Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский фонд фундаментальных исследований
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

**Международная школа**
**«Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»**
**KAZCAS-18**

**Международная научно-практическая конференция**
**«Информационные технологии в образовании и науке»**
**ИТОН-2018**

# Сборник материалов

(*28 октября – 3 ноября 2018 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2018

**УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.8**
**ББК 22.632**
**М43**

Печатается по решению организационного комитета международной школы «KAZCAS-2018»

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
***проф. Ю.Г. Игнатьева***

**М43** **Международная школа «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» – «KAZCAS-2018»** // Лекции и материалы школы / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Академия наук РТ, 2018. - 313 с.

**ISBN 978-5-9690-0466-5**

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физико-математических, информационно-технологических наук.

**The international school " Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in computer mathematics systems-KAZCAS-2018” //** Lectures and Proceedings of the school. Under the general edition of Yu.G. Ignat’ev. – Kazan: Academy of science of the Republic of Tatarstan Press, 2018. – 313 p.

The book of conference proceedings are intended for researchers, graduate students, undergraduates and senior students specializing in the field of physical and mathematical, information technology sciences.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – 18-31-10044\18.

**УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.8**
**ББК 22.632**

**ISBN 978-5-9690-0466-5**

# СОДЕРЖАНИЕ

## ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18»



## МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18» И КОНФЕРЕНЦИИ «ИТОН-2018»

**АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ**

# МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-18» И КОНФЕРЕНЦИИ «ИТОН-2018»

## References


1. Mityuk I. P. A generalized reduced module and some of its applications / I. P. Mityuk // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mathematics. – 1964. – №2. – P. 110-119.

2. Gakhov F. D. On the inverse boundary problems / F. D. Gakhov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1952. – №86(4). P. 649-652.

3. Kinder M. I. The number of solutions of F. D. Gakhov's equation in the case of a multiply connected domain / M. I. Kinder // Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). – 1984. – №28(8). – P. 91-95.

4. Kinder M. I. Canonical conformal mappings of multiply connected domains for inverse boundary value problems / M. I. Kinder // Dep. in VINITI. – 1983. – № 5871-83. – 52 p.

5. Kinder M. I. Exterior inverse boundary value problem in multiply connected regions and on Riemann surfaces / M. I. Kinder. – PhD in Mathematics, Kazan State University,1984. 146 p.

6. Nevanlinna R. Uniformisierung / R. Nevanlinna. – Springer-Verlag, Berlin, 1967. – 394 p.

7. Stoilov S. The theory of functions of a complex variable / S. Stoilov. – 1962. – Moscow, Vol.2. – 416 p.

8. Schiffer M. Some recent developments in the theory of conformal mappings. Appendix to the book: R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces. / M. Schiffer. – New York,1950. 330 p.

9. Elizarov A. M. Strict superharmonicity of Mityuk's function for countably connected domains of simple structure / A.M. Elizarov, A.V. Kazantsev, M.I.Kinder // Lobachevskii J. Math. – 2017. – №38(7). P. 408-413.

10. Kazantsev A.V. Sectio Aurea conditions for Mityuk's radius of two-connected domains / A.V. Kazantsev // Uchenye Zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie nauki. – 2017 – №159(1). – P. 33–46.

11. Kinder M. I. Investigation of F. D. Gakhov's equation in the case of multiply connected domains / M.I.Kinder // Trudy Sem. Kraev. Zadacham, Kazan University. – 1985. – №22. – P. 104–116.

12. Hurwitz A. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen / A. Hurwitz, R. Courant. – Berlin: Springer-Verlag, 1964. – 706 p.

13. Krasnosel'skii M. A. Plane Vector Fields / M. A. Krasnosel'skii, A.I. Perov, A.I.Povolockii, P.P.Zabreiko. – New York, Academic Press, 1966. – 242 p.

14. Sagitova S. B. Investigations of the inverse boundary value problems in multiply connected domains / Sagitova S. B. – PhD in Mathematics, Kazan State University, 1983. – 116 p.


