Е.М. Карчевский, Е.В. Рунг, А.Г. Фролов

Семинары по линейной алгебре и аналитической геометрии

Часть 1

Учебное пособие

Казанский университет

2013

УДК 512
И74

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 3 от 8 ноября 2012 г.

заседания кафедры прикладной математики
Протокол № 3 от 7 ноября 2012 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. Н.Б. Плещинский

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. К.Г. Гараев,
кандидат физ.-мат. наук, доцент И.Е. Филиппов

Карчевский Е.М.
И74 Семинары по линейной алгебре и аналитической геометрии. Часть 1: учебное пособие / Е.М. Карчевский, Е.В. Рунг, А.Г. Фролов. — Казань, 2013. — 152 с.

Учебное пособие предназначено для проведения лабораторных и практических занятий по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

Оглавление

Предисловие

Книга предназначена для проведения семинаров по алгебре и геометрии со студентами первого курса Института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

Последовательность разделов, обозначения, определения и формулировки использованных теоретических результатов отвечают лекциям [3]. Перед выполнением упражнений следует изучить соответствующий параграф лекций. Все упражнения сопровождаются ответами, указаниями, или решениями. В книге принята локальная нумерация рисунков и упражнений.

Настоящее пособие ни в коей мере не претендует на роль задачника. В конце книги читатель найдет список задачников, материал которых был использован при ее составлении.

Авторы приносят свою искреннюю признательность всем сотрудникам кафедры прикладной математики Казанского университета, оказавшим неоценимую помощь при подготовке этого пособия, прежде всего, И.Л. Александровой, С.В. Баранову, Е.А. Осипову, А.Н. Саламатину, К.Н. Стехиной. Рукопись книги была прочитана М.М. Карчевским и Н.Б. Плещинским. Авторы с благодарностью учли их замечания.

Глава 1

Комплексные числа и многочлены

§ 1. Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами

Мнимой единицей называется число i такое, что $i^2 = -1$.

Пусть x, y — вещественные числа. Число $z = x + iy$ называется *комплексным числом.* Число x называется *действительной частью* комплексного числа, y — *мнимой частью.*

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е.

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Число $0 + i0$ называется *нулем* и обозначается символом 0.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. *Суммой* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а их *разностью* — число

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 есть комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Правило *деления* комплексных чисел определяется формулой

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к числу $z = x + iy$. Заметим, что

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Формула деления комплексных чисел получается, если умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное к знаменателю.

Пример. Найдем сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 1 - i$:

$$\begin{aligned}
&z = z_1 + z_2 = 2 + i + 1 - i = 3;\\
&z = z_1 - z_2 = 2 + i - (1 - i) = 1 + 2i;\\
&z = z_1 z_2 = (2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i\\
&z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{2 - 1 + i(1 + 2)}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Пример. Найдем такие вещественные числа x, y, что

$$(2 - i)x + (3 + 2i)y = 3 + 2i.$$

Раскроем скобки и приведем левую часть уравнения к виду $a + ib$, где a и b — вещественные числа, получим

$$(2x + 3y) + i(-x + 2y) = 3 + 2i.$$

Приравняем действительные и мнимые части чисел, стоящих в правой и левой частях этого равенства. Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 3,\\
-x + 2y &= 2.
\end{aligned}$$

Решим ее и найдем $x = 0$, $y = 1$.

Упражнения

1. Найти вещественные числа x, y из уравнения

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

2. Решить систему уравнений относительно комплексных чисел z_1 и z_2

$$\begin{aligned}
(3 - i)z_1 + (4 + 2i)z_2 &= 2 + 6i,\\
(4 + 2i)z_1 - (2 + 3i)z_2 &= 5 + 4i.
\end{aligned}$$

3. Непосредственной подстановкой показать, что числа

$$z_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad z_2 = p - i\sqrt{q - p^2}$$

есть корни уравнения

$$z^2 - 2pz + q = 0.$$

4. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2, $\overline{z}_1$, $\overline{z_2}$, если

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 2 - i.$$

5. Найти вещественные числа x, y, u, v из системы уравнений

$$\begin{aligned}&(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)u+(1+4i)v=1+5i,\\ &(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)u+4iv=2-i.\end{aligned}$$

6. Решить систему уравнений относительно комплексных чисел z_1 и z_2

$$\begin{aligned}&(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\ &(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{aligned}$$

7. Убедиться, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$ — *коммутативность*, или *перестановочность*,

2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ — *ассоциативность*, или *сочетательность*,

3) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ — *дистрибутивность*, или *распределительность*.

8. Показать, что операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в случае, когда операнды вещественны, совпадают с соответствующим операциями над вещественными числами.

Ответы, указания и решения

1. $x=-4/11$, $y=5/11$.

2. $z_1=1+i$, $z_2=i$.

3. Решение. Покажем, что выражение $z^2-2pz+q$ при

$$z_1=p+i\sqrt{q-p^2},\quad z_2=p-i\sqrt{q-p^2}$$

равно нулю. Для z_1 имеем:

$$(p+i\sqrt{q-p^2})^2-2p(p+i\sqrt{q-p^2})+q=$$

$$p^2+i2p\sqrt{q-p^2}-(q-p^2)-2p^2-i2p\sqrt{q-p^2}+q=0.$$

Для z_2 вычисления аналогичны:

$$(p-i\sqrt{q-p^2})^2-2p(p-i\sqrt{q-p^2})+q=$$

$$p^2-i2p\sqrt{q-p^2}-(q-p^2)-2p^2+i2p\sqrt{q-p^2}+q=0.$$

4. $z_1 + z_2 = 4 + 2i$, $z_1 - z_2 = 4i$, $z_1 z_2 = 7 + 4i$, $z_1/z_2 = 1/5 + 8/5i$, $\overline{z}_1 = 2 - 3i$, $\overline{z}_2 = 2 + i$.

5. $x = -2$, $y = 3/2$, $u = 2$, $v = -1/2$.

6. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$.

7. Указание. Коммутативность операции сложения комплексных чисел проверяется следующим образом. Сумма двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению равна

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

С другой стороны

$$z_2 + z_1 = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1).$$

Операция сложения вещественных чисел коммутативна, следовательно, вещественные части комплексных чисел в правых частях двух последних равенств совпадают. Точно так же заключаем, что совпадают мнимые части. Следовательно, эти комплексные числа равны, а значит совпадают и левые части этих равенств. Остальные свойства проверьте аналогично.

В справедливости остальных свойств убедитесь, проводя аналогичные рассуждения. Используйте при этом известные свойства операций сложения и умножения вещественных чисел.

8. Указание. Покажем, что операция сложения комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

в случае, когда операнды вещественны, совпадает с операцией сложения вещественных чисел. Действительно, пусть $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$, т. е. $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_2$ — вещественные числа. Тогда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2.$$

Оставшуюся часть упражнения выполните аналогично.

§ 2. Геометрическая интерпретация, тригонометрическая форма комплексного числа

Вещественное неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Здесь $\overline{z}$ — число, сопряженное к z.

Введем на плоскости декартову систему координат (x, y) и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ точку с координатами (x, y). При этом модуль комплексного числа, очевидно, — это расстояние от точки (x, y) до начала координат.

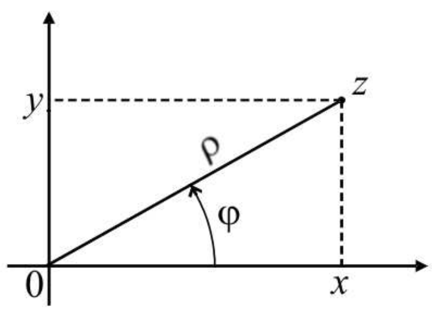

Рис. 1. К тригонометрической форме комплексного числа.

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно записать в *тригонометрической форме*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$$\rho = |z|$$

есть *модуль* комплексного числа, φ — *аргумент* комплексного числа. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки (см. рис. 1) и изменяется от 0 до 2π. Тогда

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Пример. Представить в тригонометрической форме числа: $a)$ $z = 1 + i$, $b)$ $z = -1 - i$.

Решение. $a)$ Пусть $z = 1 + i$. Найдем модуль этого числа

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}.$$

Заметим, что
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
тогда аргумент $\varphi = \pi/4$, т. е. комплексное число z лежит в первой четверти (сделайте рисунок!). Таким образом, тригонометрическое представление числа z будет
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Пусть $z = -1 - i$. Модуль этого числа
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}.$$
Найдем аргумент. Заметим, что
$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
тогда аргумент $\varphi = 5\pi/4$, т. е. комплексное число лежит в третьей четверти (сделайте рисунок!). Таким образом, тригонометрическое представление числа $z = -1 - i$ будет
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Упражнения

1. Представить в тригонометрической форме числа
a) i,
b) $1 + i\sqrt{3}$,

2. Описать множество точек, изображающих числа z, удовлетворяющих неравенствам:
a) $|z| < 2$,
b) $|z - i| \leq 1$,
c) $|z - 1 - i| < 1$.

3. Привести выражение $\dfrac{a + bi}{a - bi}$ к виду $x + iy$, где a, b, x, y — вещественные числа.

4. Представить в тригонометрической форме числа
a) -1,
b) $-i$,
c) $-1+i$,
d) $1-i$,
e) $-1+i\sqrt{3}$,
f) $-1-i\sqrt{3}$.

5. Найти $\min|2i-z|$, считая $|z|\leqslant 1$, и точку z_m, в которой этот минимум достигается.

6. Проверить, что
a) $\overline{\overline{z}}=z$,
b) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$,
c) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$,
d) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$,
e) $z-\overline{z}=i2\operatorname{Im}z$.

7. Проверить, что для любых двух комплексных чисел z_1, z_2 справедливо равенство

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|.$$

8. Убедиться, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

Ответы, указания и решения

1. *a*) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, *b*) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$,

2. *a*) Внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат,

b) внутренность и граница круга радиуса 1 с центром в точке $(0,1)$,

c) внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (1,1).

Указание. Сделайте рисунки.

3. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель на число сопряженное со знаменателем.

4. *a*) $\cos\pi+i\sin\pi$,

b) $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$,

$c)\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

$d)\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$,

$e)\ 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$f)\ 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

5. $\min\limits_{|z|\leqslant 1}|2i-z|=1$. Минимум достигается в точке $z_m=i$. Указание. Сделайте рисунок. Изобразите множество точек z на плоскости, удовлетворяющих условию $|z|\leqslant 1$. Найдите расстояние от точки $2i$ до границы этого множества.

6. Указание. Покажем, например, что $\overline{\overline{z}}=z$. Действительно,

$$\overline{\overline{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z.$$

Остальные равенства проверьте аналогично.

7. Решение. Докажем, что $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$. Действительно,

$$|z_1z_2|^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=$$
$$=x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2.$$

Далее,

$$|z_1|^2|z_2|^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2.$$

Ясно, что правые части этих двух цепочек равенств совпадают. Следовательно, равны их левые части.

8. Решение. Предварительно докажем, что для любых вещественных чисел x, y справедливо неравенство

$$2|xy|\leqslant x^2+y^2. \tag{1}$$

Действительно, $x^2=|x|^2$, поэтому можно считать, что x и y неотрицательны. Тогда неравенство (1) эквивалентно

$$x^2+y^2-2xy\geqslant 0,$$

что, очевидно, верно.

Докажем теперь, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{2}$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 .$$

Запишем его подробнее для $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leqslant x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Сократим в левой и правой части последнего неравенства равные неотрицательные слагаемые и запишем его в виде

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, мы свели поставленную задачу к проверке последнего неравенства. Если $x_1x_2 + y_1y_2 < 0$, оно выполняется очевидным образом. Пусть $x_1x_2 + y_1y_2 \geqslant 0$. Возведем его левую и правую части в квадрат. Получим эквивалентное неравенство:

$$x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2),$$

т. е.

$$2x_1y_2x_2y_1 \leqslant x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2,$$

что справедливо в силу неравенства (1).

§ 3. Операции с комплексными числами в тригонометрической форме

Представим операции умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),\\ z^n &= \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{aligned} \tag{1}$$

Формулу (1) называют *формулой Муавра.*

Пример. Вычислим $(1+i)^{25}$. Представим число $z = 1+i$ в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра, получим

$$(1+i)^{25} = z^{25} = \sqrt{2}^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right).$$

Упростим получившиеся выражение:

$$(1+i)^{25} = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{12}\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2^{12} + 2^{12}i.$$

Таким образом, $(1+i)^{25} = 2^{12} + 2^{12}i$.

Пример. Докажем, что

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Представим единицу в тригонометрической форме, а затем используем хорошо известные тригонометрические формулы:

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos 0 + i\sin 0 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$

$$= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Корнями степени n из числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ являются числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Пример. Вычислим $\sqrt[3]{i}$. Представим $z = i$ в тригонометрической форме

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

По формуле извлечения корня

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Выпишем все корни (сделайте рисунок!).

При $k = 0$ имеем $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

При $k = 1$ имеем $z_1 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

При $k = 2$ имеем $z_2 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

Упражнения

1. Вычислить выражение $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

2. Вычислить $(1+i)^6$.

3. Извлечь корни $a)$ $\sqrt[4]{-1}$, $b)$ $\sqrt[n]{1}$, $c)$ $\sqrt[3]{1}$, $d)$ $\sqrt[2]{1}$.

4. Вычислить выражение $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

5. Вычислить $\left(1/2 - i\sqrt{3}/2\right)^5$.

6. Вычислить $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

7. Извлечь корень $\sqrt[5]{2+3i}$.

8. Извлечь корень шестой степени из единицы.

Ответы

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)\right].$

2. $-2^3 i.$

3. $a)$ $(1+i)/\sqrt{2}$, $(1-i)/\sqrt{2}$, $(-1+i)/\sqrt{2}$, $(-1-i)/\sqrt{2}$;

$b)$ $\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n},\ k=0,\ldots,n-1;$

$c)$ $1,\ -\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$d)$ $\pm 1.$

4. $2^9(1-i\sqrt{3}).$

5. $1/2+i\sqrt{3}/2.$

6. $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+19}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+19}{72}\pi\right),\ k=0,1,2,3,4,5.$

7. $\sqrt[10]{13}\left(\cos\dfrac{\arctan\frac{3}{2}+2\pi k}{5}+i\sin\dfrac{\arctan\frac{3}{2}+2\pi k}{5}\right), k=0,1,2,3,4.$

8. $\pm 1,\ \pm\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

§ 4. Многочлены

Многочленом называется функция вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — фиксированные комплексные числа, *коэффициенты* многочлена, $n \geqslant 0$ — *степень* многочлена.

Число α называется *корнем* многочлена, если $P_n(\alpha) = 0$.

По теореме о делении многочленов для многочленов $P_n(z)$ и $Q_1(z) = z - \alpha$ существуют такие многочлены $q_{n-1}(z)$ и r_0, что

$$P_n(z) = (z - \alpha) q_{n-1}(z) + r_0.$$

Пусть

$$q_{n-1}(z) = c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + ... + c_0.$$

Коэффициенты многочленов $q_{n-1}(z)$ и $r_0(z)$ можно найти по *схеме Горнера*:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...
α	$c_{n-1} = a_n$	$c_{n-2} = a_{n-1} + \alpha c_{n-1}$	$c_{n-3} = a_{n-2} + \alpha c_{n-2}$	...

...	a_1	a_0
...	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_0$

Если $r_0 = 0$, то число α — корень многочлена $P_n(z)$.

Начать поиск корней многочлена $P_n(z)$ можно среди чисел вида $\dfrac{s}{t}$, где s — делители a_0, а t — делители a_n. Действительно, согласно теореме Вьета для корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ многочлена

$$\widetilde{P}_n(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + ... + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n}$$

справедливо равенство

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

Пример. Найдем корни многочлена

$$P_5(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8.$$

Поиск корней начнем среди чисел вида $\dfrac{s}{t}$, где s — делители свободного члена, t — делители старшего коэффициента. Выпишем делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, делители старшего коэффициента равны ± 1. Установим, есть ли среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ корни многочлена $P_5(z)$. Воспользуемся схемой Горнера:

	$a_5 = 1$	$a_4 = -5$	$a_3 = 7$	$a_2 = -2$
α	$c_4 = a_5$	$c_3 = a_4 + \alpha c_4$	$c_2 = a_3 + \alpha c_3$	$c_1 = a_2 + \alpha c_2$
1	1	$-5 + 1 = -4$	$7 - 4 = 3$	$-2 + 3 = 1$
-1	1	$-5 - 1 = -6$	$7 + 6 = 13$	$-2 - 13 = -15$
2	1	$-5 + 2 = -3$	$7 - 6 = 1$	$-2 + 2 = 0$

$a_1 = 4$	$a_0 = -8$
$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_0$
$4 + 1 = 5$	$-8 + 5 = -3$
$4 + 15 = 19$	$-8 - 19 = -27$
$4 + 0 = 4$	$-8 + 8 = 0$

Из таблицы видно, что $\alpha = 2$ есть корень многочлена $P_5(z)$, следовательно, $P_5(z) = (z-2)(z^4 - 3z^3 + z^2 + 4)$. Теперь будем искать корни многочлена $q_4(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4$. Проверим, есть ли среди чисел $\pm 2, \pm 4$ его корни:

	$a_4 = 1$	$a_3 = -3$	$a_2 = 1$	$a_1 = 0$
α	$c_3 = a_4$	$c_2 = a_3 + \alpha c_3$	$c_1 = a_1 + \alpha c_1$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$
2	1	$-3 + 2 = -1$	$1 - 2 = -1$	$0 - 2 = -2$

$a_0 = 4$
$r_0 = a_0 + \alpha c_0$
$4 - 4 = 0$

Мы убедились, что число $\alpha = 2$ — корень многочлена $q_4(z)$, следовательно, $q_4(z) = (z-2)(z^3 - z^2 - z - 2)$. Продолжим поиск корней. Будем искать корни многочлена $q_3(z) = z^3 - z^2 - z - 2$. Установим, есть ли среди чисел ± 2 корни этого многочлена:

	$a_3 = 1$	$a_2 = -1$	$a_1 = -1$	$a_0 = -2$
α	$c_2 = a_3$	$c_1 = a_2 + \alpha c_2$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_1$
2	1	$-1 + 2 = 1$	$-1 + 2 = 1$	$-2 + 2 = 0$

Итак, число $\alpha = 2$ является также корнем многочлена $q_3(z)$, следовательно, $q_3(z) = (z-2)(z^2 + z + 1)$. Ясно, что у многочлена $z^2 + z + 1$ вещественных корней нет. Таким образом, многочлен $P_5(z)$ имеет корень $\alpha = 2$ кратности три, и этот многочлен можно представить в виде $P_5(z) = (z-2)^3(z^2 + z + 1)$.

Для того, чтобы найти оставшиеся два корня многочлена $P_5(z)$, необходимо решить квадратное уравнение

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Решения этого уравнения — комплексные числа

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Занумеруем все корни многочлена $P_5(z)$ с учетом их кратности:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_{3,4,5} = 2.$$

Многочлен $P_5(z)$ можно представить теперь в виде

$$P_5(z) = (z-2)^3 \left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

У полинома с вещественными коэффициентами комплексные корни всегда представляют собой пары комплексно сопряженных чисел, для которых справедливо равенство

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 + (-2\operatorname{Re}\alpha_1)z + |\alpha_1|^2.$$

В рассматриваемом примере $\alpha_2 = \overline{\alpha}_1$, кроме того,

$$(z-\alpha_1)(z-\overline{\alpha}_1) = z^2 + z + 1,$$

т. е. при вещественных z полином $P_5(z)$ допускает представление в виде произведения трех линейных и одного квадратичного вещественных сомножителей: $P_5(z) = (z-2)^3(z^2+z+1)$.

Упражнения

1. Найти корни многочлена $z^5 + 7z^4 + 16z^3 + 8z^2 - 16z - 16$.

2. Определить вещественные множители многочлена

$$z^6 - 6z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 12z + 4.$$

3. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^4 + 4$.

4. Определить вещественные множители многочлена

$$z^5 - 10z^3 - 20z^2 - 15z - 4.$$

5. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^6 + 27$.

6. Разложить многочлен $z^6 - 15z^4 + 8z^3 + 51z^2 - 72z + 27$ на вещественные множители.

Ответы

1. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{2,3,4,5} = -2$.

2. $(z+1)^4(z-2)^2$.

3. $(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.

4. $(z+1)^4(z-4)$.

5. $(z^2+3)(z^2+3z+3)(z^2-3z+3)$.

6. $(z-1)^3(z+3)^2(z-3)$.

Глава 2

Определители второго и третьего порядков

§ 1. Решение систем двух и трех уравнений

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, x_1, x_2 требуется найти. Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей второго порядка*. Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

называют *определителем* матрицы A. Для определителя используют также следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Если $\Delta \neq 0$, то x_1 и x_2 можно найти по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы не имеют смысла, когда

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

т. е. строки определителя $|A|$ пропорциональны. Если при этом и

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то первое и второе уравнения системы (1), фактически, совпадают, и она имеет бесконечное множество решений. Если $|A| = 0$, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

то первое и второе уравнения системы (1) противоречивы, система *несовместна*, не имеет ни одного решения.

Примеры. 1) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 15}{-2} = \frac{9}{2}.$$

2) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

При этом

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

Уравнения системы, фактически, совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

3) Система

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

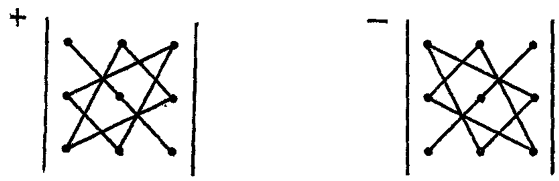

Рис. 1. Правило расстановки знаков в определителе третьего порядка

не имеет решений, так как ее определитель равен нулю, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Из ее коэффициентов можно составить *матрицу третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы вычисляется по формуле

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания знаков, с которыми слагаемые входят в эту сумму, полезно использовать схему, представленную на рисунке 1.

