

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

*Кафедра вычислительной физики и моделирования физических
процессов*

Р.М. ХУСНУТДИНОВ, А.В. МОКШИН

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань – 2021

УДК 537.8

ББК 22.313

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИФ

Протокол № 6 от 9 апреля 2021 года

Рецензенты:

доктор физико-математических наук

ИФВД РАН, г. Москва, г. Троицк **Ю.Д. Фомин;**

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры информационных систем КФУ, г. Казань **Ф.М. Гафаров**

Хуснутдинов Р.М.

Электричество и магнетизм: учебно-методическое пособие / Р.М.

Хуснутдинов, А.В. Мокшин. – Казань: Казан. ун-т, 2021. – 43 с.

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу “Электричество и магнетизм”, основные положения и формулы, необходимые для решения задач. Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

©Хуснутдинов Р.М., 2021

©Казанский университет, 2021

Оглавление

Предисловие	4
§1. Элементы векторной алгебры	5
§2. Электростатика	9
§2.1 Закон Кулона	11
§2.2 Теорема Гаусса	14
§2.3 Уравнения Лапласа и Пуассона	16
§2.4 Конденсаторы (Емкостные коэффициенты). Теорема взаимности Грина	17
§2.5 Энергия электростатического поля	18
§3. Магнитостатика	20
§3.1 Закон Био-Савара-Лапласа	21
§3.2 Энергия магнитного поля	24
§4. Явление электромагнитной индукции	25
§5. Переменное электромагнитное поле	28
§6. Релятивистская формулировка электродинамики	31
Ответы и указания	34
Приложение	41
Литература	43

Предисловие

Решение физических задач является необходимой практической основой изучения дисциплины “Электричество и магнетизм”. Основной целью практических занятий является выработка у студентов приемов и навыков решения задач из разных разделов электродинамики. Практические занятия несут в себе функцию закрепления, развития и углубленного освоения основных положений теории. Решение задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе. При решении задач студент должен самостоятельно осуществлять ряд мыслительных операций, опираясь на имеющиеся у него знания и умения. Практические занятия позволяют проверить степень усвоения студентами основных разделов теоретического курса.

В данном учебном пособии рассмотрены основные разделы курса “Электричество и магнетизм”, такие как: элементы векторной алгебры, электростатика и магнитостатика, явление электромагнитной индукции, переменное электромагнитное поле, релятивистская формулировка электродинамики. Каждый раздел включает необходимые теоретические сведения, основные понятия и определения, представлены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

§1. Элементы векторной алгебры

1. *Градиентом скалярного поля* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$ называется вектор (направление наискорейшего роста \mathcal{V}):

$$\mathit{grad}\mathcal{V} = \nabla\mathcal{V} = \vec{e}_x \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}.$$

Свойства градиента

1° $\nabla C = 0, \quad C = \mathit{const};$

2° $\nabla(\alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V}) = \alpha\nabla\mathcal{U} + \beta\nabla\mathcal{V}, \quad \alpha, \beta = \mathit{const}.$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z), \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z);$

3° $\nabla(\mathcal{U}\mathcal{V}) = \mathcal{U}\nabla\mathcal{V} + \mathcal{V}\nabla\mathcal{U};$

4° $\nabla\left(\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}}\right) = \frac{\mathcal{V}\nabla\mathcal{U} - \mathcal{U}\nabla\mathcal{V}}{\mathcal{V}^2};$

5° $\nabla Q(\mathcal{V}) = \frac{\partial Q}{\partial \mathcal{V}} \nabla\mathcal{V}.$

2. *Напряженность* (\vec{E}) и потенциал (φ) электростатического поля связаны соотношением:

$$\vec{E} = -\mathit{grad}\varphi = -\nabla\varphi.$$

3. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, y, z), \mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, y, z), \mathcal{R} = \mathcal{R}(x, y, z)$ – непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка функции. *Потоком* векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ через поверхность \mathcal{S} называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \int \int_{\mathcal{S}} (\vec{\mathcal{F}}, \vec{n}) d\mathcal{S} = \int \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P} dydz + \mathcal{Q} dx dz + \mathcal{R} dx dy.$$

4. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ называется скаляр

$$\mathit{div}\vec{\mathcal{F}} = (\nabla, \vec{\mathcal{F}}) = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}.$$

Здесь скобками (\dots) – обозначено скалярное произведение векторов. Дивергенция $\mathit{div}\vec{\mathcal{F}}(M)$ как плотность потока в точке M определяет

силу источника (при $\operatorname{div}\vec{\mathcal{F}}(M) > 0$) или стока (при $\operatorname{div}\vec{\mathcal{F}}(M) < 0$) в точке M .

Свойства дивергенции

$$1^\circ \operatorname{div}\vec{\mathcal{C}} = 0, \quad \vec{\mathcal{C}} = \text{const};$$

$$2^\circ \operatorname{div}(\alpha\vec{\mathcal{A}} + \beta\vec{\mathcal{B}}) = \alpha\operatorname{div}\vec{\mathcal{A}} + \beta\operatorname{div}\vec{\mathcal{B}}, \quad \alpha, \beta = \text{const};$$

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x\vec{e}_x + \mathcal{A}_y\vec{e}_y + \mathcal{A}_z\vec{e}_z, \quad \vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_x\vec{e}_x + \mathcal{B}_y\vec{e}_y + \mathcal{B}_z\vec{e}_z;$$

$$3^\circ \operatorname{div}(\mathcal{U}\vec{\mathcal{A}}) = \mathcal{U}\operatorname{div}\vec{\mathcal{A}} + (\nabla\mathcal{U}, \vec{\mathcal{A}}), \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z).$$

5. Если контур \mathcal{L} замкнутый, то линейный интеграл

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{\mathcal{F}}, d\vec{r}) = \oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy + \mathcal{R}dz$$

называется *циркуляцией* векторного поля вдоль контура \mathcal{L} .