УДК 519.85(023)+372.8:51

# МНОГОУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА СОРЕВНОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

М.И. Киндер[1]

1 *mkinder@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье разбираются исследовательские (многоуровневые) задачи, которые предлагались автором на математических олимпиадах школьников, а также на соревнованиях по спортивному программированию различного уровня. Обсуждаются связи и рекуррентные соотношения между классическими комбинаторными объектами, которые возникают при анализе и исследовании этих задач. Выделяются подзадачи и вопросы, относящиеся к «окрестности» проблемы; их решение представляет собой своеобразные уровни «погружения» в решение общей задачи. Некоторые из предлагаемых в статье задач были использованы на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш» (Казань, 2017 г.). Часть задач предлагалась на международных соревнованиях по спортивному программированию — Открытом Кубке имени Е.В. Панкратьева в 2015-2016 гг. и на кубке международной школы ISI (Junior) в июне 2018 г.*

**Ключевые слова**: олимпиады по математике, олимпиады по спортивному программированию, многоуровневые задачи, исследовательские задачи для школьников, комбинаторные объекты.

## 1. Введение

Новые образовательные стандарты обучения предполагают формирование культуры учебно-исследовательской и проектной деятельности школьника.

Как отмечается в известной книге [7], умение решать нестандартные (исследовательские, проблемные, поисковые, творческие и т.п.) задачи является одним из основных показателей уровня математического развития школьника, глубины освоения учебного материала.

При таком подходе ученик неизбежно сталкивается с необходимостью ставить вопросы и искать на них ответы, придумывать гипотезы, доказывать и опровергать их. Поэтому исследовательские задачи, по сути, являются органической частью обучения математике.

Хорошая задача для исследования содержит большой простор для продвижения, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются разнообразные методы. Кроме того, качество исследовательской задачи определяется наличием «подзадач» (уровней), которые шаг за шагом позволяют начинающему исследователю приблизиться к полному решению основной проблемы. Можно смело утверждать, что такие задачи развивают научный вкус и имеют в перспективе выходы на идеи и методы «большой» математики.

Технология применения исследовательских задач в обучении математике подробно описана, например, в книге [6].

В статье приведено несколько многоуровневых исследовательских проблем по комбинаторике и теории чисел. Почти все задачи по формулировкам и начальным этапам решения доступны младшеклассникам, однако полное решение, как правило, требует некоторой математической культуры. Определённо можно сказать, что это задачи «на вырост», к этим задачам полезно возвращаться несколько раз на разном уровне строгости и обобщения.

Некоторые из предлагаемых в статье задач были использованы на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш», которая проходила в Казани в ноябре 2017 года. Часть задач предлагалась на международных соревнованиях по спортивному программированию — Открытом Кубке имени Е.В. Панкратьева в 2015-2016 гг. и на кубке международной школы ISI (Junior) в июне 2018 г. Для их решения команда из трёх программистов должна была найти и реализовать эффективные алгоритмы, которые давали бы ответы на заранее подготовленные тесты за отведенное время. Успешное решение задачи помимо знания языков программирования предполагало математическую подготовку, знание алгоритмов и структур данных, а также слаженную командную работу в условиях дефицита времени.

### 2. Задача «Идеальные наборы гирь»

*На базарах города Новогиреевка все продавцы взвешивают товар с помощью наборов гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь составляет $n$ граммов. Такой набор называют идеальным, если любой груз с весом в целое число граммов от 1 до $n$ может быть уравновешен некоторым количеством гирь данного набора, и притом единственным образом. Груз всегда кладётся на левую чашку весов, гири — на правую. Два способа взвешивания, отличающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми. Например, для $n = 5$ таких наборов три:* $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$ *и* $(1, 2, 2)$.

*Ваша задача — найти все идеальные наборы, имеющие наименьшее количество гирь общим весом в $n$ граммов.*

**Решение.** В каждом идеальном наборе обязательно содержится по крайней мере одна гиря весом 1 грамм. (В противном случае груз весом в 1 грамм взвесить будет невозможно.) Ясно, что таких гирь может быть несколько, поэтому предположим, что в наборе содержится $q_1 - 1$ гирь весом 1 грамм, причём $q_1 > 1$. Тогда любой вес, меньший $q_1$, взвешивается единственным образом, и значит, $q_1$ будет следующей гирей. Таких гирь тоже может быть несколько; будем считать, что в наборе есть $q_2 - 1$ гирь весом $q_1$ граммов, причём $q_2 > 1$.