Пример. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0.$$

Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (2) можно найти по *формулам Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Вычислить определители второго порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

$d)$ $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; $e)$ $\begin{vmatrix} \cos\varphi + i\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi - i\sin\varphi \end{vmatrix}$;

$f)$ $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; $g)$ $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

2. Найти решение по формулам Крамера:

$a)$ $\begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 0; \end{aligned}$

$b)$ $\begin{aligned} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha &= \cos\beta, \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha &= \sin\beta, \end{aligned}$ где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$

3. Исследовать, при каких a система уравнений

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 &= 2, \\ 9x_1 + ax_2 &= 3 \end{aligned}$$

имеет единственное решение, бесконечно много решений, не имеет ни одного решения.

4. Вычислить определители третьего порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

$c)$ $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Найти решение по формулам Крамера:

$$a)\ \begin{aligned} 2x_1+3x_2+5x_3 &= 10, \\ 3x_1+7x_2+4x_3 &= 3, \\ x_1+2x_2+2x_3 &= 3. \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 4x_1-3x_2+2x_3+4 &= 0, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+1 &= 0, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3 &= 0. \end{aligned}$$

6. Вычислить определители второго порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}; \quad c)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad d)\ \begin{vmatrix} \tan\alpha & -1 \\ 1 & \tan\alpha \end{vmatrix};$$

$$e)\ \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \text{где } \varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

7. Найти решение по формулам Крамера:

$$a)\ \begin{aligned} 2x_1-3x_2 &= 4, \\ 4x_1-5x_2 &= 10; \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 4x_1+7x_2+13 &= 0, \\ 5x_1+8x_2+14 &= 0. \end{aligned}$$

8. Вычислить определители третьего порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}; \quad c)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix};$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

9. При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

10. Найти решение по формулам Крамера:

$$a)\ \begin{aligned} 5x_1-6x_2+4x_3 &= 3, \\ 3x_1-3x_2+2x_3 &= 2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 5x_1+2x_2+3x_3+2 &= 0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3+10 &= 0. \end{aligned}$$

11. Показать, что компонента x_3 решения системы уравнений

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}, \tag{3}$$

$$\left(a_{32}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2 + \left(a_{33}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31} \tag{4}$$

имеет вид

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ответы, указания и решения

1. a) -2; b) -1; c) $-2b^3$; d) $\sin(\alpha-\beta)$; e) 0; f) -1; g) -1.

2. a) $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$; b) $x_1 = \cos(\beta-\alpha)$, $y = \sin(\beta-\alpha)$.

3. При $a \neq \pm 6$ система имеет единственное решение, при $a = 6$ — бесконечно много решений, при $a = -6$ решений не существует.

4. a) -5; b) 1; c) -2.

5. a) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

6. a) 0; b) 0; c) 1; d) $1/\cos^2\alpha$; e) $1/2 + i\sqrt{3}/2$.

7. a) $x_1 = 5$, $y = 2$; b) $x_1 = 2$, $y = -3$.

8. a) -3; b) 100; c) $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$, d) 0.

9. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

10. a) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.

11. Решение. Умножим левые и правые части уравнений (3) и (4) на a_{11}. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\,x_3 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\,x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\,x_3 &= a_{11}b_3 - b_1a_{31}. \end{aligned}$$

Положим

$$M_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad M_{32} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21},$$

$$M_{23} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}, \quad M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$\Delta_{21} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \quad \Delta_{31} = a_{11}b_3 - b_1a_{31}$$

и запишем эту систему уравнений более компактно:

$$\begin{aligned} M_{33}x_2 + M_{32}x_3 &= \Delta_{21}, \\ M_{23}x_2 + M_{22}x_3 &= \Delta_{31}. \end{aligned}$$

По формуле Крамера имеем

$$x_3 = \frac{\Delta_{31}M_{33} - \Delta_{21}M_{23}}{M_{22}M_{33} - M_{32}M_{23}}.$$

Запишем подробнее числитель этой дроби:

$$\Delta_{31}M_{33} - \Delta_{21}M_{23} = (a_{11}b_3 - b_1a_{31})M_{33} - (a_{11}b_2 - b_1a_{21})M_{23} =$$

$$= b_1(a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}) + a_{11}(-b_2M_{23} + b_3M_{33}).$$

Знаменатель записывается аналогично:

$$M_{22}M_{33} - M_{32}M_{23} = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})M_{33} - (a_{11}a_23 - a_{13}a_{21})M_{23} =$$

$$= a_{13}(a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}) + a_{11}(-a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}).$$

Выразим $a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}$ через M_{13}:

$$a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33} = a_{21}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) - a_{31}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$a_{21}a_{11}a_{32} - a_{31}a_{11}a_{22} = a_{11}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}M_{13}.$$

Итак,

$$x_3 = \frac{b_1M_{13} - b_2M_{23} + b_3M_{33}}{a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}},$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Свойства определителей третьего порядка

Приведем свойства определителей третьего порядка.

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Если все элементы какой-либо строки равны нулю, то определитель тоже равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы двух определителей, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+3 & 2+3 & 3+3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Если две любые строки определителя совпадают, то он равен нулю, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Если в определителе поменять местами две любые строки, то знак его изменится на противоположный, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

6. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы любой другой строки, предварительно умноженные на некоторое число, определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7+1(-6) & 8+1(-6) & 9+1(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Говорят, что строки определителя *линейно зависимы*, если существуют числа α, β, γ, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Например, для строк определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ справедливы равенства

$$(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 = 0,$$

$$(-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 = 0,$$

$$(-1) \cdot 3 + 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 9 = 0.$$

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

8. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называют определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца. Справедлива формула *разложения определителя по строке*

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Вычислим определитель, предварительно разложив его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеет место формула *разложения определителя по столбцу*

$$|A| = a_{1i}(-1)^{i+1}M_{1i} + a_{2i}(-1)^{i+2}M_{2i} + a_{3i}(-1)^{i+3}M_{3i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Вычислим тот же определитель, разложив его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнения

1. Вычислить следующие определители:

$a)$ $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$;

$c)$ $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; $d)$ $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, где ε — отличное от 1 значение $\sqrt[3]{1}$;

$e)$ $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1-b_1i & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2-b_2i & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3-b_3i & c_3 \end{vmatrix}$.

2. Доказать тождества, не вычисляя определители:

$a)$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

$b)$ $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

$c)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

$d)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$;

$e)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$

$f)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

3. Вычислить следующие определители:

$a)$ $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix};$ $b)$ $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix};$

$c)$ $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x+a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y+b^{-y})^2 & 1 \\ (a^z+a^{-z})^2 & (a^z+a^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix};$ $d)$ $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$

4. Доказать тождества, не вычисляя определители:

$a)$ $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

$b)$ $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

$c)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$

$d)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$

$e)$ $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

Ответы и указания

1. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) $-2i\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

2. f) Указание. К третьему столбцу определителя, стоящего в левой части равенства, прибавить второй, умноженный на $a+b+c$, и вычесть первый, умноженный на $ab+bc+ca$.

3. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0.

4. e) Указание. Использовать упражнение d).

Глава 3

Введение в аналитическую геометрию

§ 1. Векторы. Алгебраические операции над векторами

Векторами называются направленные отрезки. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются *равными*. С каждой точкой x трехмерного евклидова пространства с декартовой системой координат взаимнооднозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 1). Концом этого вектора считается точка x. Координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ будем называть *декартовыми координатами вектора* x. *Модуль* (длину) вектора обозначим $|x|$. Для любого вектора x

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Заметим, что только один вектор имеет длину нуль — это нулевой вектор, конец которого совпадает с началом координат.

Пример. Найдем длину вектора x с декартовыми координатами $(3, 4, 5)$:

$$|x| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

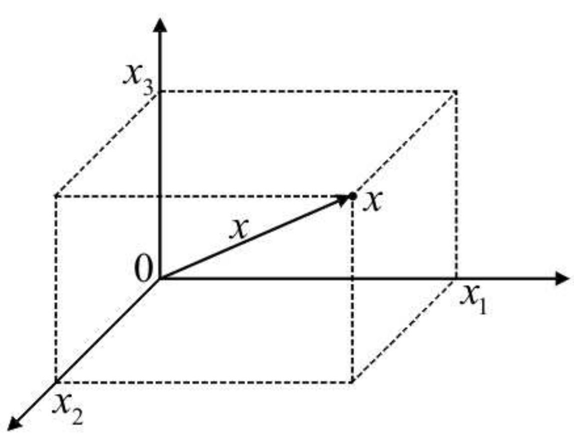

Рис. 1. Декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ и вектор x в пространстве.

Над векторами определены алгебраические операции.

1. *Умножение вектора на число.* Вектор y называется произведением вещественного числа α и вектора x (пишется $y = \alpha x$), если $|y| = |\alpha||x|$, а направление y совпадает с направлением вектора x при положительном α и противоположно направлению x при отрицательном α.

2. *Сложение векторов.* Вектор z называется суммой векторов x и y (пишется $z = x+y$), если он образует диагональ параллелограмма построенного на векторах x, y. Иногда удобнее описывать тоже самое правило сложения векторов иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник.

Вектор z называется *разностью* векторов x и y, если $x = z + y$. Понятно, что $z = x+(-1)y = x+(-y)$. Операция сложения векторов является коммутативной, т. е.

$$x + y = y + x,$$

и ассоциативной, т. е.

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Справедливы свойства *дистрибутивности*, связывающие операции сложения векторов и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Векторы x, y, z *линейно зависимы*, если существуют такие числа α, β, γ, среди которых хотя бы одно не нуль, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными.* Для любого вещественного числа α и вектора x, справедливо утверждение: $y = \alpha x$ и x коллинеарны. Наоборот, если векторы x, y коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, x), то найдется такое число α, что $y = \alpha x$.

Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора. Обозначим их через e^1, e^2, e^3. Любой вектор x можно представить в виде

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$. Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют *базис* пространства. Числа x_1, x_2, x_3 называют *координатами вектора* в этом базисе.

Базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины, называют *декартовым базисом.* Его обозначают через i^1, i^2, i^3. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число, при сложении векторов их компоненты складываются, и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Пример. Найдем вектор, равный произведению числа 5 на вектор $x = (3, -4, 5)$:

$$y = 5(3, -4, 5) = (15, -20, 25).$$

Пример. Найдем вектор

$$u = 2x + 3y - z,$$

где $x = (1, 2, 3)$, $y = (2, -2, 0)$, $z = (0, 1, -1)$:

$$u = 2(1, 2, 3) + 3(2, -2, 0) + (-1)(0, 1, -1) =$$

$$= (2, 4, 6) + (6, -6, 0) + (0, -1, 1) = (8, -3, 7).$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов x, y, z является равенство нулю определителя, составленного из их координат относительно любого базиса:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Проверим, что векторы

$$e^1 = (1, 2, 3), \quad e^2 = (1, 1, 1), \quad e^3 = (1, 0, 1)$$

образуют базис. Для этого вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Он не равен нулю, следовательно, векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис. Найдем координаты вектора $x = (4, 8, 10)$ в этом базисе. Для этого получим по формулам Крамера решение системы трех линейных уравнений (по какому правилу она составлена?):

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 8, \\ 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Имеем

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Теперь ясно, что

$$(4, 8, 10) = 3(1, 2, 3) + 2(1, 1, 1) - 1(1, 0, 1),$$

и числа 3, 2, -1 — координаты вектора x в базисе e^1, e^2, e^3.

Упражнения

1. Найти значение $x - 3y + 5z$, если:
a) $x = (2, 4, 9)$, $y = (2, 4, 9)$, $z = (2, 4, 9)$;
b) $x = (-3, 7, 9)$, $y = (2, -1, -3)$, $z = (1, 4, -7)$.

2. Доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

3. Пусть дано некоторое число $a \neq 0$. Проверить, образуют ли базис векторы e^1, e^2, e^3:
a) $e^1 = (0, 0, a)$, $e^2 = (0, a, a)$, $e^3 = (a, a, a)$;
b) $e^1 = (2a, 0, -8a)$, $e^2 = (0, a, 0)$, $e^3 = (-a, 0, 4a)$.

4. Проверить что векторы

$$x = (4, 1, -1), \quad y = (1, 2, -5), \quad z = (-1, 1, 1)$$

образуют базис. Найти координаты векторов

$$m = (4, 4, -5), \quad l = (2, 4, -10), \quad k = (0, 3, -4)$$

в этом базисе.

5. При каких условиях векторы $p + q$ и $p - q$ коллинеарны?

6. Дан треугольник, построенный на векторах p и q. Выразить все медианы треугольника через векторы p и q.

7. Построить на произвольных ненулевых векторах x и y параллелограмм и проверить тождества:
a) $(x+y)+(x-y)=2x$;
b) $\dfrac{x-y}{2}+y=\dfrac{x+y}{2}$.

8. Сформулируйте условие, при котором справедливо утверждение $|a+b|=|a-b|$.

9. Какие из следующих векторов коллинеарны, одинаково направлены, параллельны координатным осям, параллельны координатным плоскостям:
a) $a^1=(2,4,-6)$, $a^2=(-1,-2,3)$, $a^3=(4,8,-12)$;
b) $a^4=(6,0,0)$, $a^5=(0,-5,0)$, $a^6=(0,0,2)$;
c) $a^7=(0,1,3)$, $a^8=(2,0,-1)$, $a^9=(3,-4,0)$?

10. Найти значение $2(x-3y)+5(y-z)$, если:
a) $x=(-3,3,2)$, $y=(12,-11,-8)$, $z=(6,-5,-4)$;
b) $x=(-1,4,-2)$, $y=(2,-2,2)$, $z=(3,-6,4)$.

11. Найти координаты векторов l, m в базисе e^1, e^2, e^3:
a) $e^1=(3,0,5)$, $e^2=(2,2,0)$, $e^3=(1,7,2)$,
$l=(-5,-1,0)$, $m=(6,0,4)$;
b) $e^1=(4,-1,4)$, $e^2=(1,-1,-3)$, $e^3=(0,9,0)$,
$l=(0,9,4)$, $m=(1,0,2)$.

12. Даны четыре вектора

$$x=(4,1,-1),\quad y=(3,-1,0),\quad z=(-1,1,1),\quad k=(-1,3,4).$$

Найти такие числа α, β, γ, что $\alpha x+\beta y+\gamma z+k=0$.

13. Упростить выражение

$$\frac{4a-2b+5c}{2}-\frac{4a-4b-3c}{6}+\frac{2a-20b+3c}{3}.$$

14. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $a=(8,0,7)$, $b=(10,2,8)$, $c=(10,-2,8)$.

15. Построить на произвольных ненулевых векторах x и y параллелограмм и проверить тождества:
a) $(x+y)-(x-y)=2y$;
b) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{x+y}{2}$.

16. Какими должны обладать векторы x и y, чтобы имело место соотношение $|x+y|=|x|-|y|$?

17. Какими должны обладать векторы a и b, чтобы имело место соотношение $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{b}{|b|}$?

18. a) Единичный вектор a образует равные тупые углы с векторами i^1, i^2, i^3 декартова базиса. Найти координаты вектора a. b) Единичный вектор a образует с вектором i^1 угол 30^0, а с ортами i^2 и i^3 — равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора a.

19. Интерпретируйте правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны.

Ответы, указания и решения

1. a) $(6, 12, 27)$, b) $(-4, 30, -17)$.

2. Указание. Рассмотреть линейную комбинацию этих векторов, подобрав соответствующим образом коэффициенты.

3. a) Да, так как векторы некомпланарны (используйте критерий компланарности векторов). b) Нет.

4. Векторы образуют базис, так как они некомпланарны. Координаты векторов m, l, k в этом базисе соответственно $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$, и $(0, 1, 1)$.

5. Векторы $p+q$ и $p-q$ коллинеарны тогда и только тогда, когда p и q коллинеарны. Сделайте рисунок.

6. Медианы равны $\dfrac{1}{2}(p+q)$, $\dfrac{1}{2}q - p$, $\dfrac{1}{2}p - q$. Указание. Достроить треугольник до параллелограмма и найти медиану треугольника как половину диагонали параллелограмма.

7. Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах x и y и добавить все необходимые векторы.

8. Векторы a и b перпендикулярны. Указание. Построим параллелограмм на векторах a и b. Тогда $a+b$ и $a-b$ — диагонали параллелограмма.

9. a) Так как координаты векторов a^1 и a^2 пропорциональны, то эти векторы коллинеарны. Поскольку $a^2 = -\dfrac{1}{2}a^1$, то векторы a^1 и a^2 противоположно направлены. Векторы a^1 и a^3 также коллинеарны. Векторы a^1 и a^3 одного направления, так как $a^3 = 2a^1$.

b) Сравнивая координаты векторов a^4, a^5, a^6 с координатами векторов i^1, i^2, i^3, заключаем, что вектор a^4 параллелен оси x_1, вектор a^5 — оси x_2, вектор a^6 — оси x_3.

c) Поскольку у вектора a^7 координата $x_1 = 0$, т. е. его проекция на ось x_1 равна нулю, то вектор a^7 перпендикулярен оси x_1 и, следовательно, параллелен плоскости x_2x_3. Аналогичным образом заключаем, что вектор a^8 параллелен плоскости x_1x_3, а вектор a^9 — плоскости x_1x_2.

Из решения данной задачи можно сделать следующие выводы. 1. Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор ортогонален соответствующей координатной оси. 2. Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

10. *a*) $(-48, 42, 32)$, *b*) $(-19, 40, -26)$.

11. *a*) $(-2/9, -22/9, 5/9)$, $(1, 7/4, -1/2)$,

b) $(1/4, -1, 11/12)$, $(5/16, -1/4, 1/144)$.

12. $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$. Указание. Составьте и решите соответствующую систему линейных алгебраических уравнений.

13. $2a - 7b + 4c$.

14. 10. Указание. Найти координаты векторов, образующих стороны треугольника, и затем вычислить длины этих векторов.

15. Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах x и y и добавить все необходимые векторы.

16. x и y коллинеарны, имеют противоположные направления, кроме того, $|x| \geqslant |y|$.

17. Векторы a и b имеют одинаковое направление, так как равны единичные векторы их направлений.

18. *a*) $a = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. *b*) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/2$. Указание. Координаты вектора a можно представить в виде $a = |a|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы между вектором a и векторами i^1, i^2, i^3 соответственно. Вычислим длину вектора a: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Отсюда, пользуясь условием задачи, получим ответ.

19. Указание. Сформулируйте правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов. Сделайте рисунки, иллюстрирующие эти правила. Угол между векторами обозначьте α. Устремите α к нулю. Сделайте новые рисунки при $\alpha = 0$. Сформулируйте правило треугольника в этом предельном случае. Попробуйте сформулировать правило параллелограмма при $\alpha = 0$. Теперь устремите α к π и проведите те же рассуждения.

§ 2. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярным произведением векторов x и y называется число

$$(x, y) = |x||y| \cos(x, y). \tag{1}$$

При этом вычисляется косинус того угла между векторами x и y, который не превосходит π.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов x, y — *симметрия*,
2) $(\alpha x, y) = \alpha(y, x)$ для любых векторов x, y и для любого вещественного числа α — *однородность*,
3) $(x+y, z) = (x, z)+(y, z)$ для любых векторов x, y, z — *аддитивность*,
4) $(x, x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ — *положительная определенность*.

Из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

для любых векторов x, y, z и для любых вещественных чисел α, β. Это свойство называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Для любых x, y справедливо *неравенство Коши*

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|,$$

и *неравенство треугольника*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Скалярное произведение через декартовы координаты векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Косинус угла между этими векторами можно найти по формуле

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \tag{2}$$

Пример. Найдем скалярное произведение векторов

$$x = (1, 3, 5), \quad y = (6, 4, 2),$$

а также косинус угла между ними:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 28,$$

$$\cos(x, y) = \frac{28}{\sqrt{35}\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{490}}{35}.$$

Введем понятие ориентации тройки некомпланарных векторов. Векторы x, y, z имеют *правую ориентацию* (говорят: *правая тройка*), если с конца z кратчайший поворот от x к y совершается против часовой стрелки. В ином случае, тройка — *левая*. Легко заметить, что если два первых вектора поменять местами, то ориентация изменится на противоположную. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что базис пространства имеет левую ориентацию.

Векторным произведением x и y (пишется $[x, y]$) называется вектор z, удовлетворяющий следующим условиям.

1) $|z| = |x||y| \sin(x, y)$. Угол выбирается так же, как и при скалярном произведении. При этом $|z|$ — площадь параллелограмма построенного на векторах x, y.

2) Вектор z ортогонален каждому из векторов x и y.

3) Тройка векторов x, y, z ориентирована так же, как базис пространства (левая тройка).

Свойства векторного произведения:

1) $[x, y] = -[y, x]$ для любых векторов x, y — *антисимметричность*,

2) $[\alpha x, y] = \alpha[y, x]$ для любых векторов x, y и вещественного числа α — *однородность по первому аргументу*,

3) $[x+y, z] = [x, z]+[y, z]$ для любых векторов x, y — *аддитивность по первому аргументу.*

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов x и y является равенство нулю их векторного произведения:

$$[x, y] = 0.$$

Если векторы x и y ортогональны, то $|[x, y]| = |x||y|$.