6. *Вихрем (ротором)* векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{\mathcal{F}} = [\nabla, \vec{\mathcal{F}}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{R} \end{vmatrix}.$$

Здесь скобками $[\dots]$ – обозначено векторное произведение векторов. Если для всех точек поля ротор равен нулю, то такое поле называется *потенциальным (безвихревым)*. В потенциальном поле циркуляция всегда равна нулю.

Свойства ротора

$$1^\circ \operatorname{rot}\vec{\mathcal{C}} = 0, \quad \vec{\mathcal{C}} = \text{const};$$

$$2^\circ \operatorname{rot}(\alpha\vec{\mathcal{A}} + \beta\vec{\mathcal{B}}) = \alpha\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}} + \beta\operatorname{rot}\vec{\mathcal{B}}, \quad \alpha, \beta = \text{const};$$

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x\vec{e}_x + \mathcal{A}_y\vec{e}_y + \mathcal{A}_z\vec{e}_z, \quad \vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_x\vec{e}_x + \mathcal{B}_y\vec{e}_y + \mathcal{B}_z\vec{e}_z;$$

$$3^\circ \operatorname{rot}(\mathcal{U}\vec{\mathcal{A}}) = \mathcal{U}\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}} + [\nabla\mathcal{U}, \vec{\mathcal{A}}], \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z).$$

Задачи

1. Вычислить градиент скалярного поля:

- $\nabla r = ? \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$
- $\nabla r^n = ?$
- $\nabla \left(\frac{1}{r^n} \right) = ?$
- $\nabla(\vec{c}, \vec{r}) = ? \quad \vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z;$
- $\nabla Q(M) = ? \quad Q = 3x^2 + 2xyz + 5yz, \quad M(1, 1, 1);$
- $\nabla Q(M) = ? \quad Q = \sqrt{4 + x^2 + y^2}, \quad M(2, 1);$
- $\nabla Q(M) = ? \quad Q = 5x + 2y + 3z^2 + 2zy, \quad M(1, 1, 1);$
- $\nabla(\vec{c}, \vec{a}(r)) = ?$

2. Найти градиент скалярного поля $Q = x^2 + y^2 - z^2$ и его модуль в точке $M(1; -1; 2)$.

3. Найти градиент скалярной функции

- $\varphi = (\vec{k}, \vec{r}) \ln(br), \quad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z, \quad b = const;$
- $\varphi = \frac{(\vec{k}, \vec{r})^3}{r^2}, \quad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z;$
- $\varphi = [\vec{k}, \vec{r}]^2, \quad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z;$
- $\varphi = \frac{e^{2r-1}}{3} r^a, \quad a = const;$
- $\varphi = \frac{a^{-5r} + 2}{r}, \quad a = const.$

4. Вычислить напряженность поля, заданного потенциалом:

- $\varphi = \sin(\vec{k}, \vec{r}), \quad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z;$
- $\varphi = (\vec{\alpha}, \vec{r}) \cos(\vec{k}, \vec{r}), \quad \vec{\alpha}, \vec{k} = const;$
- $\varphi = \frac{8x + 9y + 2z}{r}$ в точке $M(1, 1, 1);$
- $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{\alpha/r-1}}{r}.$

5. Вычислить напряженность поля, создаваемое диполем. *Указание:* потенциал поля диполя равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3}$.

6. Вычислить дивергенцию векторного поля $\operatorname{div} \vec{A} = ?$

- $\vec{A} = \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z;$
- $\vec{A} = r^2\vec{c}, \quad \vec{c} = \text{const};$
- $\vec{A} = \alpha\vec{r}, \quad \alpha = \text{const};$
- $\vec{A} = r^4\vec{r};$
- $\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3};$
- $\vec{A} = e^{-\alpha/r}\vec{r}, \quad \alpha = \text{const}.$

7. Вычислить дивергенцию векторного поля \vec{A} в точке M :

- $\vec{A} = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z, \quad M(1, 2, 3);$
- $\vec{A} = x(y + z^2)\vec{e}_x + (y + 2xy^3)z\vec{e}_y + \sqrt{zx}\vec{e}_z, \quad M(1, 1, 1);$
- $\vec{A} = \frac{yz}{\sqrt{z + x^2}}\vec{e}_x + yx\vec{e}_y + \ln(3z)\vec{e}_z, \quad M(1, 0, 2e);$
- $\vec{A} = 2\sqrt{2yz-x}\vec{e}_x - 5yz\vec{e}_y + (7z - xy)\vec{e}_z, \quad M(1, -1, 2).$

8. Вычислить ротор векторного поля $\operatorname{rot} \vec{A} = ?$

- $\vec{A} = \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z;$
- $\vec{A} = r^2\vec{c}, \quad \vec{c} = \text{const};$
- $\vec{A} = \alpha\vec{r}, \quad \alpha = \text{const};$
- $\vec{A} = r^4\vec{r};$
- $\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3};$
- $\vec{A} = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z;$
- $\vec{A} = x(y + z^2)\vec{e}_x + (y + 2xy^3)z\vec{e}_y + \sqrt{zx}\vec{e}_z.$

9. Записать в скалярной форме уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

§2. Электростатика

1. Основные уравнения *постоянного электрического поля* в вакууме имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0.$$

2. *Линейная плотность электрического заряда* – предел отношения электрического заряда, находящегося в элементе линии, к длине этого элемента линии, который содержит данный заряд, когда длина этого элемента стремится к нулю.