Теперь любой вес от 1 до $(q_1 - 1) + q_1(q_2 - 1) = q_1 \cdot q_2 - 1$ можно взвесить *единственным* образом с помощью гирь 1 и $q_1$ граммов, и значит, следующей в идеальном наборе будет гиря массой $q_1 \cdot q_2$ граммов. Продолжая рассуждения таким образом, приходим к идеальному набору вида

$$\{(q_1 - 1) \cdot 1, (q_2 - 1) \cdot q_1, (q_3 - 1) \cdot q_1 q_2, \ldots, (q_s - 1) \cdot q_1 q_2 \ldots q_{s-1}\}.$$

Суммарный вес гирь, входящих в идеальный набор, равен $n$, поэтому $n = (q_1 - 1) + (q_2 - 1)q_1 + (q_3 - 1)q_1 q_2 + \ldots + (q_s - 1)q_1 q_2 \ldots q_{s-1} = q_1 q_2 \ldots q_{s-1} q_s - 1$. Другими словами, неизвестные числа $q_1, q_2, \ldots, q_s$

удовлетворяют уравнению

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s = n+1,$$

из которого внимательный школьник может сделать важное заключение: *числа* $q_1, q_2, \ldots, q_s$ *являются делителями числа* $n+1$, *причем все* $q_i > 1$. Отсюда всего один, почти очевидный, шаг до красивой формулировки утверждения в общем виде.

**Теорема 1.** *Количество идеальных наборов общим весом в n граммов совпадает с количеством упорядоченных факторизаций числа* $n+1$ *без единичных множителей.*

Общее число гирь в идеальном наборе легко подсчитывается:

$$k = (q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \ldots + (q_s - 1).$$

Когда идеальный набор содержит наименьшее число гирь? Только в случае, когда все $q_i - 1$ — простые числа. Действительно, если $q_i = a \cdot b$ — составное, то соответствующее слагаемое в сумме равно $q_i - 1 = a \cdot b - 1 > (a-1)+(b-1)$, то есть $ab+1 > a+b$, и значит, количество гирь в этом наборе можно уменьшить. Таким образом, приходим еще к одному красивому утверждению [5].

**Теорема 2**. *Количество идеальных наборов минимальной длины равно количеству упорядоченных разложений числа* $n+1$ *на простые множители.*

Например, для $n+1 = 12$ имеем три упорядоченных разложения на простые множители:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Первому разложению соответствует идеальный набор $\{1, 2, 4, 4\}$ (то есть $2-1 = 1$ гиря в 1 грамм, $2-1 = 1$ гиря в 2 грамма и $3-1 = 2$ гири в $2 \cdot 2 = 4$ грамма). Двум другим разложениям соответствуют наборы гирь $\{1, 2, 2, 6\}$ и $\{1, 1, 3, 6\}$.

Реализация алгоритма решения задачи на олимпиаде по информатике состоит из двух шагов:

- *Разложение числа* $n+1$ *на простые множители.*
- *Подсчет количества и вывод идеальных наборов минимальной длины.*

Если простые множители в разложении числа $n+1$ повторяются, то есть $n+1 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$, приходим к стандартной задаче генерации в лексикографическом порядке наборов вида $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$. Для этого нужно сгененировать все перестановки сомножителей с повторениями. В общем случае, количество идеальных наборов для веса $n$ находится по формуле для полиномиальных коэффициентов

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_s)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}.$$

На этом математическая составляющая, кажется, исчерпала себя. Однако это не так, и задача допускает дальнейшее развитие и продолжение. Отметим несколько важных фактов и утверждений, связанных с идеальными наборами.

*Замечание* 1. Рассмотренная проблема относится к теории разбиений в перечислительной комбинаторике и впервые была решена в 1886 году английским математиком Мак-Магоном [11]. *Совершенным разбиением (perfect partition)* числа $n$ называется такое разбиение, в котором каждое натуральное число, не превосходящее $n$, можно единственным образом представить в виде суммы частей разбиения. Формула Мак-Магона для подсчёта количества совершенных разбиений $n$ выражается через количество упорядоченных факторизаций числа $n+1 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k C_i^k \prod_{t=1}^{s} C_{i+m_t-k-1}^{m_t}, \qquad m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s.$$

*Замечание* 2. В известной online-энциклопедии [12] целочисленных последовательностей количество упорядоченных факторизаций задаётся последовательностью A074206. В зависимости от количества простых множителей, входящих в разложение исходного числа, получаются различные формулы для подсчёта упорядоченных факторизаций. Многие авторы отмечали связи частных случаев этой формулы с различными теоретико-числовыми функциями (напр., [1], [10], [3], [4]).