Пример. Вычислим скалярные произведения векторов i^1, i^2, i^3:
$(i^1, i^1) = 1;\quad (i^1, i^2) = 0;\quad (i^1, i^3) = 0;$
$(i^2, i^1) = 0;\quad (i^2, i^2) = 1;\quad (i^2, i^3) = 0;$
$(i^3, i^1) = 0;\quad (i^3, i^2) = 0;\quad (i^3, i^3) = 1.$
Вычислим векторные произведения векторов i^1, i^2, i^3:
$[i^1, i^1] = 0;\quad [i^1, i^2] = i^3;\quad [i^1, i^3] = -i^2;$
$[i^2, i^1] = -i^3;\quad [i^2, i^2] = 0;\quad [i^2, i^3] = i^1;$
$[i^3, i^1] = i^2;\quad [i^3, i^2] = -i^1;\quad [i^3, i^3] = 0.$

Векторное произведение через декартовы координаты векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ вычисляется по формуле

$$[x, y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

где i^1, i^2, i^3 — векторы декартова базиса. Символ определителя в правой части равенства надо понимать в том смысле, что следует провести вычисления, формально разлагая определитель по первой строке, и получить линейную комбинацию векторов i^1, i^2, i^3.

Смешанным произведением трех векторов x, y и z называется число $(x, y, z) = ([x, y], z)$. Предварительно вычисляется векторное произведение, затем — скалярное. Модуль этого числа — объем параллелепипеда построенного на векторах x, y, z. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов есть равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

При перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например, $(x, y, z) = -(y, x, z) = -(x, z, y)$. Справедливо равенство $([x, y], z) = (x, [y, z])$. Через декартовы координаты смешанное произведение можно выразить следующим образом:

$$v = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Даны декартовы координаты трех векторов:

$$x = (3, 0, 0),\quad y = (0, 1, 2),\quad z = (1, 0, 1).$$

Найдем их смешанное произведение. Решение можно получить двумя способами. Первый способ. Сначала найдем векторное произведение $[x, y]$:

$$[x,y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - i^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + i^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 0i^1 - 6i^2 + 3i^3 = (0, -6, 3) = k.$$

Теперь сосчитаем скалярное произведение векторов k и z:

$$(k, z) = 0 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3.$$

Второй способ. Сразу получим смешанное произведение:

$$v = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Упражнения

1. Даны декартовы координаты двух векторов $a = (1, -2, 4)$ и $b = (3, 1, -5)$. Найти вектор x, зная, что он перпендикулярен оси x_2 и удовлетворяет следующим условиям: $(x, a) = -3$, $(x, b) = 8$.

2. $a)$ Пусть a и b — единичные векторы и $|a - b| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3a - 4b, a + b)$.
$b)$ Пусть $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{3}$, $|a + b| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(a + 2b, a - b)$.

3. Вычислить скалярное произведение (a, b), если $a = 3p - 2q$ и $b = p + 4q$, где p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

4. Пусть x, y, z — взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить длину вектора $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

5. Покажите, что векторы $p = x(y, z) - y(x, z)$ и z перпендикулярны для любых x, y, z.

6. Найти векторное произведение векторов a, b:
$a)$ $a = 2i^1 - 3i^2 + 5i^3$, $b = 4i^1 + 2i^2 - 6i^3$,
$b)$ $a = i^1 - 3i^2 + 2i^3$, $b = 6i^1 + 5i^2 - 4i^3$.

7. Треугольник abc задан декартовыми координатами вершин $a = (4, -14, 8)$, $b = (2, -18, 12)$, $c = (12, -8, 12)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины c на противоположную сторону.

8. Пусть x и y — неколлинеарные векторы. При каком значении вещественного числа α векторы $p = \alpha x + 5y$ и $q = 3x - y$ будут коллинеарны?

9. Проверить, компланарны ли следующие векторы:
a) $p = a - 2b + c$, $q = 3a + b - 2c$, $r = 7a + 14b - 13c$, где a, b, c — попарно перпендикулярные орты;
b) $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, 3)$, $c = (1, 9, -11)$,
c) $p = 2a + b - 3c$, $q = a - 4b + c$, $r = 3a - 2b + 2c$, где a, b, c — попарно перпендикулярные орты;
d) $a = (3, -2, 1)$, $b = (2, 1, 2)$, $c = (3, -1, -2)$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = p - 3q + r$, $b = 2p + q - 3r$ и $c = p + 2q + r$, где p, q и r — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

11. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $p = x + y + z$, $q = x + y - z$, $k = x - y + z$.

12. Пусть вектор x коллинеарен вектору $a = (1, 2, -3)$. Найти его координаты, если известно, что $(x, a) = 28$.

13. Пусть x, y, z — ортогональные векторы единичной длины. Даны векторы $p = 3x + y - 5z$ и $q = x - 4y - 5z$. Вычислить (p, q).

14. Найти длину вектора $a = 3m - 4n$, зная, что m и n — взаимно перпендикулярные единичные векторы.

15. Пусть p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить угол между векторами $x = 3p + 2q$ и $y = p + 5q$.

16. Пусть x и y — два неколлинеарных вектора. Проверить, что $[(x + y), (x - y)] = 2[y, x]$ и дать геометрическое толкование полученному результату.

17. Пусть x, y, z — левый ортонормированный базис. Разложить по этим векторам вектор $p = [3x + y - 2z, x - y + 5z]$.

18. Даны декартовы координаты двух векторов $a = (-4, -8, 8)$ и $b = (4, 3, 2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

19. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = 3m + 5n$, $b = m - 2n$ и $c = 2m + 7n$, где $|m| = 1/2$, $|n| = 3$, угол между векторами m и n равен $3\pi/4$.

20. Проверить, что точки a, b, c, d лежат в одной плоскости:
a) $a = (5, -1, -1)$, $b = (4, 2, 2)$, $c = (5, 3, 1)$, $d = (8, 0, -5)$;
b) $a = (3, -4, 1)$, $b = (2, -3, 7)$, $c = (1, -4, 3)$, $d = (4, -3, 5)$.

21. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны. Проверить справедливость равенства

$$(x, y, z) = ((x_1y_2-x_2y_1)[e^1, e^2]+(x_1y_3-x_3y_1)[e^1, e^3]+(x_2y_3-x_3y_2)[e^2, e^3],$$
$$z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3) =$$
$$= \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1, e^2, e^3).$$

22. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны. Положим

$$e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2].$$

где $Q = (e^1, e^2, e^3)$. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 некомпланарны, причем $(e_k, e^l) = \delta_{kl}$.

23. Говорят, что векторы $e_1 = Q^{-1}[e^2, e^3]$, $e_2 = -Q^{-1}[e^1, e^3]$ и $e_3 = Q^{-1}[e^1, e^2]$, где $Q = (e^1, e^2, e^3)$, образуют *взаимный базис.* Базис e^1, e^2, e^3 называют при этом *основным.* Вычислить скалярное произведение (x, y), разлагая вектор x по основному базису, а y — по взаимному.

24. На плоскости, отнесенной к декартовой системе координат x_1, x_2, рассмотрим треугольник с вершинами

$$x = (x_1, x_1), \quad y = (y_1, y_2), \quad z = (z_1, z_2).$$

С точностью до знака площадь этого треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Часто используют более симметричную форму записи:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Показать, что эти определители совпадают.

25. Для любых векторов x, y положим

$$G(x,y) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что $G(x,y) = S^2$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y.

Ответы, указания и решения

1. $x = (1, 0, -1)$. Указание. Так как $x = (x_1, x_2, x_3)$ перпендикулярен оси x_2, то $x_2 = 0$. Из двух условий $(x, a) = -3$ и $(x, b) = 8$, найти остальные координаты вектора x.

2. *a*) $-1/2$. Указание. Воспользоваться соотношением

$$|a-b|^2 = (a-b, a-b) = |a|^2 - 2(a,b) + |b|^2 = 3,$$

откуда найти $(a,b) = -1/2$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3a - 4b, a + b)$ и получить ответ. *b*) -4.

3. $(a, b) = -5$.

4. $|p| = \sqrt{\alpha^2|x|^2 + \beta^2|y|^2 + \gamma^2|z|^2}$.

5. Указание. Вычислить скалярное произведение векторов p и z, убедиться, что оно равно нулю.

6. *a*) $8i^1 + 32i^2 + 16i^3$; *b*) $2i^1 + 16i^2 + 23i^3$.

7. Указание. Вычислить координаты векторов $a - c$ и $b - c$, а затем — их векторное произведение. Теперь можно найти площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2}|[a-c, b-c]| = 30$ и его высоту $\dfrac{2S}{|b-a|} = 10$.

8. $\alpha = -15$.

9. Указание. Воспользоваться критерием компланарности векторов. *a*) Векторы компланарны. *b*) Векторы компланарны. *c*) Векторы некомпланарны. *d*) Векторы некомпланарны.

10. 25.

11. $4|(x, y, z)|$.

12. $x = (2, 4, -6)$. Указание. Так как векторы x и $(1, 2, -3)$ коллинеарны, то координаты этих векторов пропорциональны:

$$x = \lambda(1, 2, -3),$$

где λ — произвольное ненулевое вещественное число. Найти λ, вычислив скалярное произведение векторов (x, a).

13. $(p, q) = 24$.

14. $|a| = 5$. Решение: $a = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(3m - 4n, 3m - 4n)} = = \sqrt{9(m, m) - 24(m, n) + 16(n, n)} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

15. $\cos(x, y) = 1/\sqrt{2}$.

16. Площадь параллелограмма, построенного на диагоналях исходного параллелограмма, вдвое больше площади исходного параллелограмма.

17. $p = 3x - 17y - 4z$.

18. $[a, b] = -40i^1 + 40i^2 + 20i^3,\ S = 60,\ \sin(a, b) = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

19. 0. Из разложения векторов a, b и c видно, что они компланарны.

20. *a*) Точки лежат в одной плоскости. Указание. Вычислить координаты векторов $b - a$, $c - a$ и $d - a$, а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости. *b*) Точки лежат в одной плоскости.

21. Указание. Раскрыть скобки, использовать линейность и симметрию скалярного произведения, правило изменения знака смешанного произведения, а также то, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю.

22. Решение. Заметим, что вектор e_3 одновременно ортогонален векторам e^1 и e^2, вектор e_2 ортогонален векторам e^1 и e^3, вектор e_1 ортогонален векторам e^2 и e^3. Следовательно, векторы e_1, e_2 и e_3 некомпланарны, а их скалярные произведения с векторами основного базиса, с несовпадающими номерами, равны нулю. Вычислим оставшиеся скалярные произведения:

$$(e_1, e^1) = \frac{(e^2, e^3, e^1)}{(e^1, e^2, e^3)} = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1,$$

$$(e_2, e^2) = -\frac{(e^1, e^3, e^2)}{(e^1, e^2, e^3)} = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1, \quad (e_3, e^3) = \frac{(e^1, e^2, e^3)}{(e^1, e^2, e^3)} = 1.$$

23. Решение. Пусть $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда

$$(x, y) = (x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1[e^2, e^3] - y_2[e^1, e^3] + y_3[e^1, e^2])Q^{-1} =$$

$$= (x_1y_1(e^1, e^2, e^3) - x_2y_2(e^2, e^1, e^3) + x_3y_3(e^3, e^1, e^2))Q^{-1} =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

24. Указание. Преобразовать определитель третьего порядка и разложить его по третьему столбцу.

25. Решение. Вычислим определитель:

$$G(x, y) = |x|^2|y|^2 - (x, y)^2 = |x|^2|y|^2 - \cos^2(x, y)|x|^2|y|^2 =$$
$$= |x|^2|y|^2(1 - \cos^2(x, y)) = |x|^2|y|^2 \sin^2(x, y) = S^2,$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y.

§ 3. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Прямая l, проходящая через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ параллельно вектору $e = (e_1, e_2)$, задается уравнением (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{1}$$

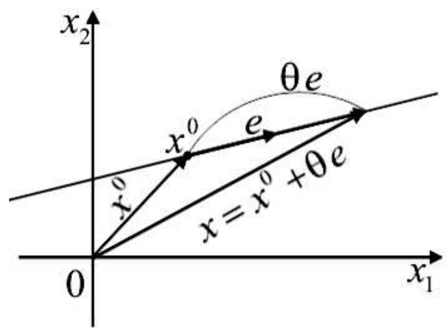

Рис. 1. Уравнение прямой, проходящей через точку x_0 и параллельно вектору e.

Уравнение прямой можно записать также в одной из форм:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \tag{2}$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{3}$$

$$x_2 = kx_1 + b, \tag{4}$$

где k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

Пусть даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{array} \tag{5}$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то система уравнений (5) имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ при любых b_1, b_2. Точка $x = (x_1, x_2)$ — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ равен нулю, но определитель Δ_1, а следовательно, и определитель Δ_2 отличны от нуля, то система (5) не имеет решений, т. е. прямые l_1, l_2 параллельны.

Если все три определителя Δ, Δ_1, Δ_2 — нули, то система (5) имеет бесконечное множество решений, т. е. прямые l_1, l_2 совпадают.

Пример. Исследуем взаимное расположение двух прямых (сделайте рисунок!)

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 7x_2 = 7. \end{gathered}$$

Вычислим определитель матрицы этой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данные две прямые пересекаются. Найдем точку x^0 пересечения этих прямых. Для этого вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20.$$

Вычислим координаты точки пересечения:

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1.$$

Упражнения

1. Показать, что прямая, проходящая через точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ и $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, задается уравнением

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1}, \tag{6}$$

а тангенс угла наклона данной прямой вычисляется по формуле

$$k = \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}.$$

2. Какую ординату имеет точка x^0, лежащая на одной прямой с точками $x^1 = (-8; -6)$ и $x^2 = (-3; -1)$ и имеющая абсциссу $x_1^0 = 5$?

3. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $x^1 = (2, -8)$ и $x^2 = (-1, 7)$.

4. Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (4), определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{7}$$

Показать, что если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны; если $k_1k_2+1 = 0$, то прямые перпендикулярны.

5. Вычислить угол между двумя прямыми

$$\begin{aligned} &x_2 = 3x_1, \\ &x_2 = -2x_1 + 5. \end{aligned}$$

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и
a) параллельна прямой $x_2 = 4x_1 - 3$,
b) перпендикулярна прямой $x_2 = 1/2x_1 + 1$.

7. Написать уравнение прямой, по которой должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами $(3, 8)$, чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $x_2 = 1/2x_1 - 1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?

8. Даны вершины треугольника

$$x^1 = (3, 1), \quad x^2 = (3, -1), \quad x^3 = (0, 4).$$

Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них параллельно противоположной стороне.

9. Проверить, лежат ли на одной прямой три точки $(1, 3)$, $(5, 7)$ и $(10, 12)$.

10. Сила P приложена к началу координат, и составляющие ее по осям соответственно равны 5 и -2. Найти уравнение прямой, по которой направлена сила.

11. Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой, данной уравнением:
a) $2x_1 - x_2 + 3 = 0$,
b) $5x_1 + 2x_2 - 8 = 0$,
c) $3x_1 + 8x_2 + 16 = 0$.

12. Вычислить угол между двумя прямыми

$$\begin{aligned} &x_2 = 4x_1 - 7, \\ &x_2 = -1/4x_1 + 2. \end{aligned}$$

13. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и
a) образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с прямой $x_2 = 2x_1 + 5$,
b) наклонена под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к прямой $x_2 = x_1 - 1$.

14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2, -1)$ и составляющей с осью x_1 угол, вдвое больший угла, составляемого с той же осью прямой $x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{4}{3}$.

15. Даны вершины треугольника: $x^1 = (4, 6)$, $x^2 = (-4, 0)$ и $x^3 = (-1, -4)$. Составить уравнения прямых, на которых лежат его стороны.

16. Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1).

Ответы, указания и решения

1. Указание. Записать уравнение прямой, проходящей через точку x^1 в форме (2). Подставить в это уравнение координаты точки x^2 и вычислить угловой коэффициент k. Подставить значение k в исходное уравнение прямой.

2. $x_2^0 = 7$. Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки x^1 и x^2, воспользовавшись формулой (6). Получим

$$\frac{x_1 + 8}{-3 + 8} = \frac{x_2 + 6}{-1 + 6}.$$

Подставим координаты точки x^0 в получившееся уравнение прямой:

$$\frac{5 + 8}{-3 + 8} = \frac{x_2^0 + 6}{-1 + 6}.$$

Из последнего уравнения найдем вторую координату точки x^0. Получается $x_2^0 = 7$.

3. $x_2 = -5x_1 + 2$. Указание. Воспользоваться уравнением (6) прямой, проходящей через две точки, и привести его к виду $x_2 = kx_1 + b$.

4. $\pi/4$. Указание. Воспользоваться формулой (7).

5. Указание. Воспользоваться определением тангенса и рассмотреть случаи, когда $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 0$.

6. $a)$ $x_2 = 4x_1$; $b)$ $x_2 = -2x_1$.

7. $x_2 = -2x_1 + 14$, $x^0 = (6, 2)$, $s = 3\sqrt{5}$.

8. $x_1 = 0$, $x_2 = -5/3x_1 + 6$, $x_2 = -x_1 + 2$.

9. Точки лежат на одной прямой.

10. $x_2 = -2/5x_1$.

11. $a)$ $k = 2, b = 3$; $b)$ $k = -5/2, b = 4$; $c)$ $k = -3/8, b = -2$.

12. $\pi/2$. Воспользоваться упражнением 4.

13. $a)$ $x_2 = -3x_1$ или $x_2 = 1/3x_1$;

$b)$ $x_2 = -(1 + \sqrt{3})x_1$ или $x_2 = -(2 - \sqrt{3})x_1$. Сделайте рисунки.

14. $x_2 = 1/\sqrt{3}x_1 - 1 - 2\sqrt{3}$. Сделайте рисунок.

15. $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, $4x_1 + 3x_2 + 16 = 0$, $2x_1 - x_2 - 2 = 0$.

16. $\cos\varphi = \dfrac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}$. Указание. Используйте формулу (2), с. 41.

§ 4. Нормальная форма уравнения прямой

Один из способов описания прямой следующий: это множество всех векторов, ортогональных данному вектору p (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат (см. рис. 1), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \tag{1}$$

где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины, d — проекция x на направление p. Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг (см. рис. 1). Уравнение (1) называют *нормальной формой* уравнения прямой. Напомним, что

$$(x, p) = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

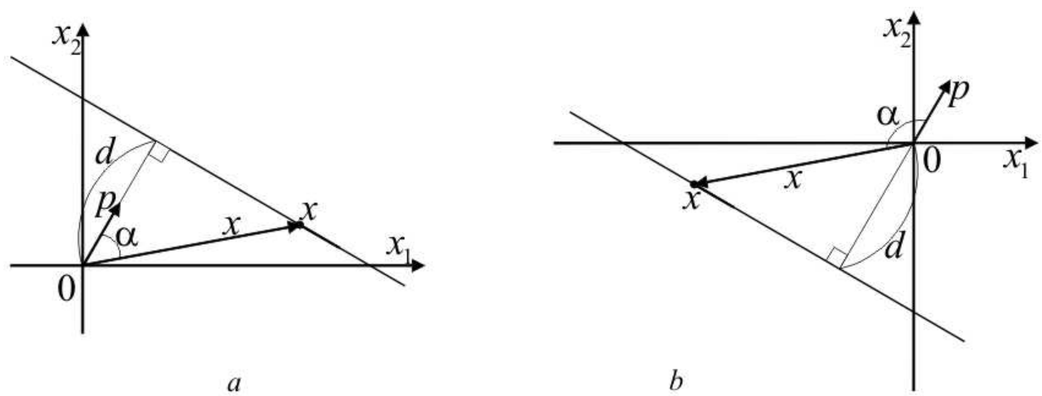

Рис. 1. К нормальному уравнению прямой: $d > 0$, угол α между векторами p и x острый (a); $d < 0$, угол α между векторами p и x тупой (b).

Из уравнения прямой в общем виде $ax_1 + bx_2 + c = 0$ получим нормальную форму уравнения прямой. Для этого вычислим модуль вектора с координатами a и b: $\sqrt{a^2 + b^2}$. Разделим на это число обе части общего уравнения прямой и положим

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Теперь можно записать уравнение прямой в форме (1). Поскольку $p_1^2 + p_2^2 = 1$, то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

Пусть дана точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Расстояние от точки до прямой, заданной уравнением (1), вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0, p) - d|.$$

Пример. Найдем расстояние от точки $x^0 = (5, 5)$ до прямой (сделайте рисунок!)

$$4x_1 - 3x_2 + 10 = 0.$$

Перейдем к нормальному виду уравнения прямой. Разделим обе части общего уравнения прямой на

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Теперь вычислим координаты вектора p и величину d сдвига прямой от начала координат:

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{5}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{3}{5}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{10}{5}.$$

Таким образом, получили нормальный вид уравнения этой прямой:

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + 2 = 0.$$

Расстояние до прямой от точки x^0 вычисляется следующим образом:

$$|\delta| = \left|\frac{4}{5}x_1^0 - \frac{3}{5}x_2^0 + 2\right| = \left|\frac{4 \cdot 5}{5} - \frac{3 \cdot 5}{5}x_2 + 2\right| = 3.$$

Упражнения

1. Привести к нормальному виду уравнение $5x_1 + 12x_2 - 39 = 0$.

2. Найти расстояние прямой $9x_1 - 12x_2 + 10 = 0$ от начала координат.

3. Проверить, что прямые

$$2x_1 + \sqrt{5}x_2 - 15 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{11}x_1 - 5x_2 + 30 = 0$$

касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга.

4. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного на прямую $12x_1 - 5x_2 - 27 = 0$ из точки $x^0 = (4, -1)$.

5. Написать уравнения прямых (в нормальной форме), на которых лежат стороны квадрата, диагонали которого лежат на осях координат. Длина стороны квадрата равна a.

