1948), 167–190, ISSN: 0001-5962, DOI 10.1007/BF02393648.
- [4] Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев, Геометрические свойства множества банаховых пределов, *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **78**: 3 (2014), 177–204.
- [5] Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, Характеристические функции банаховых пределов, *Сибирский математический журнал*, **51**: 4 (2010), 904–910.
- [6] Н. Н. Авдеев, О разделяющих множествах меры нуль и функционалах Сачестона, *Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2021), 38–50.
- [7] Н. Н. Авдеев, Е. М. Семенов, Об асимптотических свойствах оператора Чезаро, *Воронежская Зимняя Математическая школа С.Г. Крейна — 2018. Материалы Международной конференции. Под ред. В.А. Костина.*, (2018), 107–109.
- [8] Н. Н. Авдеев, О пространстве почти сходящихся последовательностей, *Математические заметки*, **105**: 3 (2019), 462–466, DOI: 10.4213/mzm12298.
- [9] Н. Н. Авдеев, О суперпозиции оператора сдвига и одной функции на пространстве ограниченных последовательностей, *Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования.*, (2018), 20–21.
- [10] E. Semenov and др., Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry, *Pacific J. Math.*, **306**: 1 (2020), 357–373.

Ограниченные интегральные операторы в областях с углами

Борцов В.В., Нестеров А.С.

Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского, Брянск, Россия

vladislav.bortzov@yandex.ru, pianist666666@gmail.com

Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости C . Через $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) обозначим пространство Лебега в G , т.е. множество функций, измеримых в области G и удовлетворяющих условию:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_G |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Подпространство пространства $L^p(G)$, состоящее из функций, аналитических в G , обозначим через $A^p(G)$.

В работе [4] устанавливается, что для ограниченной односвязной области G_α , $0,5 \leq \alpha < +\infty$, граница которой является аналитической кривой во всех точках, кроме нуля, и образует прямолинейный угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ в нуле, оператор Бергмана $P_0(f)(z) = \int_{D_\alpha} K(z, \zeta) f(\zeta) dm_2(\zeta)$ отображает пространство $L^p(G_\alpha)$ на $A^p(G_\alpha)$ и является ограниченным при $\alpha \in [1, +\infty)$, $p \in (1, +\infty)$, и при $0,5 \leq \alpha < 1$, $p \in \left(1, \frac{2}{\alpha+1}\right] \cup \left[\frac{2}{1-\alpha}, +\infty\right)$. При остальных p и α оператор Бергмана является неограниченным.

Выявляется проблема: существуют ли другие ограниченные линейные проекторы, отображающие пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций. Решением данной задачи занимались как отечественные, так и зарубежные авторы (см., например, [1]- [6]).

В нашей работе рассмотрены области вида $G_\alpha = \left\{ w \in C : |\arg w| < \frac{\pi\alpha}{2} \right\}$ – плоский угол раствора $\pi\alpha$ при всех $0 < \alpha \leq 2$.

Оказывается, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $G_\alpha = \left\{ w \in C : |\arg w| < \frac{\pi\alpha}{2} \right\}$, $0 < \alpha \leq 2$, $\beta > \max\{2\alpha - 2 - \frac{\alpha}{2q}, -\frac{\alpha}{2q}\}$, $1 \leq p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда интегральный оператор $P(f)(w) = \int_{G_\alpha} K(w, \mu) f(\mu) dm_2(\mu)$, где

$$K(w, \mu) = -\frac{\beta+1}{\pi} (2i)^\beta \frac{[Imh(\mu)]^\beta}{[h(w) - \bar{h}(\mu)]^\beta} |h'(\mu)|^2, h(w) = ie^{\frac{1}{\alpha} \ln w},$$

отображает $L^p(G_\alpha)$ в $A^p(G_\alpha)$ и является ограниченным.

Если при этом $f(w) \in A^p(G_\alpha)$, $\beta > 2\left(\frac{\alpha}{p} - 1\right)$, $\beta \geq 0$, то $P(f)(w) \equiv f(w)$.

Список литературы

- [1] А. А. Соловьев, Оценки в L^p интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций. *Сибирский математический журнал*, **26**: 3 (1985), 168–191.
- [2] П. Х. Татоян, Связи между средними значениями гармонически сопряженных функций. *Доклады АН АрмССР*, **49**: 1 (1969), 3–8.

- [3] Н. М. Ткаченко, Об оценках модуля производной аналитической в угловой области функции. *Вестник Ижевского государственного технического университета*, **1(37)** (2008), 96–98.
- [4] А. М. Шихватов, О пространствах аналитических функций в области с угловой точкой. *Математические заметки*, **18**: 3 (1975), 411–420.
- [5] J. Burbea, The Bergman projection over plane regions. *Ark. for mat.*, **18**: 1 (1980), 207–221.
- [6] Н. Hedenmalm, The dual of Bergman Space on Simply connected domains. *J. d'AnalyseMathematique.*, **88** (2002), 311–335.

Характеристика нулей аналитических функций из класса A_α^∞ , где $\alpha > -1$, на односвязной области комплексной плоскости

Ермакова Д.С.
БГУ им. И.Г. Петровского, Брянск, Россия
ermakova.darya.sergeevna@yandex.ru

Аннотация: В работе доказано, что нули аналитической функции $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\alpha > -1$ можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(G)$, где G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех аналитических в функции. В 1914 году Харди рассмотрел класс H^p , $p > 0$ аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(r \exp^{i\theta})|^p d\theta < +\infty.$$

На сегодняшний день хорошо изучены корневые множества функций класса H^p . Известно, что если функция $f \in H^p(D)$, $0 < p < +\infty$, то нули $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ функции подчиняются известному условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Введем в рассмотрение класс функций

$$A_\alpha^\infty(D) = \{f \in H(D) : |f(z)| \leq \frac{c_f}{(1 - |z|)^\alpha},$$

где c_f – положительная постоянная, зависящая только от f , $\alpha > -1$.

В работе Ф. А. Шамоина [1] установлено, что нули аналитической функции можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(D)$.

Обобщим этот результат на случай произвольной односвязной области комплексной плоскости. Обозначим

$$A_\alpha^\infty(G) = \{f \in H(D) : |F(w)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha},$$

где $\text{dist}(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G , c_F – положительная постоянная, зависящая только от F , $\alpha > -1$.

Теорема 1 Если функция $f \in A_\alpha^\infty(D)$, $\alpha > -1$, и $f(z_k) = 0, k = 1, 2, \dots, z_k \in D$, тогда функция $\frac{f}{B} \in A_\alpha^\infty(D)$, где $\tilde{B}(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(z, z_k)) \cdot b_k(z, z_k), z, z_k \in D$.

Теорема 2 Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. Если функция $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\alpha > -1$, и $F(w_k) = 0, k = 1, 2, \dots, w_k \in G$ тогда функция $\frac{F}{B} \in A_\alpha^\infty(G)$, где $\tilde{B}(w, w_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\Psi(w), \Psi(w_k))) \cdot b_k(\Psi(w), \Psi(w_k)), w, w_k \in G$, $\Psi(w)$ – функция, конформно отображающая область G на единичный круг D .

Доказательство.

Так как $F \in A_\alpha^\infty(G)$, то

$$|F(w)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}.$$

Конформно отображим единичный круг D на область с помощью функции $w = \varphi(z)$ [2]:

$$|F(\varphi(z))| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(\varphi(z), \partial G))^\alpha}.$$

Функция $F(\varphi(z)) \in H(D)$. Обозначим $h(z) = F(\varphi(z))$, $z \in D$, тогда

$$|h(z)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(\varphi(z), \partial G))^\alpha}.$$

Используя двойное неравенство, которое выводится из теоремы Кебе [3]:

$$\frac{1}{4} \frac{\text{dist}(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|} \leq |\varphi'(z)| \leq 4 \frac{\text{dist}(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|}, \quad (1)$$

получим:

$$|h(z)| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |z|)^\alpha \cdot |\varphi'(z)|^\alpha}.$$

Функция $\varphi'(z)$ не обращается в нуль внутри единичного круга [2].

Рассмотрим функцию

$$f(z) = h(z) \cdot (\varphi'(z))^\alpha, \quad (2)$$

аналитическую в единичном круге и отличную от тождественного нуля. Тогда последнее неравенство будет эквивалентно следующему:

$$\left| \frac{f(z)}{(\varphi'(z))^\alpha} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |z|)^\alpha \cdot |\varphi'(z)|^\alpha}$$

или

$$|f(z)| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |z|)^\alpha},$$

то есть $f(z) \in A_\alpha^\infty(D)$.

Имеем, $F(w_k) = 0$ и $w_k = \varphi(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$, то $F(\varphi(z_k)) = 0$, то есть $h(z_k) = 0$, $z_k = \Psi(w_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Так как нули функции $h(z)$ совпадают с нулями функции $f(z) = h(z) \cdot (\varphi'(z))^\alpha$, то $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Итак, нами построена функция $\frac{f}{B} \in A_\alpha^\infty(D)$, не имеющая нулей в $A_\alpha^\infty(D)$.

Отобразим конформно область G на единичный круг с помощью функции $z = \Psi(w)$, получим:

$$\left| \frac{f(\Psi(w))}{\widetilde{B}(\Psi(w), \Psi(w_k))} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |\Psi(w)|)^\alpha}.$$

Используя оценки (1), замечаем, что указанное неравенство эквивалентно следующему:

$$\left| \frac{f(\Psi(w))}{\widetilde{B}(\Psi(w), \Psi(w_k))} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F \cdot |\varphi'(\Psi(w))|^\alpha \cdot 4^\alpha}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}$$

или

$$\left| \frac{f(\Psi(w))}{\widetilde{B}(\Psi(w), \Psi(w_k))} \right| \leq \frac{c_{F,\alpha} \cdot |\varphi'(\Psi(w))|^\alpha}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}.$$

Функция $f(\Psi(w)) \in H(G)$, $w \in G$. Учитывая (2) получим

$$\left| \frac{F(w)}{\widetilde{B}(\Psi(w), \Psi(w_k))} \right| \leq \frac{c_{F,\alpha}}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha},$$

то есть $\frac{F}{B} \in A_\alpha^\infty(G)$, где

$$\tilde{B}(w, w_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\Psi(w), \Psi(w_k))) \cdot b_k(\Psi(w), \Psi(w_k)), w, w_k \in G.$$

Далее так как $\tilde{B}(z, z_k) \neq 0, z_k = \Psi(w_k), k = 1, 2, \dots$, то есть $\prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\Psi(w), \Psi(w_k))) \cdot b_k(\Psi(w), \Psi(w_k)) \neq 0$. А это справедливо тогда и только тогда, когда $b_k(\Psi(w), \Psi(w_k)) \neq 0$, то есть $\frac{z_k}{|z_k|} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \neq 0, k = 1, 2, \dots$. Следовательно $z \neq z_k, z_k = \Psi(w_k), k = 1, 2, \dots$. Отсюда заключаем, что $\tilde{B}(w, w_k) \neq 0$.

Таким образом, мы выделили нули аналитической функции, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(G)$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] А. Е. Djrbashian and F. A. Shamoyan, Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: BSB Teubner, 1998.
- [2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1958. 736 с.
- [3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 630 с.

Порядковые проекторы в пространстве регулярных ортогонально аддитивных операторов¹

Итарова С.Ю.

Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ, Россия
svetlana.itarova1991@gmail.com

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках впервые были введены в работе [4]. В настоящее время общая теория этих операторов является областью интенсивных исследований (см. [1,5–7]). В данной заметке мы рассмотрим вопросы порядкового проектирования в пространстве регулярных ортогонально аддитивных операторов. Порядковое проектирование является важным инструментом для изучения различных классов линейных и ортогонально аддитивных операторов, действующих в векторных решетках [1, 3, 9]. В работе [8] было установлено, что пространство регулярных ортогонально аддитивных операторов, действующих из векторной решетки в порядково полную векторную решетку является порядково полной векторной решеткой. Возникает естественная задача — распространить ранее известные результаты о порядковом проектировании, на случай регулярных ОАО.

Приведем необходимые предварительные сведения. Стандартный источник для ссылок по теории векторных решеток — монография [2].

Пусть E, F — векторная решетка. Отображение $T : E \rightarrow F$ называется *ортогонально аддитивным оператором* (кратко ОАО), если $T(x + y) = Tx + Ty$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in E$. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \rightarrow F$ называется:

- *положительным*, если $Tx \geq 0$ для любого $x \in E$;
- *регулярным*, если $T = S_1 - S_2$, где S_1, S_2 — положительные ортогонально аддитивные операторы из E в F .

Векторное пространство всех регулярных ОАО из E в F обозначается $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$. Порядковый проектор на полосу $\{A\}^{\perp\perp}$, порожденную множеством $A \subset \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ будем обозначать π_A .

Следующая теорема характеризуют оператор порядкового проектирования на полосу, порожденную направленным семейством положительных ОАО.

Теорема. Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядкова полна, $A \subset \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ — направленное семейство положительных ОАО. Тогда для произвольных $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ и $x \in E$ справедливы формулы:

$$(\pi_A T)(x) = \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ S \in A}} \inf_{\substack{y \in \tilde{S}_x \\ \rho \in \mathfrak{B}(F)}} \{\rho Ty + \rho^\perp Tx : \rho S(x - y) \leq \varepsilon Sx\},$$

Список литературы

- [1] N. Abasov, On band preserving orthogonally additive operators. *Sib. Electron. Math. Reports*, **18**: 1 (2021), 495-510.
- [2] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Positive Operators. Dordrecht: Springer, 2006.
- [3] C. B. Huijsmans, B. de Pagter, Disjointness preserving and diffuse operators. *Compositio Math.*, **79**: 3 (1991), 351–374.

¹Исследование выполнено за счет гранта Министерства Науки и Высшего образования (проект № 075-02-2021-1552).

- [4] J. M. Mazón, S. Segura de León, Order bounded orthogonally additive operators. *Rev. Roumane Math. Pures Appl.*, **35**: 4 (1990), 329–353.
- [5] V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators. *Positivity*, **25**: 2 (2021), 291–327.
- [6] M. Pliev, On C -compact orthogonally additive operators. *J. Math. Anal. Appl.*, **494**: 1 (2021), 124594.
- [7] M. A. Pliev, F. Polat, M. R. Weber, Narrow and C -compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces. *Results Math.*, **74**: 1 (2019), article 157.
- [8] M. Pliev, K. Ramdane, Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices. *Mediterr. J. Math.*, **15**: 2 (2018), article number 55.
- [9] M. Pliev, M. Weber, Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators. *Positivity*, **20**: 3 (2016), 695–707.

О некоторых свойствах геометрии овала Кассини и некоторых невыпуклых множеств на плоскости

Кувшинов О.А.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

В работе рассматривается замкнутая кривая в плоскости \mathbb{R}^2 — овал Кассини, аналитическое представление которого имеет вид

$$\Phi = \{x = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2}\}.$$

Подробно рассмотрены частные случаи, при которых овал Кассини есть односвязная невыпуклая гладкая кривая. Это представление имеет место при $c < a < \sqrt{2}c$.

Наряду с Φ определим множество Φ^* :

$$\Phi^* = \{x = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - x^2}\}.$$

Исследуется ε -слой вокруг множества Φ^* :

$$\Phi^\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^2 : \rho(z, \Phi^*) \leq \varepsilon\},$$

где $\rho(z, \Phi^*) = \min_{x \in \Phi^*} \|x - z\|$.

Известно (см., например, [1], стр. 176), что любой выпуклый компакт Z в плоскости \mathbb{R}^2 ($\text{int}Z \neq \emptyset$) имеет ε -слой ($\varepsilon > 0$) $Z(\varepsilon) = Z^\varepsilon \setminus \text{int}Z$, $Z^\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^2 : \rho(z, Z) \leq \varepsilon\}$, площадь $S(\varepsilon)$ которого определяется равенством

$$S(\varepsilon) = l(\partial Z) \cdot \varepsilon + \pi \cdot \varepsilon^2 \quad (1),$$

где $l(\partial Z)$ — длина границы ∂Z множества Z .

При этом возникает естественный вопрос о том, какой формулой представлена площадь $S(\varepsilon)$ ε -слоя ($\varepsilon > 0$), окружающего произвольный необязательно выпуклый компакт Z в \mathbb{R}^2 , обладающий внутренностью $\text{int}Z$, удовлетворяющей равенству $cl(\text{int}Z) = Z$.

Очевидно, что вопрос в такой формулировке задает весьма трудную задачу.

Сузим этот вопрос на невыпуклые компакты Z в \mathbb{R}^2 , указанные выше и имеющие гладкую границу в \mathbb{R}^2 и сформулируем теорему.

Теорема. Пусть Z невыпуклый односвязный компакт в \mathbb{R}^2 с гладкой границей ∂Z и внутренностью $\text{int}Z$, удовлетворяющей равенству $cl(\text{int}Z) = Z$. Тогда существует такое число $\varepsilon^* > 0$, что площадь ε -слоя при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ представлена выражением (1).

В случае овала Кассини Φ показано, что для множества Φ^* при достаточно малых $\varepsilon > 0$ площадь $S(\varepsilon)$ ε -слоя $\Phi(\varepsilon) = \Phi^\varepsilon \setminus \text{int}\Phi$ определяется равенством (1), где l — длина границы $\partial\Phi^*$ множества Φ^* .

В работе указаны те пределы для числа $\varepsilon > 0$, при которых справедливо равенство (1). Это те пределы, при которых $\partial\Phi^\varepsilon$ — граница множества Φ^ε — гладкая кривая.

Список литературы

- [1] Лейхтвейс К. Выпуклые множества: Пер. с нем. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 336 с.

Распространение теоремы Мальявена-Рубела на распределения комплексных нулей¹

Салимова А.Е.
 БашГУ, УГНТУ, Уфа, Россия
 anegorova94@bk.ru,

Пусть $f \neq 0$ — целая функция на \mathbb{C} . Через Zero_f обозначаем распределение всех её корней, перенумерованное с учётом кратности. Если f обращается в нуль на $Z \subset \text{Zero}_f$ с учётом кратности, то пишем $f(Z) = 0$, и f — *целая функция экспоненциального типа* (ц.ф.э.т.), если

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|} < +\infty$$

Всюду далее $Z = \{z_j\}_{j=1,2,\dots}$ и $W = \{w_j\}_{j=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ — распределения точек на комплексной плоскости \mathbb{C} *конечной верхней плотности*, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \left(\sum_{|z_j| \leq r} 1 + \sum_{|w_j| \leq r} 1 \right) < +\infty.$$

В обозначении $\text{Re}^+ z := \max\{0, \text{Re} z\}$ определим *правый* и *левый характеристические логарифмы* для Z соответственно как

$$l_Z^{\text{h}}(r) := \sum_{0 < |z_j| \leq r} \text{Re}^+ \frac{1}{z_j}, \quad l_Z^{\text{h}}(r) := \sum_{0 < |z_j| \leq r} \text{Re}^+ \frac{1}{-z_j},$$

а также *логарифмическую субмеру интервалов* для Z

$$l_Z(r, R) := \max \{l_Z^{\text{h}}(R) - l_Z^{\text{h}}(r), l_Z^{\text{h}}(R) - l_Z^{\text{h}}(r)\}, \quad 0 < r < R \leq +\infty.$$

Основной результат статьи П. Мальявена и Л. А. Рубела [1; теорема 4.1] —

Теорема Мальявена – Рубела. Пусть Z и W лежат на положительной полуоси \mathbb{R}^+ вещественной оси \mathbb{R} . Эквивалентны три утверждения:

I. Для любой ц.ф.э.т $g \neq 0$ с $g(W) = 0$ найдется ц.ф.э.т. $f \neq 0$ с $f(Z) = 0$, удовлетворяющая ограничению

$$|f(iy)| \leq |g(iy)| \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

II. Найдутся ц.ф.э.т $g \neq 0$ с $g(W) = 0$ и $\text{Zero}_g \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z > 0\} = W$, а также ц.ф.э.т. $f \neq 0$ с $f(Z) = 0$, удовлетворяющие (1).