*Замечание* 3. Последовательность A074206 богата различными рекуррентными соотношениями и тождествами, которые можно использовать для подсчёта чисел этой последовательности. Вывод и дальнейшее исследование простых рекуррентных формул для перечисления упорядоченных факторизаций без преувеличения доступны школьникам и студентам. Эти соотношения составляют различные *уровни* «погружения» в решение общей проблемы.

### 3. Задача «Красивые суммы»

*В городе Прекрасном состоялся конкурс красоты среди арифметических выражений, и первое место на этом конкурсе заняли красивые суммы. Красивыми суммами называют суммы нескольких подряд идущих положительных целых чисел. Например, суммы* $7+8$ *и* $4+5+6$ *— красивые, а сумма* $3+5+7$ *— некрасивая, хотя результат суммирования во всех случаях равен* 15. *(Сумма из одного слагаемого* 15 *тоже считается красивой.) Исходя из этого, красотой целого положительного числа будем называть количество представлений этого числа в виде красивых сумм. Например, красота числа* 15 *равна* 4, *поскольку* 15 *представляется в виде красивых сумм ровно четырьмя способами:* $15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5$.

*Из двух целых чисел более красивым считается то, у которого больше представлений в виде красивых сумм. При равенстве количеств таких представлений предпочтение в красоте отдаётся меньшему из них. Например,* 15 *— наименьшее целое число красоты* 4.

*Ваша задача — научиться для данного натурального числа* $n$ *находить наименьшее число красоты* $n$ $(1 \le n \le 10^5)$.

**Решение.** Красивое представление числа $B$ запишем в виде суммы

$$B = (m+1)+(m+2)+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(n-m)(n+m+1).$$

Сомножители $n-m$ и $n+m+1$ имеют разную чётность, ровно один из них нечётный. Значит, красивое разложение числа $B$ обязательно имеет нечётный множитель. И наоборот, каждому нечётному множителю соответствует разложение $B$ с нечётным множителем. Таким образом, справедлива

**Теорема 3**. *Количество красивых разложений числа B совпадает с количеством его нечётных делителей.*

Например, число 15 имеет четыре нечётных делителя 1, 3, 5 и 15, поэтому у него четыре красивых разложения.

Таким образом, исходную задачу можно переформулировать следующим образом: *найти наименьшее натуральное число B с заданным количеством нечётных делителей, равным n.* Так как $n$ не превосходит $10^5$, в разложение искомого числа $B$ могут входить не более 16 наименьших нечётных простых чисел: 3, 5, 7, 11 и так далее до 59. Осталось найти показатели, с которыми они входят в разложение $B$.

Пусть $B = 2^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ — разложение на простые множители, тогда количество его *нечётных* делителей равно

$$\tau_1(B) = (m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_s+1).$$

(Другими словами, отбрасываем делители, связанные со степенями двойки, и у полученного нечётного числа находим количество его делителей.) Поскольку красота числа $B$ равна $n$, отсюда следует, что увеличенные на единицу показатели, будут делителями $n$.

Таким образом, алгоритм решения задачи следующий.

- Находим все разложения числа $n$ на множители в *невозрастающем* порядке.
- Для каждого из них записываем соответствующее наименьшее нечётное $B_i$, имеющее в точности $n$ делителей.
- Среди полученных чисел $B_i$ выбираем наименьшее. Оно и будет равно $B$.

Например, число $n = 15$ имеет два разложения на множители в невозрастающем порядке: 15 и $5 \cdot 3$, которым соответствуют наименьшие нечётные числа $3^{14-1}$ и $3^{5-1} \cdot 5^{3-1}$. Наименьшим среди них будет второе. (Для сравнения чисел между собой необязательно вычислять каждое из них — можно сравнить логарифмы этих чисел.)