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow \infty} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}.$$

3. *Поверхностная плотность электрического заряда* – предел, к которому стремится отношение электрического заряда к площади, на которой этот заряд расположен, при условии, что площадь стремится к нулю.

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}.$$

4. *Объемная плотность электрического заряда* – предел, к которому стремится отношение электрического заряда к объему, в котором этот заряд расположен, при условии, что объем стремится к нулю.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

5. *Закон Кулона*. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

6. *Теорема Гаусса*: Поток вектора электрического смещения \vec{D} через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = Q.$$

7. Уравнение Лапласа и Пуассона:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0,$$

где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– в декартовой системе координат;

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– в цилиндрической системе координат;

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

– в сферической системе координат.

8. Электрическая емкость конденсатора:

$$C = Q/U.$$

Шаровой конденсатор:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{(R_2 - R_1)} R_1 R_2.$$

Цилиндрический конденсатор:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Плоский конденсатор:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

9. Энергия электростатического поля в вакууме определяется по одной из следующих формул:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma\varphi dS,$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{D}, \vec{E}) dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E^2 dV.$$

Задачи (Закон Кулона)

1. Положительный точечный заряд 50 мкКл находится в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. Найти напряженность электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$.
2. Тонкий стержень ab длиной 100 см имеет заряд 37 нКл , распределенный так, что его линейная плотность пропорциональна квадрату расстояния от конца a . Найти напряженность электростатического поля в точке b .
3. Заряд распределен с линейной плотностью заряда τ на стержне длиной L вдоль радиус-вектора, начинающегося в точке нахождения точечного заряда q . Расстояние от заряда q до ближайшей точки стержня равна R . Найти силу, действующую на точечный заряд.
4. Определить силу взаимодействия между двумя равномерно заряженными отрезками длины L , находящихся на одной прямой на расстоянии R друг от друга. Заряды распределены равномерно на каждом отрезке с линейной плотностью заряда τ .
5. Поле создается в вакууме равномерно заряженной окружностью радиуса a , заряд ее q . Вычислить напряженность поля на оси окружности в точке, находящейся на расстоянии Z от окружности.
6. Вычислить напряженность поля бесконечно длинной прямой нити с линейной плотностью заряда τ в точке на расстоянии R от нити.
7. Определить напряженность поля отрезка, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ , в точке, удаленной от отрезка на расстоянии R , концы отрезка видны из точки под углами α_1 и α_2 .
8. Полуокружность с радиусом $R = 2 \text{ м}$ заряжена зарядом $q = 10^{-9} \text{ Кл}$. Определить напряженность электростатического поля, созданного этим зарядом в геометрическом центре полуокружности.

9. Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная с плотностью $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, и отрезок длины $l = 20$ см, равномерно заряженный с плотностью $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг к другу на расстоянии $R = 0.1$ м. Определить силу взаимодействия между ними.
10. Вычислить напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ .
11. Вычислить напряженность поля на высоте h от поверхности равномерно заряженного диска в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его центр. Поверхностная плотность заряда σ , радиус диска a .
12. Заряд q равномерно распределен по поверхности шарового сегмента радиуса R , видимого из центра кривизны под углом 2α . Определить напряженность в центре кривизны сегмента.
13. Вычислить потенциал электрического поля на оси равномерно заряженного диска с радиусом a с поверхностной плотностью заряда σ . Расстояние от плоскости диска до точки – h .
14. Вычислить потенциал сферы радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ .
15. Вычислить напряженность шара радиуса R с объемной плотностью заряда ρ .
16. Вычислить напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной согнутой нитью с линейной плотностью заряда τ , на биссектрисе угла на расстоянии R от нити. Нить согнута: а) под прямым углом; б) под углом 60° .
17. Точечный заряд q находится на расстоянии a от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность наведенных на проводнике зарядов.

18. Определить силу, с которой точечный заряд q притягивается к бесконечной проводящей поверхности.

Задачи (Теорема Гаусса)

1. Используя теорему Гаусса, вычислить напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда τ на расстоянии r от нити.
2. Определить напряженность бесконечного цилиндра, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ . Радиус цилиндра R .
3. Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность радиусом R равномерно заряжена электрическим зарядом с поверхностной плотностью σ . Определить напряженность электрического поля внутри поверхности и снаружи.
4. Определить напряженность шара, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ . Радиус шара R .
5. Сферическая поверхность радиусом R равномерно заряжена электрическим зарядом Q . Определить напряженность электрического поля внутри сферы и снаружи.
6. Определить напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной тонкой плоской поверхностью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ .
7. Плоский бесконечный слой толщиной h равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда ρ . Определить зависимость напряженности электрического поля от расстояния x до среднего сечения слоя.
8. Две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заряжены равномерно зарядами Q_1 и Q_2 . Определить напряженность электрического поля на расстоянии r от центра системы, если: а) $r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$.
9. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи шара, объемная плотность заряда которого меняется по закону $\rho = \alpha r^n$. Радиус шара R .

10. Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. Найти поле (потенциал) в любой точке пространства.

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} r \cos \theta, & r < R \\ \frac{\sigma R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos \theta, & r > R. \end{cases}$$

11. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью заряда $\rho = \rho_0 \cos \theta$. Найти поле в любой точке пространства.

12. Круглый диск радиуса a равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ . В какой точке на оси диска напряженность поля равна $\pi\sigma$?

13. Вычислить энергию равномерно заряженного по объему диэлектрического шара радиуса a . Диэлектрическая проницаемость шара ε . Заряд шара q . Окружающая среда вакуум.

14. Потенциал электростатического поля в вакууме

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{a}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right), & r < R_0 \\ -a \ln \frac{R_0}{r}, & r > R_0, \end{cases}$$

где R_0 и a – постоянные. r – расстояние от оси. Определить распределение зарядов.