III. Существует $C \in \mathbb{R}$, для которого $l_Z(r, R) \leq l_W(r, R) + C$ при всех значениях $0 < r < R < +\infty$.

Наше развитие теоремы Мальявена – Рубела из [2; теорема 2.1] —

Теорема. Для $Z \subset \mathbb{C}$ и $W \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z > 0\}$ при условиях

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{|\text{Re} z_j|}{|z_j|} > 0, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{Re} w_j}{|z_j|} > 0$$

все три утверждения I–III из теоремы Мальявена – Рубела по-прежнему остаются эквивалентными.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 20-31-90074).

Список литературы

- [1] P. Malliavin, L. A. Rubel, On small entire functions of exponential type with given zeros *Bull. Soc. Math. France*, **89**: 2 (1961), 175–201.
- [2] А. Е. Салимова, Б. Н. Хабибуллин, Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости *Уфимский математический журнал*, **13**: 3 (2021), 116–128.

Limit points of a p -adic dynamical system

Rozikov U. A., Safarov J. K.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

rozikovu@yandex.ru, kurbanalivich.1992@gmail.com

Theory of p -adic numbers is one of very actively developing area in mathematics. It has numerous applications in many branches of mathematics, biology, physics and other sciences (see for example [1]- [4] and the references therein).

Let \mathbb{Q} be the field of rational numbers.

For each fixed prime number p , every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$.

The p -adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

The completion of \mathbb{Q} with respect to p -adic norm defines the p -adic field which is denoted by \mathbb{Q}_p (see [1]).

The algebraic completion of \mathbb{Q}_p is denoted by \mathbb{C}_p and it is called the set of *complex p -adic numbers*.

Consider the dynamical system associated with the function $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ defined by

$$f(x) = ax^b, \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{C}_p, \quad b \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

where $x \neq 0$.

For $x \in \mathbb{C}_p$ denote by $f^n(x)$ the n -fold composition of f with itself:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f(x))))}_{n \text{ times}} \dots$$

For arbitrary given x_0 and f the trajectory of x_0 is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots$$

We are interested to study the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

A point x is called a fixed point for f if $f(x) = x$.

The function (1) has fixed points x_k , $k = 1, 2, \dots, |b-1|$, which are solutions to $x^{b-1} = \frac{1}{a}$ in \mathbb{C}_p .

For these fixed points we have

$$|x_k|_p = \alpha \equiv (|a|_p)^{-1/(b-1)}. \quad (2)$$

Thus $x_k \in S_\alpha(0)$, $k = 1, 2, \dots, |b-1|$.

For any $a \in \mathbb{C}_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p < r\},$$

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p \leq r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p = r\}.$$

Lemma 1. *If $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ and α is defined by (2) then the following assertions hold*

1. *The sphere $S_\alpha(0)$ is invariant with respect to f , (i.e., $f(S_\alpha(0)) \subset S_\alpha(0)$);*

$$2. f(U_\alpha(0)) \subset \mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0);$$

$$3. f(\mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0)) \subset U_\alpha(0).$$

We can explicitly calculate f^n :

Lemma 2. For any $x \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ we have

$$f^n(x) = a^{\frac{b^n-1}{b-1}} \cdot x^{b^n}, \quad n \geq 1.$$

Theorem 1. If $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ and α is defined by (2). Then

1. if $x \in U_\alpha(0)$ then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{2k}(x) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f^{2k-1}(x)|_p = +\infty.$$

2. if $x \in S_\alpha(0)$ then $f^n(x) \in S_\alpha(0)$, $n \geq 1$.

3. if $x \in \mathbb{C}_p \setminus V_\alpha(0)$ then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^{2k}(x)|_p = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{2k-1}(x) = 0.$$

References

- [1] N. Koblitz, *p*-adic numbers, *p*-adic analysis and zeta-function. Berlin: Springer, 1977.
- [2] U. A. Rozikov, *p*-adic dynamical systems of the function ax^{-2} . *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **13**: 3 (2021), 239–249.
- [3] U. A. Rozikov, I. A. Sattarov, *p*-adic dynamical systems of (2, 2)-rational functions with unique fixed point. *Chaos, Solitons and Fractals*, **105** (2017), 260–270.
- [4] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p*-Adic Analysis and Mathematical Physics (Series Sov. and East Eur. Math., Vol. 10), World Scientific, River Edge, N. J. 1994.

Dynamical systems of a rational function

Rozikov U. A., Shoyimova F. B.
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
 rozikovu@yandex.ru, fayozashoyimova@gmail.com

To define a discrete-time dynamical system one considers (see [1]) a function $f : X \rightarrow X$. For $x \in X$ denote by $f^n(x)$ the n -fold composition of f with itself (i.e. n time iteration of f to x):

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f(x))))}_{n \text{ times}} \dots$$

Definition 1. For arbitrary given $x_0 \in X$ and $f : X \rightarrow X$ the discrete-time dynamical system is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots \quad (1)$$

Denote the sequence (1), for $x = x_0$, by $\tau(x) = \{x_j = f^j(x), j = 0, 1, \dots\}$.

A point $x \in X$ is called a fixed point for $f : X \rightarrow X$ if $f(x) = x$.

Denote the set of all fixed points by $\text{Fix}(f)$.

Definition 2. The limit set $\omega(x_0)$ of orbit (1) is defined as

$$\omega(x_0) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\tau(f^j(x_0))},$$

where \overline{M} is the closure of M .

Definition 3.

- A fixed point x^* of f is attracting or stable if there is an open set (neighborhood) U containing x^* such that for all $x \in U$, the orbit $\tau(x)$ with initial point x converges to x^* .
- A fixed point x^* of f is repelling if there is an open set (neighborhood) U containing x^* such that for any $x \in U$, $x \neq x^*$, there is some $k \geq 1$ such that $f^k(x) \notin U$.

The main problem: Given a function f and initial point x_0 what ultimately happens with the sequence (1). Does the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ exist? If not what is the set of limit points of the sequence? Is this set finite or infinite?

The difficulty of the main problem depends on the set X and on the given function f . The problem is mainly considered in case $X \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ and when f is a continuous function on X .

Note that dynamical systems generated by rational (discontinuous) functions are very important in many problems on biology and physics (see [1]- [3] and references therein).

Here we consider the case $X = \mathbb{R}$ and f as a rational function of the form

$$f(x) = \frac{x+a}{bx+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0, x \neq -\frac{c}{b}.$$

For this function we have $\text{Fix}(f) = \emptyset$ if $(c-1)^2 + 4ab < 0$ and $\text{Fix}(f) = \{x_1, x_2\}$ if $(c-1)^2 + 4ab \geq 0$, where

$$x_{1,2} = \frac{1}{2b} \left(1 - c \pm \sqrt{(c-1)^2 + 4ab} \right).$$

Denote

$$P_{1,2} = |f'(x_{1,2})| = \left| \frac{2(c-ab)}{1+2ab+c^2 \pm (1+c)\sqrt{(c-1)^2+4ab}} \right|.$$

Note that $P_1 P_2 = 1$.

Proposition 1. *The following assertions hold*

- 1) *The fixed point x_1 (resp. x_2) is repeller if and only if x_2 (resp. x_1) is attractive.*
- 2) *The fixed point x_1 is saddle if and only if x_2 is saddle.*

Consider sequence of vectors (a_n, b_n, c_n, d_n) , $n \geq 0$ given by recurrent relations:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + ac_n \\ b_{n+1} &= b_n + ad_n \\ c_{n+1} &= ca_n + bc_n \\ d_{n+1} &= cb_n + bd_n. \end{aligned} \tag{2}$$

where $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (1, a, b, c)$.

Denote

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(x) = -\frac{c}{b} \right\}, \tag{3}$$

Theorem 1. 1. *The set \mathcal{P} is the following*

$$\mathcal{P} = \left\{ -\frac{c}{b} \right\} \cup \left\{ -\frac{c_n^2 + a_n b_n}{b_n(1 + c_n)} : b_n(1 + c_n) \neq 0, n \geq 1 \right\},$$

where (a_n, b_n, c_n, d_n) are defined in (2).

2. *If $P_i < 1$ (for $i = 1$ or 2) then there is a neighborhood U_i of the fixed point x_i such that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_i, \text{ for all } x \in U_i \setminus \mathcal{P}.$$

References

- [1] R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical system, Westview Press, 2003.
- [2] U. A. Rozikov, An introduction to mathematical billiards. *World Sci. Publ.* Singapore. 2019, 224 pp.
- [3] U. A. Rozikov, Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci. Publ.* Singapore. 2020, 460 pp.

**Численные методы решения дифференциальных уравнений
(председатель д.ф.-м.н. В.Г. Пименов)**

Математическое моделирование фильтрации степенной жидкости через флюидоупор, связанной с потерей сплошности среды

Закирзянов Ш.И., Байков В.А.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
mishkino-sh@mail.ru, Baikov@bnipti.rosneft.ru

Цель исследования: Численно-аналитическое исследование переноса степенной жидкости во флюидоупоре при потере сплошности

Задачи исследования:

- В квазистационарном приближении для трехмерного случая получить аналитические решения
- Выполнить вычислительные эксперименты, полученные результаты сравнить с аналитическими решениями.

В данной работе рассмотрена модель переноса степенной жидкости, основанная на предположении о потере сплошности флюидоупора, связанного с образованием трещин и с дальнейшим движением флюида по этим трещинам. Исследована замкнутая система уравнений, позволяющая описать миграцию углеводородов через флюидоупоры по трещинам гидроразрыва. По мнению авторов, этот механизм переноса флюида может являться одним из основных при формировании нефтяных и газовых залежей.

В квазистационарном приближении для трехмерного случая получены аналитические решения, позволяющие связывать геометрические размеры трещины, избыточное давление в трещине и расход жидкости. Были выполнены вычислительные эксперименты, в которых показано, что аналитические решения согласуются с численными экспериментами.

Список литературы

- [1] В. А. Байков, А. В. Аксаков, О. С. Борщук. Математическое моделирование миграции жидкости через флюидоупор по трещинам. *Нефтяное хозяйство*, **5** (2018), 48–51.
- [2] Ю. П. Желтов, С. А. Христианович. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. *Изв. АН СССР*, **5** (1955), 3–41.
- [3] Н. И. Мухелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 709 с.
- [4] И. Снеддон. Преобразования Фурье. Москва: ИЛ., 1955. 667 с.

Численное моделирование нестационарной задачи конвекции-диффузии в одномерном случае

Хайиткулов Б.Х.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

b.hayitqulov@mail.ru

В [1–3] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых физических тел. В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре. Создано программное приложение для проведения вычислительных экспериментов с помощью этого алгоритма.

В прямоугольнике $D = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти функцию $f(x, t) \geq 0$ такую, что для любого $t \in [0, T]$ линейный функционал

$$J\{f\} = \int_a^b f(x, t) dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) &= \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$m(x, t) \leq u(x, t) \leq M(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t ; $\chi(x, t) > 0$ – коэффициент диффузии (температуропроводности); $v(x, t)$ – скорость конвекции; $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x, t)$, $M(x, t)$ – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условия сопряжения $\mu_1(0) = u_0(a)$, $\mu_2(0) = u_0(b)$. Функции $m(x, t)$ и $M(x, t)$ – минимальные и максимальные температуры, определенные в области D . Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Пусть $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}$. Оператор L , определенный в $L_2(D)$, имеет обратный L^{-1} . Здесь L^{-1} интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)–(3) в следующем виде:

$$f(\cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, t) \geq 0, \quad m(x, t) \leq (L^{-1}f)(x, t) \leq M(x, t). \quad (4)$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (1)–(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в D равномерную по обоим переменным разностную сетку $\bar{\omega}_h^\tau = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) : x_i = ih, t_j = j\tau, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, h = (b - a)/N_1, \tau = T/N_2\}$.

Неявная разностная схема для задачи (2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \chi_i^{j+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + v_i^{j+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + f_i^{j+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_{N_1}^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь $\chi_i^{j+1} = \chi(x_i, t_{j+1})$, $v_i^{j+1} = v(x_i, t_{j+1})$, $f_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1})$. Получаем $G = A^{-1}$, где A – матрица составленная из коэффициентов перед неизвестными в системе (5).

Аппроксимируем задачу (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область D на равные части по x на N_1 , и по t на N_2 : $D = \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$, где $D_i^j = \{(x, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$. В пространстве $L_2(D)$ функции $f_i^j = f(x_i, t_j)$, $(x, t) \in D_i^j$ ($i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$) определяются как кусочно-постоянные функции.

Отсюда получаем $f(x, t) \approx \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j$.

Пусть $g_{ik}^j = G$, $m_i^j = m(x_i, t_j)$, $M_i^j = M(x_i, t_j)$, $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $k = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Подставим выражение $f(x, t)$ в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J_j\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} (\text{mes} D_i^j) f_i^j \rightarrow \min, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ m_i^j &\leq \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}^j f_k^j \leq M_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ f_k^j &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (6) решается М-методом. Численное решение задачи (2) находится с помощью $u_i^j = \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}^j f_k^j$. Найденная f_k^j является функцией, дающей минимум функционалу (1).

Список литературы

- [1] Б. Х. Хайиткулов, Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*, **57** (2021), 45–52.
- [2] B. Kh. Khaikulov, Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology*, **63**: 4 (2020), 583–592.
- [3] Б. Х. Хайиткулов, Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. *Математическое моделирование и численные методы*, **3** (2020), 85–98.

Сходимость численного метода решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием

Лекомцев А.В.

Уральский Федеральный Университет имени Первого Президента России Б.Н.Ельцина,
Екатеринбург, Россия
avlekomtsev@urfu.ru

Рассмотрим одномерное квазилинейное уравнение теплопроводности с эффектом запаздывания:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

где $x \in [0, X]$ — пространственная независимая переменная, $t \in [t_0, \theta]$ — временная независимая переменная. $u(x, t)$ является искомой функцией. $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t . τ обозначает величину запаздывания. Также нам заданы начальные и граничные условия:

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(X, t) = g_1(t), \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (3)$$

Работа посвящена исследованию сходимости и устойчивости численного алгоритма решения квазилинейных параболических уравнений с эффектом запаздывания, постоянным, переменным или распределенным. Вопросы существования и единственности решения задачи (1)–(3) в данной работе не рассматриваются. Нелинейность относительно искомой функции содержится в операторе дифференцирования по пространственной переменной и функции неоднородности. Подобная задача рассматривалась в статье [1]. В текущей работе, в отличие от вышеупомянутой статьи, рассматривается такая неявная разностная схема, что на каждом временном слое численное решение задачи (1)–(3) находится с помощью экономичного метода разностной прогонки.

Список литературы

- [1] T. V. Gorbova, V. G. Pimenov, S. I. Solodushkin, Difference Schemes for the Nonlinear Equations in Partial Derivatives with Heredity. *Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer*, (2019), 258–265.

Численное решение динамической модели среднего поля с производной дробного порядка¹

Романенко А.Д.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия
romart92@mail.ru

Использование дробных производных по времени связано с включением явлений с памятью [1]. Передача свойств памяти более точно отслеживается по траектории движения частицы. Среди огромного количества работ, посвященных теории и численным методам решения уравнений с частными производными и производными дробного порядка, имеется ряд статей, посвященных решению задач конвекции-диффузии с дробной производной по времени [2, 3].

В области $Q_T = (0, L) \times (0, T)$ ищется решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mat}^\alpha u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t) \text{ в } Q_T, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \text{ для } t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ для } x \in (0, L). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь под \mathcal{D}_{mat}^α понимается субстанциональная производная по Капуто

$$\mathcal{D}_{mat}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{du}{ds} ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \Gamma(z) - \text{гамма-функция Эйлера.}$$

Таким образом, задача (1) является задачей конвекции-диффузии с производной дробного порядка Капуто по времени. Особенностью данной задачи является наличие под знаком интеграла конвективного слагаемого для материальной (субстанциональной) производной $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}$, где функция $v = v(x, t)$ непрерывна в Q_T .

Численное решение осуществляется на равномерных сетках по пространству и времени с использованием точек пересечения характеристик $x - vt = const$ с временными слоями. Набор этих точек необходим для L1-аппроксимации производной дробного порядка. Наиболее трудоемкая часть алгоритма обусловлена поиском для каждого слоя по времени набора точек пересечения характеристик с нижними слоями, что дает информацию о памяти процесса.

Список литературы

- [1] J. Jr. Douglas, T. F. Russell, Numerical Methods for Convection-Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures. *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**: 5 (1982), 871–885.
- [2] M. Cui, A high-order compact exponential scheme for the fractional convection–diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math.*, **255** (2014), 404–416.
- [3] J. Zhang, X. Zhang, B. Yang, An approximation scheme for the time fractional convection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, **335** (2018), 305–312.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-61-46017).

Моделирование процесса подъема керн на поверхность после выбуривания

Саттарова Р.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Российская Федерация
zakasatt@mail.ru

В настоящее время углеводороды относятся к трудно добываемым ресурсам. Это обусловлено тем, что они пролегают на достаточно большой глубине, заключены в сложных, с геологической точки зрения, объектах, имеют высокую вязкость и обладают высокой степенью неоднородности фильтрационных свойств коллекторов.

В данной работе рассматривается поднятие керн на поверхность с достаточно больших глубин. Керн служит основным материалом для изучения геологического строения разреза скважины.

В качестве объекта исследования будет рассматриваться цилиндр (Рис. 1) с радиусом R и высотой h . На внешней круговой границе поддерживается постоянное давление P_e . Сам цилиндр представляет собой изотропное тело.

В силу изотропности и симметрии будем рассматривать одномерную задачу двухфазной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей: нефть и вода (Рис. 2).