### 4. Задача «Наборы чисел с заданным значением НОК»

*Двоечник Петька был ленивым и часто прогуливал уроки. Теплым майским днём решил Петька вместо урока математики сходить на речку, через лес. Но не смог он добраться до речки — встретилась ему на пути Баба-Яга. Решила она проучить Петьку и не отпускать домой, пока не решит задачу по математике. По той самой теме, которую он прогулял. А задача была такая. Назвала Баба-Яга два натуральных числа* $m$ *и* $k$*. И нужно было Петьке найти количество упорядоченных наборов из* $k$ *натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно данному числу* $m$*. Например, для* $m = 10$ *и* $k = 2$ *существует* 9 *наборов из двух целых положительных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно* 10*:*

$$(1;10),\ (10;1),\ (2;10),\ (10;2),\ (5;10),\ (10;5),\ (10;10),\ (2;5),\ (5;2).$$

*И теперь вам нужно найти написать программу, которая позволит дать ответ на задачу и поможет Петьке вернуться домой.*

*Замечание* 4. «Легенда» задачи была составлена студентами КФУ, сама задача предлагалась автором на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по информатике в 2016 г.

**Решение.** Для малых значений $k$ и $m$ ($2 \le k \le 3$, $1 \le m \le 100$) все требуемые наборы компьютер может найти несложным перебором. Этот этап исследования задачи можно считать экспериментальным. Методом проб и ошибок юный исследователь определяет возможные закономерности и пытается отыскать связи комбинаторного характера.

Сначала попробуем решить более простую задачу при $k = 2$, то есть найдём количество упорядоченных пар натуральных чисел $a$ и $b$, для которых наименьшее общее кратное равно данному числу $m$.

Пусть пара чисел $a, b$ имеет наименьшее общее кратное, равное $n$. В этом случае каждое из чисел $a, b$ является делителем $n$. Поэтому если $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$ — разложение числа $n$ на простые множители, то должно быть:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad \text{и} \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s},$$

причём $0 \le \alpha_i \le n_i$, $0 \le \beta_i \le n_i$ ($i = 1, \dots, s$). Так как НОК$(a, b) = n$, то наибольшее среди чисел $\alpha_i$ и $\beta_i$ равно $n_i$ для каждого делителя $p_i$. Осталось подсчитать общее количество таких наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ общее количество упорядоченных пар $(\alpha_i, \beta_i)$, у которых каждое число неотрицательно и не превосходит $n_i$, равно $(n_i + 1)^2$. С другой стороны, все пары чисел $\alpha_i, \beta_i$, у которых наибольшее из них *меньше* $n_i$, удовлетворяют соотношениям $0 \le \alpha_i \le n_i - 1$ и $0 \le \beta_i \le n_i - 1$; число таких пар, очевидно, $n_i^2$. Значит, количество пар $(\alpha_i, \beta_i)$, удовлетворяющих условию $\max(\alpha_i, \beta_i) = n_i$, будет равно $(n_i + 1)^2 - n_i^2 = 2n_i + 1$. Перемножая эти числа для всех $i$ от 1 до $s$, находим требуемое число упорядоченных пар $a, b$, для которых наименьшее общее кратное равно $n$:

$$\prod_{i=1}^{s} (2n_i + 1) = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_s + 1).$$

Полученная формула подсчитывает также количество всех натуральных делителей числа $n^2 = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \dots p_s^{2n_s}$, включая 1 и $n^2$; это число обозначается через $\tau(n^2)$.

Например, количество упорядоченных пар $a, b$, для которых НОК$(a, b) = 100$, будет равно $\tau(100^2) = \tau(2^4 \cdot 5^4) = 25$. Если натуральное число $n$ не делится ни на один квадрат, кроме 1, общее количество упорядоченных пар $a, b$ с наименьшим общим кратным $n$ равно $3^s$. (Такие числа $n$ называются *свободными от квадратов* числами.)

*Замечание* 5. В энциклопедии [12] целочисленных последовательностей количества упорядоченных пар $a, b$ с заданным наименьшим общим кратным $n$ составляют последовательность A048691. Эта же последовательность подсчитывает количество упорядоченных пар взаимно простых чисел, которые являются делителями числа $n$.

*Замечание* 6. Количество различных *неупорядоченных* пар чисел $a, b$, для которых наименьшее общее кратное равно $n$, можно подсчитать по формуле [8]:

$$\frac{(2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_s + 1) + 1}{2} = \frac{\tau(n^2) + 1}{2}.$$

Действительно, в первом подсчёте две пары чисел, отличающиеся только порядком, считались различными. Поэтому каждая пара чисел с заданным наименьшим общим кратным $n$, кроме пары $a = b = n$, была сосчитана по два раза. Значит, число существенно различных пар $a, b$ равно

$$\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)\dots(2n_s+1)-1}{2}+1=\frac{\tau(n^2)+1}{2}.$$

В энциклопедии [12] количества *неупорядоченных* пар $a, b$ с заданным наименьшим общим кратным $n$ составляют последовательность A018892. Эта же последовательность подсчитывает количество упорядоченных пар $a, b$ взаимно простых чисел, каждое из которых является делителем $n$ и $a \le b$.

