Многомерные пространства. Топология

Повторение (топология прямой)

Числовая прямая – множество точек, каждой из которых поставлено в соответствие вещественное число.

Топология вещественной прямой определяется системой окрестностей. Окрестностью точки называется любой содержащий ее интервал.

Предельная точка и предел

Точка $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ называется

– предельной точкой множества A, если в любой ее проколотой окрестности $\breve{U}(a)$ найдется точка из A.

– пределом последовательности x_n, если в любой ее окрестности $U(a)$ находятся *все* x_n, начиная с некоторого.

– пределом функции f в точке x_0, если в любой ее окрестности $U(a)$ находятся *все* $f(x)$, для x из некоторой проколотой окрестности $\breve{U}(x_0)$.

Функция непрерывна

– в точке x_0 если для любой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) \in U(f(x_0))$. Равносильное определение: предел функции в точке существует и равен ее значению.

– на множестве, если она непрерывна в каждой точке A.

Свойства функций, непрерывных в точке

Если функция непрерывна в точке x_0, то она

– ограничена в окрестности этой точки;

– отделена от 0, если не равна 0 в x_0;

– имеет равные и левый и правый пределы, равные значению функции в точке.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она

– ограничена на этом отрезке;

– имеет минимум и максимум, т.е. достигает своих точных граней;
– принимает все промежуточные значения между минимумом и максимумом;
– равномерно непрерывна на этом отрезке.

Вещественная прямая **полна**. Полнота (непрерывность) прямой выражается разными способами, например:

– выполняется принцип вложенных отрезков;
– ограниченное непустое множество имеет супремум;
– в любом ограниченном бесконечном множестве есть предельная точка.

Многие из этих фактов и понятий можно обобщить на многомерные пространства. Для этого надо найти аналогии понятиям «**окрестность**» и «**отрезок**» и проверить, переносятся ли их свойства на многомерный случай.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Пространство $\mathbb{R}^n$ является декартовой степенью числовой прямой $\mathbb{R}$, то есть его элементом является набор n вещественных чисел, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Такой набор чисел можно рассматривать и как точку (элемент аффинного пространства), и как вектор (элемент линейного пространства).

Например, зададим точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, вектор с началом в x и концом в y имеет координаты

$$y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$$

Для примеров мы будем использовать двух- или трехмерное пространство. В этом случае обозначения координат точек (компонент векторов) могут быть другими:

В $\mathbb{R}^2$: элемент (x, y), $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, …

В $\mathbb{R}^3$: элемент (x, y, z), $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, …

Однако в теории удобно обозначать точку и ее компоненты одной буквой. Так мы и будем поступать.

Метрика и норма в многомерном пространстве

Длину вектора $y-x$ можно также рассматривать как расстояние между точками x и y. Причем это расстояние (метрику) можно ввести разными способами.

Евклидово расстояние считается по теореме Пифагора:

$$\rho_e(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

Манхэттенское расстояние (расстояние городских кварталов):

$$\rho_m(x,y)=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\cdots+|y_n-x_n|$$

Чебышёвское (равномерное) расстояние:

$$\rho_u(x,y)=\max(|y_1-x_1|,|y_2-x_2|,\dots,|y_n-x_n|)$$

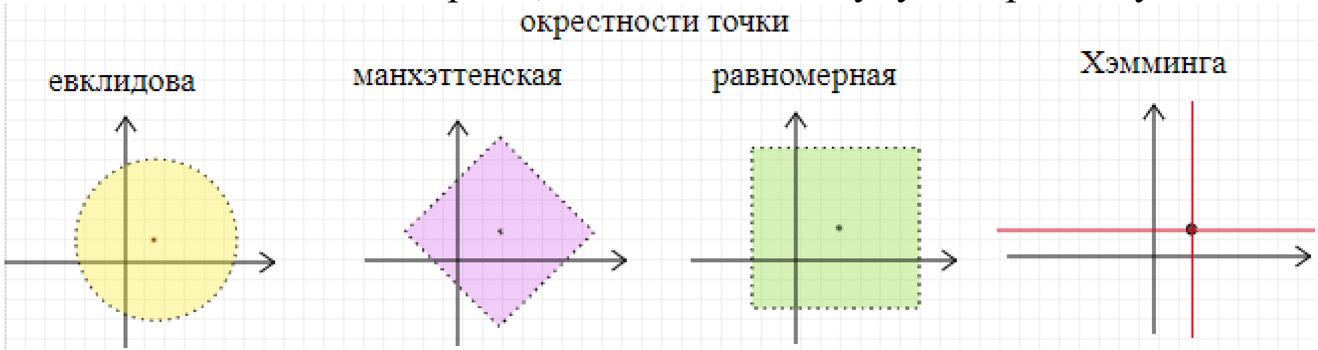
Все они являются частным случаем общей формулы:

$$\rho(x,y)=((y_1-x_1)^p+(y_2-x_2)^p+\cdots+(y_n-x_n)^p)^{1/q}$$

Равномерное расстояние можно рассматривать как предел этого выражения при $p=q\to+\infty$.