6. Из начала координат в первой и третьей четвертях провести прямую, проходящую на расстоянии трех от точки $x^0 = (2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.

7. Привести к нормальному виду уравнение $6x_1 + 8x_2 - 15 = 0$.

8. Через точку $x^0 = (5, 0)$ провести касательные к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

9. Диагонали ромба, длиной в 30 и 16 единиц, лежат на осях координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.

10. Дана прямая $12x_1 + 5x_2 - 52 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на расстоянии $s = 2$.

11. Написать уравнения сторон равнобочной трапеции, зная, что основания ее соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол в $\pi/3$. Большее основание и ось симметрии трапеции лежат на осях координат.

12. Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (1).

Ответы, указания и решения

1. $5/13x_1 + 12/13x_2 - 3 = 0$.

2. 2/3. Сделайте рисунок.

3. $r = 5$. Указание. Сделайте рисунок. Приведите уравнения прямых к нормальной форме и убедитесь, что расстояние от начала координат до каждой прямой равно пяти. Все касательные отстоят от центра круга на расстоянии, равном радиусу, и проходят перпендикулярно радиусу. Данные прямые касаются круга с центром в начале координат, т. к. они должны находиться на одинаковом расстоянии от начала координат.

4. $|\delta| = 2$. Указание. Сделайте рисунок и воспользуйтесь формулой расстояния от точки до прямой.

5. $\pm 1/\sqrt{2}\, x_1 \pm 1/\sqrt{2}\, x_2 - a/2 = 0$. Указание. Сделайте рисунок и найдите координаты векторов p для каждой из сторон квадрата. Расстояние d для всех сторон будет одним и тем же (каким?).

6. $x_1 = x_2$. Указание. Сделайте рисунок. Воспользуйтесь формулой вычисления расстояния от точки до прямой, заданной в нормальном виде. Получится уравнение для p_1 и p_2: $|2\sqrt{2}p_1 + 5\sqrt{2}p_2| = 3$. Еще одно уравнение для p_1 и p_2 есть $p_1^2 + p_2^2 = 1$.

7. $3/5x_1 + 4/5x_2 - 3/2 = 0$.

8. Решение. Сделайте рисунок. Центр окружности совпадает с началом координат, а ее радиус $r = 3$. Следовательно, искомая касательная находится от начала координат на расстоянии $d = 3$. Будем искать нормальное уравнение этой прямой; параметр d уже известен, и уравнение имеет вид $x_1p_1 + x_2p_2 - 3 = 0$. Вектор $p = (p_1, p_2)$ определяем из того условия, что $p_1^2 + p_2^2 = 1$ и из условия, что прямая проходит через точку $x^0 = (5, 0)$, и, следовательно, координаты точки удовлетворяют уравнению прямой. Подставляя эти координаты, получим $5p_1 - 3 = 0$, откуда $p_1 = 3/5$. Тогда

$$p_2 = \pm\sqrt{1 - p_1^2} = \pm\sqrt{1 - (3/5)^2} = \pm 4/5.$$

Таким образом, задача имеет два решения: $3/5x_1 + 4/5x_2 - 3 = 0$ и $3/5x_1 - 4/5x_2 - 3 = 0$. Действительно, из внешней точки можно провести две касательные к окружности.

9. $s = \dfrac{15 \cdot 16}{17}$. Указание. Нарисуйте ромб. Искомое расстояние равно удвоенному расстоянию от начала координат до одной из его сторон. Напишите уравнение прямой, которой принадлежит эта сторона, и приведите его к нормальной форме.

10. $12x_1 + 5x_2 - 26 = 0$, $12x_1 + 5x_2 - 78 = 0$. Сделайте рисунок.

11. $x_2 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$. Сделайте рисунок.

12. $\cos\varphi = (p^1, p^2)$. Указание. Используйте формулу (2), с. 41.

§ 5. Различные формы уравнения плоскости

Плоскость π, которая проходит через точку x^0 и натянута на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2, задается уравнением (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty. \tag{1}$$

Учитывая, что векторы $x - x^0$, e^1 и e^2 являются компланарными, уравнение плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Раскроем определитель (например, по первому столбцу) в левой части этого равенства и получим уравнение плоскости π в форме

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{3}$$

Здесь числа a, b, c, d выражаются через координаты векторов e^1, e^2, x^0. Вектор $n = (a, b, c)$ является *нормальным* к данной плоскости. Уравнение вида (3) называют *общим уравнением плоскости.*

Уравнение плоскости, ортогональной вектору p единичной длины и отстоящей от начала координат на расстояние q, имеет вид (см. рис. 1)

$$(x, p) - q = 0. \tag{4}$$

Знак q определяет направление сдвига плоскости по отношению к направлению вектора p. Уравнение (4) называют *нормальным уравнением плоскости.*

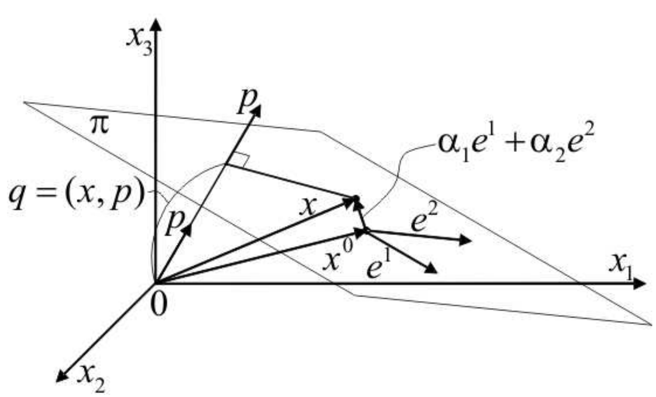

Рис. 1. К уравнению плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2; а также к нормальному уравнению плоскости $(x, p) - q = 0$.

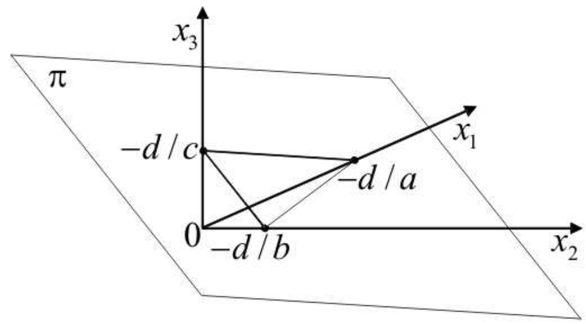

Рис. 2. Точки пересечения плоскости с осями координат

Направляющие косинусы вектора — это косинусы углов, которые вектор образует с положительными направлениями осей координат. Если длина вектора равна единице, направляющие косинусы вектора совпадают с его декартовыми координатами. Так как $|p| = 1$, то координаты вектора p называют *направляющими косинусами плоскости.*

Упражнения

1. Используя уравнение (2), показать, что уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки x^0, x^1 и x^2 можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Проанализировать случай, когда точки x^0, x^1 и x^2 лежат на одной прямой.

2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (2, 1, 3)$, $x^1 = (-1, 2, 5)$, $x^2 = (3, 0, 1)$.

3. Показать, анализируя общее уравнение плоскости, что:
если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости x_1x_2;
если $a = 0$, то плоскость параллельна оси x_1;
если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

4. Показать, что $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$, $\gamma = -d/c$ — координаты точек пересечения плоскости с осями x_1, x_2, x_3 (см. рис. 2), проанализировать случаи, когда соответствующие знаменатели — нули.

5. Используя нормальное уравнение плоскости (4), найти отклонение данной точки x^0 от плоскости.

6. Преобразовать общее уравнение плоскости (3) к нормальному виду.

7. Найти расстояние от точки $x^0 = (2, 4, -3)$ до плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0.$$

8. Найти расстояние от точки $x^0 = (3, 1, -1)$ до плоскости

$$22x_1 + 4x_2 - 20x_3 - 45 = 0.$$

9. Даны две точки $x^1 = (1, 3, -2)$ и $x^2 = (7, -4, 4)$. Через точку x^2 провести плоскость, перпендикулярную вектору $x^2 - x^1$.

10. Через точку $x^0 = (7, -5, 1)$ провести плоскость, которая отсекает на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

11. Найти точку, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 121 = 0$.

12. Найти плоскость, зная, что точка $x^0 = (3, -6, 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат.

13. Найти расстояние от точки $x^0 = (4, 3, -2)$ до плоскости

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 + 1 = 0.$$

14. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:
$a)$ $2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$;
$b)$ $3x_1 - 5x_3 + 1 = 0$;
$c)$ $9x_2 - 2 = 0$.

15. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (1, -1, 3)$, $x^1 = (2, 3, 4)$, $x^2 = (-1, 1, 2)$.

16. Вычислить координаты точек пересечения с осями координат плоскости $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 12 = 0$.

17. Написать уравнение плоскости, которая параллельна плоскости x_1x_3 и проходит через точку $(2, -5, 3)$.

18. Показать, что косинус угла φ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Ответы, указания и решения

1. Решение. Пусть даны три точки x^0, x^1, x^2, не лежащие на одной прямой. Обозначим произвольную точку плоскости через x. Построим векторы $x - x^0$, $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$ (сделайте рисунок!). Уравнение плоскости, проходящей через точки x^0, x^1 и x^2, можно записать теперь, используя компланарность векторов $x - x^0$, $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если точки x^0, x^1, x^2 лежат на одной прямой, то векторы $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$ коллинеарны. Следовательно, второй и третий столбцы этого определителя пропорциональны, и при любом x он равен нулю. Это означает, что любая точка пространства удовлетворяет полученному уравнению.

2. $2x_2 - x_3 + 1 = 0$.

3. Указание. Сначала рассмотрите случай $a = 0$, $b = 0$. Общее уравнение плоскости принимает вид $cx_3 + d = 0$. Этому уравнению удовлетворяют точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ с координатой $x_3 = -d/c$ и любыми x_1, x_2. Иными словами, ему удовлетворяют точки плоскости, проходящей параллельно координатной плоскости $x_1 x_2$. Координата точки пересечения этой плоскости с осью x_3 есть $x_3 = -d/c$. Сделайте рисунок этой плоскости. Остальные два случая рассмотрите аналогично.

4. Указание. Для того, чтобы найти точку пересечения плоскости с осью x_1, в общем уравнении плоскости надо положить x_2, $x_3 = 0$. Случаи, когда $a = 0$, $b = 0$ или $c = 0$, рассматриваются аналогично предыдущей задаче.

5. Решение. Используя нормальное уравнение плоскости, можно определить по какую сторону от нее находится точка x^0 и найти отклонение точки от плоскости. Поскольку $|p| = 1$, то (x^0, p) — величина проекции вектора x^0 на прямую, параллельную p, следовательно, величина $\delta = (x^0, p) - d$ есть отклонение точки x^0 от плоскости (сделайте рисунок!). Причем знак δ показывает, по какую сторону от плоскости расположена точка x^0. Говорят, что точка x^0 находится в *положительном полупространстве* относительно плоскости, если $\delta > 0$. Для точек, расположенных по другую сторону от плоскости (в *отрицательном полупространстве*), справедливо неравенство $\delta < 0$.

Расстояние от точки до плоскости, заданной нормальным уравнением, вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0, p) - d|.$$

6. Решение. Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости к уравнению в нормальной форме, нужно поделить обе части общего уравнения на $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Тогда p и q запишутся в виде

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

В этом случае длина вектора p будет равна единице.

7. Решение. Сначала запишем уравнение плоскости в нормальной форме. Поделим уравнение

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

на $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$. Получим

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0.$$

Вычислим расстояние от точки до плоскости:

$$|\delta| = \left|\frac{2}{3}x_1^0 - \frac{1}{3}x_2^0 + \frac{2}{3}x_3^0 - 1\right| = \left|\frac{2\cdot 2}{3} - \frac{1\cdot 4}{3} - \frac{2\cdot 3}{3} - 1\right| = 3.$$

8. $|\delta| = 3/2$.

9. $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 94 = 0$. Указание. Запишите нормальное уравнение плоскости. Сначала вычислите вектор $p = (x^2 - x^1)/|x^2 - x^1|$. Затем, используя то, что точка x^2 принадлежит плоскости, найдите q.

10. $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$.

11. $(-12, -4, 18)$. Указание. Привести уравнение плоскости к нормальному виду. Учесть, что если $q < 0$, то плоскость сдвигается от начала координат в направлении противоположном относительно вектора p. По условию задачи искомый вектор x^0 должен быть направлен противоположно вектору p и $|x^0| = 2|q|$.

12. $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 49 = 0$.

13. $|\delta| = 0$.

14. *a*) Плоскость проходит через начало координат; *b*) плоскость перпендикулярна плоскости x_1x_3, параллельна оси x_2; *c*) плоскость параллельна плоскости x_1x_3.

15. $6x_1 + x_2 - 10x_3 + 25 = 0$.

16. $\alpha = -6$, $\beta = 4$, $\gamma = 12$.

17. $x_2 + 5 = 0$.

18. Указание. Используйте геометрический смысл векторов

$$n^1 = (a_1, b_1, c_1), \quad n^2 = (a_2, b_2, c_2)$$

и формулу (2), с. 41, косинуса угла между векторами.

§ 6. Уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e, имеет вид (см. рис. 1)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{1}$$

Запишем это уравнение в координатной форме и исключим параметр θ, получим *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{2}$$

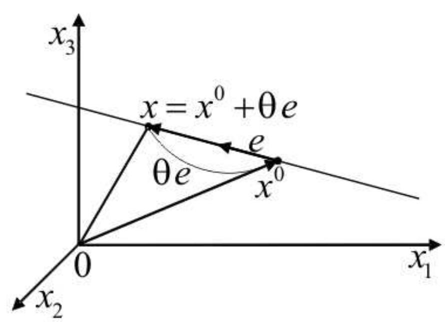

Рис. 1. Прямая в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки x^1 и x^2, можно записать в векторной форме

$$x = x^1 + \theta(x^2 - x^1), \quad -\infty < \theta < \infty, \tag{3}$$

и в координатной форме

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \frac{x_3 - x_3^1}{x_3^2 - x_3^1}. \tag{4}$$

Прямую можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Для того, чтобы преобразовать уравнения прямой (5) к каноническим уравнениям, нужно найти точку x^0, через которую проходит прямая и ее направляющий вектор e. В качестве точки x^0 можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют уравнению (5). Направляющий вектор прямой будет перпендикулярен нормальным векторам плоскостей $n^1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $n^2 = (a_2, b_2, c_2)$, поэтому его можно задать как их векторное произведение

$$e = [(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)].$$

Пример. Найдем уравнение прямой l, по которой пересекаются плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0.$$

Предположим, что прямая пересекает плоскость x_1x_2, т. е. $x_3 = 0$. Подставим $x_3 = 0$ в систему и найдем остальные координаты точки

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы: $x_1 = -1/5$, $x_2 = -17/5$, т. е. точка

$$x^0 = (-1/5, -17/5, 0)$$

принадлежит прямой l. Направляющий вектор e прямой l определим по формуле

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \tag{6}$$

или $e = (-1, 18, 10)$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x_1 + 1/5}{-1} = \frac{x_2 + 17/5}{18} = \frac{x_3}{10}.$$

Расстояние d от прямой l, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e, до точки x^1 вычисляется по формуле (см. рис. 2, a)

$$d = \frac{|[e, x^1 - x^0]|}{|e|}.$$

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

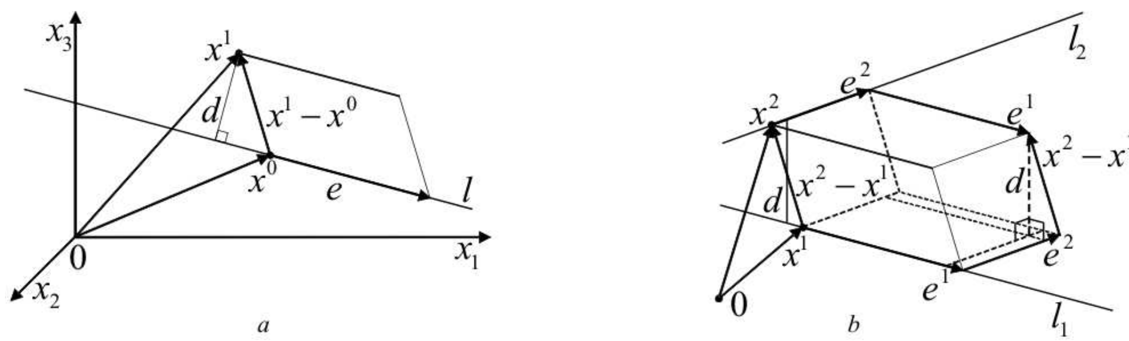

Рис. 2. К вычислению расстояния от точки до прямой (a) и между прямыми (b).

Формула, по которой можно вычислить расстояние d между прямыми l_1 и l_2, имеет следующий вид (см. рис. 2, b):

$$d = |(e^1, e^2, x^2 - x^1)|/|[e^1, e^2]|.$$

Углы между прямыми и плоскостями вычисляются как углы между соответствующими направляющими (для прямых) и нормальными векторами (для плоскостей). Например, косинус угла φ между двумя прямыми с направляющими векторами e^1 и e^2 можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

Условия ортогональности и параллельности прямых и плоскостей записываются через условия ортогональности и параллельности соответствующих направляющих векторов e и нормальных векторов n. Так, если прямая и плоскость ортогональны, то векторы e и n коллинеарны; условие параллельности прямой и плоскости следующее:

$$(e, n) = 0.$$

Упражнения

1. Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в уравнении прямой (2) обращается в нуль.

2. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 9 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

3. Из точки $(3, -2, 4)$ опустить перпендикуляр на плоскость

$$5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 1 = 0.$$

4. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $x^1 = (3, 1 - 2)$ и через прямую

$$\frac{x_1 - 4}{5} = \frac{x_2 + 3}{2} = \frac{x_3}{1}.$$

5. Положение зеркала определяется уравнением

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 42 = 0.$$

С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки $x^0 = (3, -7, 5)$?

6. Определить косинус угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 6x_3 - 2 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

7. При каком значении коэффициента α плоскость

$$\alpha x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 1 = 0$$

будет параллельна прямой $\dfrac{x_1 - 1}{4} = \dfrac{x_2 + 2}{3} = \dfrac{x_3}{1}$?

8. Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{x_2 + 3}{-1} = \dfrac{x_3 + 2}{5}$ на плоскости $4x_1 + 3x_2 - x_3 + 3 = 0$.

9. Проверить, что прямые $\dfrac{x_1 - 3}{5} = \dfrac{x_2 + 1}{2} = \dfrac{x_3 - 2}{4}$ и $\dfrac{x_1 - 8}{3} = \dfrac{x_2 - 1}{1} = \dfrac{x_3 - 6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.

10. Можно ли через прямую $\dfrac{x_1 - 7}{4} = \dfrac{x_2 - 5}{3} = \dfrac{x_3 - 1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x_1 + x_2 - 7x_3 + 1 = 0$?

11. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$.

12. Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x_1 - 1}{4} = \dfrac{x_2}{7} = \dfrac{x_3 - 2}{3}$ на плоскости $5x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 1 = 0$.

13. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $x^0 = (2, 3, 1)$ на прямую $\dfrac{x_1+1}{2} = \dfrac{x_2}{-1} = \dfrac{x_3-2}{3}$.

14. Вычислить направляющие косинусы прямой

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 21 = 0, \\ x_1 - x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

15. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\dfrac{x_1+2}{4} = \dfrac{x_2-3}{5} = \dfrac{x_3-1}{-2}$.

16. Через прямую $\dfrac{x_1-2}{5} = \dfrac{x_2-3}{1} = \dfrac{x_3+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 7 = 0$.

17. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми:

$$\frac{x_1-9}{4} = \frac{x_2+2}{-3} = \frac{x_3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2+7}{9} = \frac{x_3-2}{2}.$$

Ответы, указания и решения

1. Решение. Если какая-то из координат вектора e равна 0, например $e_3 = 0$, то канонические уравнения принимают вид

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2}, \quad x_3 - x_3^0 = 0.$$

В этом случае направляющий вектор прямой $e = (e_1, e_2, 0)$, а сама прямая лежит в плоскости, перпендикулярной оси x_3 и пересекающей ее в точке с координатой $x_3 = x_3^0$.

2. $\dfrac{x_1}{9} = \dfrac{x_2}{5} = \dfrac{x_3+3}{1}$. Указание. При составлении уравнений воспользоваться точкой $x^0 = (0, 0, -3)$.

3. $\dfrac{x_1-3}{5} = \dfrac{x_2+2}{3} = \dfrac{x_3-4}{-7}$.

4. $8x_1 - 9x_2 - 22x_3 - 59 = 0$. Указание. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2. Заданное в формулировке упражнения уравнение прямой определяет точку x^0 и вектор e^1. Вектор e^2 может быть найден в виде $e^2 = x^1 - x^0$, где x^1 есть заданная точка.

5. $(9/7, -13/7, 17/7)$. Указание. Приведите уравнение плоскости к нормальному виду, найдите вектор p и вычислите расстояние от точки x^0 до плоскости. По условию задачи это расстояние должно быть в два раза меньше расстояния от точки x^0 до искомой точки x^1. Как должен быть направлен вектор $x^0 - x^1$ относительно вектора p? Сделайте рисунок.

6. $\cos\varphi = 98/195$.

7. $\alpha = -1$.

8. Прямая лежит на плоскости.

9. $8x_1 - 22x_2 + x_3 - 48 = 0$. Указание. Вычислите расстояние между прямыми и убедитесь, что оно равно нулю. Напишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и натянутой на два неколлинеарных вектора.

10. Нельзя. Указание. Вычислите скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости. Оно не равно нулю. Следовательно, данная прямая пересекает плоскость, а потому и всякая плоскость, проходящая через нее, пересечет данную плоскость.