*Замечание* 7. Отметим еще несколько целочисленных последовательностей из энциклопедии [12], которые так или иначе связаны с наименьшим общим кратным или с наибольшим общим делителем:

*а*) A100565 — последовательность чисел, подсчитывающих количество упорядоченных троек $a, b, c$ попарно взаимно простых чисел, которые являются делителями заданного $n$ и которые образуют неубывающую последовательность $a \le b \le c$. (Также совпадает с количеством троек $a, b, c$, для которых $a \le b \le c$ и $[a, b] = [b, c] = [c, a] = n$.)

*б*) A247513, A247516, A247517 — последовательности чисел, подсчитывающих количества троек, четвёрок, пятёрок, у которых их наибольший общий делитель 1, а наименьшее общее кратное $n$.

*Замечание* 8. Количество *неупорядоченных* пар взаимно простых делителей числа $n > 1$ равно $\frac{1}{2}(\tau(n^2)-1)$. Это число равно также количеству способов записать $\frac{1}{n}$ в виде суммы двух *различных* дробей с числителем 1. ([12], A063647.)

Разберём задачу в общем случае. Пусть $m$ — наименьшее общее кратное всех чисел нашего набора, и пусть $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ — разложение $m$ на простые множители. Тогда условию задачи удовлетворяют все наборы чисел $m_i = p_1^{\alpha[i,1]} p_2^{\alpha[i,2]} \dots p_s^{\alpha[i,s]}$, $1 \le i \le k$, у которых неотрицательные показатели $\alpha[i, t]$ степеней простых чисел $p_t$ не превосходят $\alpha_t$ и для которых выполняются условия

$$\max(\alpha[1, t], \alpha[2, t], \dots, \alpha[k, t]) = \alpha_t,$$

для каждого $t$ от 1 до $s$. Подсчитаем число наборов по каждому показателю $\alpha$ отдельно. Количество наборов, которые удовлетворяют условиям $0 \le \alpha_i \le \alpha$ для всех $i$ от 1 до $k$, равно

$$(\alpha+1)^k - \alpha^k.$$

В самом деле, число $\alpha_i$ может принимать $\alpha+1$ значений — это все неотрицательные числа от 0 до $\alpha$, и по правилу произведения количество таких наборов равно $(\alpha+1)^k$. Исключим из этого множества наборы, для которых $\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) < \alpha$. Для таких наборов $0 \le \alpha_i \le \alpha - 1$ для всех $i$ от 1 до $k$, поэтому их количество равно $\alpha^k$. Значит, количество требуемых наборов равно $(\alpha+1)^k - \alpha^k$. Теперь по правилу произведения число наборов по всем показателям $\alpha_i$, $1 \le i \le s$, равно:

$$L[m, k] = \prod_{i=1}^{s} \left[(\alpha_i+1)^k - \alpha_i^k\right].$$

Например, для $m = 10 = 2^1 \cdot 5^1$ и $k = 2$ получаем

$$L(10, 2) = [(1+1)^2 - 1^2] \cdot [(1+1)^2 - 1^2] = 9$$

упорядоченных наборов из двух чисел, у которых НОК равен 10.

Алгоритмическая сложность такого решения — $O(Fact(m)+k)$, где $Fact(m)$ означает количество операций, необходимых для разложения числа $m$ на простые множители; как правило, это $O\sqrt{m})$.

Для чисел $k$ из диапазона $[1; 10^{18}]$ для быстрого вычисления $(\alpha+1)^k$ и $\alpha^k$ нужно использовать бинарный алгоритм возведения в степень. Алгоритмическая сложность такого решения — $O(Fact(m) + \log k)$.

*Замечание* 9. В «окрестность» разобранной задачи, безусловно, нужно отнести близкую к ней задачу определения упорядоченных наборов чисел с заданными значениями НОД и НОК ([9]). Последняя предлагалась также на соревнованиях по программированию среди студентов (Открытый Кубок имени Е.В. Панкратьева по программированию, 2016 г.). Мы приведём более простую формулировку этой задачи, которая была представлена школьникам на 1-ой международной проектной математической олимпиаде «Ачалыш» (Казань, 2017 г.).