15. Вычислить поток электрического поля через поверхность сферы радиусом r , если напряженность поля в системе с началом координат в центре сферы выражается формулой $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

Задачи (Уравнения Лапласа и Пуассона)

1. Вывести уравнение Пуассона, используя уравнение Максвелла и формулу, связывающую напряженность и потенциал стационарного электрического поля.
2. Рассчитать поле между двумя находящимися в однородной среде бесконечными параллельными пластинами a и b , имеющими потенциалы $\varphi_a = 0$ и $\varphi_b = \varphi_0$. Расстояние между пластинами d .
3. Вычислить потенциал электростатического поля, создаваемого шаром радиуса R , по объему которого равномерно распределен заряд Q .
4. Определите потенциал, создаваемый бесконечной однородно-заряженной пластинкой с толщиной a и объемной плотностью заряда ρ .
5. Вычислите потенциал и напряженность электростатического поля, создаваемого бесконечным однородно-заряженным цилиндром с объемной плотностью заряда ρ и радиусом a .
6. Потенциал электростатического поля в вакууме

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < 0 \\ -\alpha x, & x > 0. \end{cases}$$

Определить распределение зарядов, которыми создается это поле.

7. Напряженность поля имеет вид $E = \frac{Ae^{-kr}}{r^2}$. Найти плотность заряда.
8. Найти потенциал, создаваемый электронным облаком в основном состоянии атома водорода с плотностью заряда

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp(-2r/a).$$

9. Решая уравнение Лапласа, найти потенциал поля равномерно заряженной цилиндрической поверхности. Поверхностный заряд σ , радиус цилиндра a .

10. Найти распределение зарядов, создающих потенциал Юкавы $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \exp(-r/a)$.
11. Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 , разность потенциалов между которыми равна U .
12. В основном состоянии атома водорода заряд электрона ($-e$) распределен с объемной плотностью $\rho = (-e/\pi a^3) \exp(-2r/a)$, где a – борровский радиус, r – расстояние до центра атома. Вычислить классические значения: а) потенциала; б) напряженности поля внутри атома; в) энергии взаимодействия между ядром и электронным облаком.
13. Найти потенциал электрического поля бесконечного цилиндра с зарядом τ на каждую единицу длины. Заряд распределен равномерно по объему цилиндра.
14. Рассчитать собственную электрическую энергию заряженного шара радиуса R , если заряд Q равномерно распределен а) по поверхности шара; б) по объему шара.

Задачи (Конденсаторы. Емкостные коэффициенты)

1. Проводящая сфера радиуса a окружена концентрическим слоем диэлектрика радиуса b . Найти емкость сферы, если проницаемость диэлектрика ϵ .
2. Получить выражение для емкости сферического конденсатора. Радиус внутренней сферы R_1 , радиус внешней R_2 . Полость между сферами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ .
3. Получить выражение для емкости плоского конденсатора. Площадь обкладок S . Расстояние между обкладками d . Полость между обкладками конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ .

4. Получить выражение для емкости сферического конденсатора. Радиус внутренней сферы R_1 , радиус внешней R_2 . Полость между сферами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (решить, используя теорему Гаусса).
5. Получить выражение для емкости цилиндрического конденсатора. Радиус внутреннего цилиндра a , радиус внешней b . Высота цилиндров h . Полость между цилиндрами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (решить, используя теорему Гаусса).
6. Вычислить емкость цилиндрического конденсатора. Длина его l , радиусы обкладок R_1 и R_2 . Между обкладками два коаксиальных слоя однородных диэлектриков с проницаемостью ε_1 и ε_2 , граница раздела между ними – цилиндрическая поверхность радиуса R_0 . Краевыми эффектами пренебречь.
7. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя диэлектриками. Диэлектрическая проницаемость первого слоя ε_1 , второго – ε_2 , а их толщины соответственно d_1 и d_2 , причем $d_1 + d_2 = d$ – толщина конденсатора. Площадь каждой обкладки S . Найти емкость конденсатора.
8. Пространство между обкладками сферического конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Радиусы обкладок a и b . Радиус поверхности раздела диэлектриков h . Определить емкость конденсатора.
9. В цилиндрическом конденсаторе радиусы внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2 . Диэлектрическая проницаемость всех непроводников ε . Длина конденсатора l , заряд внутренней обкладки q . Пренебрегая влиянием краевых эффектов, найти напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Определить емкость конденсатора.

Задачи (Энергия электростатического поля)

1. По объему шара (радиуса a) равномерно распределен заряд Q . Определить собственную энергию электростатического поля, возбуждаемого шаром.
2. Считая, что заряды протонов равномерно распределены по объему ядра, представляющего шар радиуса R , подсчитать энергию электростатического взаимодействия протонов в ядре атома с порядковым номером Z .
3. Вычислить энергию и емкость сферического конденсатора.
4. Для системы двух бесконечно длинных и параллельных цилиндрических проводников (произвольного сечения), имеющих заряды $\pm Q$, известен потенциал $\varphi(x, y)$, который на поверхностях проводников принимает постоянные значения φ_1 и φ_2 и всюду в пространстве между ними удовлетворяет уравнению Лапласа. Какова взаимная емкость (на единицу длины) указанной системы проводников?
5. Сфера радиусом a равномерно заряжена зарядом Q . Определить объемную плотность энергии и энергию электростатического поля, создаваемого сферой.
6. Сплошной цилиндр радиусом R и высотой h равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ . Определить объемную плотность энергии и энергию электростатического поля, создаваемого цилиндром.
7. Точечный заряд q находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика с проницаемостью ε . Внутренний и наружный радиусы слоя равны соответственно a и b . Найти электрическую энергию, заключенную в данном диэлектрическом слое.
8. Найти энергию электрического поля точечного заряда q в пустом полупространстве, которое ограничено плоскостью, отстоящей на расстоянии a от заряда.