11. $\dfrac{x_1}{x_1^0} = \dfrac{x_2}{x_2^0} = \dfrac{x_3}{x_3^0}$.

12. Прямая не лежит на плоскости.

13. $\dfrac{x_1 - 2}{3} = \dfrac{x_2 - 3}{3} = \dfrac{x_3 - 1}{-1}$. Решение. В формулировке задачи дана прямая l_1, проходящая через точку $x^1 = (-1, 0, 2)$ в направлении вектора $e^1 = (2, -1, 3)$. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $x^0 = (2, 3, 1)$ перпендикулярно l_1, имеют вид

$$\frac{x_1 - 2}{e_1} = \frac{x_2 - 3}{e_2} = \frac{x_3 - 1}{e_3}.$$

Необходимо найти координаты направляющего вектора $e = (e_1, e_2, e_3)$ этой прямой. Сначала найдем плоскость π, в которой лежит искомый перпендикуляр. Построим уравнение плоскости π, проходящей через точку x^0 и натянутой на векторы e^1 и $e^2 = x^0 - x^1 = (3, 3, -1)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & 2 & 3 \\ x_2 - 3 & -1 & 3 \\ x_3 - 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости π:

$$-8x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 58 = 0.$$

Вектор e должен быть ортогонален нормальному к этой плоскости вектору $n = (-8, 11, 9)$:

$$(e, n) = -8e_1 + 11e_2 + 9e_3 = 0.$$

Кроме того, вектор e должен быть ортогонален направляющему вектору e^1 прямой l_1:

$$(e, e^1) = 2e_1 - e_2 + 3e_1 = 0.$$

Итак, получили два уравнения для определения трех неизвестных. Ясно, что искомый вектор определяется с точностью до множителя, поэтому мы можем зафиксировать любую его координату. Положим, например, $e_3 = -1$ и найдем $e_1 = e_2 = 3$.

14. $\dfrac{e}{|e|} = \left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{7}{11}, \dfrac{6}{11}\right)$.

15. $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$.

16. $11x_1 - 17x_2 - 19x_3 + 10 = 0$. Решение. По условию задачи должны быть компланарны следующие векторы: $x - x^0$, где x — произвольная точка искомой плоскости π, $x^0 = (2, 3, -1)$ — точка, через которую проходит заданная прямая l; $e = (5, 1, 2)$ — направляющий вектор прямой l; $n = (1, 4, -3)$ — вектор, нормальный к заданной плоскости. Условие компланарности этих трех векторов определяет уравнение плоскости π:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & 5 & 1 \\ x_2 - 3 & 1 & 4 \\ x_3 + 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости π.

17. $d = 7$.

Глава 4

Системы линейных уравнений, матрицы, определители

§ 1. Перестановки. Определители

Рассмотрим множество n целых чисел: $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой*.

Будем говорить, что числа n_i, n_j, где $i < j$, в перестановке

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_n$$

образуют *инверсию*, если $n_i > n_j$. Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать через

$$\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)$$

и называть *сигнатурой* перестановки.

Перестановка называется *четной*, если ее сигнатура четное число. В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Пример. Вычислим сигнатуру перестановки

$$1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.$$

Для того, чтобы определить сигнатуру, сосчитаем количество инверсий, которое образует каждое число в перестановке:
число 1 меньше всех и не имеет инверсий;
число 2 не образует инверсий;
число 3 стоит раньше 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;
число 4 не образует инверсий;
число 5 стоит раньше числа 4 и образует 1 инверсию;
число 6 — 4 инверсии (так как стоит раньше чисел 3,2,5,4);
число 7 не имеет инверсий;
число 8 не образует инверсий;
число 9 имеет 7 инверсий, так как стоит раньше чисел 6,3,2,5,4,7,8.
Итак, сигнатура исходной перестановки равна

$$\sigma = 1 + 1 + 4 + 7 = 13.$$

Пример. Найдем сигнатуру перестановки

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n.$$

Аналогично решению предыдущего примера, вычислим количество инверсий, которое образует каждый символ исходной перестановки:
число 1 не образует инверсий;
число 3 стоит раньше 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;
число 5 стоит раньше 2 и 4, поэтому образует 2 инверсии;
число 7 стоит раньше 2, 4, 6 и образует 3 инверсии и т. д.

Наконец, число $2n-1$ стоит раньше чисел $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n-2$, следовательно, образует $n-1$ инверсию. Остальные числа перестановки входят в инверсии, которые нами были уже подсчитаны. Таким образом, сигнатура исходной перестановки равна

$$\sigma = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Квадратной матрицей порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — числа, вообще говоря, комплексные.

Определителем матрицы A называется число

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}. \tag{2}$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1, n_2, \ldots, n_n$ четная, и со знаком минус — в противоположном случае.

Говорят, что элементы $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \ldots, a_{nn_n}$ составляют *диагональ* матрицы. Диагональ называется *четной*, если перестановка $n_1, \ldots, n_n$ четная и *нечетной* — в противном случае.

Пример. Выясним, какие из следующих произведений входят в выражения определителей соответствующих порядков и с каким знаком: 1) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; 2) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

Решение

1) Из вторых индексов данного произведения составим перестановку $3, 2, 1, 6, 5, 4$. Данная перестановка является четной, так как сигнатура σ равна 6. Таким образом, произведение

$$a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$$

входит в определитель шестого порядка со знаком плюс.

2) Перепишем исходное произведение таким образом, чтобы первые индексы были в порядке возрастания:

$$a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62} = a_{17}a_{21}a_{34}a_{46}a_{54}a_{62}a_{73}.$$

Множество, составленное из вторых индексов исходного произведения $7, 1, 4, 6, 4, 2, 3$, не является перестановкой чисел от одного до семи, поэтому произведение

$$a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$$

не является членом определителя.

Для определителей произвольного порядка справедливы все свойства, которые мы уже установили для определителей третьего порядка (см. § 2, с. 28). В частности, *минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Для любого определителя $|\mathrm{A}|$ выполняются формулы разложения определителя по строке или по столбцу:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Пример. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками:

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5+9 & 0 & -34+36 & -23+24 \\ 1+3 & 0 & 3+12 & -7+8 \\ -9+6 & 0 & 8+24 & -15+16 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta = 10 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, имеем

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

Упражнения

1. Вычислить сигнатуры перестановок:

a) $6, 3, 1, 2, 5, 4$;

b) $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2$.

2. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

c) $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

3. Используя только определение определителя, докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним, что слева — определитель порядка n, а справа — порядка $n-1$.

4. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определители четвертого порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $b)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$,

$c)$ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$, $d)$ $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Вычислить определители пятого порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, $b)$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить сигнатуры перестановок:

$a)$ $1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5$;

$b)$ $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4$;

$c)$ $2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1$.

8. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

$a)$ $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

$b)$ $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\dots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$;

$c)$ $a_{12}a_{23}a_{34}\dots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \le k \le n$.

9. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определители 4-го порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \qquad d) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

11. Вычислить определители 5-го порядка:

$$a) \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad d) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

12. Докажите, что если одна из строк (или один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю.

13. Докажите, что определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу).

14. Докажите, что при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, используя предыдущее свойство, а также то, что если в определителе две строки (или два столбца) совпадают, то он равен нулю.

15. Докажите, что определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов определителя.

Ответы, указания и решения

1. a) 8. b) 18.

2. a) Входит со знаком минус. b) Не является членом определителя. c) Входит со знаком $(-1)^{n-1}$.

3. Указание. Воспользоваться определением (2) определителя, а именно тем, что слагаемыми определителя служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца.

4. $8a + 15b + 12c - 19d$.

5. a) -3, b) 54, c) 18, d) 4.

6. a) -24, b) -60.

7. a) 10. b) 18. c) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

8. a) Входит со знаком плюс. b) Входит со знаком $(-1)^n$. c) Не является членом определителя.

9. $2a - 8b + c + 5d$.

10. a) 16, b) 160, c) 18, d) 17.

11. a) 192, b) 220, c) -98, d) -34.

12. Доказательство сразу же следует из того, что каждая диагональ матрицы A в этом случае содержит нулевой элемент.

13. Решение. Докажем, например, что определитель произвольного порядка линеен по первой строке, т.е.

$$\sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\ldots,n_n)} (\alpha a_{1n_1} + \beta b_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \alpha \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\ldots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} +$$

$$+\beta \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\ldots,n_n)} b_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Для этого заметим, во первых, что если элементы первой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей:

$$\sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\ldots,n_n)} (a_{1n_1} + b_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} +$$

$$+ \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)} b_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Во вторых, общий множителей элементов первой строки можно вынести за знак определителя:

$$\sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)} (\alpha a_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \alpha \sum_{n_1 n_2 \ldots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \ldots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

14. Решение. Докажем, например, что если в определителе произвольного порядка поменять местами две первые строки, то знак его изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Действительно, заметим во-первых, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \ldots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \ldots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

так как у этого определителя две первые строки совпадают. Последовательно используя свойство линейности определителя для первой и для второй строки, левую часть этого равенства можно записать в виде суммы четырех слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \ldots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \ldots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Первое и последнее слагаемые этой суммы равны нулю (эти определители имеют равные строки), поэтому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

т. е. доказываемое свойство справедливо.

15. Решение. Докажем, например, что определитель произвольного порядка не изменится, если к первой его строке добавить вторую, умноженную на произвольное число. Действительно, используя свойство линейности определителя по первой строке, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & \dots & a_{1n}+\alpha a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Последний определитель равен нулю, так как его первая и вторая строки совпадают.

§ 2. Вычисление определителей произвольного порядка

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Он равен произведению элементов стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Пример. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Приведем определитель Δ к треугольному виду. Для этого достаточно ко всем строкам определителя прибавить первую строку. Таким образом получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!.$$

Справедливы равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

В этом несложно убедиться, заметив, что

$$\sigma(n, n-1, \dots, 2, 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Выполним следующие операции: из n-го столбца вычтем $(n-1)$-ый, из $(n-1)$-го столбца вычтем $(n-2)$-ой и так далее, в итоге получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} n.$$

Пример. Вычислим определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что сумма всех элементов любой строки (или столбца) данного определителя равна $2n+1$. Поэтому, если прибавить к первой строке все остальные строки определителя, то можно вынести общий множитель за скобку. В результате получим

$$\Delta = (2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку, умноженную на 2, из всех остальных строк определителя, получим определитель треугольного вида:

$$\Delta = (2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (2n+1).$$

Определителем Вандермонда n-го порядка называется определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

Упражнения

1. Вычислить определители[1] методом приведения их к треугольному виду:

$$a)\ \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1+b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2+b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix},$$

[1]Всюду, где по виду определителя нельзя узнать его порядок, предполагается, что порядок равен n.

$$f)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определители, используя определитель Вандермонда:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix},$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \dots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix},$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix},$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$f)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель, используя определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

Ответы, указания и решения

1. *a*) $x_1 \cdot (x_2 - a_{12}) \cdot (x_3 - a_{23}) \cdot \ldots \cdot (x_n - a_{n-1,n})$. Указание. Вычесть соседние строки, начиная с последней, т. е. из n строки вычесть $(n-1)$, затем из $(n-1)$ строки вычесть $(n-2)$ и т. д.

b) $(-1)^{n(n+1)/2} b_1 b_2 \ldots b_n$. Указание. Первую строку умножить на a_1 и вычесть из второй строки, затем первую строку умножить на a_2 и вычесть из третьей строки и т. д.

c) $x_1 x_2 \ldots x_n \cdot \left(\dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{x_n}\right)$. Указание. 1) Из первого столбца вынести множитель x_1, из второго столбца вынести множитель x_2 и т. д. 2) Все полученные столбцы прибавить к первому. 3) Разложить по первому столбцу.

d) $(-1)^{(n^2-n+2)/2} \cdot 2(n-2)!$. Указание. 1) Вычесть вторую строку из всех строк определителя, которые стоят ниже. 2) Первую строку умножить на 2 и вычесть из второй строки.

e) $(-1)^{n-1} \cdot n!$. Указание. Вычесть n-ю строку из остальных строк определителя.

f) $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)$. Указание. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Вынести общий множитель в первом столбце. 3) Вычесть первый столбец из остальных столбцов определителя.

2. *a*) $1!2!3!\ldots n!$, *b*) $2^{n(n-1)/2} \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \sin\dfrac{\varphi_i + \varphi_j}{2} \sin\dfrac{\varphi_i - \varphi_j}{2}$.

3. *a*) $(n-1)!$ Указание. Первый столбец умножить на 2 и вычесть из второго столбца, затем первый столбец умножить на 3 и вычесть из третьего столбца и т. д.

b) $b_1 b_2 \ldots b_n$. Указание. Первый столбец умножить на a_1 и вычесть из второго столбца, затем первый столбец умножить на a_2 и вычесть из третьего столбца и т. д.

c) 0. Указание. Все столбцы прибавить к первому столбцу определителя.

d) $(-1)^{n(n+1)/2} \cdot (n+1)^{n-1}$. Указание. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Первый столбец прибавить к остальным столбцам определителя.

e) $(2n-1) \cdot (n-1)^{n-1}$. Указание. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Вынести общий множитель в первом столбце. 3) Вычесть первый столбец из остальных столбцов определителя.

f) $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$. Указание. 1) Вычесть последние строки, начиная с последней строки. 2) Разложить по первому столбцу. 3) Все столбцы прибавить к первому столбцу определителя. 4) Разложить по первому столбцу определителя.

4. $2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}\cos\dfrac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_j}{2}$.

§ 3. Матрицы. Операции над матрицами

Прямоугольная таблица чисел a_{ij} (вообще говоря, комплексных), состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* $A(m,n)$ *размера* $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые частные случаи. При $m = n$ получаем *квадратную матрицу порядка* n.

Если $m = 1$, а n произвольно, получаем *матрицу-строку* (или, просто, *строку*)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Говорят, что эта строка имеет *длину* n. Если $n = 1$, а m произвольно, получаем *матрицу-столбец* (или, просто, *столбец*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Говорят, что этот столбец имеет *длину* m. Столбцы и строки часто называют *векторами.*

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы — нули. Нулевая матрица обозначается символом 0.

Единичной матрицей порядка n называется квадратная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц $A(m,n)$ и $B(m,n)$ называется матрица

$$C = A + B$$

того же размера, что и матрицы A и B, каждый элемент которой есть сумма соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Произведением матрицы $A(m,n)$ *на число* α называется матрица

$$B = \alpha A$$

того же размера, что и матрица A, с элементами

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем линейную комбинацию $4A - 5B - \alpha I$:

$$4A - 5B - \alpha I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7-\alpha & -9 & -10 \\ 22 & 11-\alpha & -23 \\ -12 & -6 & 40-\alpha \end{pmatrix}.$$

По определению *произведение строки* x *и столбца* y одинаковой длины n есть число

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 + (-2)\cdot 6 + 3\cdot 7 + (-4)\cdot 8 = -18.$$

Произведением матриц $A(m,n)$ *и* $B(n,p)$ называется такая матрица

$$C(m,p) = A(m,n)B(n,p),$$

что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad (1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Поясним, что элемент c_{ij} есть результат умножения i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. Произведение матриц определено, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность);

2) $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность);

3) $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность);

Отметим, что $AB \neq BA$, т. е. коммутативность в общем случае не имеет места. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными матрицами.*

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение AB этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2(-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 7(-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1(-1) & 1 \cdot 5 + 0(-2) + 8(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не определено, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Пример. Докажем, что для любого целого $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Используем метод математической индукции. Для $n = 1$ это равенство очевидно имеет место. По предположению индукции

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к A. Поясним, что матрицы A и A^T состоят из одних и тех же элементов. Первая строка матрицы A^T составлена из элементов первого столбца матрицы A, вторая строка — из элементов второго столбца матрицы A и т. д.

Упражнения

1. Убедиться, что операция сложения матриц обладает следующими свойствами:
1) $A + 0 = A$,
2) $A + B = B + A$,
3) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.
Здесь A, B, C — произвольные матрицы одинакового размера.

2. Убедиться, что операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:
1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
Здесь α, β — любые комплексные числа; A, B — произвольные матрицы одинакового размера.

3. Проверить, что единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка: $AI = IA = A$.

4. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют) и проверить являются ли матрицы перестановочными:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

6. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?

7. Верны ли равенства:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$? 2) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$?
3) $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$? 4) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?
5) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? 6) $(A^T)^T = A$?

8. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют) и проверить являются ли матрицы перестановочными:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Найти линейные комбинации матриц:

$$a) \quad A - \alpha I, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & -8 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad 4A - 7B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Пусть P_{ik} — *матрица перестановки*, т. е. получена из единичной матрицы перестановкой строк с номерами i, k. Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перестановкой элементов с номерами i, k.

11. Как следствие показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k.

12. Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

13. Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы, то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

14. Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению *элементарных нижних треугольных матриц*

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

15. Известно, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k справедливо равенство

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

Опираясь на него, предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы, показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \, \det A.$$

Ответы, указания и решения

1. Указание. Используйте свойства операции сложения комплексных чисел.

2. Указание. Используйте свойства операции умножения комплексных чисел.

3. Указание. Используйте определение произведения матриц.

4. *a*) $AB = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 30 & -26 \\ 46 & 44 & -6 & 112 \\ 70 & -44 & -38 & -20 \\ 6 & 72 & -30 & -8 \end{pmatrix}$,

$$BA = \begin{pmatrix} -8 & -30 & 72 & 6 \\ -20 & -38 & -44 & 70 \\ 112 & -6 & 44 & 46 \\ -26 & 30 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, произведение BA не определено.

5. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Да, например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Указание. Воспользоваться тем, что однородная система линейных уравнений с вырожденной матрицей имеет нетривиальное решение.

7. 1) Да, 2) да, 3) да, 4) нет, 5) нет, 6) да.

8. *a*) $AB = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$,

b) $AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Матрицы перестановочные.

9. *a*) $\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & -3 \\ 4 & -\alpha & 5 \\ 6 & -7 & -8-\alpha \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$.

10. Указание. Записать матрицу P_{ik} произвольного порядка и умножить ее на столбец x.

11. Указание. Пусть $P_{ik}A = B$. Используя предыдущее упражнение, заметить, как получается каждый столбец матрицы B из соответствующего столбца матрицы A.

12. Указание. Использовать то, что если в определителе поменять местами две строки, то знак его изменится на противоположный.

13. Решение. Выполним упражнение для нижних треугольных матриц. Пусть $a_{ik} = 0$, если $k > i$; $b_{kj} = 0$, если $j > k$. Используем формулу (1):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $j > i$, то $c_{ij} = 0$, т. к. в последнем равенстве в каждом слагаемом либо $a_{ik} = 0$, либо $b_{kj} = 0$, либо оба сомножителя равны нулю.

14. Решение. Проведем вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок: $L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n)\ldots)$, т. е. сначала перемножим $L_{n-1}L_n$, результат умножим слева на L_{n-2} и т. д. Имеем

$$L_{n-1}L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$L_{n-2}L_{n-1}L_n =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{nn-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{n-1n-2} & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l_{nn-2} & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ l_{n-11} & l_{n-12} & \ldots & l_{n-1n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} = L.$$

15. Указание. Докажите, что $\det(LA) = l_{11} l_{22} \cdots l_{nn} \det A$.

§ 4. Обратная матрица. Некоторые классы матриц

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = AA^{-1} = I$. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Присоединенной матрицей к квадратной матрице A называется матрица $\widetilde{A}$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} матрицы A.

Если квадратная матрица A *невырождена* (т. е. $|A| \neq 0$), то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \tag{1}$$

Пример. Найдем матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем $|A|$ — определитель матрицы A:

$$|A| = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 1 =$$

$$= 84 + 96 - 105 - 48 = 27.$$

Теперь найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства обратной матрицы:

1) матрица A^{-1} невырождена, $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) если матрицы A, B невырождены, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \tag{2}$$

3) если матрица A невырождена, то матрица A^T невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Матричные уравнения с неизвестной матрицей X записываются следующим образом:

$$AX = B, \tag{3}$$

$$XA = B, \tag{4}$$

$$AXC = B. \tag{5}$$

В этих уравнениях A, B, C, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения корректны и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы соответствующих размеров. Если в уравнениях (3), (4) матрица невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B, \tag{6}$$

$$X = BA^{-1}. \tag{7}$$

Если в уравнении (5) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица $A^* = (\bar{A})^T$ называется *сопряженной* по отношению к матрице A. Поясним, что элементы матрицы $\bar{A}$ комплексно сопряжены по отношению к элементам матрицы A.

Квадратная матрица A называется *эрмитовой* (*самосопряженной*), если $A = A^*$. Квадратная матрица A называется *косоэрмитовой*, если $A = -A^*$.

Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют *вещественными* матрицами.

Вещественная эрмитова матрица A называется *симметричной.* Для такой матрицы $A = A^T$. Вещественная матрица A называется *кососимметричной*, если $A = -A^T$.

Квадратная матрица A называется *унитарной*, если $AA^* = I$ и $A^*A = I$, иными словами, если $A^{-1} = A^*$.

Вещественная унитарная матрица A называется *ортогональной* матрицей, для нее $AA^T = I$ и $A^TA = I$, т. е. $A^{-1} = A^T$.

Квадратная матрица A называется *нормальной*, если она перестановочна с матрицей A^*, т. е. $AA^* = A^*A$.

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов. Действительно, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, но $A \neq A^*$, $A \neq -A^*$, $AA^* \neq I$.