Представим систему уравнений фильтрации [3], состоящую из уравнения неразрывности и закона Дарси:

$$\begin{cases} m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k k_w \frac{\partial p_w}{\partial r}) = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k k_w \frac{\partial p_w}{\partial r} + r k k_o \frac{\partial p_o}{\partial r}) = 0, \\ p_w|_{r=R} = P_e, p_o|_{r=R} = P_e, \\ p_C = p_w - p_o. \end{cases} \quad (1)$$

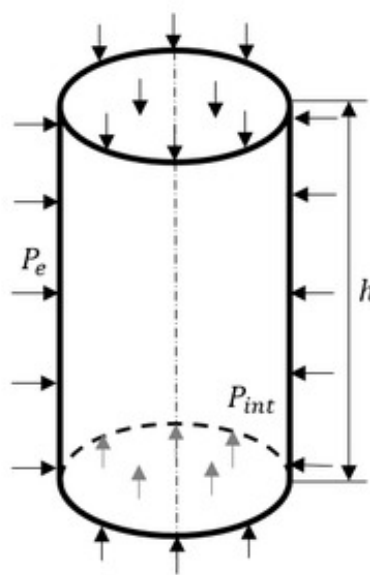
где s – водонасыщенность, k_w – проницаемость воды, k_o – проницаемость нефти, μ_w – вязкость воды, μ_o – вязкость нефти, p_w – плотность воды, m – масса компонента.

Рассмотрим задачу упругости [5]. Так как рассматривается изотропное тело и задача является одномерной и симметричной, а деформация представляет собой смещение точек цилиндра в радиальном направлении, то угловые компоненты вектора смещения – нулевые ($w_{\theta\theta} = 0$).

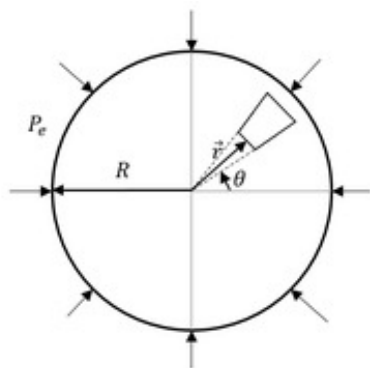
$$\begin{cases} m \frac{\sigma_r}{\partial r} = \alpha \frac{\partial p_o}{\partial r}, m \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial p_o}{\partial r} = 0, m \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} = \alpha \frac{\partial p_o}{\partial r}, \\ \epsilon_{rr} = \frac{\partial w_{rr}}{\partial r}, \epsilon_{\theta\theta} = \frac{w_{rr}}{r}, \epsilon_{zz} = \frac{w_{rr}}{r}, \\ \epsilon_{rr}|_{r=R} = P_e, \epsilon_{\theta\theta}|_{r=R} = P_e, \epsilon_{zz}|_{r=R} = P_e. \end{cases} \quad (2)$$

где w_{rr} – радиальная компонента вектора перемещения, σ – напряжение, ϵ – главные значения тензора деформации, θ – угол.

Таким образом, задача моделирования поднятия керн на поверхность сводится к решению совместной задачи фильтрации с элементами теории упругости, выраженной системой уравнений (1) и (2). Но для этой задачи тяжело найти аналитическое решение, поэтому будут выполняться задачи:



1: Цилиндрическое тело с постоянным давлением



2: Одномерная задача

1. Реализовать метод решения одномерной двухфазной задачи фильтрации в полярных координатах.
2. Реализовать метод решения одномерной задачи упругости в полярных координатах.
3. Реализовать метод, алгоритм и программу для проведения численного решения моделирования процесса поднятия керна на поверхность
4. Оценить изменение насыщенности и напряженного состояния керна при различных скоростях подъема

В статье представлен вывод уравнений фильтрации и упругости (1) и (2) и алгоритм решения задачи моделирования поднятия керна на поверхность.

Список литературы

- [1] В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова, Нелинейная механика разрушения. Самара: «Самарский университет», 2004. 562 с.
- [2] Х. Азиз, Э. Сеттари, Математическое моделирование пластовых систем. Перевод с английского Москва: «Недра», 1982. 407 с.
- [3] Р. Д. Каневская, Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
- [4] К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов, Подземная гидромеханика. Учебник для вузов, Москва: «Недра», 1993. 416 с.
- [5] Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости. Москва: ОГИЗ, 1947. 465 с.

**Начально-краевая задача для дифференциального уравнения смешанного типа
второго порядка с одной линией вырождения**

Фаязов К.С., Хажиев И.О.

Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

kudratillo52@mail.ru, kh.ikrom04@gmail.com

Пусть $\Omega_T = \{|x| < \pi, |y| < \pi, 0 < t < T\}$, $Q = \{|x| < \pi, |y| < \pi\}$, $Q_1 = \{|x| < \pi, 0 < t < T\}$,
 $Q_2 = \{|y| < \pi, 0 < t < T\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x, y, t) + \operatorname{sgn}(x)u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (1)$$

в области $\Omega_T \cap \{x \neq 0\}$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, y, t)$ удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega_T \cap \{x \neq 0\}$ и начальным

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{Q} \quad (2)$$

граничным

$$u(-\pi, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, \quad (y, t) \in \bar{Q}_2, \quad u(x, -\pi, t) = u(x, \pi, t) = 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_1 \quad (3)$$

и условия склеивания

$$u(-0, y, t) = u(+0, y, t), \quad u_x(-0, y, t) = u_x(+0, y, t), \quad (y, t) \in \bar{Q}_2, \quad (4)$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $f(x, y, t)$ достаточно гладкие функции, причем $\varphi(x, y)|_{\partial Q} = 0$, $\psi(x, y)|_{\partial Q} = 0$.

Впервые краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа были изучены в известных работах Ф.Трикоми и С. Геллерстедта. В дальнейшем основы теории уравнений смешанного типа были заложены в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, М. Проттера, К. Моравец, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, М.М. Смирнова, В.Н. Врагова, А.И. Кожанова, К.Б. Сабитова и др.

Исследуемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. Некорректные задачи для подобных уравнений были рассмотрены в работах Levine Н.А. [2], К.С. Фаязова [4], И. О. Хажиева [1], К. С. Фаязова и Я. К. Худайбергана [6] и других.

В настоящей работе исследована начально-краевая задача для неоднородного уравнения смешанного типа с одной линией вырождения. С помощью интегралов энергии получена априорная оценка решений. Доказана теорема о единственности и получена оценка условной устойчивости.

Используя результаты работы [3], можно доказать, что соответствующая спектральная задача имеет бесконечное множество $\bar{\lambda}_{k,n} = \mu_k^+ + (n)^2$, $\tilde{\lambda}_{k,n} = \mu_k^- + (n)^2$, $\{\bar{\lambda}_{k,n}\}_{k,n=1}^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_{k,n}\}_{k,n=1}^\infty$ собственных значений и соответствующие им собственные функции $\{\bar{v}_{k,n}\}_{k,n=1}^\infty$, $\{\tilde{v}_{k,n}\}_{k,n=1}^\infty$, числа μ_k^+ , $-\mu_k^-$ образуют неубывающие последовательности и являются решениями трагедного уравнения $tg\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi + th\sqrt{\pm\mu_k^\pm}\pi = 0$.

Лемма 1. Пусть $u(x, y, t)$ является решением задачи (1)-(4) в пространстве $W_2^{1,1,2}(\Omega_T)$. Тогда при любом $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\int_0^t \|u(x, y, \tau)\|_0^2 d\tau \leq C(t) \left(T \|\varphi(x, y)\|_0^2 + \gamma_T \right)^{1-r(t)} \left(\int_0^T \|u(x, y, t)\|_0^2 dt + \gamma_T \right)^{r(t)},$$

где функции $C(t) = 2 \exp\left(\frac{(T+1)((1-e^{-t})T-(1-e^{-T})t)}{1-e^{-T}}\right)$, $r(t) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-T}}$, $\gamma_T = (2T^2 + 3) \int_0^T \|f(x, y, t)\|_0^2 dt + 2T \|\varphi(x, y)\|_1^2 + \|\varphi(x, y)\|_0^2 + (2T + 1) \|\psi(x, y)\|_0^2$.

Коэффициенты разложения функции $a(x, y, t)$ обозначим следующим образом

$$\bar{a}_{k,n}(t) = (\operatorname{sgn}(x) a, \bar{v}_{k,n}(x, y)), \tilde{a}_{k,n}(t) = -(\operatorname{sgn}(x) a, \tilde{v}_{k,n}(x, y)).$$

Если решения задачи (1)-(4) существует, то можно представить в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{k,n}(t) \bar{v}_{k,n}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{k,n}(t) \tilde{v}_{k,n}(x, y),$$

где $\bar{u}_{k,n}(t) = \bar{\varphi}_{k,n} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\bar{\lambda}_{k,n}} t\right) + \frac{\bar{\psi}_{k,n}}{\sqrt{\bar{\lambda}_{k,n}}} \operatorname{sh}\sqrt{\bar{\lambda}_{k,n}} t + \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}_{k,n}}} \int_0^t \operatorname{sh}\left(\sqrt{\bar{\lambda}_{k,n}}(t-\tau)\right) \bar{f}_{k,n}(\tau) d\tau$,

$$\tilde{u}_{k,n}(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{k,n} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{k,n}} t\right) + \frac{\tilde{\psi}_{k,n}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_{k,n}}} \operatorname{sh}\sqrt{\tilde{\lambda}_{k,n}} t + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_{k,n}}} \int_0^t \operatorname{sh}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{k,n}}(t-\tau)\right) \tilde{f}_{k,n}(\tau) d\tau, & n \geq k, \\ \tilde{\varphi}_{k,n} \cos\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,n}} t\right) + \frac{\tilde{\psi}_{k,n}}{\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,n}}} \sin\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,n}} t + \frac{1}{\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,n}}} \int_0^t \sin\left(\sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,n}}(t-\tau)\right) \tilde{f}_{k,n}(\tau) d\tau, & n < k. \end{cases}$$

Определим множество корректности M следующим образом

$$M = \left\{ u : \int_0^T \|u(x, y, t)\|_0^2 dt \leq m^2 \right\}.$$

Теорема 1. Если решение задачи (1)-(4) из пространства $W_2^{1,1,2}(\Omega_T)$ существует и $u(x, y, t) \in M$, тогда решение задачи (1) - (4) единственно.

Пусть $u_\varepsilon(x, y, t)$ решение задачи (1)-(4) с приближенными данными.

Теорема 2. Если решения задачи (1)-(4) из пространства $W_2^{1,1,2}(\Omega_T)$ существует, и $u, u_\varepsilon \in M$ и пусть $\|f - f_\varepsilon\|_0 \leq \varepsilon$, $\|\varphi(x, y) - \varphi_\varepsilon(x, y)\|_{W_2^2(Q)} \leq \varepsilon$, $\|\psi(x, y) - \psi_\varepsilon(x, y)\|_0 \leq \varepsilon$. Тогда для решения задачи (1) - (4) верна оценка

$$\int_0^t \|u - u_\varepsilon\|_0^2 d\tau \leq C(t)(T\varepsilon^2 + \gamma_\varepsilon)^{1-r(t)} (4m^2 + \gamma_\varepsilon)^{r(t)}$$

где $\gamma_\varepsilon = (2T^3 + 7T + 2) \varepsilon^2$.

Список литературы

- [1] I. O. Khajiev, Conditional correctness and approximate solution of boundary value problem for the system of second order mixed-type equations. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **11**: 2 (2018), 231–241.
- [2] H. A. Levine, Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second Order Differential Inequalities. *Journal of Differential Equations*, **8** (1970), 34–55.
- [3] С. Г. Пятков, Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения. Некоторые приложения функций. анализа к задачам матем. физики. Новосибирск: Инст. матем. СО АН СССР. 1986. С. 65–84.
- [4] К. С. Фаязов, Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. *Узб. мат. журнал*, **2** (1995), 89–93.

- [5] К. С. Фаязов, И. О. Хажиев, Условная устойчивость краевой задачи для системы абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами. *Узб. мат. журнал* **2** (2017), 145-155.
- [6] К. С. Фаязов, Я. К. Худайбергенов, Некорректная краевая задача для системы уравнений в частных производных второго порядка с двумя линиями вырождения/ *Бюллетень Института математики*, **6** (2019), 62-68.

Единственность начально-краевой задачи для уравнения диффузии с дробной производной

Фаязова З.К.

Технический институт ЁДЖУ в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
z.fayazova@yahoo.com

В последнее время при математическом моделировании задач приложения, часто стали использовать дифференциальные уравнения дробного порядка. Геометрическую интерпретацию дробного интеграла и производной можно найти в [1]. В большинстве исследований применяют определения дробного производного в смысле Римана-Лиувилля и Капуто.

В дальнейшем мы используем следующее:
через

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

где $\alpha > 0$ и $f : (0, \infty) \rightarrow R$ дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля; через

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

где $n = [\alpha] + 1$, здесь $[\alpha]$ целая часть от α , дробную производную в смысле Римана-Лиувилля; через

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

дробный интеграл в смысле Капуто. Пусть

$$\Omega_t = \{(x, y, t) : (x, y) \in Q, t \in (0, T)\},$$

где

$$Q = \{(x, y) | x, y \in (0, \pi)\}.$$

Рассмотрим уравнение в частных производных с дробным производным в смысле Капуто

$$D^\alpha u(x, y, t) = -\Delta u(x, y, t), \quad (1)$$

где $\Delta u(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)$ в области Ω_t ,
с начальным условием

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{Q} \quad (2)$$

и граничное условие

$$u(x, y, t)|_{\partial Q \times [0, T]} = 0, \quad (3)$$

где ∂Q граница области Q .

Определение 1. Под решением задачи понимаем функцию $u(x, y, t)$ непрерывную в замкнутой области Ω_t , имеющую непрерывные производные входящие в уравнение (1) и удовлетворяющее условиям (2) и (3).

Корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений дробными производными интенсивно изучаются с середины прошлого века (см. [2] и цитируемую там библиографию)

Исходя из идеи А.Н.Тихонова [3] о решении некорректно поставленных задач (см. Лемму 1), в данной работе доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости задачи (1)-(3).

Лемма 1. Задача (1)-(3) поставлена некорректна в смысле Ж.Адамара.

Введем обозначение

$$\|v\|^2 = (v(x, y), v(x, y)) = \int_0^\pi \int_0^\pi v^2(x, y) dx dy$$

и через

$$M = \{u(x, y, t) : \|u(x, y, T)\| \leq m, m > 0\}$$

Имеют место:

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, тогда для любого решения уравнения (1) при $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\|u(x, y, t)\| \leq \|u(x, y, 0)\|^{1 - (\frac{t}{T})^\alpha} \|u(x, y, T)\|^{(\frac{t}{T})^\alpha}$$

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и пусть $u(x, y, t) \in M$, тогда решение задачи (1)-(3) единственно.

Список литературы

- [1] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **5**: 4 (2002), 367–386.
- [2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, vol. 204, 2006.
- [3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. С. 288.

Extension of the Tricomi Problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation

Baltaeva U., Khasanov B., Sultonboeva Z.
Khorezm Mamun Academy, Khiva, Uzbekistan
Urgench State University, Urgench, Uzbekistan
 umida_baltayeva@mail.ru.

Let $\Omega_1 \subset R^2$ be a bounded domain by the segments AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 of straight lines $y = 0, x = 1, x = 0, y = h$, respectively when $y > 0$. Ω_2 is a characteristic triangle bounded by the segment AB the axis OX and two characteristics $AC : x + y = 0, BC : x - y = 1$ of the wave equation for $y < 0$. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$. This work is devoted to the formulating and the study of a boundary value problem of the type of Tricomi, for a loaded parabolic-hyperbolic equation [1] in the form

$$u_{xx} - \frac{1 - \operatorname{sgny}}{2} u_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgny}}{2} u_y - Mu(\Theta(x), 0) = 0, \quad (1)$$

where $Mu(\Theta(x), 0) = \mu_1 D_{0x}^\alpha u(x, 0)$ in Ω_1 , $Mu(\Theta(x), 0) = \mu_2 D_{0\xi}^\beta u(\xi, 0)$, $\xi = x - y$, in Ω_2 , μ_1, μ_2 are given real parameters, D_{ax}^α ($D_{a\xi}^\beta$) are the Riemann-Liouville fractional integro-differential operator of order $\alpha < 1$ ($\beta < 1$) [2]. In this work, we will study the type of problem of Tricomi-Bitsadze given in piecewise non-parallel characteristics in the domain Ω .

We denote by $E_k(\epsilon_k, 0)$ ($k = 1, \dots, n$), $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n < 1$ given points of the segment AB , a

$$A_k \left(\frac{1}{2} \epsilon_k, -\frac{1}{2} \epsilon_k \right), B_k \left(\frac{1}{2} \epsilon_k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \epsilon_k - \frac{1}{2} \right),$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ($\epsilon_0 = 0, \epsilon_{n+1} = 1$) are points intersection of the characteristics of equation (1) leaving the point E_k with characteristics AC and BC respectively:

$$I_k = \{(x, y) : \epsilon_k < x < \epsilon_{k+1}, y = 0\}, k = 0, 1, \dots, n.$$

In this work, we investigate a generalization of the Tricomi problem for a loaded mixed type equation with the Riemann-Liouville fractional differential operator.

Problem T_1 . Find a function $u(x, y)$, satisfying the following conditions:

1) $u(x, y)$ is continuous in $\bar{\Omega}$, has continuous derivatives and the derivatives of the first order are continuously glued together over all points of the segment AB , except, possibly, points A, E_1, \dots, E_n, B , in which u_x and u_y can have discontinuities of the first kind;

2) $u(x, y)$ is a regular solution to equation (1) in the domain Ω everywhere, except for the points of the segment AB and the characteristics $E_k A_k, E_k B_k$;

3) takes the given values

$$u(x, y)|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u(x, y)|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{A_k A_{k+1}} = \psi_k(x), \quad \text{for even } k; \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{B_k B_{k+1}} = \psi_k(x), \quad \text{for odd } k; \quad (4)$$

where $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_k(x)$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) are given functions, moreover if n is an odd number, then the function $u_y(x, 0)$ must be limited for $x \rightarrow +0$.

We note that for $n = 0$ conditions (3) drop away, and only one condition remains from (3) and (4) as $u(x, y)|_{AC} = \psi_0(x)$. Essentially, problem T_1 is a direct generalization of the Tricomi problem. Problem T_1 in case $n = 1$ was first posed and investigated by Gellerstedt for the classical mixed type equation. For loaded and unloaded parabolic-hyperbolic type equations, the Gellerstedt problem was studied in [3], [4] and their literature.

References

- [1] B. Isломov, U. I. Baltaeva, Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients. *E. Journal of Differential Equations*, **221** (2015), 1–10.
- [2] A. M. Nakhushhev, Equations of mathematical biology. Moscow: Vishaya shkola, 1995. p.302.
- [3] T. D. Djuraev, A. Sopuev, M. Mamajonov, Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations. Tashkent, 1986. p. 220.
- [4] U. Baltaeva, J. T. Pedro, Analog of the Gellerstedt problem for a loaded equation of the third order. *Math Meth Appl Sci.*, **42** (2019), 3865–3876.