§3. Магнитостатика

1. Уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля в вакууме имеют вид:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

2. Закон Био-Савара-Лапласа. Индукция магнитного поля, возбуждаемого элементом линейного тока $I d\vec{l}$, определяется как

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

3. Закон Эрстеда: Циркуляция вектора напряженности магнитного поля определяется алгебраической суммой токов, пронизывающих площадку S , натянутую на контур интегрирования L .

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S j_n dS.$$

4. Энергия магнитного поля, возбуждаемого постоянным током I (или плотностью тока j), определяется как

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A}, \vec{j}) dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{H}, \vec{B}) dV.$$

Задачи (Закон Био-Савара-Лапласа)

1. Вычислить индукцию магнитного поля, возбуждаемого бесконечным прямым током, на расстоянии r от его оси.
2. Ток 20 А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под углом в $\alpha = 60^\circ$. Определить индукцию магнитного поля \vec{B} в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от его вершины.
3. Линейный ток I циркулирует по окружности радиуса a . Вычислить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости тока на расстоянии x от центра окружности.
4. Определить магнитное поле отрезка, по которому течет ток I , в точке A , которая находится на расстоянии R от отрезка. Концы отрезка видны под углами α_1 и α_2 .
5. Вычислить индукцию магнитного поля в центре тяжести равностороннего треугольника, по сторонам которой течет ток I .
6. Вычислить индукцию магнитного поля в центре квадрата со сторонами a , по которым течет ток I .
7. Вывести выражение для индукции магнитного поля кругового тока.
8. Ток I течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R . Найти индукцию \vec{B} в центре этого контура.
9. Вывести выражение для напряженности магнитного поля прямоугольного контура со сторонами a и b , по которым течет ток I .
10. По сплошному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток с плотностью j . Найти напряженность магнитного поля внутри и вне проводника как функцию расстояния r от оси.
11. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи $I_1 = 60\text{ А}$ и $I_2 = 30\text{ А}$, расположены на

расстоянии $d = 10$ см друг от друга в воздухе. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точках:

- A_1 , расположенной между проводниками с током на расстоянии $d/2$ от каждого из них;
- A_2 , расположенной на расстоянии $d/2$ от проводника с током I_1 и на расстоянии $3d/2$ от проводника с током I_2 .

12. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут под углом $\alpha = 2\pi/3$ и находится в воздухе. Определить магнитную индукцию в точке A_1 , находящейся на продолжении одной из сторон угла на расстоянии $d = 5$ см от его вершины, и в точке A_2 , находящейся на биссектрисе угла на расстоянии $d = 5$ см от его вершины.
13. На сколько отличается напряженность магнитного поля, созданного круглой петлей длиной $L = 628$ см в центре петли и прямым проводником той же длины в точке, равноудаленной от концов проводника, на расстоянии, равном радиусу петли, если они находятся в воздухе. По петле и проводнику проходит одинаковый ток, равный 50 А.
14. По проводнику, согнутому в виде кольца, находящегося в воздухе, радиусом 1 м, течет ток 1 А. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра, на расстоянии 200 см от центра кольца.
15. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности $H = 20$ А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить напряженность магнитного поля в точке пересечения диагоналей квадрата.
16. Два одинаковых витка радиусом 0.5 м расположены вертикально и горизонтально так, что их центры совпадают. По ним протекают токи 5

A и 10 A соответственно. Определить величину и направление к вертикали результирующего вектора напряженности магнитного поля в центре витков. Магнитное поле Земли не учитывать.

17. Определить магнитное поле в центре шара радиуса R , равномерно покрытого очень большим числом N параллельных витков, толщина которых τ такова, что $N\tau = 2R$.

Задачи (Энергия магнитного поля)

1. Ток I течет вдоль коаксиального кабеля длиной l . Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно a и b . Определить энергию магнитного поля, создаваемого данным проводником с током.
2. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a . Найти самоиндукцию L на единицу длины.
3. Найти самоиндукцию L единицы длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной формой сечения. Площадь сечения S , число витков на единицу длины n .
4. Вычислить индуктивность кабеля длиной l . Радиусы жилы и оболочки, соответственно, равны a и b .
5. Постоянный ток I течет по цилиндрическому проводу длиной l и радиусом R . Определить объемную плотность энергии и энергию магнитного поля, создаваемого данным проводником с током.

§4. Явление электромагнитной индукции

1. *Закон электромагнитной индукции.* Циркуляция напряженности для вихревой составляющей электрического поля носит название *электродвижущей силы индукции*.

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Используя вторую группу уравнений Максвелла в интегральной форме, получим *закон электромагнитной индукции Фарадея*:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}).$$

С другой стороны, данное выражение может быть представлено в следующем виде. Для этого рассмотрим магнитную составляющую силы Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Относя силу к величине заряда, получаем некоторое эффективное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_{eff} = [\vec{v}, \vec{B}].$$

Подставляя данную величину в выражение для ЭДС индукции, получим:

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}_{eff}, d\vec{l}) = \oint_L ([\vec{v}, \vec{B}], d\vec{l}).$$