Упражнения

1. Найти обратную матрицу, вычислив присоединенную:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричные уравнения:

$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$b)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Показать, что

$$a)\ (A^*)^* = A, \quad b)\ (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad c)\ (A+B)^* = A^* + B^*.$$

4. Доказать, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

5. Проверить, что диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, равных единице по модулю (n — порядок матрицы), является унитарной.

6. Проверить, что матрица перестановки P_{ik} является ортогональной.

7. Проверить, что матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число, является ортогональной.

8. Убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы.

9. Найти обратную матрицу, вычислив присоединенную:

$a)$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Решить матричные уравнения:

$a)$ $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$b)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где α, β — произвольные вещественные числа, является нормальной. При каких условиях на α и β она является симметричной, кососимметричной, ортогональной?

12. Пусть матрицы A_1, $A_2, \ldots, A_p$ невырождены. Показать, что

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

13. Пусть P_{ik} — матрица перестановки. Показать, что

$$P_{ik}^{-1} = P_{ik}.$$

14. Пусть

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{k,k} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей. Показать, что аналогичное верно и для верхней треугольной матрицы.

Ответы, указания и решения

1. $a)$ $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b)$ обратной матрицы не существует, $c)$ $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $a)$ $X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b)$ $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Указание. Использовать определение сопряженной матрицы и свойства транспонирования матриц (см. упр. 7, с. 93).

4. Указание. Воспользоваться определением унитарной матрицы и равенством $(AB)^* = B^*A^*$.

5. Указание. Вычислить сопряженную матрицу и воспользоваться определением унитарной матрицы.

6. Указание. Заметить, что $P_{ik}^T = P_{ik}$, и воспользоваться определением ортогональной матрицы.

7. Указание. Вычислить $Q_2^T(\varphi)$ и воспользоваться определением ортогональной матрицы.

8. Указание. Использовать соответствующие определения.

9. $a)\ \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b)\ \dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix}$,
$c)\ \dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$.

10. $a)\ X = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $b)\ X = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

11. Указание. Вычислить A^T, AA^T и A^TA. Используя соответствующие определения, проверить, что матрица A является нормальной при любых вещественных α и β, симметричной — при $\beta = 0$, кососимметричной — при $\alpha = 0$, ортогональной — при $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

12. Указание. Использовать свойство (2) обратной матрицы.

13. Указание. Использовать определение обратной матрицы, равенство $P_{ik}^T = P_{ik}$ и упражнение 6.

14. Указание. Проверить, что $L_kL_k^{-1} = L_k^{-1}L_k = I$.

15. Указание. Использовать упражнения 14, с. 94, 12, с. 101, 14, с. 101, и 13, с. 94: представить матрицу L в виде произведения элементарных нижних треугольных матриц, вычислить обратную.

§ 5. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим крамеровскую систему уравнений

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

есть заданная невырожденная матрица, $b = (b_1, b_2, .., b_n)^T$ — заданный столбец правой части, вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ надо найти. Эту систему можно решить методом Гаусса. Он состоит из двух последовательных этапов: прямого и обратного хода.

Опишем прямой ход.

1. Элемент, стоящий в первой строке матрицы на главной диагонали, обозначен символом a_{11}.

1.1. Пусть $a_{11} \neq 0$. Разделим первую строку матрицы A на a_{11}. Из всех остальных строк вычтем первую строку матрицы A, умноженную на соответствующие элементы первого столбца так, чтобы в первом столбце во всех строках, начиная со второй, получились нули. Те же действия произведем с вектором b.

1.2. Пусть $a_{11} = 0$. Найдем в первом столбце матрицы элемент отличный от нуля (допустим, это элемент a_{j1}, его называют *ведущим элементом*). Поменяем в матрице A 1-ую и j-ую строки местами. Поменяем в столбце b 1-й и j-й элемент местами. Выполним пункт 1.1.

2. Обозначим элемент, стоящий во второй строке на главной диагонали матрицы, полученной на предыдущем шаге, символом a'_{22}.

2.1. Если $a'_{22} \neq 0$, его можно выбрать в качестве ведущего. Разделим на него вторую строку матрицы и вычтем из всех строк начиная с третьей вторую строку, умноженную на соответствующие элементы второго столбца так, чтобы во втором столбце во всех строках, начиная с третьей, были нули. Те же действия произведем с вектором b.

2.2. Если $a'_{22} = 0$, найдем ниже во втором столбце матрицы ведущий элемент отличный от нуля и поменяем две соответствующие строки матрицы и два соответствующих элемента вектора правой части местами. Выполним пункт 2.1.

3. Аналогичные действия повторим для остальных строк.

Замечания. Если не заботиться об ошибках округления, на каждом шаге прямого хода метода Гаусса в качестве ведущего элемента можно выбирать любой ненулевой элемент, в реальных вычислениях на компьютере выбирают максимальный по модулю элемент столбца. Определитель матрицы равен произведению ведущих элементов, умноженному на -1, если в ходе реализации прямого хода метода Гаусса сделано нечетное число перестановок строк (если это число четное, на -1 умножать не надо).

Таким образом, мы приведем матрицу к треугольному виду. Получится следующая система уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & ... & a'_{1n} \\ 0 & 1 & a'_{23} & ... & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & ... & a'_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ ... \\ b'_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Опишем обратный ход метода Гаусса. Решая систему (1) последовательно, начиная с последнего уравнения, будем находить неизвестные. Из последнего уравнения заключаем $x_n = b'_n$. Подставим это значение в предыдущее уравнение и найдем x_{n-1}. Продолжая этот процесс, найдем все остальные неизвестные.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{array}{lclclcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, вектор правой части $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Выполним прямой ход метода Гаусса. Имеем $a_{11} = 2$. Разделим на 2 первую строку матрицы. Обнулим элементы первого столбца, расположенные во второй и третьей строке. Для этого из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на 3, из третьей строки матрицы вычтем первую. Те же действия производим со столбцом b. После выполненных действий получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ и вектор правой части $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}$. Удобно записывать преобразование над строками матрицы и вектором правой части в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -12 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -24/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -24/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход.
Из последнего уравнения получим $x_3 = 2$.
Из второго уравнения найдем $x_2 = -24/5 + (7/5) \cdot 2 = -2$.
Из первого уравнения найдем $x_1 = 5 - (5/2) \cdot 2 - (3/2) \cdot (-2) = 3$.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 0. \end{array}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, правая часть $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Выполним прямой ход метода Гаусса. Элемент матрицы $a_{11} = 1$. Обнулим элементы первого столбца, расположенные во второй, третьей и четвертой строке. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей и четвертой строки вычтем первую строку. Те же действия производим со столбцом b. После выполненных действий получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и правую часть $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
В полученной матрице элемент $a'_{22} = 0$. Найдем во втором столбце этой матрицы элемент отличный от нуля. Это элемент a'_{32}, поэтому поменяем местами вторую и третью строку в матрице и столбце b.
Получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычтем из четвертой

строки вторую, умноженную на 2. Таким образом получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход.
Из последнего уравнения получим $x_4 = 2$.
Из третьего уравнения найдем $x_3 = 1 - 2 = -1$.
Из второго уравнение найдем $x_2 = -2 - (-1) = -1$.
Из первого уравнения найдем $x_1 = 2 - 2 + 1 + 1 = 2$.

Упражнения

Решить системы уравнений методом Гаусса.

1. $$\begin{array}{l} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 1 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 + 32 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 8 = 0. \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 35, \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & + & 15x_5 & = & 70, \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & + & 35x_5 & = & 126. \\
x_1 & + & 5x_2 & + & 15x_3 & + & 35x_4 & + & 70x_5 & = & 210.
\end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4, \\
6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1, \\
5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3.
\end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2, \\
2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0, \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -10.
\end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2, \\
x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3.
\end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6, \\
6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8, \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8.
\end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
6x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 4 & = & 0, \\
9x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & - & 13 & = & 0, \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 1 & = & 0, \\
3x_1 & - & 9x_2 & & & + & 2x_4 & - & 11 & = & 0.
\end{array}$$

12.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & -1, \\
x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8, \\
2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4.
\end{array}$$

Ответы

1. $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

2. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1.$

3. $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 0.$

4. $x_1 = -0.4$, $x_2 = -1.2$, $x_3 = 3.4$, $x_4 = 1.$

5. $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1/2$, $x_4 = 2/3.$

6. $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1.$

7. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

8 $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.

9. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

10 $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

11. $x_1 = 2/3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3/2$, $x_4 = 0$.

12. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -3/2$, $x_4 = 1/2$.

Глава 5

Линейные пространства

§ 1. Определение линейного пространства

Говорят, что множество $\mathbf{X}$ является *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент $z = x + y \in \mathbf{X}$, называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент $\alpha x \in \mathbf{X}$, называемый *произведением* α и x. Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbf{X}$ такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbf{X}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\mathbf{X}$;

4) для любого элемента $x \in \mathbf{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x+x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β, то множество $\mathbf{X}$ называется *комплексным линейным пространством.*

Приведем некоторые важные примеры линейных пространств.

1. Вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ — множество всех упорядоченных наборов вещественных чисел вида

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся следующим образом. По определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$ есть вектор, все компоненты которого равны нулю:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Противоположный к x элемент определяется следующим образом:

$$x' = -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

2. Комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ комплексных чисел, где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции, нулевой и противоположный элементы в этом пространстве вводятся так же, как в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что $\mathbb{C}^1$ и $\mathbb{R}^1$ одновременно являются и линейными пространствами и множествами всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{C}^1$ через $\mathbb{C}$, а $\mathbb{R}^1$ через $\mathbb{R}$.

3. Множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц естественно интерпретировать как пространство $\mathbb{C}^{mn}$ векторов длины $m \cdot n$. В этом случае векторы записываются в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

Пример. Пусть $\mathbf{X}$ — множество всех векторов линейного пространства $\mathbb{R}^n$ с положительными элементами, т. е.

$$\mathbf{X} = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются так же, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выясним, является ли множество $\mathbf{X}$ вещественным линейным пространством.

Множество $\mathbf{X}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на число не является линейным пространством, так как в результате умножения вектора из $\mathbf{X}$ на вещественное число можно получить вектор, не принадлежащий $\mathbf{X}$. Действительно, если выбрать

$$\alpha = -1 \in \mathbb{R}, \quad x = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{X},$$

то вектор

$$\alpha x = (-1, -1, \ldots, -1)$$

не принадлежит $\mathbf{X}$.

Пример. Проверим, является ли вещественным линейным пространством множество $\mathbf{X}$, которое было введено в предыдущем примере, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом:

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n), \quad \alpha x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства.

1. Сложение векторов коммутативно, т. к. умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность операции сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) = (y_1x_1, y_2x_2, \dots, y_nx_n) = y + x$$

для любых $x, y \in \mathbf{X}$.

2. Аналогично проверяется ассоциативность операции сложения векторов. Для любых x, y, $z \in \mathbf{X}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) + z =$$
$$= (x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \dots, x_ny_nz_n) =$$
$$= x + (y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = x + (y + z).$$

3. В качестве нулевого элемента нужно взять вектор

$$0 = (1, 1, \dots, 1).$$

Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \dots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \mathbf{X}$.

4. Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ противоположным элементом будет вектор $x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$, так как

$$x + y = (x_1x_1^{-1}, x_2x_2^{-1}, \dots, x_nx_n^{-1}) = (1, 1, \dots, 1) = 0.$$

Важно отметить, что противоположный элемент существует и определяется однозначно для любого $x \in \mathbf{X}$.

5. Для любых $x, y \in \mathbf{X}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha(x+y) = \alpha(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) =$$

$$= ((x_1y_1)^\alpha, (x_2y_2)^\alpha, \ldots, (x_ny_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha y_n^\alpha) =$$
$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.$$

6. Для любого $x \in \mathbf{X}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha+\beta)x = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha x_n^\beta) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha x + \beta x.$$

7. Для любого $x \in \mathbf{X}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha\beta)x = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta}) =$$

$$= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \ldots, (x_n^\beta)^\alpha) = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta) = \alpha(\beta x).$$

8. Наконец, для любого $x \in \mathbf{X}$ имеем $1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x$. Следовательно, данное множество $\mathbf{X}$ с определенными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

Упражнения

1. Проверьте, что множество всех векторов (направленных отрезков) трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов — вещественное линейное пространство.

2. Проверьте, что множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

3. Проверьте, что множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a, b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через $C[a, b]$.

4. Проверьте, что множество всех функций из линейного пространства $C[a, b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a, b]$, — вещественное линейное пространство.

5. Проверьте, что множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

6. Проверьте, что множество $\mathbf{Q}_n$, состоящее из всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$ есть фиксированное целое число, и нулевого многочлена, является комплексным линейным пространством.

7. Выяснить, является ли множество всех полиномов из пространства $\mathbf{Q}_n$ линейным пространством, если операция сложения полиномов задается так же, как и в пространстве $\mathbf{Q}_n$, но для $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbf{Q}_n$ операция умножения на комплексное число определяется следующим образом:

$$\alpha f(x) = \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \alpha a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \alpha a_0.$$

8. Пусть задано множество $\mathbf{X}$ всех прямоугольных матриц из пространства $\mathbb{C}^{mn}$, на котором операция сложения вводится следующим образом: для любых матриц $A, B \in \mathbf{X}$ с элементами a_{ij} и b_{ij} соответственно их сумма $C = A + B$ есть матрица того же размера с элементами $c_{ij} = -a_{ij} - b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Операция произведения матрицы на вещественное число определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^{mn}$. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ линейным пространством.

9. Пусть $\mathbf{X}$ — множество всех дифференцируемых функций $f(t)$, где $t \in \mathbb{R}$. Операция сложения функций $f(t) \in \mathbf{X}$ и $g(t) \in \mathbf{X}$ определяется следующим образом: $f(t) + g(t) = f(t) \cdot g(t)$. Для $f(t) \in \mathbf{X}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ произведение задается, как обычно: $\alpha f(t)$. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ вещественным линейным пространством.

10. Дано множество $\mathbf{X}$ всех элементов пространства $\mathbb{C}^n$. Операция сложения векторов определена так же, как в $\mathbb{C}^n$, а операция умножения вектора на комплексное число — следующим образом:

$$\alpha x = (\overline{\alpha} x_1, \overline{\alpha} x_2, \ldots, \overline{\alpha} x_n), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{X},$$

где $\bar{\alpha}$ есть число, комплексно сопряженное к α. Определить, является ли множество $\mathbf{X}$ комплексным линейным пространством.

11. Рассмотрим множество $\mathbf{X}$ всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций f и g как их произведение, а операцию умножения функции f на число α как возведение ее в степень α. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

12. Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$. Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

13. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad x,\ y \in \mathbf{X},$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

14. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = (|\alpha| x_1, |\alpha| x_2, \ldots, |\alpha| x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbf{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

15. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_1 + 2y_1, x_2 + 2y_2, \ldots, x_n + 2y_n), \quad x,\ y \in \mathbf{X},$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

16. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n), \quad x,\ y \in \mathbf{X},$$

а операция произведения вектора на число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$.

17. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех невырожденных квадратных матриц из пространства $\mathbb{C}^{nn}$ комплексным линейным пространством, если операция сложения матриц определяется следующим образом:

$$A + B = AB, \quad A,\, B \in \mathbf{X},$$

а операция умножения на комплексное число вводится также, как в пространстве $\mathbb{C}^{nn}$.

18. Выяснить, является ли множество всех полиномов из пространства $\mathbf{Q}_n$ линейным пространством, если операция сложения полиномов определяется так же, как и в пространстве $\mathbf{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha f(x) = (\alpha + a_n)x^n + (\alpha + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha + a_0),$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\mathbf{Q}_n$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

19. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из пространства $\mathbb{C}^n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения векторов определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha x = (\alpha\overline{x}_1, \alpha\overline{x}_2, \ldots, \alpha\overline{x}_n), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x \in \mathbf{X}.$$

Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

20. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов (направленных отрезков) из трехмерного евклидова пространства вещественное линейное пространство, если произведение вектора на число определяется как обычно, а сумма векторов, как их векторное произведение:

$$x + y = [x, y] \quad x,\, y \in \mathbf{X}.$$

21. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = x, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbf{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

22. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = (e^{\alpha-1}x_1, \ldots, e^{\alpha-1}x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbf{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

23. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_n + y_n, \ldots, x_1 + y_1), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

24. Образует ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n), \quad x, y \in \mathbf{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

25. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех квадратных диагональных матриц из $\mathbb{C}^{nn}$ комплексным линейным пространством, если операция сложения матриц введена следующим образом:

$$A + B = AB, \quad A,\ B \in \mathbf{X},$$

а операция умножения на число определена также, как в пространстве $\mathbb{C}^{nn}$.

26. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех полиномов из пространства $\mathbf{Q}_n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения полиномов определена так же, как и в пространстве $\mathbf{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x.$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из множества $\mathbf{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

27. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех полиномов из пространства $\mathbf{Q}_n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения полиномов определена так же, как и в пространстве $\mathbf{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_{n-1} x + \alpha a_n,$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из множества $\mathbf{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

28. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех нечетных функций из пространства $C[-1,1]$ вещественным линейным пространством, если операции сложения и умножения на вещественное число определяются следующим образом:

$$f(t) + g(t) = f(t) + g(t), \quad f(t),\, g(t) \in \mathbf{X},$$

$$\alpha f(t) = |\alpha| f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ f(t) \in \mathbf{X}.$$

29. Выяснить, является ли множество $\mathbf{X}$ всех векторов из пространства $\mathbb{C}^n$ линейным пространством, если операция сложения векторов определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha x = (\overline{\alpha} \cdot \overline{x}_1, \overline{\alpha} \cdot \overline{x}_2, \ldots, \overline{\alpha} \cdot \overline{x}_n), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x \in \mathbf{X}.$$

Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответы, указания и решения

1. Указание. Проверить, что алгебраические операции над векторами (см. с. 34) не выводят за пределы пространства. Убедиться в том, что для этих операций аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства выполнены. Какой элемент пространства является нулевым, какой — противоположным элементу x?

2. Указание. Проверить, что сумма двух вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a, b) вещественной оси, является такой же функцией. Проверить, что это же справедливо и для умножения функции на вещественное число. Убедиться в том, что для этих операций аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства выполнены.

3. Указание. Множество $C[a, b]$ является подмножеством линейного пространства, определенного в предыдущем упражнении. Поэтому справедливость аксиом вещественного линейного пространства проверять уже нет необходимости. Достаточно убедиться лишь в том, что линейные операции не выводят за пределы $C[a, b]$. При проверке этого факта надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

4. Указание. Определенное в этом упражнении множество функций является подмножеством $C[a, b]$, поэтому достаточно проверить, что линейные операции не выводят за его пределы.

5. Указание. Ясно, что сумма двух полиномов — полином, это же справедливо и для операции умножения полинома на комплексное число. Проверьте, что выполняются все аксиомы комплексного линейного пространства.

6. Указание. Множество $\mathbf{Q}_n$ является подмножеством комплексного линейного пространства, определенного в предыдущем упражнении. Надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых, при умножении полинома из $\mathbf{Q}_n$ на произвольное комплексное число снова получаем полином из $\mathbf{Q}_n$.

7. Решение. Для любых полиномов f и g степени не выше n и любого $\alpha \in C$ сумма $f + g$ и произведение αf являются многочленами с комплексными коэффициентами степени не выше n. Нетрудно проверить, что аксиомы 1)–7) комплексного линейного пространства выполняются для данных операций. Однако, если у многочлена f старший коэффициент a_n отличен от нуля, то многочлен

$$(1 \cdot f)(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_n$$

не равен многочлену $f(x)$ и, следовательно, условие 8) не выполняется. Таким образом, данное множество с введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

8. Решение. Легко видеть, что обе операции определены корректно и не выводят за пределы $\mathbf{X}$. Проверим аксиомы комплексного линейного пространства.

1. Операция сложения коммутативна. Действительно, так как

$$-a_{ij} - b_{ij} = -b_{ij} - a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$A + B = B + A \quad \text{для любых} \quad A, B \in \mathbf{X}.$$

2. Проверим ассоциативность операции сложения. Пусть A, B, и C — три произвольные матрицы из множества $\mathbf{X}$ с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} соответственно. Тогда матрица $(A + B) + C$ состоит из элементов

$$-(-a_{ij} - b_{ij}) - c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

а матрица $A + (B + C)$ — из элементов

$$-a_{ij} - (-b_{ij} - c_{ij}) = -a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

не может выполняться для всех $A, B, C \in \mathbf{X}$. Так, если A и B — нулевые матрицы, а все элементы матрицы C равны единице, то любой элемент матрицы $(A + B) + C$ равен -1, а произвольный элемент матрицы $A + (B + C)$ равен 1. Таким образом, операция сложения не ассоциативна, множество $\mathbf{X}$ с данными операциями не является линейным пространством.

9. Произведение двух дифференцируемых функций является дифференцируемой функцией, т. е. принадлежит множеству $\mathbf{X}$. Произведение дифференцируемой функции и некоторого вещественного числа тоже является дифференцируемой функцией, таким образом, операции сложения и умножения на число введены корректно. Проверим выполнение аксиом вещественного линейного пространства.

1. Очевидно, что для любых функций $f(t), g(t) \in \mathbf{X}$

$$f(t) + g(t) = f(t)g(t) = g(t)f(t) = g(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

следовательно, сложение коммутативно.

2. Так как для любых функций $f(t)$, $g(t)$, $h(t) \in \mathbf{X}$ выполняется равенство

$$(f(t) + g(t)) + h(t) = (f(t)g(t))h(t) =$$
$$= f(t)(g(t)h(t)) = f(t) + (g(t) + h(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

то операция сложения удовлетворяет условию ассоциативности.