**Оптимальное управление и дифференциальные игры
(председатель к.ф.-м.н. П.Г. Сурков)**

Управление дифференциально-разностной системой в пространстве функций с переменной, изменяющейся на геометрическом графе

Баталова С.А.
ВГУ, Воронеж, Россия
s.sonya.batalova@gmail.com

Задачи оптимального управления дифференциальными системами с распределенными параметрами на графе рассматривались в работах [1, 2]. При этом изучались и смежные вопросы: устойчивость по Ляпунову и Нейману, стабилизация слабых решений, временное запаздывание [3–5]. Переход к дифференциально-разностным системам явился следующим естественным шагом исследования – попытка приблизится к решению прикладных задач, имеющих свою специфику. Используемый метод полу-дискретизации является универсальным методом, дающим эффективный инструмент для отыскания условий однозначной разрешимости и непрерывности по исходным данным для дифференциально-разностной системы.

Основные понятия, определения и утверждения. Пусть Γ – ориентированный ограниченный граф, ребра которого параметризованы отрезком $[0, 1]$. Введем следующие обозначения [1]: $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных и внутренних узлов графа; Γ_0 – совокупность всех ребер, не содержащих своих концевых точек; $L_p(\Gamma)$ ($p = 1, 2$) – банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p -й степенью; $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$.

В области Γ рассмотрим дифференциально-разностную систему уравнений

$$\frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

$$y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где $y(k) := y(x; k)$ и $f(k) := f(x; k)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Введем пространства состояний $y(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) системы (1),(2). Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество гладких функций $y(x)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{dy(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{dy(0)_\gamma}{dx}$$

во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ , соответственно ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », символом $\theta(\cdot)_\gamma$ обозначено сужение функции $\theta(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a; \Gamma)$. Если при этом допустить, что функции $y(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a; \Gamma)$: $W_0^1(a; \Gamma) \subset W_2^1(\Gamma)$.

Определение. Слабым решением класса $W_2^1(\Gamma)$ дифференциально-разностного уравнения (1) с краевыми условиями (2) называются функции $y(k) \in W_0^1(a; \Gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, M$), удовлетворяющие тождеству $\int_{\Gamma} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a; \Gamma)$; $y(k)_t = \frac{1}{\tau}[y(k) - y(k-1)]$,

$$\ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{dy(x; k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x)y(x; k)\eta(x) \right) dx.$$

Задача оптимального управления. Пусть задано пространство управлений U (задается в зависимости от характера прикладных задач, ниже $U = L_2(\Gamma)$) и линейный оператор $B : U \rightarrow L_2(\Gamma)$. Пусть далее $y(k; v(k)) := y(x, k; v(k))$, $v(k) := v(x; k) \in U$ ($k = 0, 1, \dots, M$), рассматривается дифференциально-разностная система

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}[y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k; v(k))}{dx} \right) + b(x)y(k; v(k)) = \\ = f(k) + Bv(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3)$$

$$y(0; v(0)) = \varphi(x), \quad y(k; v(k))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Наблюдение $w(k; v(k))$ за состоянием $y(k; v(k))$ системы (3), (4) задается линейным оператором $C : W_0^1(a; \Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma) : w(k; v(k)) := w(x, k; v(k)) = Cy(k; v(k))$. Определение слабого решения системы (3), (4) отличается от приведенного выше только добавленным слагаемым $(Bv(k), \eta)_U$ в правой части тождества.

Введем функционал $\Psi(v) := \Psi(v(1), v(2), \dots, v(M)) = \tau \sum_{n=1}^M \Psi_k(v(k))$, здесь $\Psi_k(v(k)) = \|Cy(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_U$, $w_0(k)$ ($k = \overline{1, M}$) – заданные элементы пространства $L_2(\Gamma)$ и пусть $N : U \rightarrow U$ – линейный положительно определенный эрмитов оператор: $(N(v(k), v(k))_U \geq \varsigma \|v(k)\|_U^2$ ($k = \overline{1, M}$) $\forall v(k) \in U$, $\varsigma > 0$, здесь символом (\cdot, \cdot) обозначается скалярное произведение в пространстве $L_2(\Gamma)$. Обозначим через .

Задача оптимального управления системой (3), (4) состоит в определении $\inf_{v \in U_{\partial}} \Psi(v)$, $v = \{v(k), k = 1, 2, \dots, M\}$, $U_{\partial} \subset U$ – выпуклое замкнутое подмножество U .

Результаты работы. Получены априорные оценки норм слабого решения системы (3), (4) и установлена разрешимость этой системы. Представлен анализ задачи оптимального управления, содержащий дополнительное исследование задачи с временным запаздыванием. При этом используется сопряженное состояние и сопряженная система для системы (3), (4). Указан путь переноса полученных результатов на случай анализа задачи оптимального управления, когда $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Полученные результаты лежат в основе изучения задач оптимального управления многофазными задачами гидродинамики.

Список литературы

- [1] В. В. Провоторов, Е. Н. Провоторова, Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, **13**: 2 (2017), 209–224.
- [2] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**: 4 (2017), 431–443.
- [3] А. Ю. Александров, А. П. Жабко, О стабилизации решения одного класса нелинейных дифференциальных систем. *Сибирский математический журнал* **44**: 6 (2003), 951–958.
- [4] А. Ю. Александров, А. П. Жабко, Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием. *Автоматика и телемеханика*, **9** (2006), 1355–1365.
- [5] Е. И. Веремей, М. В. Сотникова, Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, **1** (2011), 116–133.

Регуляризация задачи планирования для марковской игры среднего поля

Волков А.М., Авербух А.В.

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовский, Екатеринбург, Россия
volkov@imm.uran.ru, averboukh@gmail.com

Задача планирования моделирует приведение распределения бесконечного числа однотипных игроков из начального заданного состояния в конечное, учитывающее их индивидуальные интересы. Динамика распределения и интегральная часть выигрыша считаются заданными. Сам перевод распределения производится за счет выбора терминальной части. В рассматриваемом случае динамика пробного игрока задается марковской цепью $X(t)$ с конечным числом состояний и матрицей Колмогорова $Q(t, m, \nu)$. Здесь m — распределение агентов, а ν — рандомизированное управление, выбранное с целью максимизации показателя

$$J_0(m(\cdot), \varphi(\cdot), \nu(\cdot)) = \mathbb{E} \left[\sigma_{X(T)}(m(T)) + \int_{t_0}^T g_{X(t)}(t, m(t), \nu(t)) dt \right].$$

Построен пример задачи планирования, которая не имеет решения. При этом конечное состояние лежит в области достижимости системы. Предложен вариант регуляризации задач планирования, основанный на регуляризации эквивалентной задачи управления.

Теорема 1. *Задача планирования для марковской игры среднего поля эквивалентна задаче оптимального управления*

$$J(m(\cdot), \varphi(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \mu_0 \varphi_0 - \mu(T) \varphi(T) - \int_{t_0}^T \mu(\tau) g(\tau, m(\tau), \nu(\tau)) d\tau \longrightarrow \min_{\nu(\cdot), \varphi_0}$$

при условии

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= m(t)Q(t, m(t), \nu(t)), \quad m(t_0) = m_0, \quad m(T) = m_T, \\ \dot{\varphi}(t) &= - \max \left\{ Q(t, m(t), \nu) \varphi(t) + g(t, m(t), \nu) : \nu \in \mathcal{P}(U)^d \right\}, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ \dot{\mu}(t) &= \mu(t)Q(t, m(t), \nu(t)), \quad \mu(t_0) = \mu_0, \end{aligned}$$

для некоторого распределения μ_0 не имеющего нулевых компонент.

Введено обобщенное решение задачи планирования, получаемое как предел решений эквивалентной задачи управления с бесконечно возрастающим дополнительным ограничением на норму вектора φ_0 .

Теорема 2.

- Обобщенное решение задачи планирования существует
- Множество обобщенных решений замкнуто относительно слабой сходимости.
- Множество обобщенных решений совпадает с замыканием множества классических решений, если последнее не пусто.

Регуляризация задачи планирования для марковской игры среднего поля

Качественное поведение равновесных траекторий в динамических биматричных играх¹

Красовский Н.А., Тарасьев А.М.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский Федеральный Университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,

Екатеринбург, Россия

nkrasovskiy@gmail.com, tam@imm.uran.ru, a.m.tarasyev@urfu.ru

Работа посвящена анализу поведения равновесных траекторий для игровых динамических систем, которое возникает при решении биматричных игр [1, 4].

На первом шаге рассматривается подход, основанный на идеях гарантированных стратегий Н.Н. Красовского [3, 7, 8]. В рамках гарантированных решений предлагаются алгоритмы для построения функций цены, позиционных стратегий и равновесных траекторий с использованием понятия динамического равновесия по Нэшу [2].

На втором шаге проводится анализ равновесных траекторий для репликаторной динамики, которая относится к теории эволюционных игр [5].

На третьем шаге исследуется динамическая система, которая генерируется стратегиями наилучших ответов, подобными модели Курно [6].

Проведено сравнение объективных показателей равновесных траекторий для всех трех динамических систем. Показано, что траектории динамического равновесия по Нэшу обладают характеристиками, лучшими по сравнению со свойствами траекторий репликаторной динамики или динамики наилучших ответов.

В дополнение, проведены численные эксперименты для, так называемых, смешанных динамик, в которых первый игрок использует гарантированные стратегии, а стратегии второго игрока формируются репликаторными формулами или динамикой наилучших ответов. Результаты симуляции для смешанных динамик демонстрируют, что функционалы выигрышей игроков в конечных точках траекторий этих динамик имеют лучшие показатели, по сравнению с показателями траекторий репликаторной динамики или динамики наилучших ответов, и даже лучшие в сравнении с конечной точкой динамического равновесия по Нэшу.

Список литературы

- [1] Н. Н. Воробьев, Теория игр для экономистов-кибернетиков. Москва: Наука, 1985.
- [2] А. Ф. Клейменов, Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.
- [3] Н. Н. Красовский, Управление динамической системой. Москва: Наука, 1985.
- [4] T. Basar, G. J. Olsder, Dynamic noncooperative game theory. London: Academic, 1982.
- [5] J. Hofbauer, K. Sigmund, The theory of evolution and dynamic systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [6] M. Intriligator, Mathematical optimization and economic theory. New-York: Prentice-Hall, 1971.
- [7] A. N. Krasovskii, N. N. Krasovskii, Control under lack of information. Boston etc.: Birkhauser, 1995.
- [8] N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, Game-Theoretical control problems. New York: Springer, 1988.

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

Перестроение кратчайших путей в гиперсети

Куянцев В.П., Родионов А.С.
ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
vkujantsev94@gmail.com, alrod@sscc.ru

Задача поиска кратчайшего пути встречается в различных областях науки и имеет большое количество приложений. При этом, в прикладных задачах важными требованиями к алгоритму поиска кратчайшего пути являются его эффективность и устойчивость к изменениям параметров графа с течением времени.

Существует несколько основных алгоритмов поиска кратчайшего пути, а также большое количество их модификаций и адаптаций [1–4].

В данной работе рассматривается задача перестроения кратчайшего пути в графе после удаления в нем ребра. Подразумевается, что в исходном графе был проложен некоторый маршрут, после чего из графа удаляется ребро. Целью работы является поиск эффективного алгоритма перестроения кратчайшего маршрута (или нескольких маршрутов) после удаления ребра. В качестве модели данных используется гиперсеть [5], в которой исходный граф интерпретируется, как первичная сеть, а проложенные в графе маршруты, как элементы вложенной сети. В качестве базового алгоритма поиска кратчайшего пути выбран алгоритм Дейкстры [1].

В качестве отправной точки в работе решается базовая задача перестроения единственного кратчайшего пути G между вершинами s и t в первичной гиперсети H со взвешенными ребрами. Совершается предположение о том, что исходный кратчайший путь был найден при помощи алгоритма Дейкстры, во время работы которого были найдены кратчайшие пути во все вершины графа. Также предполагается, что полученная информация сформирована в виде дерева кратчайших путей, одним из которых и является исходный кратчайший путь G . Таким образом, возникает необходимость не только в поиске одного кратчайшего пути, но и в перестроении всего дерева.

При создании алгоритма решения базовой задачи был сделан упор на переиспользование дерева кратчайших путей, что позволяет сократить количество итераций алгоритма Дейкстры, который используется для перестроения исходного кратчайшего пути. Основная идея алгоритма заключается в том, что при удалении ребра дерево кратчайших путей распадается (в нетривиальном случае) на два: поддереву, содержащее вершину s (обозначим его $SPTs$) и второе поддерево, которое вершину s не содержит (обозн. $SPTt$). Показано, что дерево $SPTs$ можно сразу присоединить к решению. Оставшаяся часть дерева достраивается при помощи алгоритма Дейкстры, в ходе которого используются данные из $SPTt$. Приводится оценка временной сложности алгоритма в худшем случае.

Далее, рассматривается несколько последовательных обобщений базовой задачи. Для каждого обобщения приводится соответствующая модификация алгоритма, адаптирующая исходное решение под новые условия, приводится обоснование вновь полученного решения. Целью обобщений является поиск гибкого решения для задач в реальных условиях.

Первым важным обобщением является рассмотрение не одного, а нескольких исходных кратчайших путей после удаления одного ребра. Для решения этой задачи используется предыдущий подход с той разницей, что при перестроении каждого следующего кратчайшего пути (дерева кратчайших путей, которое его содержит) производится попытка присоединить локально рассматриваемое поддерево к остальным деревьям, соответствующим другим маршрутам. Вводится и обосновывается условие, при котором можно осуществить процедуру добавления поддерева, вводятся дополнительные эвристики, обеспечивающие корректность и эффективность. Приводится оценка временной сложности алгоритма в худшем случае.

В качестве обобщения предыдущей задачи рассматривается задача перестроения нескольких кратчайших путей после удаления нескольких ребер. Приводится алгоритм решения, обосновывается его корректность. Приводится оценка временной сложности алгоритма в худшем случае.

Последнее рассматриваемое обобщение заключается в введении новых параметров для ребер первичной сети. А именно, для ребер вводятся величины пропускных способностей и потоков. Поток каждого маршрута полагается равным единице. Новое обобщение ставит новые задачи для исследования. А именно, из-за того, что сам кратчайший маршрут занимает часть пропускной способности, встает вопрос о том, по какому принципу выбирать каждый следующий маршрут для перестроения. Данный вопрос остается за рамками текущей работы, в качестве упрощения делается предположение о том, что у кратчайших маршрутов существуют известные приоритеты важности. В качестве алгоритма выбора каждого следующего кратчайшего маршрута используется жадный алгоритм. Приводится алгоритм решения поставленной задачи, приводится оценка сложности алгоритма в худшем случае. Приводится аргументация того, что последний алгоритм сводится к предыдущим, и тем самым последний алгоритм является основным результатом текущей работы.

В заключении приводятся экспериментальные данные сравнения времени работы алгоритма с прямым перестроением кратчайшего пути. Рассматриваются задачи для дальнейшего исследования, выявляются сильные и слабые стороны текущего подхода. В качестве одной из дальнейших задач ставится задача локализации проблемы в большом графе, поскольку на практике не всегда требуется учитывать всю информацию о графе. Другая важная задача заключается в выработке подхода или нескольких подходов к выбору очередного кратчайшего пути для перестроения.

Список литературы

- [1] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, **1**: 1 (1959), 269–271.
- [2] P. E. Hart, N. J. Nilsson, B. Raphael, A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE transactions on Systems Science and Cybernetics*, **4**: 2 (1968), 100–107.
- [3] D. Ajwani, R. Dementiev, U. Meyer, V. Osipov, Breadth first search on massive graphs. *In 9th Implementation Challenge of DIMACS, the Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Rutgers University, Piscataway, NJ, 22 March 2006*. American Mathematical Society, 2009.
- [4] R. Bellman, On a Routing Problem. *Quarterly of Applied Mathematics*., **16**: 1 (1958), 87–90.
- [5] В. К. Попков, Математические модели связности. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2006.

**Алгоритм построения сингулярной поверхности решения для одного класса
трехмерных задач быстродействия и формулы её крайних точек в терминах
инвариантов границы целевого множества**

Лебедев П.Д., Успенский А.А.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
pleb@yandex.ru, uspen@imm.uran.ru

Изучается задача быстродействия [1] в трёхмерном евклидовом пространстве с динамикой

$$\dot{\mathbf{x}} \in V(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

и невыпуклым целевым множеством M . Здесь и далее $V(\mathbf{c}, r)$ означает замкнутый шар в \mathbb{R}^3 с центром в точке \mathbf{c} радиуса $r > 0$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — точка в \mathbb{R}^3 . Граница ∂M множества совпадает с гладкой параметрически заданной поверхностью S . Требуется построить карту поверхностей уровня функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$, выделив сингулярное множество, на котором они теряют гладкость. С задачей быстродействия связано уравнение Гамильтона–Якоби

$$\min_{(v_1, v_2, v_3) \in V(\mathbf{0}, 1)} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 1 = 0.$$

Обобщённое (минимаксное) [2] решение задачи Дирихле для данного уравнения с краевым условием $u|_S = 0$ совпадает с функцией оптимального результата для задачи быстродействия (1) с целевым множеством M .

Обозначим $\Omega_M(\mathbf{x})$ множество ближайших точек к \mathbf{x} на множестве $M \subset \mathbb{R}^3$. Множество

$$L(M) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) > 1\}$$

называется биссектрисой [3] замкнутого непустого множества M . Здесь $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x})$ — мощность множества $\Omega_M(\mathbf{x})$. Сингулярное множество является рассеивающей поверхностью $L(M)$: из каждой её точки выходят две или более оптимальные траектории.

Несовпадающие точки $\hat{\mathbf{y}}_i \in M$ и $\bar{\mathbf{y}}_i \in M$ называются квази-симметричными, если $\exists \mathbf{x} \in L(M) : (\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i) \in \Omega_M(\mathbf{x})$. Точка \mathbf{x} в этом случае называется точкой, порождённой парой $\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i$. Точка \mathbf{y}_0 называется *псевдовершиной* [3] множества M , если существует последовательность пар несовпадающих точек $\{(\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ и последовательность точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(M)$, для которых выполнены условия $\forall i \in \mathbb{N} (\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i) \in \Omega_M(\mathbf{x}_i)$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$. Если существует конечный предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0$, то \mathbf{x}_0 называется крайней точкой биссектрисы, соответствующей псевдовершине \mathbf{y}_0 .