Задачи

1. Железнодорожные рельсы, изолированные друг от друга и от земли, соединены через вольтметр. Каково показания прибора, если по рельсам проходит поезд со скоростью 100 км/ч. Вертикальную составляющую вектора магнитной индукции \vec{B} земли принять равной $1.5 \cdot 10^{-5}$ Тл, а расстояние между рельсами $l = 1540$ мм.
2. Проводящий угол $XOY = 2\alpha$ помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное к его плоскости. Проводник AB перпендикулярен к биссектрисе угла XOY и движется равномерно со скоростью v . Определить величину тока, наводимого в контуре AOB , если все проводники обладают сопротивлением ρ на единицу длины.
3. Тяжелый горизонтальный стержень AB массой M скользит без трения по двум вертикальным рельсам AM и BN , замкнутым на сопротивление R . Определить закон падения стержня AB в однородном поперечном магнитном поле \vec{B} , сопротивлением стержня и самоиндукцией контура пренебречь.
4. Стержень длиной l и массой M , сопротивление которого мало, скользит без трения по двум длинным проводникам с сечением S и удельным сопротивлением ρ , расположенным на расстоянии l друг от друга. Проводники замкнуты сопротивлением R . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости контура. В момент времени $t = 0$ стержню сообщили скорость v_0 в положительном направлении оси X . Пренебрегая самоиндукцией, найти расстояние, пройденное стержнем до остановки. Считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $x = x_0$.
5. Два параллельных стержня лежат в одной плоскости с бесконечным прямолинейным током I на расстояниях a и b по одну сторону от него ($a < b$). Вдоль стержней скользит со скоростью v поперечный проводник AB по направлению к сопротивлению R , на которое замкну-

ты стержни. Определить силу тока в контуре ABR . Сопротивлением стержней и проводника AB пренебречь.

6. Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к полю. Индукция поля равна \vec{B} . Определить ЭДС индукции в этом контуре. Площадь, ограниченная контуром, равна S .
7. Определить силу тока в контуре, рассмотренном в предыдущей задаче. Самоиндукция контура L , сопротивление его R .

§5. Переменное электромагнитное поле

1. *Сила Лоренца.* Сила, действующая на движущийся электрический заряд со стороны магнитного поля, равна

$$\vec{F} = e[\vec{v}, \vec{B}].$$

2. *Закон электромагнитной индукции Фарадея:*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Здесь Φ_m – магнитный поток, пронизывающий площадку, натянутую на замкнутый контур интегрирования.

3. *Полная система уравнений Максвелла* для переменного электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

4. *Плотность энергии* электромагнитного поля равна

$$\omega = \frac{1}{2} \left[(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{B}, \vec{H}) \right].$$

5. Для однородных изотропных сред электромагнитные потенциалы φ и \vec{A} определяются из следующих *уравнений Даламбера*:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \\ \Delta \vec{A} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mu_0 \vec{j}, \end{aligned}$$

при условии, что потенциалы φ и \vec{A} калиброваны по Лоренцу, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Задачи

1. Перпендикулярно к поверхности проводника с электропроводностью λ и магнитной проницаемостью μ падает плоская электромагнитная волна частоты ω . Пренебрегая токами смещения по сравнению с токами проводимости, определить, на какой глубине внутри проводника электромагнитное поле волны ослабевает в e раз.
2. Плоская электромагнитная волна, у которой $E_x = E_z = 0$; $H_x = H_y = 0$; $E_y = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z = a \sin(2\pi\nu[t - x/c])$, падает при $x = 0$ на нормальную к оси X плоскую поверхность проводника, простирающегося вправо до бесконечности. Пренебрегая отражением, определить производимое электромагнитной волной давление.
3. Плоскополяризованная волна падает на границу раздела двух прозрачных ($\mu \cong \mu_0$) сред с показателями преломления n_1 и n_2 . Электрический вектор волны параллелен плоскости раздела сред. Найти коэффициент прохождения света во вторую среду.
4. Плоская электромагнитная волна задана векторным потенциалом

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \varphi = 0.$$

Найти напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля волны.

5. Показать, что уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ может быть получено из уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и дополнительного условия, которое следует установить.
6. Плоский конденсатор состоит из двух параллельных слоев различных веществ. Первый слой толщиной d имеет диэлектрическую проницаемость ε и электропроводность, равную нулю; для другого слоя толщиной kd диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = 0$, а электропроводность λ имеет конечное значение. Показать, что в отношении распространения монохроматических плоских волн этот конденсатор ведет себя,

как если бы все пространство между его пластинами было заполнено однородной средой с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1 + k) \left(1 + i \frac{\varepsilon \omega k}{\lambda} \right)^{-1}.$$

7. Показать, что в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в однородной среде, векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к направлению распространения волны. Показать также, что у плоской электромагнитной волны $\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} |\vec{E}| = \sqrt{\mu \mu_0} |\vec{H}|$.

§6. Релятивистская формулировка электродинамики

Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к *преобразованиям Лоренца*. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\alpha,\beta} x_\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь

$$x_\alpha = (ict, x, y, z) = (ict, \vec{r}),$$

$\Lambda_{\alpha,\beta}$ – элементы матрицы преобразований Лоренца:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ковариантность уравнений означает, что величины, характеризующие систему *электромагнитное поле–заряды*, должны быть или скалярами, или векторами, или тензорами преобразований Лоренца, преобразующимися при переходе от нештрихованной системы к штрихованной по закону:

а) для скаляра

$$f' = f,$$

б) для вектора

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\alpha,\beta} A_\beta,$$

в) для тензора (второго ранга)

$$F'_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \Lambda_{\alpha,\gamma} \Lambda_{\beta,\delta} F_{\gamma,\delta}.$$