Особняком стоит расстояние Хэмминга – число ненулевых разностей (число отличающихся попарно координат).

Окрестностью точки x можно считать, например, «открытый шар», то есть множество точек y, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < r$. В зависимости от вида метрики, выглядеть они будут по-разному:



Первые три типа окрестностей порождают одну и ту же топологию (представление о близких точках). Если существует круглая окрестность, то в нее можно вписать квадрат и наоборот. Поэтому мы будем считать окрестностью любую из этих фигур. Например, условие

$$\max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \dots, |y_n - x_n|) < \varepsilon$$

равносильно тому, что *каждая* из разностей меньше ε.

Метрика Хэмминга не эквивалентна остальным.

Как мы говорили, элементы $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как векторы, то есть их можно складывать и умножать на (вещественное) число. Кроме того, можно ввести понятие длины. Если нам дана метрика, то длиной вектора мы можем считать расстояние его конца от начала координат.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; его длина называется **нормой** и обозначается $\|x\|$.

Евклидова:

$$\|x\|_e = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$

Манхэттенская:

$$\|x\|_m = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

Равномерная:

$$\|x\|_u = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

Ограниченность в смысле одной нормы влечет ограниченность в смысле двух других.

Свойства метрик и окрестностей

Можно показать, что для всех указанных метрик выполняется **неравенство треугольника**. А именно,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

Это же неравенство можно переписать в виде

$$|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leq \rho(y,z)$$

Далее мы будем рассматривать только метрики, эквивалентные евклидовой. Каждое из этих расстояний обращается в 0 тогда и только тогда, когда точки совпадают.

Для двух различных точек пространства существуют **непересекающиеся окрестности**. Это сразу следует из неравенства треугольника.

Действительно, пусть расстояние между точками x, y равно r. Покажем, что их окрестности радиуса $r/2$ не пересекаются. Действительно, пусть точка z лежит в обеих этих окрестностях, т.е. $\rho(x,z) < r/2$, $\rho(z,y) < r/2$. Тогда $r = \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Противоречие.

Типы множеств пространства

Множество называется

– ограниченным, если для каждого $x \in A$ выполняется $\|x\| \leq M$.

– открытым, если каждая его точка – внутренняя, то есть входит в него вместе со своей окрестностью;

– замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки;

– замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

Два последних определения равносильны.

Мы можем считать окрестностью точки любое содержащее ее открытое множество. Но чаще будем использовать «шарообразные» окрестности, они играют роль ε-окрестностей, окрестностей радиуса ε.

Свойства открытых и замкнутых множеств

– объединение любого числа открытых множеств открыто.

– пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

– объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

– пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Имея определения предела и непрерывности на языке окрестностей, мы легко перенесем их на многомерный случай.

Функция является **непрерывной в точке** a, если для любой окрестности $U_\varepsilon(f(a))$ точки $f(a)$ существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, что для всех $x \in U_\delta(a)$ выполняется $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

То же на языке $\varepsilon - \delta$ и с кванторами:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, \forall x\ \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Говорят что **предел функция в точке *a* равен *b***, если для любой окрестности $U_\varepsilon(b)$ точки b существует такая проколотая окрестность $\breve{U}_\delta(a)$ точки a, что для всех $x \in \breve{U}_\delta(a)$ выполняется $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

То же на языке $\varepsilon - \delta$ и с кванторами:

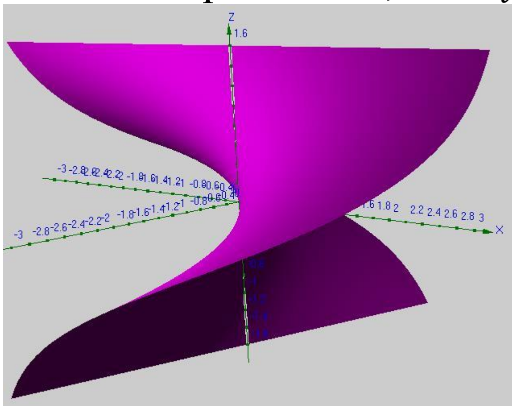
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, \forall x\ 0 < \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

Контрольное задание. Покажите, что свойство непрерывности функции на множестве А можно сформулировать так: прообраз каждого открытого множества открыт в А.

Обычный предел называют ещё «кратным», например, двойным или тройным. Кроме него можно рассмотреть новые типы пределов, в каком-то смысле обобщающие понятия «предел слева» или «справа».