Для дважды гладкой поверхности S в каждой её точке определён единичный вектор нормали $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ и две главные кривизны $k_1(\mathbf{y})$ и $k_2(\mathbf{y})$ [4]. Полагаем, что выполняется оценка

$$|k_1(\mathbf{y})| \geq |k_2(\mathbf{y})|. \quad (2)$$

Теорема. Пусть крайняя точка \mathbf{x}_0 соответствует псевдовершине $\mathbf{y}_0 \in S$ и для главных кривизн в ней справедливо неравенство (2). Если $k_1(\mathbf{y}_0) \cdot k_2(\mathbf{y}_0) > 0$, то выполняется соотношение

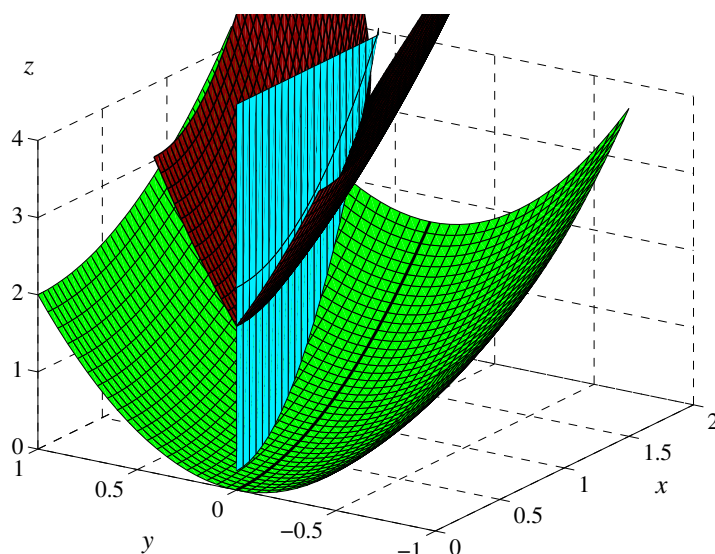
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + k_1^{-1}(\mathbf{y}_0) \mathbf{n}(\mathbf{y}_0). \quad (3)$$

Если $k_1(\mathbf{y}_0) \cdot k_2(\mathbf{y}_0) < 0$, то выполняется либо равенство (3), либо

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + k_2^{-1}(\mathbf{y}_0) \mathbf{n}(\mathbf{y}_0). \quad (4)$$

Доказательство теоремы основывается на изучении свойств нормальных сечений поверхности S в псевдовершине $\mathbf{y}_0 \in S$ [4].

Пример. Пусть для задачи быстродействия (1) в качестве целевого множества M задан подграфик функции $z = x^2 + 2y^2$ с областью определения \mathbb{R}^2 . Требуется построить карту поверхностей уровня, выделив сингулярное множество $L(M)$. Решение выполнено с помощью модернизированного программного комплекса [5] на базе отыскания геометрического места псевдовершин и построения крайних точек по формулам (3), (4). Основу алгоритмов составили процедуры нахождения пар квази-симметричных точек и построения на пересечениях нормалей в них точек биссектрисы. Поверхность S (её цвет зелёный), сингулярное множество $L(M)$ (его цвет голубой) и поверхность уровня $\Phi(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: u(\mathbf{x}) = 1\}$ функции оптимального результата (красным цветом) показаны на рис. 1. Геометрическое место псевдовершин \mathbf{y}_0 на S есть её пересечение с плоскостью $y = 0$, оно показано на рисунке фиолетовой линией. Биссектриса $L(M)$ также вложена в плоскость $y = 0$.



1: Поверхность S , сингулярное множество $L(M)$ и поверхность уровня $\Phi(1)$ функции $u(\mathbf{x})$.

Список литературы

- [1] Р. Айзекс, Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] А. И. Субботин, Обобщённые решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [3] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, О структуре сингулярного множества решения в одном классе пространственных задач управления по быстродействию. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **31**: 3 (2021), 471–486.
- [4] М. До Кармо, Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
- [5] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017662074* от 27.10.2017.

Об одной линейной задаче группового преследования с дробными производными¹

Мачтакова А.И.

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Россия
Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия
bichurina.alyona@yandex.ru

Определение. [?] Пусть $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, число $\alpha \in (0, 1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds \text{ — гамма-функция.}$$

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n, m)$ $n + m$ лиц [?]: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m , описываемая системой вида

$$D^{(\alpha_i)} z_{ij} = az_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1.$$

Здесь $z_{ij}, u_i, v \in \mathbb{R}^k$; $i \in I = \{1, \dots, n\}$; $j \in J = \{1, \dots, m\}$. Предполагаем, что для всех $i \in I, s, l \in J$ разность $z_{is} - z_{il}$ не зависит от i .

Теорема. Пусть $a \leq 0$; $n \geq k + 1$; $\alpha \in (0, 1)$ и вектора $\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\}$ образуют положительный базис. Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка.

Следствие. Пусть $a \leq 0$; $n \geq k + 1$; $\alpha \in (0, 1)$ и $0 \in \text{int co} \{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J, p_1, \dots, p_r\}$. Тогда происходит поимка в игре, описываемой системой вида

$$D^{(\alpha)} x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leq 1,$$

$$D^{(\alpha)} y_j = ay_j + v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \|v\| \leq 1,$$

при условии, что каждый из убегающих $E_j, j \in J$, не покидает выпуклого конуса

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, y) \leq 0, j = 1, \dots, r\}.$$

Список литературы

- [1] М. Caputo, Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. R. Astr. Soc.*, **13** (1967), 529–539.
- [2] А. И. Благодатских, Н. Н. Петров, Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Издательство Удмуртского университета. 2009. 266 с.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070).

О применимости метода линеаризации в задаче локального синтеза на малом интервале времени

Осипов И.О.

Институт Математики и Механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
i.o.osipov@imm.uran.ru

Аннотация

Исследуется задача построения обратной связи, приводящей нелинейную систему в начало координат за малый промежуток времени при заданном интегральном ресурсе управления. Показано, что при выполнении некоторых условий, обратная связь, найденная для линеаризованной в окрестности начала координат системы, также приводит в ноль исходную нелинейную систему. При доказательстве этих условий кроме требования управляемости линеаризованной системы приходится использовать дополнительные ограничения на асимптотику собственных чисел матрицы управляемости. Эти ограничения совпадают с достаточным условием асимптотической эквивалентности множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем на малых промежутках времени. Приведено несколько примеров применения описанного подхода к локальному синтезу управления для нелинейных систем с интегральными ограничениями.

Рассмотрим аффинную по управлению нелинейную систему на конечном промежутке времени $0 \leq t \leq \bar{T}$ с интегральным квадратичным ограничением на управление

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ – управление, \bar{T} – фиксированное положительное число. Вектор-функция $f(x)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, $f(0) = 0$, B – $n \times r$ матрица.

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать из шара $B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$ радиуса μ , $\mu > 0$ в пространстве \mathbb{L}_2

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 = (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2, \quad (2)$$

где $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, \bar{T}]$ обозначено пространство интегрируемых с квадратом функций на интервале $[0, \bar{T}]$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^{\bar{T}} u^\top(t)v(t) dt.$$

В описанных условиях каждому допустимому управлению $u(\cdot)$ и начальному условию x_0 соответствует единственное решение системы (1).

Определение. Множеством нуль управляемости $N(T, \mu)$ системы (1) в пространстве состояний в момент времени T назовем множество всех начальных состояний $\tilde{x} = x(0) \in \mathbb{R}^n$ системы (1), из которых система может быть приведена в начало координат управлениями $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu) = \{u : \|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \mu^2\}$,

$$N(T, \mu) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu), x(T, \tilde{x}, u(\cdot)) = 0\}.$$

С другой стороны, множество нуль управляемости можно определить, как множество уровня функции Беллмана $V(t, x)$, определенной на пространстве состояний системы (1) и временном интервале $0 \leq t \leq \bar{T}$ и характеризующей минимальный ресурс управления, необходимый для приведения системы (1) из начального состояния x в начало координат

$$V(t, x) = \min_u \int_0^t u^\top(t)u(t)dt, \quad x(0) = x, \quad x(t) = 0.$$

Тогда $N(T, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(T, x) \leq \mu^2\}$. Для того, чтобы избежать поиска функции $V(t, x)$ для нелинейной системы, предлагается решить задачу для линеаризованной в окрестности начала координат системы вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad 0 \leq t \leq \bar{T}, \tag{3}$$

где $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$. Функция Беллмана системы (3) $V_0(t, x) = x^T Q(t)x$, где $Q(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, которая является решением дифференциального уравнения

$$\dot{Q} = QBV^T Q - A^T Q - QA, \tag{4}$$

соответствующая обратная связь имеет вид $u(t, x) = -B^T Q(t)x$. Можно показать, что $Q(t) = W^{-1}(\bar{T} - t)$, где $W(t)$ — грамиан управляемости системы $\dot{x} = -Ax - Bu$, то есть начальные условия для (4) $Q(0) = W^{-1}(T)$.

Теорема 1. *Выпущенная из точки x траектория $x(t)$ системы (3), замкнутая обратной связью $u(t, x) = -B^T Q(t)x$, попадает в начало координат в момент времени T . Расход интегрального ресурса управления на переход из x в 0 равен $x^T Q(0)x$ — это минимально возможное значение ресурса.*

Предположение 1. *Пара (A, B) вполне управляема. Найдутся $k > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\frac{\sqrt{\tau}}{\nu_1(\tau)} \leq \frac{k}{\tau^{1-\alpha}}$ для достаточно малых положительных τ . Здесь $\nu_1(\tau)$ — минимальное собственное число матрицы $\frac{1}{\tau}W(\tau)$.*

В условиях предположения 1 на интервале времени $[0; \tau]$ множества достижимости (нуль управляемости) систем (1) и (3) выпуклы и асимптотически эквиваленты [1, 2] при $\tau \rightarrow 0$.

Введем систему (1), замкнутую обратной связью $u(t, x) = -B^T Q(t)x$

$$\dot{z} = f(z) - BB^T Q(t)z, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z(0) = z_0 \tag{5}$$

Теорема 2. *В условиях предположения 1 для всех достаточно малых значений T и векторов z_0 , удовлетворяющих неравенству $z_0^T Q(0)z_0 = z_0^T W^{-1}(T)z_0 \leq \mu^2$, решения $z(t)$ системы (5) стремятся к нулю при $t \rightarrow T$.*

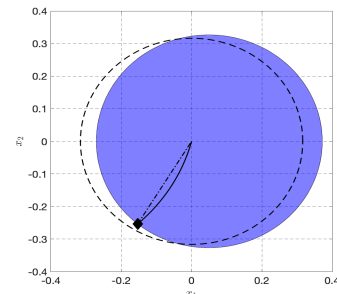
В докладе приведено несколько примеров применения описанного подхода к локальному синтезу управления для нелинейных систем с интегральными ограничениями, один из которых — следующая билинейная система

$$\dot{x}_1 = x_2 u_1 - (1 + x_1)u_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + x_1)u_1 - x_2 u_2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Желаемое конечное состояние $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

На рисунке 1 пунктирной линией обозначена граница множества нуль управляемости $N_1(T, 1)$ линеаризованной системы (6), а множество нуль управляемости $N_2(T, 1)$ нелинейной системы (6) закрашено. Движение нелинейной системы показано сплошной линией, а линеаризованной — штрихпунктирной.

При $T = 0.1$ линейная обратная связь приводит обе системы в нуль. Для начального состояния $x_0 = (-0.1534; -0.2536)$ значение функционала интегрального ресурса $J = \int_0^T u^T(\tau)u(\tau)d\tau$ в линейном случае равно 0.8785, а в нелинейном — 1.0082.



1

Список литературы

- [1] M. I. Gusev, I. O. Osipov, Asymptotic Behavior of Reachable Sets on Small Time Intervals. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **309**: 1 (2020), 52–64.

- [2] И. О. Осипов, О выпуклости множеств достижимости по части координат нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **31:2** (2021), 210–225.

Критерий нахождения точек бифуркаций кусочно-гладкого минимаксного решения уравнения Гамильтона-Якоби и их связь с размерностью сингулярного множества, когда гамильтониан зависит от времени и сопряжённой переменной.¹

Родин А.С.

ИММ УрО РАН, УрФУ ИЕНиМ ИМКН, г. Екатеринбург, Россия
alexey.rodin.ekb@gmail.com

Рассмотрена краевая задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$D_t\varphi(t, x) + H(t, D_x\varphi(t, x)), \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), t \in [0; T], \quad x \in R^n.$$

Здесь

$$D_x\varphi(t, x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(t, x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(t, x) \right).$$

Задача рассматривается при следующих предположениях

A1) функция $H(t, s)$ непрерывна по t при каждом фиксированном s и выполнено условие липшица

$$|H(t, s_1) - H(t, s_2)| \leq L \|s_1 - s_2\|,$$

$D_{ss}^2H(t, s)$ является непрерывной функцией по всем переменным;

A2) функция $\sigma(x) \in C^2$ и строго выпукла.

При выполнении условий A1)-A2) существует и единственно минимаксное решение задачи, которое будем понимать в следующем виде

Определение 1. [1] Функция $\varphi : [0; T] \times R^n \mapsto R$ называется минимаксным решением задачи (1), если для него выполняется

следующее условие: для любой точки $(\xi, \sigma(\xi)) \in R^{n+1}$ и вектора $D\sigma(\xi)$ существует число $T > t_0$ и липшицевая функция

$(x(\cdot), z(\cdot)) : [0; T] \rightarrow R^n \times R$ такие, что $z(t, x) = \varphi(t, x(t))$ для всех $t \in [t_0; T]$, и справедливо

$$\dot{z}(t, x(t)) = \langle \dot{x}(t), D\sigma(\xi) \rangle - H(t, D\sigma(\xi)),$$

при почти всех $t \in [t_0; T]$.

Как известно решение задачи (1) не является всюду дифференцируемой функцией, поэтому введём несколько определений.

Определение 2. Множеством сингулярности Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи является множество точек $(t, x) \in [0; T] \times R^n$, в которых функция φ не дифференцируема.

Определение 3. Точкой бифуркации (t_1, x_1) называется точка, для которой выполнено следующее условие $(t_1, x_1) \in \bar{Q} \setminus Q$, где \bar{Q} есть замыкание множества Q .

Решение данной задачи можно записать, воспользовавшись формулой Хопфа [2]

$$\varphi(t, x) = \sup_s \langle x, s \rangle - \sigma^*(s) + \int_t^T H(\tau, s) d\tau.$$

Введем обозначение $\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - \int_t^T H(\tau, s) d\tau$.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы

Теорема 1. Пусть A1), A2) выполнены, то для того, чтобы (t_1, x_1) была точкой бифуркации решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы $\exists t_1 < T$, что $\forall t \in [t_1; T]$, $\forall s$ матрица $D^2\Psi(t, s)$ является положительно полуопределенной. При этом для любого бесконечно малого $\varepsilon > 0$ $t^* = t_1 - \varepsilon$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00362.

существует s^* такое, что $D^2\Psi(t^*, s^*)$ не является положительно полуопределённой, при этом если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $(t^*, s^*) \rightarrow (t_1, s_1)$, где

$$x_1 = D\sigma^*(s_1) - \int_{t_1}^T DH(\tau, s_1)d\tau.$$

Будем рассматривать решение задачи в классе кусочно-гладких функций.

Определение 4. Непрерывная функция $\varphi(\cdot) : \Pi_T \rightarrow R$ называется кусочно-гладкой на открытой области G , если

1) область определения G функции $\varphi(\cdot)$ имеет следующую структуру:

$$\text{int}\Pi_T \supset G = \cup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset, \quad i, j \in I, \quad i \neq j,$$

где $I = 1, 2, \dots, N$, M_i -дифференцируемое подмногообразие в G ;

2) сужение кусочно-гладкой функции $\varphi(\cdot)$ на $\bar{M}_j, j \in J$ является непрерывно дифференцируемой функции, где

$$J = \{i \in I : M_i - \text{многообразие } (n+1) - \text{размерности}\};$$

3) для любых $i \in I, (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in M_i$ выполняется условие $J(t_1, x_1) = J(t_2, x_2)$, где

$$J(t, x) = \{j \in J : (t, x) \in \bar{M}_j\}.$$

Зафиксируем многообразие $M_i, M_i \in I \setminus J$, размерность которого является $n - k + 1$. Обозначим символом $\bar{M}_i^{[k]}$ замыкание сингулярного многообразия $M_i, k \in \overline{1, \dots, n}$. Разобьем точки бифуркации на классы в зависимости от того какая размерность сингулярного многообразия в замыкании которого лежат эти точки.

При этом будет справедлива следующая теорема

Теорема 2. Если выполнены условия A1), A2), то для того, чтобы точка бифуркации $(t_1, x_1) \in \bar{M}_i^{[k]}$, где размерность многообразия $M_i^{[k]}$ равна $n + 1 - k$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $D_{ss}^2\Psi(t_1, s_1) = D_{ss}^2\sigma^*(s_1) - \int_{t_1}^T D_{ss}^2H(\tau, s_1)d\tau$ был равен $n - k, k \in \overline{1, \dots, n}$.

Список литературы

- [1] А. И. Субботин, Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.: Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [2] P. L. Lions, J-C. Rochet, Hopf Formula and Multitime Hamilton-Jacobi Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **96**: 1 (1986), 79–84
- [3] A. S. Rodin, ON THE STRUCTURE OF THE SINGULAR SET OF A PIECEWISE SMOOTH MINIMAX SOLUTION OF THE HAMILTON–JACOBI–BELLMAN EQUATION. *Ural Mathematical Journal*, **2**: 1 (2016), 58–68.
- [4] A. S. Rodin, L. G. Shagalova, Bifurcation points of the generalized solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *IFAC-PapersOnLine*, **51**: 32 (2018), 866–870.

Метод характеристик для уравнения эйконала в задачах Дирихле и Коши

Стародубец К.А.
УрфУ, Екатеринбург, Россия
Kirill.Starodubets@urfu.me

В работе методом характеристик исследуется решение задач Дирихле и Коши для уравнения эйконала [1]:

$$\|\nabla u(x)\| = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad (1)$$

где $\nabla u(x)$ — градиент функции, описывающей волновой фронт

$\|\cdot\|$ — евклидова норма;

$f(x)$ — положительно-определенная функция, связанная со скоростью распространения волны в среде.

Уравнение эйконала возникает в геометрической оптике и в задачах распространения волн.

[2] Целью работы является анализ с помощью метода характеристик решений этого уравнения для задач Дирихле и Коши и их физическая интерпретация. В рассмотренных примерах с гладкими краевыми многообразиями для задачи Дирихле выявлены случаи, когда в части области определения решение не может быть построено и когда при конструировании решения методом характеристик возникает особенность типа "ласточкин хвост" [3].

Список литературы

- [1] Курант Р. Уравнения с частными производными. 1964.
- [2] Основы оптики. Конспект лекций. Под редакцией Шехонина А.А. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.
- [3] А. И. Субботин, Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Стабилизация группового взаимодействия (Q,S,R)-диссипативных систем с постоянными задержками

Усова А.А., Полушин И.Г.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Университет Западного Онтарио, Лондон, Онтарио, Канада

ausova@imm.uran.ru, ipolushi@uwo.ca

Работа освещает вопросы стабилизации взаимодействия группы (Q,S,R)-диссипативных систем, которое может сопровождаться задержками по времени. Прежде всего дадим описание самой системы. Итак, рассматривается динамическая система вида

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, \eta), \\ y = h(x, \eta), \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ вектор состояния системы, $\eta \in \mathbb{R}^m$ — входной векторный параметр и $y \in \mathbb{R}^p$ — выход системы (1). Входно-выходные сигналы как функции времени принадлежат пространству \mathcal{L}_{2e} , то есть интегрируемы с квадратом, а именно $\int_0^T \langle \eta(\tau), \eta(\tau) \rangle d\tau < +\infty$ для всех $T > 0$. Функции $f(\cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$ локально Липшицевы по своим аргументам.