Задачи

1. Записать преобразование 4-вектора плотности тока при переходе от одной ИСО к другой.
2. Записать преобразование для потенциалов поля.
3. Записать преобразование силы Лоренца при переходе от одной ИСО к другой.
4. Найти закон преобразования векторов поля при $V \ll c$ и записать его в векторной форме.
5. С помощью результата предыдущей задачи показать, что для случая $E = 0$, а $B \neq 0$ векторы \vec{E}' и \vec{B}' перпендикулярны.
6. Точечный заряд движется равномерно со скоростью \vec{v} . Найти потенциалы и векторы поля при $v \ll c$.
7. Определить скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.
8. Пользуясь определениями тензора поля, 4-потенциала A_α и формулами $\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = rot\vec{A}$, получить все элементы тензора $F_{\alpha,\beta}$.
9. Доказать эквивалентность ковариантной системы уравнений Максвелла, используя компоненты тензора поля, заданные через проекции векторов \vec{E} и \vec{B} .
10. Пользуясь инвариантами поля $B^2 - \frac{E^2}{c^2} = Inv^{(1)}$, $(\vec{E}, \vec{B}) = Inv^{(2)}$, доказать, что перпендикулярность векторов поля \vec{E} и \vec{B} и отношение их модулей в электромагнитной волне сохраняются во всех ИСО.
11. Выполнить непосредственную проверку инвариантности величин $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$ с помощью преобразований Лоренца.
12. Показать, что в случае $Inv^{(2)} > 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ найдется система отсчета, в которой имеет место только магнитное поле, а при $Inv^{(2)} < 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ – только электрическое.

Ответы и указания

§1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

$$1. \frac{\vec{r}}{r}; \quad nr^{n-2}\vec{r}; \quad -\frac{n\vec{r}}{r^{n+2}}; \quad \vec{c}; \quad 8\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z; \quad \frac{1}{3}(2\vec{e}_x + \vec{e}_y);$$

$$5\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 8\vec{e}_z; \quad \left(\vec{c}, \frac{\partial \vec{a}}{\partial r}\right) \frac{\vec{r}}{r}.$$

$$2. \nabla Q = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z; \quad |\nabla Q(M)| = 2\sqrt{6}.$$

$$4. \vec{E} = -\vec{k} \cos(\vec{k}, \vec{r}); \quad \vec{E} = -\vec{\alpha} \cos(\vec{k}, \vec{r}) + \vec{k}(\vec{\alpha}, \vec{r}) \sin(\vec{k}, \vec{r});$$

$$\vec{E} = -\frac{5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 13\vec{e}_z}{3\sqrt{3}}.$$

$$5. \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{d}}{r^3} - 3\frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^5} \vec{r} \right].$$

$$6. 3; \quad 2(\vec{r}, \vec{c}); \quad 3\alpha; \quad 7r^4; \quad 0; \quad e^{-\alpha/r} \left[3 - \frac{x+y+z}{r} \right].$$

$$9. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{array} \right.$$

§2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§2.1 Закон Кулона

1. $E = 4500 \text{ В/м.}$
2. $E = \frac{3kq}{l^2} = 999 \text{ В/м.}$
3. $F = \frac{kq\tau L}{R(R+L)}.$
4. $F = k\tau^2 \ln \left| \frac{(R+L)^2}{R(R+2L)} \right|.$
5. $E = \frac{qZ}{4\pi\epsilon_0(a^2 + Z^2)^{3/2}}.$
6. $E = \frac{2k\tau}{R}.$
7. $E = \frac{k\tau}{R} \sqrt{2[1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]}.$
8. $E = \frac{2kq}{\pi R^2}.$
9. $F = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| 1 + \frac{l}{R} \right|.$
10. $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$
11. $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/h^2}} \right).$
12. $E = \frac{q \cos^2(\alpha/2)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$
13. $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right).$
14. $\varphi = \begin{cases} \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R; \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$

§2.2 Теорема Гаусса

$$1. E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

$$2. E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}, & r > R. \end{cases}$$

$$3. E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, & r > R. \end{cases}$$

$$4. E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases}$$

$$5. E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

$$6. E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

$$7. E(x) = \begin{cases} \frac{\rho x}{\epsilon_0}, & x < h/2 \\ \frac{\rho h}{2\epsilon_0}, & x > h/2. \end{cases}$$

$$8. \text{ а) } E = 0; \quad \text{ б) } E = kQ_1/r^2; \quad \text{ в) } E = k\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}.$$

$$9. \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{r^n}{n+3} \vec{r}, & r < R \\ \frac{\alpha}{\epsilon_0(n+3)} \frac{R^{n+3}}{r^3} \vec{r}, & r > R. \end{cases}$$

§2.3 Уравнения Лапласа и Пуассона

$$1. \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

$$2. \varphi = \frac{\varphi_0}{d}x.$$

$$3. \varphi = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), & r \leq R \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

$$4. \varphi = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \left(z + \frac{a}{4} \right), & z \leq -\frac{a}{2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} z^2, & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \left(z - \frac{a}{4} \right), & z \geq \frac{a}{2}. \end{cases}$$

$$5. \varphi = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2, & r \leq a \\ -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \left[2 \ln \left(\frac{a}{r} \right) + 1 \right], & r \geq a. \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\rho r}{\varepsilon_0} \vec{r}, & r \leq a \\ \frac{1}{2} \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0 r} \vec{r}, & r \geq a. \end{cases}$$

§2.4 Конденсаторы. Емкостные коэффициенты

$$1. C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{1 + \frac{a}{b}(\varepsilon - 1)}.$$

$$2. C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$3. C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

$$4. C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$5. C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

$$6. C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 h}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{R_2}{R_0}\right)}.$$

$$7. C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}.$$

$$8. C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 h}{\epsilon_1 (b - h)/b + \epsilon_2 (h - a)/a}.$$