Повторный предел

Повторный предел – это $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \dots \lim\limits_{x_n \to a_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Порядок переменных, по которым берется предел, может меняться. Напомним также, что в каждом однократном пределе функция исследуется в проколотой окрестности, т.е. $x_i \neq a_i$.



Например, рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. У нее есть особенность в начале координат. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{-y} = -1$$

то есть повторные пределы у этой функции не совпадают.

Может показаться, что из существования и равенства повторных пределов следует существование кратного. Но это не так. Например, у функции $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ повторные пределы в нуле равны 0, но сама функция в окрестности нуля не ограничена.

Действительно, в точках вида $(x, x - x^3)$ значение функции равно

$$\frac{x(x - x^3)}{x^3} = \frac{1}{x} - x$$

Значит, функция не является непрерывной в этой точке.

Предел по направлению

Предел по направлению ℓ функции f в точке a, это предел функции от одной переменной t вида $\lim\limits_{t\to+0} f(a + t\ell)$. Обычно считают, что ℓ – единичный вектор. Если функция задана в (проколотой) окрестности точки a, и имеет предел, то ее предел по любому направлению совпадает с кратным (докажите самостоятельно). Однако обратное неверно.

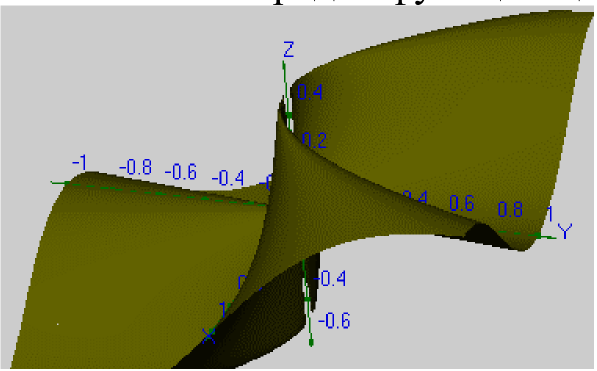
Рассмотрим пределы функции $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ вдоль прямых, проходящих через (0; 0). На прямых $x = 0$ и $y = 0$ (за исключением (0; 0)) функция равна 0. Пусть теперь $y = kx, k \neq 0$, тогда

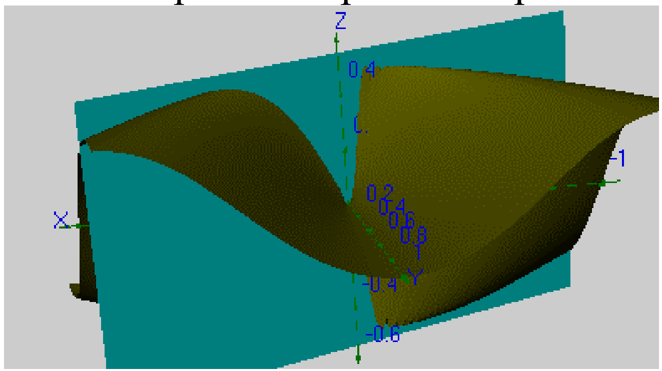
$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{k^2} = 0$$

Однако на кривой $y = x^2$ значение функции равно

$$f(x,x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

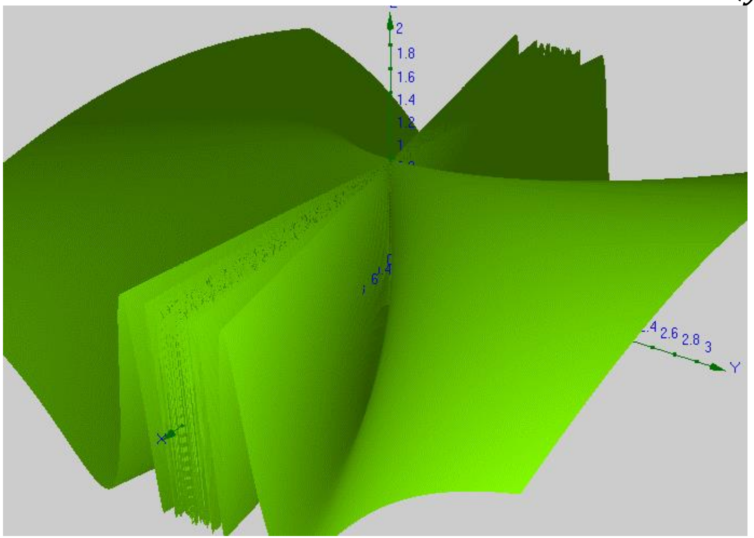
Так что и предел функции вдоль этой параболы при $x \to 0$ равен ½.





Такое поведение функции связано с отсутствием равномерности. Хотя по каждому направлению значение в конце концов приближается к нулю, но делает это «все позже и позже», только при x очень близких к x_0. Таким образом, невозможно выбрать окрестность нуля, общую для всех направлений, в которой функция будет близка к своему пределу.