Определение 1. Система (1) называется *диссипативной* относительно функции расхода $w: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, если существует функция запаса $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, отвечающая неравенству $V(x(t_1)) - V(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} w(y(\tau), \eta(\tau)) d\tau$ вдоль траекторий системы (1) для всех $t_1 \geq t_0$, любого начального состояния $x(t_0)$ и входного сигнала $\eta(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ таких, что $x(t)$ определена на $[t_0, t_1]$.

Определение 2. (из [1]). Система (1) называется *(Q,S,R)-диссипативной*, если она диссипативна с квадратичной функцией расхода

$$w(\eta, y) = \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix}^T [\text{QSR}] \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix}, \quad [\text{QSR}] := \begin{bmatrix} R & S^T \\ S & Q \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Отметим, что данные задачи не новы, так, например, в работе [1] рассматриваются системы с квадратичной функцией расхода, соединенные линейно по входно-выходным параметрам без задержек, и доказывается критерий устойчивости объединенной системы. В книге [4] приводятся результаты по стабилизации группы \mathcal{L}_2 -устойчивых систем, взаимодействие которых осуществляется с постоянными задержками по времени. Кроме того, существует много работ, посвященных телеоператорным системам, в которых речь идет о совместной работе как минимум 4 подсистем (две на локальной стороне и две — удаленно), взаимодействие между локальной и удаленной стороной осуществляется посредством канала связи, порождающего различные помехи в виде задержки по времени и потерю данных (см., например, обзорную статью [2]). Одним из наиболее действенных методов стабилизации таких систем является применение преобразования рассеивания к сигналам, передаваемым посредством канала связи. Здесь обобщаются перечисленные результаты для случая взаимодействия произвольного количества (Q,S,R)-диссипативных подсистем с временными задержками. Рассмотрим для (Q,S,R)-диссипативных систем следующее понятие.

Определение 3. (Q,S,R)-диссипативная система (1) (A, B) \mathcal{L}_2 -устойчива, если ее функция расхода имеет вид $w(\eta, y) = \eta^T A \eta - y^T B y$, где A и B симметрические матрицы такие, что $A = A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A \geq 0$ и $B = B^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B > 0$.

Согласно [3] будем говорить, что (Q,S,R)-диссипативная система отвечает условию “*выживаемости*” (“*liveness*”), если количество неотрицательных собственных значений [QSR]-матрицы совпадает с размерностью m входа η , а количество строго отрицательных собственных значений [QSR]-матрицы равно размерности p выхода y , т.е. $\text{card}(\lambda_{\geq 0}) = m$ и $\text{card}(\lambda_{< 0}) = p$.

Лемма 1. Для любой (Q,S,R)-диссипативной системы, удовлетворяющей условию “выживаемости”, существует такое линейное преобразование \mathbb{S} входно-выходных параметров η, y , что для новых входно-выходных сигналов \mathbf{u} и \mathbf{v} соответственно, система будет (A, B)-устойчивой. Более того, преобразование может быть подобрано так, чтобы достигнуть (A, B)-устойчивости для любых предопределенных матриц $A = A^d$ и $B = B^d$, удовлетворяющих условиям в Определении 3.

Данное преобразование \mathbb{S} называется *преобразованием рассеивания* [2,5] и для диагональных матриц $A = A^d$ и $B = B^d$ может быть построено, например, следующим образом

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Gamma \cdot G^T \begin{pmatrix} \eta \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} = \Gamma \cdot G^T, \tag{3}$$

здесь столбцами матрицы G являются ортонормированные собственные вектора симметричной матрицы $[QSR]$, а матрица $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_{m+p}\}$ диагональна и такая, что $\gamma_i \geq \sqrt{\lambda_i/a_i^d}$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), $\gamma_{m+j} \geq \sqrt{-\lambda_{m+j}/b_j^d}$ ($j \in \{1, 2, \dots, p\}$), где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0 > \lambda_{m+1} \geq \dots \geq \lambda_{m+p}$ собственные значения $[QSR]$ матрицы.

Наконец, рассмотрим взаимодействие группы (Q,S,R)-диссипативных систем, удовлетворяющих условию “выживаемости”. Каждая i -ая система описывается уравнениями вида (1)

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = f_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\eta}_i), & \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \boldsymbol{\eta}_i \in \mathbb{R}^{m_i} \\ \mathbf{y}_i = h_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\eta}_i), & \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{p_i}, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \tag{4}$$

Для каждой матрицы $[QSR]_i$ из квадратичной функции расхода построим преобразование рассеивания \mathbb{S}_i вида (3) и получим новые входно выходные параметры $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} = \mathbb{S}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}$.

Пусть $\mathbf{U}^T = (\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_N^T) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ и $\mathbf{V}^T = (\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_N^T) \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}}$ общие наборы входно-выходных параметров для всей группы систем, где $\mathbf{m} = m_1 + \dots + m_N$ и $\mathbf{p} = p_1 + \dots + p_N$. Связи между подсистемами описываются матрицей коэффициентов $\Psi \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{m} \times \mathbf{p}}$ и матрицей коммуникационных задержек $T \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{m} \times \mathbf{p}}$, все элементы матриц Ψ и T неотрицательны. Элемент T_{ij} задает постоянную временную задержку при передаче выходного сигнала \mathbf{v}_j j -ой подсистемы на вход \mathbf{u}_i i -ой подсистемы. Все внешние сигналы, включая помехи, действующие на внутреннюю коммуникационную сеть, сгруппированы в единый векторный сигнал $\Delta \in \mathbb{R}^{\mathbf{q}}$, и его влияние описывается матрицей с неотрицательными элементами $\mathcal{D} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{m} \times \mathbf{q}}$. Таким образом, взаимодействие группы систем описывается набором $\mathcal{M}(\Psi, T, \mathcal{D})$, при этом элементы указанных матриц удовлетворяют следующим сетевым ограничениям

$$|\mathbf{U}_i(t)| \leq \max_{\substack{j \in \{1, \dots, \mathbf{p}\} \\ k \in \{1, \dots, \mathbf{q}\}}} \{\Psi_{ij} |\mathbf{V}_j(t - T_{ji})|, \mathcal{D}_{ik} |\Delta_k(t)|\} \tag{5}$$

Замечание. Неравенство (5) допускает произвольные входные сигналы $\mathbf{U}_i(t)$, ограниченные по норме некоторыми линейными функциями норм (запаздывающих) выходов $\mathbf{V}_j(t - T_{ji})$ и возмущений $\Delta_k(t)$. Ограничения (5) допускают усиление, искажение сигналов в канале связи, могут описывать шумы и учитывать эффекты квантования и т.д.

Определение 4. Групповая система с постоянными задержками по времени (4)–(5) называется *слабо (A, B) \mathcal{L}_2 -устойчива*, если существует *функция запаса* $\mathcal{V}: \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что неравенство $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathcal{V}(\mathbf{x}(t_0)) \leq \int_{t_0}^t (\Delta^T(\tau)A\Delta(\tau) - \mathbf{V}^T(\tau)B\mathbf{V}(\tau)) d\tau + a(t_0)$ выполняется вдоль траекторий системы (4)–(5), где $a(t_0) \geq 0$ может зависеть от траекторий системы на интервале $[t_0 - T_{\max}, t_0]$, где $T_{\max} := \max_{\substack{i \in \{1, \dots, \mathbf{m}\} \\ j \in \{1, \dots, \mathbf{p}\}}} T_{ji}$. Симметричные матрицы $A = A^T \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}$, $A \geq 0$, $B = B^T \in \mathbb{R}^{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}$, $B > 0$

являются блочно-диагональными и состоят из блоков A_i и B_j соответственно ($i, j \in \{1, \dots, N\}$), где каждый блок определяется согласно лемме 1.

Теорема. Пусть каждая подсистема $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ является (Q,S,R)-диссипативной и удовлетворяет условию “выживаемости”. Если матрицы коэффициентов Γ_1 и Γ_2 выбрать так, что справедливо неравенство $\sigma_{\max}(\Gamma_1^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \Psi \mathbf{B}^{-1/2} \Gamma_2) < 1$, то преобразование рассеивания вида (3), где

$S_i := \begin{bmatrix} \Gamma_1^i & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Gamma_2^i \end{bmatrix} \cdot G_i^T$, $i = 1, \dots, N$, стабилизирует систему (4)-(5) до слабой (A, B) \mathcal{L}_2 -устойчивости относительно входного воздействия $\Delta(t)$. Здесь матрицы Γ_1 и Γ_2 являются положительно определенными и блочно-диагональными $\Gamma_1 = \text{diag}\{\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_1^N\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}$ и $\Gamma_2 = \text{diag}\{\Gamma_2^1, \dots, \Gamma_2^N\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}$.

Список литературы

- [1] P. J. Moylan and D.J. Hill, Stability criteria for large-scale systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**: 2 (1978), 143–149.
- [2] Emmanuel Nuño, Luis Basañez, Romeo Ortega, Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, **47**: 3 (2011), 485–495.
- [3] J.C. Willems and H.L. Trentelman, Synthesis of dissipative systems using quadratic differential forms: Part I. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**: 1 (2002), 53–69.
- [4] A.J. Van der Schaft. *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 3rd Ed. Springer:Cham, 2017
- [5] A. A. Usova, I. G. Polushin, R. V. Patel, Scattering-based stabilization of non-planar conic systems. *Automatica*, **93** (2018), 1–11.

Задачи наведения интегральных воронок дифференциальных включений посредством выбора параметра¹

Ушаков В.Н., Ершов А.А., Ушаков А.В., Кувшинов О.А.
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия.

Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система Σ

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u), \quad (1)$$

$$x(t_0) \in X^{(0)}; \quad (2)$$

здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы Σ , u — управляющий вектор из компакта $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$, α — параметр из компакта $\mathcal{L} \in \text{comp}(\mathbb{R}^q)$, $X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ — начальное множество; $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$ — пространство компактов в \mathbb{R}^k с хаусдорфовой метрикой $d(X, Y) = \max\{h(X, Y), h(Y, X)\}$, $h(X, Y) = \max_{x \in X} \rho(x, Y)$ — хаусдорфово отклонение X от Y , где $\rho(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$.

Предполагается, что система Σ удовлетворяет следующим условиям.

A. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u)\| \leq \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|),$$

$$(t, x), (\tau, x) \in G; \quad u \in P; \quad \alpha, \beta \in \mathcal{L};$$

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

$$(t, x), (t, y) \in G; \quad u \in P; \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

B. Найдётся такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f_\alpha(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

Пусть t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ ($t_* < t^*$), $x_* \in \mathbb{R}^n$, $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Введём обозначения

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости системы (1) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;
 $X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости системы (1) в момент t^* с начальным множеством X_* .

Учитывая условие **B** и размеры начального множества $X^{(0)}$ (2), мы можем указать область $G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, которая будет содержать интегральную воронку $X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X_\alpha(t, t_0, X^{(0)}))$ системы Σ вместе со всеми аппроксимирующими её конструкциями при любом $\alpha \in \mathcal{L}$.

Теорема 1 [1, формула (2.40)]. Для системы Σ , удовлетворяющей условиям **A** и **B**, имеет место оценка

$$d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), X_\beta(t_0, X^{(0)})) \leq (\vartheta - t_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|)e^{\int_{t_0}^{\vartheta} L(t) dt}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{L}.$$

Пусть задано (конечное) множество \mathcal{T} моментов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_*}$ в промежутке $[t_0, \vartheta]$, и разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ ($t_{i+1} - t_i = \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma)$, $i = 0, N - 1$) содержит множество \mathcal{T} .

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Считаем, что в \mathbb{R}^2 заданы компакты $X^{(f)}$ — целевое множество и $\Phi^{(k)} = \Phi(\tau_k)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$, где $\Phi(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, мы трактуем как препятствие для системы Σ .

Задача 1 (жесткая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha_*, x^{(0)}) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, что

$$X^{(f)} \subset X_{\alpha_*}(\vartheta, t_0, x^{(0)}), \quad \Phi^{(k)} \cap X_{\alpha_*}(\tau_k, t_0, x^{(0)}) = \emptyset, \quad \tau_k \in \mathcal{T}.$$

Решение для задачи 1 может не существовать, поэтому сформулируем задачу о наведении в мягкой постановке.

Введём обозначения

$$J^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{\tau_k \in \mathcal{T}} s(\Phi^{(k)} \setminus X_{\alpha}(\tau_k, t_0, x)),$$

$$J^{(2)}(\alpha, x) = s(X^{(f)} \cap X_{\alpha}(\vartheta, t_0, x)), \quad \alpha \in \mathcal{L}, \quad x \in X^{(0)};$$

здесь $s(Y)$ — площадь множества $Y \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$.

Зафиксируем λ_1 и λ_2 в $[0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Полагаем $J(\alpha, x) = \lambda_1 J^{(1)}(\alpha, x) + \lambda_2 J^{(2)}(\alpha, x)$.

Задача 2 (мягкая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha^*, x^*) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, что выполняется соотношение

$$J(\alpha^*, x^*) = \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x). \quad (3)$$

Так как точно решать задачу 2 не представляется возможным, то сформулируем и будем искать решение некоторой аппроксимационной задачи, в которой вместо множеств \mathcal{L} и $X^{(0)}$, вписаны их конечные ρ -сеть $\mathcal{L}^{(\rho)}$ и σ -сеть $X^{(\sigma)}$, а вместо множеств достижимости $X_{\alpha}(t, t_0, x^{(0)})$, $(\alpha, x^{(0)}) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ вписаны их аппроксимации $\tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^{\Gamma}(t_i, t_0, x^{(0)})$, $(\alpha^{(r)}, x^{(s)}) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$.

Введём обозначения

$$\tilde{J}_{\Gamma}^{(1)}(\beta, y) = \sum_{\tau_k \in \mathcal{T}} s(\Phi^{(k)} \setminus \tilde{X}_{\beta}^{\Gamma}(\tau_k, t_0, y)),$$

$$\tilde{J}_{\Gamma}^{(2)}(\beta, y) = s(X^{(f)} \cap \tilde{X}_{\beta}^{\Gamma}(\vartheta, t_0, y)),$$

$$\tilde{J}_{\Gamma}(\beta, y) = \lambda_1 \tilde{J}_{\Gamma}^{(1)}(\beta, y) + \lambda_2 \tilde{J}_{\Gamma}^{(2)}(\beta, y), \quad (\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}.$$

Задача 3 (аппроксимационная постановка). Требуется определить такую пару $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, что выполняется соотношение

$$\tilde{J}_{\Gamma}(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_{\Gamma}(\beta, y).$$

Для обоснования близости решений задач 2 и 3 при малых положительных ρ и σ вводится ещё одно условие геометрического характера.

С. Границы $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(f)}$, $\partial \Phi^{(k)}$, $\partial X_{\alpha}(t_i, t_0, x)$, $\partial \tilde{X}_{\beta}^{\Gamma}(t_i, t_0, y)$ ($(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\tau_k \in \mathcal{T}$, $t_i \in \Gamma$) спрямляемы и ограничены сверху по длине некоторым $l^* \in (0, \infty)$.

Теорема 2 (следствие из [1, формула (3.26)]). Пусть системы Σ удовлетворяет условиям **A**, **B**, **C**. И пусть пара $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ — оптимальная в задаче 2 для системы Σ , т.е. $\tilde{J}_{\Gamma}(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_{\Gamma}(\beta, y)$.

Тогда

$$\left| \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - J(\beta^*, y^*) \right| \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0 \text{ и } \sigma \rightarrow 0.$$

Список литературы

- [1] В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. В. Ушаков, Управляемые системы, зависящие от параметра: множества достижимости и интегральные воронки. *Прикладная математика и механика*, **86**: 1 (2022), 3–22.

Импульсное управление вертикальным движением инерционного манипулятора¹

Чупин И.А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
mr.tchupin@yandex.ru

Введение

Рассматривается двухзвенный инерционный манипулятор, состоящий из двух абсолютно твердых тел (рис. ??). Первое звено совершает поступательное движение вдоль горизонтальной оси Ox , второе звено связано с первым цилиндрическим шарниром O_1 и совершает вращательное движение в вертикальной плоскости. На конце второго звена укреплен схват, в котором находится перемещаемый объект (груз). Манипулятор управляется при помощи двух независимых приводов, определяющих поступательное движение первого звена и вращательное движение второго.

Функция Лагранжа определяется формулой

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - m_2 l \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - m_2 g l \sin \varphi.$$

Здесь x – перемещение первого звена вдоль оси Ox ; угол φ – угол между осью Ox и вторым звеном; l – расстояние от оси шарнира O_1 до центра масс C второго звена с грузом; m_1 – масса первого звена; m_2 – масса второго звена с грузом; J – момент инерции второго звена с грузом относительно оси шарнира O_1 .

Задача управления состоит в нахождении программных законов изменения управляющей силы $F(t)$ и управляющего момента $M(t)$, обеспечивающих приведение манипулятора из заданного начального положения $x(0) = x_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ в заданное конечное положение $x(T_k) = x_T$, $\varphi(T_k) = \varphi_T$, $\dot{x}(T_k) = 0$, $\dot{\varphi}(T_k) = 0$ за конечное время T_k .

В [1] использовались импульсные управления при решении задачи управления для безинерционного двухзвенника, совершающего плоскопараллельное движение. В настоящей работе решается поставленная задача управления для двухзвенного инерционного манипулятора, движение которого происходит в вертикальной плоскости. В двумерном конфигурационном пространстве манипулятора рассматривается траектория, соединяющая начальное и конечное положения. Идеальные импульсные управления реализуют в начальный момент времени переход манипулятора из начального положения на траекторию, а в конечный момент времени гасят скорость схвата.

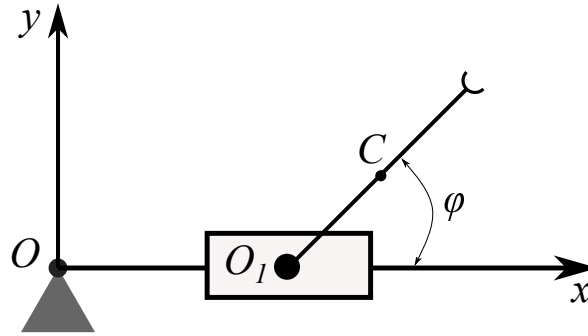
Основной результат

В настоящей работе для описания движения используются канонические уравнения Гамильтона. Гамильтониан системы имеет следующий вид

$$H(x, \varphi, p_x, p_\varphi) = \frac{J p_x^2 + 2m_2 l p_x p_\varphi \sin \varphi + (m_1 + m_2) p_\varphi^2}{2(J(m_1 + m_2) - m_2^2 l^2 \sin^2 \varphi)} + m_2 g l \sin \varphi.$$

Система канонических уравнений имеет два независимых первых интеграла, находящихся в инволюции: интеграл энергии и циклический интеграл, и, согласно теореме Лиувилля, можно найти два дополнительных первых интеграла, один из которых определяет траекторию движения в конфигурационном пространстве, а второй определяет закон движения по траектории.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00714).