§2.5 Энергия электростатического поля

$$1. W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}.$$

$$2. U = \frac{3Z(Z - 1)}{20\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R}.$$

$$3. W = \frac{e^2(R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}, C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$4. C = \frac{\epsilon_0}{\varphi_1 - \varphi_2} \oint_{L_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}, \vec{dl} \right).$$

$$7. W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{b - a}{ab} \right).$$

$$8. W = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 a}.$$

§3. МАГНИТОСТАТИКА

§3.1 Закон Био-Савара-Лапласа

$$1. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$2. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (2 + \sqrt{3}) = 2.986 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$3. B = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

§3.2 Энергия магнитного поля

$$1. W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

$$2. L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

$$3. L = \mu_0 n^2 S.$$

$$4. L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right).$$

§4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

$$1. \mathcal{E} = -0.64 \text{ мВ.}$$

$$2. I = \frac{B\vartheta \sin \alpha}{\rho(1 + \sin \alpha)}$$

$$3. \vartheta(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left[1 - \exp \left(- \frac{B^2 l^2}{mR} t \right) \right].$$

$$4. \Delta x = x - x_0 = \frac{S}{2\rho} \left[\left(R + 2\rho \frac{x_0}{S} \right) \exp \left(\frac{2\rho\vartheta_0}{l^2 B^2 S} \right) - R \right] - x_0.$$

$$5. I_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vartheta \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

$$6. \mathcal{E}_i = BS\omega \sin(\omega t).$$

§5. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1. $x = \sqrt{\frac{2}{\lambda\mu\omega}}$.
2. $p = \frac{\varepsilon_0 a^2}{2}$.
3. $D = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)}$.
4. $\vec{E} = -i\omega\vec{A}; \quad \vec{B} = -i[\vec{k}, \vec{A}]$.

§6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. $\underline{j}' = \left(\frac{ic\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{-\rho\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)$.
2. $\varphi' = \frac{\varphi - VA_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c^2}\varphi}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$.
3. $F_x = \frac{F'_x + (\vartheta', \vec{F}')\frac{V}{c^2}}{1 + \frac{V\vartheta'_x}{c^2}}, \quad F_y = \frac{F'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\vartheta'_x}{c^2}}, \quad F_z = \frac{F'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\vartheta'_x}{c^2}}$.
4. $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B}$.
6. $\varphi(\vec{r}) = k\frac{q}{R}, \quad \vec{A} = f\frac{q\vec{\vartheta}}{R}, \quad \vec{E} = kq\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{\vartheta}, \vec{E}]$,
где \vec{R} – вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку, где измеряются характеристики поля: $R = \sqrt{(x - \vartheta t)^2 + y^2 + z^2}$.
7. $\frac{\vec{\vartheta}}{1 + \vartheta^2/c^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{E^2/c^2 + B^2}$.

Приложение

Формула Стокса

Пусть \mathcal{L} – замкнутый контур, ограничивающий поверхность \mathcal{S} . Направляющие косинусы нормали к поверхности \mathcal{S} – $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (со стороны нормали обход по контуру \mathcal{L} осуществляется против часовой стрелки).

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy + \mathcal{R}dz = \int \int_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\mathcal{S}.$$

Формула Стокса в векторной форме: циркуляция вектора вдоль замкнутого контура \mathcal{L} , ограничивающего некоторую поверхность \mathcal{S} равна потоку вихря через эту поверхность.

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{\mathcal{F}}, d\vec{r}) = \int \int_{\mathcal{S}} (\vec{n}, \text{rot} \vec{\mathcal{F}}) d\mathcal{S}.$$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть \mathcal{T} – замкнутая область (объем), ограниченная замкнутой гладкой поверхностью \mathcal{S} . $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности \mathcal{S} .

$$\int \int_{\mathcal{S}} (\mathcal{P} \cos \alpha + \mathcal{Q} \cos \beta + \mathcal{R} \cos \gamma) d\mathcal{S} = \int \int \int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме: интеграл от дивергенции векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$, распространенный по некоторому объему \mathcal{T} , равен потоку вектора через поверхность \mathcal{S} , ограничивающую данный объем.

$$\int \int_{\mathcal{S}} (\vec{\mathcal{F}}, \vec{n}) d\mathcal{S} = \int \int \int_{\mathcal{T}} \text{div} \vec{\mathcal{F}} dV.$$

Формула Грина

Пусть \mathcal{L} – граница области \mathcal{D} и функции $\mathcal{P}(x, y)$, $\mathcal{Q}(x, y)$ непрерывны со своими частными производными $\partial\mathcal{Q}/\partial x$, $\partial\mathcal{P}/\partial y$ в замкнутой области \mathcal{D} .

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy = \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Формула Грина в векторной форме: Циркуляция векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ по замкнутому контуру \mathcal{L} равна потоку ротора векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ через поверхность \mathcal{S} , охватываемая данным контуром.

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{\mathcal{F}}, d\vec{l}) = \int \int_{\mathcal{S}} (\text{rot}\vec{\mathcal{F}}, \vec{n}) dx dy.$$

Литература

- [1] Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит, 2012.
- [2] Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 6. Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. - М.: Либроком, 2014.
- [3] Батыгин В.В. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. - С.-Пб.: Лань, 2010.
- [4] Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 2005.
- [5] Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. - М.: Физматлит, 2003.
- [6] Гильденбург Б.В. Сборник задач по электродинамике / Б.В. Гильденбург, М.А. Миллер. - М.: Физматлит, 2001.
- [7] Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике / А.И. Алексеев. - С.-Пб.: Лань, 2008.
- [8] Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / И.Е. Иродов. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.
- [9] Иванов А.Е. Электродинамика / А.Е. Иванов, С.А. Иванов. - М.: КноРус, 2012.
- [10] Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций / А.Н. Васильев. - С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2010.