3. В качестве нулевого элемента нужно взять функцию $0(t) \equiv 1$. Действительно,

$$f(t) + 0(t) = 0(t)f(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

для любой функции $f(t) \in \mathbf{X}$.

4. Функция $[f(t)]^{-1}$ является противоположной к функции $f(t)$, так как выполняется равенство

$$[f(t)]^{-1} + f(t) = [f(t)]^{-1} f(t) = 0(t) \equiv 1.$$

Противоположная функция на множестве $\mathbf{X}$ определена не для каждой дифференцируемой функции, а только для тех функций, которые никогда не обращаются в нуль. Следовательно, условие 4) не выполняется, поэтому множество $\mathbf{X}$ не является линейным пространством.

10. Решение. Так как операция сложения векторов определена так же, как и в линейном пространстве $\mathbf{C}^n$, то, очевидно, выполняются аксиомы 1)–4). Проверка аксиом 5), 6), 8) не составляет труда. Проверим аксиому 7). С одной стороны,

$$(\alpha\beta)x = (\overline{\alpha\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha\beta}x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta}x_n).$$

С другой стороны

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\beta}x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta}x_n).$$

Так как правые части равенств совпадают, то равны и левые части. Значит условие 7) выполняется и, следовательно, данное множество $\mathbf{X}$ с введенными операциями является комплексным линейным пространством.

11. Является вещественным линейным пространством. Указание. При проверке аксиомы 4) заметить, что функция $1/f(t)$ существует для любой положительной $f(t)$.

12. Не является линейным пространством. Указание. Достаточно заметить, например, что функция $f(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$, является четной, но для нее не существует функции $1/f(t)$. Следовательно аксиома 4) не выполняется.

13. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

14. Не является линейным пространством, так как не выполняется условие 6).

15. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

16. Не является линейным пространством, так как противоположный вектор $x' = (1/x_1, \ldots, 1/x_n)$ не определен, например, для элемента $(0, \ldots, 0) \in \mathbf{X}$.

17. Не является линейным пространством, так как операция умножения матриц не коммутативна.

18. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 5), 6), 7) и 8).

19. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7) и 8).

20. Не является линейным пространством, так как $[x, y] \neq [y, x]$.

21. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

22. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 6) и 7).

23. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 2), 3), 4), 6) при $n > 1$.

24. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2), 6).

25. Диагональные матрицы перестановочны, однако множество $\mathbf{X}$ не является линейным пространством, так как вырожденные матрицы необратимы.

26. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 8).

27. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7), 8).

28. Не является линейным пространством. Указание. Рассмотрите операцию умножения на вещественное число в случае $\alpha = -1$.

29. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7), 8).

§ 2. Линейная зависимость векторов

Векторы a, b из линейного пространства $\mathbf{X}$ будем называть *коллинеарными* (*пропорциональными*, *линейно зависимыми*), если существуют числа α, β, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что если два вектора линейно зависимы, то они различаются лишь числовым множителем. Действительно, если $\alpha \neq 0$, то $a = \dfrac{-\beta}{\alpha} b$, если $\beta \neq 0$, то $b = \dfrac{-\alpha}{\beta} a$, если и α, и β отличны от нуля, то имеют место оба эти равенства.

Обобщая понятие линейной зависимости двух векторов, будем говорить, что система векторов из $\mathbf{X}$

$$\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\},$$

где, $m \geqslant 1$, *линейно зависима*, если существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

Пример. Система четырех векторов из пространства $\mathbb{R}^3$

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно зависима. Например, при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$, $x_4 = 0$

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

При $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -2$ также

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$ — упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$; для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m.$$

Можно сказать тогда, что векторы a^1, $a^2, \ldots,$ a^m *линейно зависимы*, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0. \tag{1}$$

Пример. Используя векторы a^1, a^2, a^3, a^4 и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ из предыдущего примера, соответствующие равенства можно записать в матричном виде:

$$\mathcal{A}_m x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathcal{A}_m x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Будем говорить, что вектор $a \in \mathbf{X}$ *линейно выражается* через векторы b^1, b^2, $\ldots$, b^p, $p \geqslant 1$ (является *линейной комбинацией* этих векторов), если существует вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \cdots + x_p b^p,$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

Пример. Векторы a^3 и a^4 из предыдущих примеров линейно выражаются через a^1 и a^2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти равенства в матричной записи имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Говорят, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно выражается* через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, если существует матрица $X(p, m)$ такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m).$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{j,k} b^j, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Пример. Обозначим

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2 X.$$

Системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ и $\{b^i\}_{i=1}^p$ называются *эквивалентными*, если существуют матрицы $X(p, m)$, $Y(m, p)$ такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m, p),$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

Пример. Системы векторов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_2$ из предыдущего примера эквивалентны. Действительно, наряду с равенством $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2 X$ имеет место

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2 Y, \quad Y = X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Найти линейную комбинацию $3x^1 - 2x^2 + 7x^3$ векторов

$$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

арифметического пространства $\mathbb{R}^4$. Что можно сказать о системе векторов x^1, x^2, x^3?

2. Для многочленов $f^1(t) = 1 - t^2$, $f^2(t) = 1 + t^3$, $f^3(t) = t - t^3$ найти линейную комбинацию $f^4 = 5f^1 + f^2 - 4f^3$. Что можно сказать о линейной зависимости системы многочленов f^1, f^2, f^3, f^4?

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ исследовать на линейную зависимость следующую систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что система из одного вектора линейного пространства $\mathbf{X}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

5. Доказать, что система из двух векторов, различающихся скалярным множителем, линейно зависима.

6. Доказать, что если три вектора a^1, a^2 и a^3 линейно зависимы и вектор a^3 не выражается линейно через векторы a^1 и a^2, то векторы a^1 и a^2 коллинеарны.

7. Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

8. Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

9. Доказать, что для любых трех векторов a, b, c и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ линейно зависимы.

10. Доказать, что матрицы A_1, A_2, …, A_k одной и той же размерности линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы матрицы $(A_1)^T$, $(A_2)^T$, …, $(A_k)^T$.

11. Доказать, что если вектор $x \in \mathbf{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он линейно выражается и через эквивалентную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$.

12. Пусть система векторов $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Пусть система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно выражается через систему $\mathcal{A}_m$:

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X,$$

где матрица X невырождена. Тогда система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно зависима.

В следующих трех упражнениях определяются *элементарные преобразования* системы векторов и доказывается, что линейная зависимость системы векторов не нарушается при ее элементарных преобразованиях.

13. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при перестановке двух векторов a^i и a^k системы $\mathcal{A}_m$.

14. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при умножении одного вектора a^i системы на ненулевое число α.

15. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при прибавлении к одному вектору a^i системы другого вектора a^k, умноженного на произвольное число α.

16. Пусть a, b, c, d — линейно зависимая система. Доказать, что тогда система векторов

$$d, \quad 2(c+d), \quad 3(b+c+d), \quad 4(a+b+c+d)$$

также линейно зависима.

17. Доказать, что векторы a, b, c, d линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы векторы

$$a+b+c, \quad a+b+d, \quad a+c+d, \quad b+c+d.$$

Ответы, указания и решения

1. Линейная комбинация равна нулю. Система векторов линейно зависима.

2. $f^4(t) = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$. Система многочленов f^1, f^2, f^3, f^4 линейно зависима: $5f^1 + f^2 - 4f^3 - f^4 = 0$.

3. Решение. Для того, чтобы проверить линейную зависимость данной системы векторов используем то, что определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы. Построим матрицу, столбцами которой являются векторы a^1, a^2, и a^3:

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathcal{A}_3$ равен нулю. Следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима.

4. Решение. Доказываемое утверждение непосредственно следует из того, что для любого ненулевого числа $x \in \mathbb{C}$ равенства

$$ax = 0 \in \mathbf{X}$$

и

$$a = 0 \in \mathbf{X}$$

эквивалентны.

5. Решение. Пусть $a^1 = \alpha a^2$. Тогда $1 \cdot a^1 - \alpha \cdot a^2 = 0$, т. е. система векторов $\{a^1, a^2\}$ линейно зависима.

6. Решение. Пусть система векторов $\{a^1, a^2, a^3\}$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^3$, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = 0.$$

В этом равенстве $x_3 = 0$, т. к. по условию задачи вектор a^3 не выражается линейно через векторы $\{a^1, a^2\}$, т. е. не существует такого вектора $y \in \mathbb{C}^2$, что

$$a^3 = y_1 a^1 + y_2 a^2.$$

Действительно, если предположить, что $x_3 \neq 0$, то в выражении вектора a^3 можно выбрать $y_1 = x_1/x_3$ и $y_2 = x_2/x_3$. Итак, имеем

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 = 0,$$

где, по крайней мере, один из числовых коэффициентов x_1, x_2 не равен нулю, т. е. векторы a^1 и a^2 коллинеарны.

7. Решение. Пусть система векторов содержит нулевой вектор. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что нулевой элемент стоит на первом месте в системе векторов $\mathcal{A}_m = \{0, a^2, \ldots, a^m\}$. Ясно, что $1 \cdot 0 + 0 \cdot a^2 + \ldots + 0 \cdot a^n = 0$, т. е. система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Предположим теперь, что $\mathcal{A}_m$ содержит линейно зависимую подсистему. Для определенности будем считать, что эта подсистема состоит из первых p векторов системы $\mathcal{A}_m = \{a^1, \ldots, a^p, a^{p+1}, \ldots, a^m\}$. Обозначим линейно независимую подсистему $\mathcal{A}_p = \{a^1, \ldots, a^p\}$, а оставшиеся векторы $\mathcal{A}_{m-p} = \{a^{p+1}, \ldots, a^m\}$. По определению линейно зависимой системы существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$\mathcal{A}_p x = 0.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_p x + \mathcal{A}_{m-p} 0 = 0,$$

где символом ноль в левой части равенства обозначен нулевой элемент пространства $\mathbb{C}^{m-p}$. Это равенство означает, что система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима.

8. Решение. Пусть вектор a^k линейно выражается через все остальные векторы системы $\mathcal{A}_m$:

$$a^k = \mathcal{A}_{k-1}y + \mathcal{A}_{m-k}z,$$

где $\mathcal{A}_{k-1} = \{a^i\}_1^{k-1}$, $\mathcal{A}_{m-k} = \{a^i\}_{k+1}^m$, $y \in \mathbb{C}^{k-1}$, $z \in \mathbb{C}^{m-k}$. Тогда

$$\mathcal{A}_{k-1}y - 1 \cdot a^k + \mathcal{A}_{m-k}z = 0,$$

но вектор $x = (y, -1, z) \in \mathbb{C}^m$ не равен нулю, и, значит, система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Предположим, что система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$, что $\mathcal{A}_m x = 0$. Пусть для определенности $x_k \neq 0$. Запишем равенство $\mathcal{A}_m x = 0$ в виде

$$\mathcal{A}_{k-1}y + \cdot a^k x_k + \mathcal{A}_{m-k}z = 0,$$

следовательно,

$$a^k = \mathcal{A}_{k-1}\left(-\frac{y}{x_k}\right) + \mathcal{A}_{m-k}\left(-\frac{z}{x_k}\right),$$

т. е. вектор a^k линейно выражается через все остальные векторы системы $\mathcal{A}_m$.

9. Указание. Составить линейные комбинации этих векторов с коэффициентами γ, β и α.

10. Указание. Воспользоваться определением линейной зависимости и транспонировать левую и правую части полученного равенства.

11. Решение. Имеем $x = \mathcal{A}_m c$, $\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p Y$. Подставляя второе из этих равенств в выражение для x, получим $x = \mathcal{B}_p d$, где $d = Yc$.

12. Решение. По условию задачи существует такая невырожденная матрица X, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Отсюда для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ имеем $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y$. Пусть система векторов $\mathcal{A}_m$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $d \in \mathbb{C}^m$, что $\mathcal{A}_m d = 0$. Пусть $Xy = d$. Тогда в силу невырожденности матрицы X существует (единственный) вектор $y = X^{-1}d \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{B}_m y = 0$, т. е. система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно зависима.

13. Указание. Выполнить упражнение можно непосредственно с помощью определения линейной зависимости, а можно, используя невырожденность матрицы перестановки P_{ik} (см. упражнение 13, с. 101 и упражнение 12, с. 127).

14. Указание. Выполнить упражнение двумя способами: 1) с помощью определения линейной зависимости; 2) используя упражнение 12, с. 127, для чего построить матрицу описанного в задаче элементарного преобразования и доказать ее невырожденность.

15. Указание. Построить матрицу L_i, описанного в задаче элементарного преобразования системы, рассмотрев два случая: $i < k$ и $i > k$ (см. упражнение 14, с. 101). Доказать, что в обоих случаях матрица L_i невырождена. Использовать упражнение 12, с. 127.

16. Указание. Первый способ. Построить последовательность элементарных преобразований исходной системы, приводящих ее к указанному виду. Воспользоваться тремя предыдущими упражнениями. Второй способ. Сразу выписать матрицу X, преобразующую исходную систему

$$\mathcal{A}_4 = \{a,\, b,\, c,\, d\}$$

к виду

$$\mathcal{B}_4 = \{d,\, 2(c+d),\, 3(b+c+d),\, 4(a+b+c+d)\},$$

т. е. такую, что $\mathcal{B}_4 = \mathcal{A}_4 X$. Проверить, что матрица X невырождена. Воспользоваться упражнением 12, с. 127.

17. Указание. Выписать матрицу X, преобразующую исходную систему $\mathcal{A}_4$ к указанному виду $\mathcal{B}_4 = \mathcal{A}_4 X$. Проверить, что матрица X невырождена. Воспользоваться упражнением 12, с. 127. Показать, что обратное преобразование осуществляет матрица X^{-1}, т. е. $\mathcal{A}_4 = \mathcal{B}_4 X^{-1}$.

§ 3. Линейно независимые системы векторов

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1,\, a^2,\, \ldots,\, a^m\}$, $m \geqslant 1$, линейного пространства $\mathbf{X}$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_m a^m = 0, \quad x_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots, m, \qquad (1)$$

следует, что $x_i = 0$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$. Определению линейной независимости векторов удобно придать матричную формулировку. Как обычно, обозначим $\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$ упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbf{X}$ и для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_m a^m.$$

Используя эти обозначения, можно сказать, что если из равенства

$$\mathcal{A}_m x = 0$$

следует, что $x = 0$, то система векторов $\mathcal{A}_m$ *линейно независима.*

Пример. Любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора. Действительно, для любого ненулевого вектора $a \in \mathbf{X}$ из равенства

$$xa = 0, \quad x \in \mathbb{C},$$

следует, что $x = 0$.

Пример. Единичные векторы $i^1,\, i^2,\, \ldots,\, i^m \in \mathbb{C}^n$, $m \leqslant n$, линейно независимы. Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^m$ вектор $x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$(x_1, x_2,\, \ldots, x_m, 0,\, \ldots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пример. Система векторов

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z, \;\; \ldots, \;\; \varphi_k(z) = z^k,$$

где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима в пространстве полиномов. Действительно, левая часть равенства

$$x_0 + x_1 z + \cdots + x_k z^k = 0$$

есть полином степени k, а, если полином равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

Упражнения

1. Исследовать на линейную зависимость в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};$

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2. Найти линейное выражение вектора a^4 через a^1, a^2, a^3, где

$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix};$

$c)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

3. Доказать, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ матриц размера 2×3.

4. Проверить, является ли система матриц A, B, C, D линейно независимой в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ матриц второго порядка:

$a)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$

$\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

$b)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$

$\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

5. Доказать, что $p^1(z) = 1$, $p^2(z) = z - 1$, $p^3(z) = (z + 3)^2$ — линейно независимые полиномы.

6. Проверить, будут ли линейно независимыми следующие системы полиномов:
$a)$ $p^1(z) = z^2 + 4z$, $p^2(z) = 2z^2 - z + 4$, $p^3(z) = 4z^2 - 4z + 1$;
$b)$ $p^1(z) = 4z^2 - 3z - 1$, $p^2(z) = 4z - 3$, $p^3(z) = 4z^2 + 9z - 10$.

7. Пусть $\{a^k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые векторы. Пусть система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^m$, т. е. существует квадратная матрица X порядка m такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.

8. Пусть $\mathcal{A}_3 = \{a, b, c\}$ — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:
$a)$ $\mathcal{B}_3 = \{a, a + b, a + b + c\}$,
$b)$ $\mathcal{B}_3 = \{a + b, b + c, c + a\}$,
$c)$ $\mathcal{B}_3 = \{a - b, b - c, c - a\}$?

9. Найти все значения λ, при которых:
$a)$ из линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_2 = \{a^1, a^2\}$ следует линейная независимость системы $\mathcal{B}_2 = \{\lambda a^1 + a^2, a^1 + \lambda a^2\}$,
$b)$ из линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_m = \{a^k\}_{k=1}^m$ следует линейная независимость системы

$$\mathcal{B}_m = \{a^1 + a^2, a^2 + a^3, \dots, a^{m-1} + a^m, a^m + \lambda a^1\}?$$

10. Доказать, что в пространстве многочленов система

$$\mathcal{B}_{m+1} = \{a_{0,0},\ a_{1,0} + a_{1,1}z,\ \dots,\ a_{m,0} + a_{m,1}z + \dots + a_{m,m}z^m\}$$

линейно независима, если $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, m$.

В следующих трех упражнениях рассматриваются элементарные преобразования системы векторов и доказывается, что линейная независимость системы векторов не нарушается при ее элементарных преобразованиях.

11. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается ни при какой перестановке двух векторов a^i и a^k системы $\mathcal{A}_m$.

12. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при умножении одного вектора a^i системы на ненулевое число α.

13. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при прибавлении к одному вектору a^i системы другого вектора a^k, умноженного на произвольное число α.

14. Доказать, что в пространстве вещественных функций одной переменной функции $f^1(t)$, $f^2(t)$, ..., $f^m(t)$ линейно независимы, если существуют такие числа a_1, a_2, ..., $a_m \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} f^1(a_1) & f^2(a_1) & \dots & f^m(a_1) \\ f^1(a_2) & f^2(a_2) & \dots & f^m(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1(a_m) & f^2(a_m) & \dots & f^m(a_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

15. Доказать, что в пространстве $m-1$ раз дифференцируемых функций одной переменной векторы $f^1(t)$, $f^2(t)$, ..., $f^m(t)$ линейно независимы, если существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} f^1(a) & f^2(a) & \dots & f^m(a) \\ (f^1(a))' & (f^2(a))' & \dots & (f^m(a))' \\ (f^1(a))'' & (f^2(a))'' & \dots & (f^m(a))'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f^1(a))^{(m-1)} & (f^2(a))^{(m-1)} & \dots & (f^m(a))^{(m-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

16. Доказать, что функции $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = t$, $f^3(t) = \sin t$ линейно независимы.

17. Доказать, что следующие функции линейно независимы:
a) $f^1(t) = e^t$, $f^2(t) = e^{2t}$, $f^3(t) = e^{3t}$;
b) $f^1(t) = e^t$, $f^2(t) = e^{-t}$, $f^3(t) = e^{2t}$;
c) $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = \sin t$, $f^3(t) = \cos t$.

18. Исследовать на линейную зависимость в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

a) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$;

b) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19. Найти линейное выражение вектора a^4 через a^1, a^2, a^3, где

a) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$

20. Проверить, является ли система матриц A^1, A^2, A^3, A^4 линейно независимой в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ матриц второго порядка:

$a)\quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$

$\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad A^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

$b)\quad A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$

$\quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad A^4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

21. Проверить, будут ли линейно независимыми следующие системы полиномов:

$a)$ $p^1(z) = 4z^2 - 3z + 2$, $p^2(z) = -3z^2 + 2z + 3$, $p^3(z) = 7z^2 - 5z - 1$;

$b)$ $p^1(z) = 3z - 4$, $p^2(z) = 3z^2 - 2z - 3$, $p^3(z) = z^2 + 3z + 3$.

Ответы, указания и решения

1. $a)$ Линейно независимая система; $b)$ линейно зависимая система. Указание. Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно зависимы. Следовательно, система из трех векторов пространства $\mathbb{R}^3$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы, отличен от нуля.

2. $a)$ Решение. Вектор a^4 линейно выражается через систему векторов a^1, a^2, a^3, если существуют такие числа x_1, x_2, x_3, что имеет место равенство

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = a^4.$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных x_1, x_2, x_3 с векторными коэффициентами. После подстановки числовых данных в это уравнение, имеем

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы в левой части равенства умножим на соответствующие числа и сложим, получим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Найдем решение данной системы, применяя метод Гаусса. Для этого выпишем ее расширенную матрицу и выполним необходимые элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Применяя обратный ход метода Гаусса, находим:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -2.$$

Окончательно получаем, что вектор a^4 может быть представлен в следующем виде:

$$a^4 = a^1 + 4a^2 - 2a^3.$$

b) $a^4 = -a^1 + a^2 + 2a^3$; *c*) $a^4 = 2a^1 - a^2 + 3a^3$.

3. Решение. Нулевым элементом в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ является нулевая матрица размера 2×3. Составим линейную комбинацию данных матриц и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D + x_5 E + x_6 F = 0,$$

или более подробно

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ x_4 \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Левая и правая части данного равенства есть матрицы размера 2×3. Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие друг другу элементы матриц. Таким образом, имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0, \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ \qquad 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ \qquad\quad 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0, \\ \qquad\qquad 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ \qquad\qquad\quad x_6 = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы не равен нулю, следовательно, система крамеровская и имеет единственное нулевое решение, а это и означает, что векторы A, B, C, D, E, F в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ являются линейно независимыми.