1: Инерционный манипуляционный робот

Теорема Импульсные управления, реализующие перевод манипулятора из начального в конечное положение определяются формулами

$$F(t) = S_1^0 \delta(t) + S_1^T \delta(T_k - t),$$

$$M(t) = S_2^0 \delta(t) + S_2^T \delta(T_k - t),$$

$$S_1^0 = |p_x^0| \text{sign}(x_T - x_0) = -S_1^T,$$

$$S_2^0 = |p_x^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) \left(\frac{\sqrt{(J(m_1 + m_2) - m_2^2 l^2 \sin^2 \varphi_0) (2(m_1 + m_2)(p_*^2 - \frac{m_2 g l \sin \varphi_0}{(p_x^0)^2}) - 1) - m_2 l \sin \varphi_0}}{m_1 + m_2} \right),$$

$$S_2^T = |p_x^0| \text{sign}(\varphi_T - \varphi_0) \left(\frac{\sqrt{(J(m_1 + m_2) - m_2^2 l^2 \sin^2 \varphi_T) (2(m_1 + m_2)(p_*^2 - \frac{m_2 g l \sin \varphi_T}{(p_x^0)^2}) - 1) - m_2 l \sin \varphi_T}}{m_1 + m_2} \right),$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, а параметр p_* является решением уравнения

$$(x_T - x_0) + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\cos \varphi_T - \cos \varphi_0) = \frac{1}{m_1 + m_2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_T} \sqrt{\frac{J(m_1 + m_2) - m_2^2 l^2 \sin^2 \varphi}{2(m_1 + m_2)(p_*^2 - \frac{m_2 g l \sin \varphi}{(p_x^0)^2}) - 1}} d\varphi.$$

Заключение

Получены импульсные управления, решающие задачу управления манипулятором. Предложено оптимальное значение импульса для минимизации критерия качества, учитывающего время работы манипулятора и энергозатратность выполняемой работы.

Список литературы

- [1] Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин, Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом. *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **51** (2021), 77–90.

Односторонняя поимка в нелинейных дифференциальных играх двух лиц¹

Щелчков К.А.

Удмуртский Государственный Университет, Ижевск, Россия

В пространстве \mathbb{R}^k рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц, описываемая системой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $U = \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^l$ — множество значений управления преследователя, $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт — множество значений управления убегающего. Целью преследователя является приведение траектории системы в любую наперед заданную окрестность нуля за конечное время. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат в точках разбиения временного интервала. В работе [1] получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит ε -поимка.

Определение. ([2]) Совокупность векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом* если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

В условия теоремы о поимке [1] входит следующее: векторы $f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)$ образуют положительный базис.

В данной работе исследуется случай, когда векторы $f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)$ образуют одностороннюю совокупность. Это означает, что данные векторы лежат строго по одну сторону от некоторой гиперплоскости, проходящей через ноль и поэтому не образуют положительный базис. Для такого случая получены достаточные условия существования множества начальных положений, из которого происходит ε -поимка.

Список литературы

- [1] К. А. Щелчков, Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**: 1 (2018), 111–118. DOI: 10.20537/vm180110.
- [2] Н. Н. Петров, Об управляемости автономных систем. *Дифференц. уравнения*, **4**: 4 (1968), 606–617.

¹Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-00928-21-01, проект FEWS-2020-0010 "Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем" и гранта РФФИ (проект 20-01-00293).

Оценивание среднего состояния стаи систем

Юровских П.А.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
polina2104@list.ru

Аннотация

Рассматривается движение стаи систем с наблюдением. На возмущения наложены интегральные ограничения, а на начальные состояния — геометрические. Вводятся понятия усредненного и случайного информационных множеств, которые обобщают понятие информационного множества в обычных системах. Целью работы является описание динамики усредненного информационного множества и его аппроксимации семейством эллипсоидов. Предлагаемый метод проиллюстрирован примерами.

Рассмотрим движение стаи систем с наблюдением

$$\dot{x}(i, t) = A(i)x(i, t) + b(i)v(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$y(i, t) = G(i)x(i, t) + cv(t), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^q, \quad (2)$$

где $i \in 1 : N$ и $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, — вероятности реализации i -ой системы. Система (1) называется стаей. Уравнение (2) задает наблюдение в i -ой системе. Неизвестная функция $v(t)$ и начальное состояние $x_0(i)$ подчинены ограничениям

$$\int_0^T |v(t)|^2 dt \leq 1, \quad x_0(i) \in X_0, \quad (3)$$

где X_0 — выпуклый компакт.

Аппроксимируем множество начальных состояний X_0 семейством внешних эллипсоидов $\mathcal{E}(P_0, \hat{x}_0) \in X_0$, где P_0 — симметричная положительно-определенная матрица, $P'_0 = P_0 > 0$. Тогда ограничение (3) можно аппроксимировать следующими ограничениями

$$\alpha |x_0(i) - \hat{x}_0|_{P_0}^2 + (1 - \alpha) \int_0^T |v(t)|^2 dt \leq 1, \quad \alpha \in [0, 1], \quad \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ фиксировано.} \quad (4)$$

Можно видеть, что переменные x и y из уравнений (1) и (2) связаны друг с другом посредством функции $v(t)$. Представим систему в эквивалентном виде. Обозначим через C матрицу $(cc')^{-1}$ и запишем ортогональное разложение $v = c' C c v + C_1 v$ пространстве в \mathbb{R}^q , где $C_1 = I_q - c' C c$ — ортогональная проекция на подпространство $\ker c$. Из (2) получаем равенство $cv = y - G(i)x$. Если ввести обозначения [1]

$$\mathbf{b}(i) = b(i)c' C, \quad \mathbf{A}(i) = A(i) - \mathbf{b}(i)G(i), \quad (5)$$

и подставить ортогональное разложение v в (1), это уравнение преобразуется в следующее

$$\dot{x}(i, t) = \mathbf{A}(i)x(i, t) + \mathbf{b}(i)y(i, t) + bC_1 v(t). \quad (6)$$

Ограничения (3), (4) переписываются следующим образом

$$\int_0^T (|y(i, t) - G(i)x(i, t)|_C^2 + |v(t)|_{C_1}^2) dt \leq 1, \quad x_0(i) \in X_0, \quad (7)$$

$$\alpha |x_0(i) - \hat{x}_0|_{P_0}^2 + (1 - \alpha) \int_0^T (|y(i, t) - G(i)x(i, t)|_C^2 + |v(t)|_{C_1}^2) dt \leq 1 \quad (8)$$

Определение 1. Пусть сигнал $y(i, t)$ порождается системой (1), (2) с помощью неизвестной пары $(x_0^*(i), v^*(\cdot))$, удовлетворяющей ограничениям (3) или (4). Случайная пара $(x_0(i), v(\cdot))$ называется совместимой с измеренным сигналом $y(i, \cdot)$ при $t \in [0, T]$, если решение $x(i, t)$ уравнения (6) и функция $v(t)$ удовлетворяют соотношениям (7) или (8), соответственно.

Определение 2. Совокупность $\mathbf{X}(T, y)$ называется усредненным информационным множеством (УИМ), если оно состоит из всевозможных векторов $\bar{x}(T) = \mathbb{E}x(T) = \sum_{i=1}^N p_i x(i, T)$, где $x(i, T) \in X^i(T, y)$, а \mathbb{E} — математическое ожидание. Семейство $X^i(T, y)$ — это случайное информационное множество (СИМ), состоящее из всех случайных векторов $x(i, T)$, для каждого из которых существует порождающая совместимая пара $(x_0(i), v(\cdot))$ при $t \in [0, T]$, удовлетворяющая ограничениям (7).

Целью работы является описание динамики множества $\mathbf{X}(t, y)$ и его аппроксимация с помощью $\mathbf{X}(t, y, P_0, \alpha)$.

СИМ для (1), (2) при ограничениях (3) для фиксированного i можно представить, как пересечение СИМ уравнения (6) при ограничениях (8) (см. [4])

$$X^i(T, y) = \bigcap_{P_0 \in \mathcal{P}_0, \alpha} X^i(T, y, P_0, \alpha),$$

где \mathcal{P} — множество симметричных положительных матриц P_0 таких, что $\mathcal{E}(P_0, \hat{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_0 - \hat{x}_0|_Q^2 \leq 1\} \supset X_0$. $X^i(T, y, P_0, \alpha)$ — СИМ системы (1), (2) при ограничениях (4) при фиксированном i . В предыдущих работах было показано, что это множество — эллипсоид, параметры которого могут быть найдены из соответствующих дифференциальных уравнений.

УИМ можно представить как математическое ожидание случайных множеств $X^i(T, y)$:

$$\mathbf{X}(T, y) = \sum_{i=1}^N p_i X^i(T, y).$$

Данное множество представляется также в виде аппроксимации

$$\mathbf{X}(T, y) = \bigcap_{P_0 \in \mathcal{P}_0, \alpha} \mathbf{X}(T, y, P_0, \alpha).$$

Последняя формула проиллюстрирована примерами.

Список литературы

- [1] Б. И. Ананьев, П. А. Юровских, Аппроксимация задачи гарантированного оценивания со смешанными ограничениями. *Тр. ИММ УрО РАН*, **26**: 4 (2020), 48–63.
- [2] E. Zuazua, Averaged control. *Automatica*, **50**: 12 (2014), 3077–3087.
- [3] M. Lazar, J. Lohéac. Output controllability in a long-time horizon. *Automatica*, **113** (2020), 108762.
- [4] P. A. Yurovskikh, Set membership estimation with a separate restriction on initial state and disturbances. *Ural Mathematical Journal*, **7**: 1 (2021), 160–167. DOI: 10.15826/umj.2021.1.012

Стохастическая динамика
(председатель д.ф.-м.н. Л.Б. Ряшко)

Моделирование и анализ опухолево-иммунной динамики в условиях химиотерапии и случайных возмущений¹

Башкирцева И.А., Чухарева А.А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

irina.bashkirtseva@urfu.ru, ann.chukhareva@mail.ru

В настоящее время проблема математического моделирования и анализа сложных динамических процессов в различных областях биологии является важной задачей современной нелинейной науки. Здесь актуальным является изучение процессов противоопухолевого иммунного ответа на случайные возмущения и терапию [1, 2]. В докладе рассматривается двумерная модель динамического взаимодействия опухолевых и иммунных клеток в условиях химиотерапии и случайных воздействий. Данная модель является модификацией известной модели Кузнецова [3].

В работе проведен бифуркационный анализ детерминированной модели в зависимости от коэффициента интенсивности химиотерапии. Показано, что система допускает два характерных состояния: «спящей» опухоли, которая представлена равновесным и осцилляционным режимами, и «исчезающей» опухоли. Для равновесных и автоколебательных режимов найдены параметрические зоны сосуществования и определены сепаратрисы, разделяющие бассейны соответствующих аттракторов. Найдены оценки параметра интенсивности химиотерапии, при котором возможно как удержание системы в режиме «спящей» опухоли, так и ее полное подавление. Для стохастической модели описаны сценарии результатов воздействия случайных возмущений на режимы динамического взаимодействия иммунных и опухолевых клеток. Исследованы условия, при которых возникают индуцированные шумами переходы между аттракторами. С помощью аналитического метода доверительных областей получены оценки критических значений интенсивности случайных возмущений, вызывающих резкие смены режимов опухолево-иммунной динамики.

Список литературы

- [1] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Analysis of noise-induced phenomena in the nonlinear tumor-immune system. *Physica A*, **549** (2020), 123923.
- [2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Á. G. López, J. M. Seoane, M. A. F. Sanjuán, The effect of time ordering and concurrency in a mathematical model of chemoradiotherapy. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Sim.*, **96** (2021), 105693.
- [3] V. A. Kuznetsov, I. A. Makalkin, M. A. Taylor, A. S. Perelson, Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: parameter estimation and global bifurcation analysis. *Bull. Math. Biol.*, **56** (1994), 295–321.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).

Анализ стохастической модели хищник-жертва с Олли-эффектом

Белохолов О.В., Первалова Т.В.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

oleg.belohohlov01@gmail.com, tatyana.perevalova@urfu.ru

В работе рассматривается модель взаимодействия двух популяций "хищник-жертва" с учетом Олли-эффекта в популяции жертв. Стохастический вариант данной модели имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \exp \left[r \left(1 - \frac{x_n}{k} \right) (x_n - \theta) - \frac{y_n}{x_n^2 + a} \right] + \varepsilon \xi_{1,n}, \\ y_{n+1} = y_n \exp \left[\frac{\mu x_n}{x_n^2 + a} - d \right] + \varepsilon \xi_{2,n}. \end{cases} \quad (1)$$

Для детерминированной модели ($\varepsilon = 0$) построены бифуркационная диаграмма и зависимость показателя Ляпунова при изменении параметра Олли эффекта θ . Показано сосуществование наряду с устойчивым вырожденным равновесием $(0, 0)$ устойчивого невырожденного равновесия или замкнутой инвариантной кривой. Построены бассейны притяжения аттракторов. Описаны бифуркации Неймарка-Саккера и кризиса.

Далее изучается влияние аддитивного шума при изменении параметра θ и интенсивности случайного воздействия $\varepsilon \neq 0$. Для анализа поведения системы в присутствии случайного возмущения используются функция стохастической чувствительности (ФСЧ) и метод доверительных областей [2]. Исследована чувствительность аттракторов, описаны стохастическая деформация аттракторов и индуцированное шумом вымирание обеих популяций.

Список литературы

- [1] Z. AlSharawi, S. Pal, N. Pal, J. Chattopadhyay, A discrete-time model with non-monotonic functional response and strong Allee effect in prey. *Journal of Difference Equations and Applications*, **26**: 3 (2020), 404–431.
- [2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov, Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for discrete dynamic systems. *Dyn. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A*, **17** (2010), 501–515.

Динамическое взаимодействие равновесной и хаотической популяционных подсистем¹

Беляев А.В., Ряшко Л.Б.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

belyaev.alexander1337@yandex.ru, lev.ryashko@urfu.ru

В настоящее время в области нелинейной динамики интерес исследователей направлен на изучение связанных систем. Будучи связанными, даже простые динамические системы могут демонстрировать богатое разнообразие качественно различных режимов, как регулярных, так и хаотических [1]. В классе биологических систем особый интерес вызывает динамика популяций, связанных взаимной миграцией.

В данном исследовании рассматривается система, состоящая из двух связанных подсистем, которые моделируются дискретным отображением Рикера [2]. В изолированных подсистемах могут наблюдаться различные динамические режимы: равновесный, периодический и хаотический. Стохастический анализ регулярной и хаотической динамики в случае двух равновесных изолированных подсистем был проведен в статье [3]. Целью же данной работы является анализ динамических режимов корпоративной динамики при изменении интенсивности перетоков между популяционными подсистемами, первая из которых находится в равновесном режиме, а вторая – в хаотическом. Представлены и изучены аттракторы системы, проведен анализ колебательных режимов данных популяционных подсистем, построены бассейны притяжения для сосуществующих аттракторов при соответствующих значениях интенсивности связи. В дополнение к детерминированной, изучается стохастическая модель, учитывающая влияние случайных возмущений. Исследованы индуцированные шумом переходы между аттракторами, порождающие новые режимы поведения популяции.

Список литературы

- [1] I. Bashkirtseva, A. Pisarchik, Variability and effect of noise on the corporate dynamics of coupled oscillators. *AIP Conference Proceedings*, **070004**: 2172 (2019).
- [2] E. W. Ricker, Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **11**: 5 (1954), 559–623.
- [3] A. Belyaev, I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Stochastic variability of regular and chaotic dynamics in 2D metapopulation model. *Chaos, Solitons and Fractals*, **151** (2021), 111270.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).

Параметрический анализ стохастической чувствительности паттернов в нелинейных моделях с диффузией¹

Колениченко А.П., Ряшко Л.Б.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

kolinichenko.ale@gmail.com, lev.ryashko@urfu.ru

Тьюринговские паттерны часто встречаются в сложных моделях нелинейной динамики. В зоне диффузионной неустойчивости в зависимости от начального состояния системы можно получить один из сосуществующих паттернов [1]. В присутствии случайных возмущений может произойти стохастический переход от одного паттерна к другому. Для изучения явлений связанных с влиянием случайных шумов предложен метод функций стохастической чувствительности (ФСЧ) для пространственно распределенных моделей.

В этом исследовании метод ФСЧ применен к исследованию стохастической чувствительности в пространственной модели популяционной динамики с диффузией [2], [3]. С его помощью проведены оценка и сравнение степени чувствительности сосуществующих паттернов–аттракторов. Основная цель – оценить влияние изменения системных параметров и интенсивности диффузии на стохастическую чувствительность паттернов.

Список литературы

- [1] A. Kolinichenko, L. Ryashko, Multistability and stochastic phenomena in the distributed Brusselator model. *J. Comput. Nonlinear Dynam*, **15**: 1 (2020), 011007.
- [2] A. Kolinichenko, L. Ryashko, Stochastic sensitivity analysis of stationary patterns in spatially extended systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**: 16 (2021), 12194–12202.
- [3] I .Bashkirtseva, A. Kolinichenko, L. Ryashko, Stochastic sensitivity of Turing patterns: methods and applications to the analysis of noise-induced transitions. *Chaos, Solitons & Fractals*, **153**: 2 (2021), 111491.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).

Влияние шума на генерацию паттернов в модели гликолиза с диффузией¹

Панкратов А.А., Башкирцева И.А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
alexandrpankratov9@gmail.com, irina.bashkirtseva@urfu.ru

Проблема пространственно-временной самоорганизации в моделях реакция-диффузия привлекает внимание многих исследователей. Неустойчивость Тьюринга является общеизвестной причиной генерации пространственно неоднородных паттернов в широком круге диффузионных моделей. Интерес к процессу формирования паттернов в гликолизе обусловлен еще и тем фактом, что пространственные структуры в этой биохимической реакции наблюдаются в экспериментах.

Случайные возмущения являются неизбежным атрибутом любой реальной системы. Целью работы является исследование конструктивной роли шума в процессах самоорганизации в гликолизе [1]. В докладе рассматривается диффузионный вариант модели гликолитического осциллятора Селькова [2] с одной пространственной координатой [3]. Параметрическая зона исследования соответствует устойчивости по Тьюрингу, где исходная детерминированная модель демонстрирует лишь пространственно однородное равновесие. Под действием случайных возмущений в этой зоне наблюдается формирование пространственно неоднородных структур.