Вот ещё график функции, разрывной в нуле: $z = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$



Итак, понятие предела (непрерывности) для функции нескольких переменных гораздо более сложное, чем для одной.

Легко заметить, что локальные свойства непрерывных функций без изменений переносятся на многомерный случай, так как для их доказательства достаточно знать свойства окрестностей. Для переноса же глобальных свойств нам нужно найти аналог понятия «отрезок».

Глобальные свойства непрерывных функций

Какие свойства отрезка были использованы в доказательствах свойств непрерывной функции? В основном мы пользовались его полнотой, точнее, замкнутостью. Мы искали какую-то точку, в которой нарушается нужное свойство. Например, функция локально неограничена. Или приближается сколь угодно близко к 0 и т.п.

Эту точку мы искали либо методом дихотомии, либо как предел последовательности. При этом, по свойству отрезка, этот предел принадлежал самому отрезку. Но по условию функция была непрерывна в точках отрезка, значит, для нее выполнялись локальные свойства. Противоречие.

Контрольное задание. Докажите, что последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся все её координатные последовательности, то есть $\left\{x_i^{(m)}\right\}$ при фиксированном i.

Указание. Используйте равномерную метрику Чебышёва.

Полнота n-мерного пространства

Пространство $\mathbb{R}^n$, как и числовая прямая, является полным. Для него выполняется теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема. Пусть последовательность $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, \dots$, $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ ограничена, то есть существует такое число M, что $\left\|x^{(m)}\right\| \leq M$. Тогда в ней существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство основано на аналогичной теореме для числовых последовательностей. В силу ограниченности $\left\{x^{(m)}\right\}$ и каждая ее координатная последовательность ограничена. Выберем из $\left\{x_1^{(m)}\right\}$ сходящуюся подпоследовательность с номерами $m_1, m_2, \dots$ Далее рассматриваем последовательность вторых компонент, $\left\{x_2^{(m_i)}\right\}$, выбираем в ней сходящуюся подпоследовательность и т.д.

После n применений такого выбора, получаем последовательность, у которой сходятся все координатные подпоследовательности. Как мы показали ранее, такая последовательность сходится.

Правда, точки $\mathbb{R}^n$ нельзя сравнивать, так что для них не вводится понятие супремума/инфимума.

Зато можно ввести принцип вложенных параллелепипедов и метод дихотомии. Например, производить деление пополам последовательно по всем координатным направлениям.

Компактные множества в $\mathbb{R}^n$

Итак, нам нужно найти в $\mathbb{R}^n$ множества, аналогичные по свойствам отрезку. Оно должно обладать следующими свойствами: из каждой последовательности его точек можно выбрать сходящуюся. Значит, множество должно быть ограниченным.

Кроме того, предел каждой такой сходящейся последовательности должен принадлежать самому множеству. Или, по-другому, искомое множество содержит все свои предельные точки (почему эти формулировки равносильны?).

Такое множество называется **компактным**. Итак, в $\mathbb{R}^n$ компактным будет любое *ограниченное замкнутое* множество.

Компактность можно задать разными способами, выбрав любое из них за определение и доказав остальные. Например, для компактных множеств выполняется

Лемма Бореля. Из любого покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Обсуждение. утверждение означает: если компактное множество принадлежит объединению $\bigcup G_i$, где все G_i – открытые, то в семействе можно оставить только конечное число G_i так, что их объединение всё ещё содержит в себе исходное множество.

Доказательство основано на методе дихотомии. Пусть не существует конечного подпокрытия для A. Деля его пополам мы получим в пределе точку и последовательность параллелепипедов, не имеющих конечного покрытия. Но сама точка входит в одно из множеств G_i, поэтому все параллелепипеды, начиная с некоторого, можно будет накрыть одной окрестностью. Противоречие.

Примерами компактных множеств являются замкнутые шары, то есть решения уравнения $\rho(x_0, x) \le r$. Частным случаем такого шара (при равномерной метрике) является (гипер)куб.

Также компактными будут любые многогранники с границей. И любые объединения конечного числа компактных множеств.

Свойства функции, непрерывной на компакте

Если функция непрерывна на компактном множестве X, то она

– ограничена на этом множестве;

– имеет минимум и максимум, т.е. достигает своих точных граней;

– равномерно непрерывна на X.

Все эти свойства доказываются точно так же, как аналогичные свойства для отрезка.

Однако свойство «принимает все промежуточные значения между минимумом и максимумом» не всегда выполняется. Дело в том, что отрезок не только замкнут и ограничен, он ещё и связный. В то время как произвольное ограниченное замкнутое множество может состоять из нескольких «частей».

Поэтому для выполнения теоремы о промежуточном значении добавляют требование линейной связности: для любой пары точек существует непрерывная линия, концами которой являются заданные точки, целиком лежащая в множестве.