4. a) Линейно независимая система; b) линейно зависимая система. Указание. Использовать то, что однородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

5. Решение. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулю:

$$a_1 \cdot p^1(z) + a_2 \cdot p^2(z) + a_3 \cdot p^3(z) = 0.$$

Преобразуя это равенство, получаем

$$(a_1 - a_2 + 9a_3) + (a_2 + 6a_3)z + a_3 z^2 = 0.$$

Полином равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нули. Таким образом, приходим к следующей системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 9a_3 = 0, \\ \quad a_2 + 6a_3 = 0, \\ \qquad a_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы не равен нулю, значит, система крамеровская и имеет единственное нулевое решение $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, система полиномов $p^1(z)$, $p^2(z)$, $p^3(z)$ является линейно независимой.

6. a) Линейно независимая система; b) линейно зависимая система. Указание. Использовать два факта. Во-первых, то, что полином равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нули. Во-вторых то, что однородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

7. Решение. Заметим, прежде всего, что, если $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$, то для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ справедливо равенство $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y$.

По условию задачи система $\mathcal{A}_m$ линейно независима. Пусть матрица X невырождена. Докажем, что тогда система $\mathcal{B}_m$ также линейно независима. Действительно, из равенства $\mathcal{B}_m y = 0$ следует, что $\mathcal{A}_m X y = 0$. В силу линейной независимости системы $\mathcal{A}_m$ имеем $Xy = 0$, а так как матрица X невырождена, то эта система линейных уравнений крамеровская и имеет единственное решение $y = 0$. Это и означает, что система $\mathcal{B}_m$ линейно независима.

Предположим теперь, что система $\mathcal{B}_m$ линейно независима, и докажем, что матрица X невырожденная. Итак, $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y = 0$ только при $y = 0$. В силу линейной независимости системы $\mathcal{A}_m$ заключаем, что $Xy = 0$ только при $y = 0$, значит, матрица X невырожденная.

8. *a*) Да, *b*) да, **c)** нет. Указание. Воспользоваться критерием линейной независимости системы $\mathcal{B}_3$, полученным в упражнении 7, с. 134: построить такую матрицу X, что $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3 X$, и проверить вырождена ли эта матрица.

9. *a*) $\lambda \neq \pm 1$, *b*) $\lambda \neq (-1)^{-m}$. Указание. Воспользоваться упражнением 7, с. 134: построить матрицу X и найти такие λ, что $\det X \neq 0$.

10. Указание. Воспользоваться упражнением 7, с. 134: доказать невырожденность такой матрицы X, что $\mathcal{B}_{m+1} = \mathcal{A}_{m+1} X$, где

$$\mathcal{A}_{m+1} = \{1,\, z,\, \ldots,\, z^m\},$$

$$\mathcal{B}_{m+1} = \{a_{0,0},\, a_{1,0} + a_{1,1} z,\, \ldots,\, a_{m,0} + a_{m,1} z + \cdots + a_{m,m} z^m\},$$

при условии, что $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

11. Указание. Использовать невырожденность матрицы перестановки P_{ik} (см. упражнение 13, с. 101 и упражнение 7, с. 134).

12. Указание. Использовать упражнение 7, с. 134, для чего построить матрицу описанного в задаче элементарного преобразования и доказать ее невырожденность.

13. Указание. Построить матрицу L_i, описанного в задаче элементарного преобразования системы, рассмотрев два случая: $i < k$

и $i > k$ (см. упражнение 14, с. 101). Доказать, что в обоих случаях матрица L_i невырожденная. Использовать упражнение 7, с. 134.

14. Решение. Предположим, что система функций $\mathcal{F}_m = \{f^1(t)\}_{i=1}^m$, линейно зависима, т. е. существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что $\mathcal{F}_m x = 0$. Запишем это равенство в точках $a_1, \ldots, a_m$, о которых говорится в условии задачи. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x = (x_1, x_2, \ldots x_m)$:

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} f^1(a_1)x_1 & + & f^2(a_1)x_2 & + & \ldots & + & f^m(a_1)x_m & = 0, \\ f^1(a_2)x_1 & + & f^2(a_2)x_2 & + & \ldots & + & f^m(a_2)x_m & = 0, \\ \quad\ldots & & \quad\ldots & & \ldots & & \quad\ldots & \\ f^1(a_m)x_1 & + & f^2(a_m)x_2 & + & \ldots & + & f^m(a_m)x_m & = 0. \end{array} \right.$$

По условию задачи определитель этой системы не равен нулю, система уравнений крамеровская и имеет единственное нулевое решение. Следовательно, предположение о том, что система функций $\mathcal{F}_m$ линейно зависима, не верно.

15. Решение. Предположим, что система функций $\mathcal{F}_m = \{f^1(t)\}_{i=1}^m$, линейно зависима, т. е. существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что $\mathcal{F}_m x = 0$, причем эта линейная комбинация равна нулю для всех t из области определения функций системы $\mathcal{F}_m$. Продифференцируем левую и правую части этого равенства $m - 1$ раз, и запишем получившиеся равенства в точке a, о которой говорится в условии задачи. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x = (x_1, x_2, \ldots x_m)$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} f^1(a)x_1 & + & f^2(a)x_2 & + & \ldots & + & f^m(a)x_m & = 0, \\ (f^1(a))'x_1 & + & (f^2(a))'x_2 & + & \ldots & + & (f^m(a))'x_m & = 0, \\ (f^1(a))''x_1 & + & (f^2(a))''x_2 & + & \ldots & + & (f^m(a))''x_m & = 0, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ (f^1(a))^{(m-1)}x_1 & + & (f^2(a))^{(m-1)}x_2 & + & \ldots & + & (f^m(a))^{(m-1)}x_m & = 0. \end{array} \right.$$

По условию задачи определитель этой системы не равен нулю, система уравнений крамеровская и имеет единственное нулевое решение. Следовательно, предположение о том, что система функций $\mathcal{F}_m$ линейно зависима, не верно.

16. Решение получим двумя способами, используя упражнения 14 и 15, с. 135. Подберем три таких числа a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \sin a_1 \\ 1 & a_2 & \sin a_2 \\ 1 & a_3 & \sin a_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Можно, например, выбрать $a_1 = 0$, $a_2 = \pi$, $a_3 = \dfrac{\pi}{2}$, действительно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 \\ 1 & \pi/2 & 1 \end{vmatrix} = \pi.$$

Следовательно (см. упражнение 14, с. 135), данная система функций линейно независима.

Используем теперь упражнение 15, с. 135. Найдем такое вещественное число a, что вронскиан функций $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = t$ и $f^3(t) = \sin t$ в этой точке отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \sin a \\ 0 & 1 & \cos a \\ 0 & 0 & -\sin a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ясно, что можно выбрать такое значение a такое, что $\sin a \neq 0$. Следовательно, данная система функций линейно независима.

17. Указание. Использовать упражнение 14, или упражнение 15, с. 135.

18. a) Линейно зависимая система; b) линейно независимая система.

19. a) $a^4 = 5a^1 + 3a^2 - 2a^3$; b) $a^4 = 3a^1 + 2a^2 + a^3$.

20. a) Линейно независимая система; b) линейно зависимая система.

21. a) Линейно зависимая система; b) линейно независимая система.

§ 4. Конечномерные пространства. Базисы

Линейное пространство $\mathbf{X}$ называется *конечномерным*, если существуют векторы $\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$, образующие линейно независимую систему в пространстве $\mathbf{X}$, и такие, что любой вектор $x \in \mathbf{X}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Говорят в этом случае, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют *базис* пространства $\mathbf{X}$. Число n называют *размерностью* пространства $\mathbf{X}$. Линейное пространство $\mathbf{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbf{X}_n$. Коэффициенты разложения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называют *координатами* вектора x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

Пример. Любые три некомпланарных вектора e^1, e^2, e^3 пространства $\mathbf{V}_3$ образуют базис. Пространство $\mathbf{V}_3$ трехмерно. Любой вектор $x \in \mathbf{V}_3$ представим в виде

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3,$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^3$. Особую роль играет *декартов* базис i^1, i^2, i^3. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

Пример. В пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{gathered} i^1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ i^2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ \cdots \\ i^n = (0, 0, \ldots, 1) \end{gathered}$$

образуют, так называемый, *естественный базис*. Размерность этих пространств равна n. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), то

$$x = x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_n i^n,$$

т. е. координатами вектора x в естественном базисе служат компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого вектора.

Пример. *Естественным базисом* в пространстве $\mathbf{Q}_n$ всех полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n называют систему векторов $\{1, z, \ldots, z^n\}$, где z — комплексная переменная. Размерность пространства $\mathbf{Q}_n$ равна $n+1$. Если

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbf{Q}_n,$$

то, очевидно, координатами многочлена P_n в естественном базисе служат его коэффициенты a_0, a_1, …, a_n. Аналогично, в пространстве вещественных полиномов $\mathbf{P}_n$ естественный базис образует система векторов $\{1, t, \ldots, t^n\}$, где t — вещественная переменная.

Если пространство не является конечномерным, его называют *бесконечномерным*.

Пример. Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов $\{1, z, \ldots, z^k\}$ при любом, сколь угодно большом, целом k.

Пример. Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

В любом конечномерном пространстве $\mathbf{X}_n$ существует сколько угодно базисов. Любые n линейно независимых векторов образуют базис. Если $\mathcal{E}_n$ — базис, то система векторов

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n T,$$

где T — произвольная невырожденная матрица, также является базисом. Матрицу T называют *матрицей перехода* от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Если известны координаты ξ некоторого вектора $x \in \mathbf{X}_n$ в базисе $\mathcal{E}_n$, и задана матрица перехода T к базису $\mathcal{F}_n$, то координаты η этого же вектора x в базисе $\mathcal{F}_n$ вычисляются по формуле

$$\eta = T^{-1}\xi.$$

Упражнения

1. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^4$.

2. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix}, \ \ldots, \ a^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3. Пусть $\mathbf{S}$ — множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел вида

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Линейные операции на множестве $\mathbf{S}$ вводятся следующим образом. По определению для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого $x \in \mathbf{S}$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots).$$

Для любых $x, y \in \mathbf{S}$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots).$$

Доказать, что $\mathbf{S}$ — бесконечномерное линейное пространство.

4. Доказать, что в пространстве $\mathbf{Q}_n$ многочленов степени не выше n базисом является всякая система ненулевых многочленов, содержащая по одному многочлену каждой степени $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

5. Показать, что векторы

$$a^1 = (4, 1, -1), \quad a^2 = (1, 2, -5), \quad a^3 = (-1, 1, 1)$$

образуют базис пространства $\mathbf{V}_3$. Найти координаты векторов

$$x = (4, 4, -5), \quad y = (2, 4, -10), \quad z = (0, 3, -4)$$

в этом базисе.

6. Известно, что векторы a^1, a^2, a^3 некомпланарны. Выяснить компланарны ли векторы b^1, b^2, b^3:
a) $b^1 = 2a^1 - a^2 - a^3$, $b^2 = -a^1 + 2a^2 - a^3$, $b^3 = -a^1 - a^2 + 2a^3$;
b) $b^1 = a^1 + a^2 + a^3$, $b^2 = a^2 + a^3$, $b^3 = -a^1 + a^3$;
c) $b^1 = a^3$, $b^2 = a^1 - a^2 - a^3$, $b^3 = a^1 - a^2 + a^3$.

7. Доказать, что система векторов

$$\mathcal{F}_3 = \{1,\ (t-1),\ (t-1)^2\}$$

является базисом в пространстве $\mathbf{P}_2$, и найти координаты многочлена

$$p(t) = 1 + t + t^2$$

в этом базисе.

8. Как связаны между собой базисы $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{e^i\}_{i=1}^n$ пространства $\mathbf{X}_n$, если матрица T перехода от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$:
a) единичная,
b) диагональная,
c) верхняя треугольная,
d) нижняя треугольная.

9. Выяснить, какие из следующих систем векторов являются базисами подходящего пространства $\mathbb{R}^n$:

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

10. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \ \dots, \ a^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

11. Чему равна размерность линейного пространства $\mathbb{R}$?

12. Пусть $\mathbf{F}$ — множество всех бесконечных действительных последовательностей вида

$$x = (a, b, a, b, \ \dots, a, b, \ \dots).$$

Линейные операции на множестве $\mathbf{F}$ вводятся так же, как на линейном пространстве $\mathbf{S}$ (см. упражнение 3). Доказать, что $\mathbf{F}$ — двумерное линейное пространство.

13. При каких α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ векторы

$$a = (1, \alpha, \alpha^2), \quad b = (1, \beta, \beta^2), \quad c = (1, \gamma, \gamma^2)$$

образуют базис пространства $\mathbf{V}_3$?

14. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка, и найти координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

15. Матрица S является матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Матрица Q является матрицей перехода от базиса $\mathcal{G}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Найти матрицу T перехода:
a) от базиса $\mathcal{F}_n$ к базису $\mathcal{E}_n$,
b) от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{G}_n$.

16. Найти матрицу перехода от стандартного базиса в пространстве $\mathbf{P}_2$ к базису, составленному из полиномов Лежандра

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \right\}.$$

Ответы, указания и решения

1. Решение. В пространстве $\mathbb{R}^4$ любые четыре линейно независимых вектора образуют базис. Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) линейно независимы. Вычислим определитель матрицы A, он равен двум. Следовательно, система векторов $\{a^k\}_{k=1}^4$ является базисом в пространстве $\mathbb{R}^4$.

2. Указание. Вычислить определитель матрицы, столбцами которой являются векторы a^1, a^2, $\ldots$, a^n.

3. Решение. Убедимся, прежде всего, что $\mathbf{S}$ — вещественное линейное пространство. Ясно, что линейные операции не выводят за пределы этого множества. Справедливость восьми аксиом также не вызывает сомнений. Отметим лишь, что нулевой элемент пространства $\mathbf{S}$ имеет вид

$$0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Противоположный к x элемент записывается так:

$$x' = -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_k, \ldots).$$

Покажем, что векторы

$$s^1 = (1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$s^2 = (0, 1, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$\ldots$$
$$s^k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$$

линейно независимы. Пусть

$$x_1 s^1 + x_2 s^2 + \cdots + x_k s^k = 0 \in \mathbf{S}, \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Тогда

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$

т. е. $x_i = 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Таким образом, для любого, сколь угодно большого, целого k можно указать k линейно независимых векторов пространства $\mathbf{S}$, следовательно, $\mathbf{S}$ — бесконечномерное пространство.

4. Решение. Пространство $\mathbf{Q}_n$ имеет размерность $n+1$. Следовательно, любая система из $n+1$ линейно независимых векторов является базисом в этом пространстве. В пространстве $\mathbf{Q}_n$ рассмотрим систему ненулевых многочленов, содержащую по одному многочлену каждой степени $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{a_{0,0},\ a_{1,0} + a_{1,1}z,\ \ldots,\ a_{n,0} + a_{n,1}z + \cdots + a_{n,n}z^n\},$$

где $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Эта система линейно независима согласно упражнению 10, с. 134.

5. $x = 1a^1 + 1a^2 + 1a^3$, $y = 0a^1 + 2a^2 + 0a^3$, $z = 0a^1 + 1a^2 + 1a^3$. Указание. В пространстве $\mathbf{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют базис, а критерием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя матрицы, составленной из столбцов их декартовых координат. Координаты x_1, x_2, x_3 вектора $x \in \mathbf{V}_3$ в базисе a^1, a^2, a^3 находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений $a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = x$.

6. *a*) Компланарны, *b*) некомпланарны, *c*) компланарны. Указание. Воспользоваться упражнением 7, с. 134. Записать выражения векторов $\mathcal{B}_3 = \{b^i\}_{i=1}^3$ через векторы $\mathcal{A}_3 = \{a^i\}_{i=1}^3$ в матричном виде: $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3 X$. Выяснить, вырождена ли матрица X.

7. Решение получим двумя способами. Первый способ основан на использовании *формулы Тейлора*[1)] для многочлена $p(t)$ степени n с вещественными коэффициентами:

$$p(t) = p_0(t_0) + \frac{p'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{p''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n,$$

где t_0 — произвольное вещественное число. В рассматриваемом случае $n = 2$, $p(t) = 1 + t + t^2$, а $t_0 = 1$. Вычислим значение полинома и его первых двух производных в точке 1: $p(1) = p'(1) = 3$, а $p''(1) = 2$. Следовательно, $p(t) = 3 + 3(t - 1) + 1(t - 1)^2$.

Второй способ. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \{e^1, e^2, e^3\} \;=\; \{1,\ t,\ t^2\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{f^1, f^2, f^3\} = \{1,\ t - 1,\ (t - 1)^2\}. \end{aligned}$$

Тогда эти векторы связаны равенствами

$$\begin{aligned} f^1 &= e^1, \\ f^2 &= -e^1 + e^2, \\ f^3 &= e^1 - 2e^2 + e^3. \end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим $\mathcal{F}_3 = \mathcal{E}_3 T$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица T невырождена, следовательно, система векторов $\mathcal{F}_3$ есть базис в пространстве $\mathbf{P}_n$, а координаты η полинома $p(t)$ в базисе $\mathcal{F}_3$ вычисляются по формуле $\eta = T^{-1}\xi$, где $\xi = (1, 1, 1)$ — координаты полинома $p(t)$ в естественном базисе $\mathcal{E}_3$. Найдем матрицу T^{-1}.

Матрица T — треугольная, поэтому вычислять присоединенную матрицу не будем. Опишем метод, которым удобно пользоваться при вычислении обратных матриц к матрицам «простой структуры». По определению $TT^{-1} = I$. Обозначим $X = T^{-1}$ и найдем X из матричного уравнения $TX = I$. Ясно, что каждый столбец x^k матрицы X

[1)] См. курс математического анализа.

есть решение системы уравнений с матрицей T и вектором правой части $i^k \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^1 & - & x_2^1 & + & x_3^1 & = & 1, \\ & & x_2^1 & - & 2x_3^1 & = & 0, \\ & & & & x_3^1 & = & 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_3^2 & = & 0, \\ & & x_2^2 & - & 2x_3^2 & = & 1, \\ & & & & x_3^2 & = & 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^1 & - & x_2^3 & + & x_3^3 & = & 0, \\ & & x_2^3 & - & 2x_3^3 & = & 0, \\ & & & & x_3^3 & = & 1. \end{array}\right.$$

Из решений этих систем составим столбцы матрицы

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить координаты полинома $p(t)$ в базисе $\mathcal{F}_3$:

$$\eta = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $p(t) = 1 + t + t^2 = 3f^1 + 3f^2 + 1f^3 = 3 + 3(t-1) + 1(t-1)^2$.

8. $a)$ $f^i = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
$b)$ каждый вектор f^i коллинеарен e^i, $i = 1, 2, \ldots, n$;
$c)$ каждый вектор f^i линейно выражается через векторы $e^1, \ldots, e^i$;
$d)$ каждый вектор f^i линейно выражается через векторы $e^i, \ldots, e^n$.

9. $a)$ Нет, система линейно зависима; $b)$ да; $c)$ нет, число векторов в системе меньше $n = 4$.

10. Указание. Вычислить определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $a^1, a^2, \ldots, a^n$.

11. 1.

12. Решение. Множество $\mathbf{F}$ — вещественное линейное пространство, так как является подмножеством линейного пространства $\mathbf{S}$, а линейные операции, очевидно, не выводят за его пределы. Покажем, что векторы

$$e^1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$e^2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

образуют базис пространства $\mathbf{F}$. В самом деле, эти векторы линейно независимы, так как равенство $x_1e^1 + x_2e^2 = 0 \in \mathbf{F}$, где x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, означает, что

$$(x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots),$$

т. е. $x_1 = x_2 = 0$. С другой стороны, любой вектор

$$x = (a, b, a, b, a, b, \ \ldots\ ) \in \mathbf{F}$$

является линейной комбинацией векторов e^1, e^2: $x = ae^1 + be^2$.

13. При попарно различных α, β, γ.

14. $A = -1E_1 + 2E_2 - 1E_3 + 1E_4$. Указание. Запишите каждую матрицу E_i, как элемент пространства $\mathbb{R}^4$, составьте из получившихся столбцов матрицу четвертого порядка B и проверьте, что она невырождена. Координаты матрицы A в базисе $\{E_i\}_{i=1}^4$ найдите как решение системы линейных уравнений с матрицей B и вектором правой части, полученным из матрицы A.

15. Решение. a) Пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_nS$. Тогда $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_nS^{-1}$.

b) Пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_nS$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_nQ$. Тогда $\mathcal{G}_nQ = \mathcal{E}_nS$, и $\mathcal{G}_n = \mathcal{E}_nSQ^{-1}$.

16. $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -(1/2)\sqrt{5/2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & (3/2)\sqrt{5/2} \end{pmatrix}.$

Литература

1. Беклимишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 496 с.

2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. — 320 с.

3. Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. — Казань: Казан. ун-т, 2012. — Режим доступа: http://kpfu.ru/docs/F974037543/A_G_Ne_.pdf, свободный. — 302 с.

4. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том I. — М.: Планета знаний, 2007. — 469 с.

5. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 1. — М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. — 170 с.

6. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том II, часть 2. — М.: ИКДМ «Зерцало–М», 2003. — 251 с.

7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — СПб.: Изд-во Лань, 2010. — 480 с.

8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Изд-во Лань, 2008. — 288 с.

9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Изд-во Лань, 2005. — 336 с.

Карчевский Евгений Михайлович
Рунг Елена Владимировна
Фролов Александр Геннадьевич

СЕМИНАРЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Подписано в печать 01.03.2013 г.
Форм. бум. 60 × 84 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Печ. л. 9,5. Т.100. Заказ 46.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КФУ
420045, Казань, ул. Кр. Позиция, 2а
231-52-12