В докладе представлены результаты анализа разнообразия формируемых паттернов и их пространственных особенностей в зависимости от интенсивности шума и близости параметров к бифуркационной границе тьюринговской неустойчивости. С помощью аппарата гармонических коэффициентов проведено исследование доминирующих структур в процессе индуцированной шумом самоорганизации.

Список литературы

- [1] I. Bashkirtseva, A. Pankratov, Stochastic Higgins model with diffusion: pattern formation, multistability and noise-induced preference. *European Physical Journal B*, **92**: 18 (2019), 1–19.
- [2] E. E. Selkov, Self-oscillations in glycolysis 1. A simple kinetic model. *European Journal of Biochemistry*, **4**: 1 (1968), 79–86.
- [3] A. I. Lavrova, S. Bagyan, T. Mair, M. J. B. Hauser, L. Schimansky-Geier, Modeling of glycolytic wave propagation in an open spatial reactor with inhomogeneous substrate influx. *BioSystems*, **97** (2009), 127–133.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).

Стохастические переходы между аттракторами с фрактальными бассейнами

Павлецов М.М., Перевалова Т.В.

УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

evlucid@gmail.com, tatyana.perevalova@urfu.ru

В данной работе изучается стохастическая модель взаимодействия двух потребителей [1] в присутствии аддитивного шума:

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = \frac{b_1}{p_x p_y} (a_1 x_{1,t} (b_1 - p_x x_{1,t}) + D_{12} x_{2,t} (b_2 - p_x x_{2,t})) + \varepsilon \xi_{1,n}, \\ x_{2,t+1} = \frac{b_2}{p_x p_y} (a_2 x_{2,t} (b_2 - p_x x_{2,t}) + D_{21} x_{1,t} (b_1 - p_x x_{1,t})) + \varepsilon \xi_{2,n}. \end{cases} \quad (1)$$

Основное внимание данного исследования направлено на изучение феномена мультистабильности. В детерминированном случае обнаружена и изучена параметрическая зона сосуществования трех или четырех аттракторов. Описаны бифуркации появления и исчезновения аттракторов, а также бассейны их притяжения. Изучены границы бассейнов притяжения, которые могут иметь гладкую или фрактальную структуру.

Для стохастического случая описаны переходы между аттракторами в зависимости от интенсивности случайного воздействия. Здесь для анализа используется функция стохастической чувствительности и метод доверительных областей [2]. Проведено детальное изучение влияния аддитивного шума в случае сосуществования трех аттракторов — двух устойчивых равновесий и цикла периода 4. Показано, что при одинаковых значениях параметров детерминированной системы и интенсивности шума стохастический процесс с начальным значением на цикле может переходить как в одно, так и в другое равновесие. Получены оценки вероятностей попадания в эти два равновесия в зависимости от интенсивности шума. Особый интерес здесь представляет переходный процесс. В силу фрактальности границы бассейна притяжения цикла метод доверительных областей позволяет предсказать только выход с цикла и формирование "призрачного" хаотического аттрактора, как фрагмента переходного процесса. Далее метод доверительных областей для хаотического аттрактора [3] был применен для описания формы "призрака" и попытки дать оценку вероятности стохастического перехода в одно из двух равновесий.

Список литературы

- [1] W. Gaertner, J. Jungeilges, A non-linear model of interdependent consumer behaviour. *Economics Letters*, **27**: 2 (1988), 145–150.
- [2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov, Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for discrete dynamic systems. *Dyn. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A*, **17** (2010), 501–515.
- [3] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, **126** (2019), 78–84.

Стохастическое расщепление колебаний в зоне циклов-канардов трехмерной модели сердечного потенциала действия ¹

Слепухина Е.С.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

Гогенгеймский университет, Штутгарт, Германия
Evdokiiia.Slepukhina@uni-hohenheim.de

В докладе рассматривается трехмерная модификация модели Люо-Руди [1,2] сердечного потенциала действия. Исследуется воздействие случайных возмущений на малоамплитудные предельные циклы в параметрической зоне циклов-канардов. Показывается, что под действием шума такие колебания могут трансформироваться в большеамплитудные. С помощью прямого численного моделирования и статистической обработки результатов описываются вероятностные характеристики таких стохастических колебаний и их изменения в зависимости от интенсивности шума. С помощью техники функции стохастической чувствительности [3] локализуется предельный цикл-канард с максимальной чувствительностью. С использованием метрики Махаланобиса и доверительных областей [3,4] проводится анализ механизма стохастической генерации большеамплитудных колебаний и стохастического расщепления осцилляций, сигнализирующего об усложнении осцилляторной активности сердца.

Список литературы

- [1] C. H. Luo, Y. Rudy, A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction. *Circ. Res.*, **68**: 6 (1991), 1501–1526.
- [2] D. Sato, I. H. Xie, T. P. Nguyen, J. N. Weiss, Z. Qu, Irregularly appearing early afterdepolarizations in cardiac myocytes: random fluctuations or dynamical chaos? *Biophys J*, **99**: 3 (2010), 765–773.
- [3] I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko, Stochastic sensitivity of 3D-cycles. *Math. and Comp. in Simulat*, **66**: 1 (2004), 55–67.
- [4] E. Slepukhina, L. Ryashko, P. Kügler, Noise-induced early afterdepolarizations in a three-dimensional cardiac action potential model. *Chaos, Solitons and Fractals*, **131** (2020), 109515.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).

The canonical form of a Volterra cubic stochastic operator

Khamroyev A.Yu.
Karshi State University, Qarshi, Uzbekistan
 khamrayevw.yandex.ru

One of the main tasks in the study of a dynamical system is to know time depending behavior of its states [1]-[3]. Usually the "descendants" of the state of the system are determined by some law. Here we consider the law which is given by cubic stochastic operators.

To define a cubic operator, first we consider the simplex:

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

A cubic operator is a mapping $W : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ is given by

$$W : x'_i = \sum_{j,k=1}^m P_{ijk,l} x_j x_k x_l, l \in \overline{1, m} \quad (1)$$

where the a matrix $P \equiv P(W) = \{P_{ijk,l}\}_{ijk,l=1}^m$ satisfying the following properties

$$P_{ijk,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} = P_{kji,l} = P_{kij,l} = P_{ikj,l} \geq 0, \sum_{l=1}^m P_{ijk,l} = 1 \quad (2)$$

for each $i, j, k \in \overline{1, m}$

Definition 1. If

$$P_{ijk,l} = 0, \forall l \notin \{i, j, k\} \quad (3)$$

then the cubic operator (1) is called a Volterra-type cubic stochastic operator.

Theorem: The canonical form of the Cubic stochastic operator of the Volterra type is

$$x'_l = x_l \left(1 + \sum_{i=1, i \neq l}^m a_{il} x_i + \sum_{i=1, i \neq l}^m b_{il} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j, j \neq l, i \neq l}^m c_{ijl} x_i x_j \right), l \in \overline{1, m}$$

here

$$a_{il} = \begin{cases} 3P_{ill,l} + 3P_{iil,l}, i \neq l \\ 0, i = l \end{cases}, -2 \leq a_{il} \leq 1$$

$$b_{il} = \begin{cases} 1 - 3P_{ill,l} + 3P_{iil,l}, i \neq l \\ 0, i = l \end{cases}, -1 \leq a_{il} + b_{il} \leq 2$$

$$c_{ijl} = \begin{cases} 6P_{ijl,l} - 3P_{ill,l} - 3P_{jll,l} + 2, i \neq l \\ 0, i = l \end{cases}, -2 \leq c_{ijl} + a_{il} + a_{jl} \leq 4$$

References

- [1] U. U. Jamilov, A. Yu. Khamraev, M. Ladra, On a Volterra cubic stochastic operator. *Bull. Math. Biol.*, **80**: 2 (2018), 319–334.
- [2] A. Yu. Khamraev, On the dynamics of a quasistrictly non-Volterra quadratic stochastic operator. *Ukrainian Math. J.*, **71**: 8 (2020), 1273–1281.
- [3] U. A. Rozikov, Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. World Sci., Hackensack, NJ, 2020.

Машинное обучение
(председатель к.ф.-м.н. А.В. Коныгин)

Об одном методе оценки вероятности сговора между участниками аукционов ¹

Ефимов К.Д., Бакланов А.П.
НИУ ВШЭ, Санкт-Петербург, Россия
kd.efimov@hse.ru

Наличие здоровой конкуренции является важным условием развития отрасли и всего рынка. Тем не менее, некоторые участники рынка оказываются готовыми пойти на тайное соглашение со своими конкурентами с целью разделения рыночной прибыли. Существует большое количество классификаций таких соглашений, но самым распространенным определением является понятие картеля. Появление таких соглашений на рынках в большинстве случаев является незаконным, что закреплено в Федеральном законе «О защите конкуренции» от 26.07.2006 № 135.

Существует несколько способов анализа данных о картелях. Большинство авторов исследуют конкретные, раскрытые в прошлом картели [?]. В таких случаях анализу подвергаются только те аукционы и закупки, где участвовали фирмы из данного картеля. В литературе встречаются исследования, обобщающие подход на реальные выборки проведенных аукционов [?]. Используя материалы дел ФАС России для определения участников картелей, можно получить выборку аукционов с участием большинства раскрытых картелей. Такой подход однозначно обладает преимуществом, но с учетом большого количества нераскрытых картелей модель, обученная на таких данных, будет способна лишь предсказать решение самого ФАС России о возбуждении антимонопольного дела на том или ином аукционе.

Данное исследование ставит своей целью создание модели машинного обучения, способной определить подозрительные на наличие картельного сговора аукционы.

Аукционы с участием картелей, но нераскрытые антимонопольной службой, вероятно могут попасть в тренировочную выборку модели. Такие картельные аукционы могут быть ложно классифицированы как честные, что приведет к искажению предсказаний модели. Для работы с шумными данными подходят алгоритмы машинного обучения с частичным привлечением учителя. Одним из таких алгоритмов является *Confident learning* [?]. Суть метода заключается в построении модели на тренировочных данных и предсказании классов. Все наблюдения, непохожие на другие наблюдения из своего класса, вероятно будут иметь низкую предсказанную вероятность принадлежности к этому классу. Таким образом, можно исключить из тренировочной выборки наблюдения со спорной классификацией. На оставшейся выборке можно построить модель, способную точнее предсказать принадлежность спорных наблюдений к тому или иному классу. Таким образом, можно уменьшить шум в тренировочной выборке, что увеличит точность модели.

Для исследования были взяты тексты 500 антимонопольных дел, связанных с картельными сговорами на торгах. С официального сайта госзакупок были взяты данные о 15879 аукционах, включающие такие характеристики как начальную цену, снижение цены по итогам аукциона, количество ставок, длительность аукциона, количество участников, время на подписание контракта, разница во времени между подачей заявок участниками и коэффициент вариации снижения цены на предыдущих аукционах с участием тех же участников. В выборке оказалось 779 аукционов, среди участников которых присутствовали организации из материалов антимонопольных дел по картелям.

Использование *Confident learning* позволяет выявить 4.9 процентов картельных аукционов в тренировочной выборке, которые были отмечены как честные. Предсказание модели градиентного бустинга, построенного на исправленных данных показывает наличие большого количества ложноположительных случаев. Ложноположительный результат - такой аукцион, в котором модель предсказывает наличие картеля, но в изначальных тестовых данных информации о присутствии на нем картеля не было. Анализ подозрительных на сговор аукционов показывает, что среди них

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-71-00034).

высока доля аукционов с присутствием аффилированных между собой участников (29 процентов), что косвенно подтверждает наличие взаимосвязи между конкурентами в таких аукционах.

Список литературы

- [1] M. Huber, D. Imhof, Deep learning for detecting bid rigging: Flagging cartel participants based on convolutional neural networks. arXiv:2104.11142. – 2021
- [2] Г. О. Молчанова, А. И. Рей, Д. Ю. Шагаров, Обнаружение признаков горизонтального сговора при государственных закупках с использованием методов машинного обучения. *Экономическая наука современной России*, **1** (2020), 109–127.
- [3] C. Northcutt, L. Jiang, I. Chuang, Confident learning: Estimating uncertainty in dataset labels. *Journal of Artificial Intelligence Research*, (2021), 1373–1411.

Оценка Позы Человека Как Задача Классификации¹

Проничкин Ю.В., Кумсков М.И.
 МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
 uramur@mail.ru, mikhail.kumskov@math.msu.ru

Актуальность задачи

Ключевым шагом к пониманию людей на изображениях и видео является точная оценка позы. Учитывая одно изображение RGB, мы хотим определить точное расположение в пикселях важных ключевых точек тела. Достижение понимания позы человека и артикуляции конечностей полезно для задач более высокого уровня, таких как распознавание действий, а также служит фундаментальным инструментом в таких областях, как взаимодействие человека с компьютером и анимация.

В статье [1] был предложен метод оценивания результатов и прогресса в обучении спортсменов в женских видах спорта при выполнении ими упражнений на основе системы захвата движений (motioncapture), и построении модели «проволочного человечка» -Stickman-a, являющейся моделью позы гимнастки. Такая модель позволяет проводить сравнение позы ученицы относительно эталонной позы. Сравнивание производится попарно, по всем кадрам видеозаписи выполнения упражнения ученицы и видео наставника.

Существующие подходы к решению

Поза человека - набор из m пар координат (x_i, y_i) ключевых точек (например голова, кисти, плечи и т.д.) для каждого человека. Самый простой способ оценки позы - предсказывать эти координаты напрямую, т.е., имея на вход картинку, нейронная сеть должна выдавать для каждой опорной точки пару координат. С таким способом возникнут проблемы, как только на изображении окажется более двух человек, тем не менее есть способы, решающие эту проблему [2].

В более современных работах был предложен новый способ. Он заключается в следующем: нейронная пытается предсказывать "карту уверенности позы"(pose heatmap), которая позднее декодируется в сами координаты [3]. Для каждого изображения карта уверенности - тензор размера $H_0 \times W_0 \times C_0$, где H_0, W_0 разрешение карты, а C_0 - m , то есть количество узлов (joints, keypoints), каждый элемент тензора - уверенность в то, что в соответствующем пикселе изображения находится та или иная ключевая точка. Уверенность моделируется с помощью функции гаусса :

$$Y_{ij,xy} = \sum_{k=0}^n e^{-\frac{(x-x_{jk})^2+(y-y_{jk})^2}{2\sigma^2}}$$

Здесь x_{jk}, y_{jk} - известные узлы (joints) на предварительно размеченном изображении, суммирование происходит по всем таким узлам (если например на изображении несколько человек), σ - параметр, обычно его берут равным 1.5, j - номер узла (например голова, левая рука, правая рука и т.д.). k - номер человека на изображении. $Y_{ij,xy}$ - карта уверенности, где i ое изображение j ключевая точка.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621», Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект» и гранта РФФИ 19-07-00752.

Предлагаемый подход

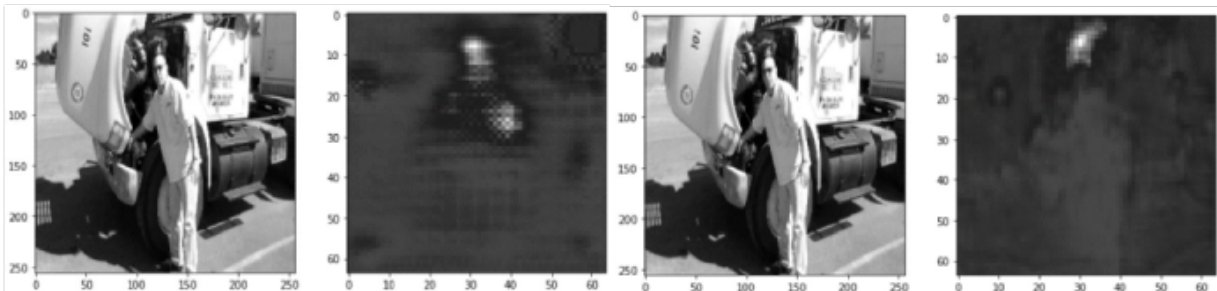
Во-первых, как и в задаче сегментации к целевому тензору добавляется канал, отвечающий за фон, т.е. такая матрица, элементы которой являются вероятностями отсутствия всех узлов. Во-вторых, меняется целевая карта уверенности - теперь это двухмерный тензор для каждого изображения, состоящий из меток классов соответствующих пикселей изображения. И самое главное, сама задача меняется на задачу многоклассовой классификации. В такой постановке выход нейронной сети для каждого пикселя карты уверенности - это набор $k + 1$ честной вероятности, а не уверенности:

$$Y_{i,j,xy} = \sum_k I[x = x_{jk}] I[y = y_{jk}] Y_{i(k+1),xy} = 1 - \sum_j \sum_l I[x = x_{jl}] I[y = y_{jl}]$$

Как и во многих моделях задачи обнаружения объектов, здесь возникает проблема - дисбаланс классов - фона намного больше, чем всего остального. Эту проблему можно также решать с помощью техники *hard negative mining* [4], что и было сделано в этой работе. Применение этой техники дало результат - на выходе начали появляться достаточно хорошие карты уверенности.

Дальнейшее изучение поведения карт уверенности привело к следующей идее - выбрать функцию потерь, которая бы сбалансировала потерю на фоне и на не фоне, т.е. чтобы эти значения были одного порядка.

На рисунке ниже показаны карты уверенности модели после 15 эпох обучения, справа в предлагаемой классификационной постановке, слева в существующей регрессионной



Список литературы

- [1] Б. Б. Мъамуров, М. И. Кумсков, Ю. В. Пронички, А. О. Ильясова, Конструирование позы человека по фотографии на основе нейронных сетей глубокого обучения. *Тезисы республиканской научно-практической конференции с международным участием «Инновационные технологии в спорте и физическом воспитании подрастающего поколения»* Бухара, 2019, 63–65
- [2] A. Toshev, C. Szegedy, DeepPose: Human Pose Estimation via Deep Neural Networks. arXiv:1312.4659v3 [cs.CV] 20 Aug 2014
- [3] S.-E. Wei, V. Ramakrishna, T. Kanade, Y. Sheikh. Convolutional Pose Machines. arXiv:1602.00134v4 [cs.CV] 12 Apr 2016
- [4] W. Liu, D. Anguelov, D. Erhan, C. Szegedy, “SSD: Single Shot MultiBox Detector”, arXiv:1512.02325v5 [cs.CV] 29 Dec 2016

Кластерный и дискриминантный анализ. Применение в задачах обработки данных в социологии.

Чистяков П.А.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
p.a.chistyakov@imm.uran.ru

Рассматривается применение методов кластерного и дискриминантного анализа в задаче обработки данных социологических опросов. Используются различные методы кластеризации данных, сравниваются и обсуждаются полученные результаты. В качестве рабочего ПО используется продукт IBM SPSS Statistics — ведущая программа для работы с социологическими данными.

Список литературы

- [1] М. С. Олдендерфер, Р. К. Блэшфилд, Кластерный анализ / Факторный, дискриминантный и кластерный анализ: пер. с англ.; Под. ред. И. С. Енюкова. М.: Финансы и статистика, 1989, 215 с.