*Вам приходилось когда-нибудь вычислять наибольший общий делитель нескольких чисел? А наименьшее общее кратное? Ну, конечно, да...А приходилось ли вам находить сами числа по известным значениям их наибольшего* *общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК)? Ну, или хотя бы определять, сколько таких наборов имеют заданные НОД и НОК? Наверное, нет…*

*Итак, вам необходимо подсчитать количество упорядоченных наборов из $k$ целых положительных чисел, у которых наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное равны данным числам $D$ и $M$ соответственно. Например, при $k = 2$, $D = 2$, $M = 12$ таких упорядоченных наборов четыре:* $(2, 12)$, $(12, 2)$, $(4, 6)$ *и* $(6, 4)$. *Вам необходимо*

*а) подсчитать количество упорядоченных пар натуральных чисел, у которых НОД равен $D = 10$, а НОК равен $M = 1000$;*

*б) доказать, что количество упорядоченных пар натуральных чисел с заданными НОД и НОК всегда является степенью двойки;*

*в) подсчитать количество упорядоченных троек натуральных чисел, у которых НОД равен $D = 10$, а НОК равен $M = 1000$.*

*Замечание* 10. До сих пор не решена комбинаторная задача перечисления *неупорядоченных* наборов натуральных чисел с заданным значением их НОК или с заданными значениями НОД и НОК.

## 5. Заключение

Как отмечалось в [2], создание качественных олимпиадных задач по математике и информатике является сложным и трудоёмким процессом. Большинство задач, которые предлагаются на таких интеллектуальных соревнованиях, представляют собой многоуровневые исследовательские проблемы. В статье представлено несколько таких задач, а также обсуждаются связи с другими близкими вопросами комбинаторного характера. Полное решение некоторых задач неизвестно до сих пор и ждёт своего исследователя.

## Литература


1. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная Комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон. – М.:Наука, 1990. – 504 с.

2. Киндер М.И. Классические комбинаторные объекты на соревнованиях по программированию / М.И. Киндер // Информационные технологии в образовании и науке – ИТОН 2016: материалы международной научно-практической конференции. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2016. – С. 46–52.

3. Киндер М.И. О совершенных разбиениях натуральных чисел / М.И. Киндер // Современные проблемы науки и образования. – 2012. - № 5.

4. Киндер М.И. Об идеальных и совершенных разбиениях натуральных чисел / М.И. Киндер // Современные проблемы науки и образования. – 2012. -– № 6.

5. Кнут Д. Искусство программирования. Том 4, вып. 3: генерация всех сочетаний и разбиений. / Д. Кнут. – М.: ООО «Вильямс», 2007. – 208 с.

6. Сгибнев А.И. Исследовательские задачи для начинающих / А.И. Сгибнев. – М.:МЦНМО, 2015. – 136 с.

7. Фридман Д.М. Как научиться решать задачи / Д.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.:Просвещение, 1989. – 192 с.

8. Яглом А. Неэлементарные задачи в элементарном изложении / А. Яглом, И.Яглом. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 544 с.

9. Bagdasar O. On some functions involving the lcm and gcd of integer tuples / O. Bagdasar // Appl. Math. Inform. and Mech., ser. A2 – 2014. – Vol.6. – P. 91-100.

10. Chor B., Lemke P., Mador Z. On the number of ordered factorizations of natural numbers / B. Chor, P. Lemke, Z.Mador // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol.214. – P.123-133.

11. MacMahon P.A. Certain special partitions of numbers / P.A. MacMahon // Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. – 1886. – Vol.21. – P. 367-373.

12. oeis.org – on-line энциклопедия целочисленных последовательностей. – Режим доступа: http://oeis.org.


MULTILEVEL TASKS IN MATHEMATICS AND INFORMATICS OLYMPIADS

M.I. Kinder

*This study explores the use of multi-level tasks which include questions of the enumeration of combinatorial configurations, algorithms and their construction, as well as the solution of some problems, closely related to mathematics and informatics olympaids.*

Keywords: mathematical olympiads, programming contests, informatics olympiads, multilevel tasks in mathematics, multilevel tasks in informatics contests, combinatorial tasks.