Некоторые сведения из функционального анализа

Лапин А.В. (Казанский федеральный университет)

Содержание

§1 Линейное нормированное пространство

Пусть далее F означает числовое поле $\mathbb{R}$ действительных чисел или $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

1.1 Линейное пространство

)

Множество X, элементы которого назовем векторами, называется линейным (или векторным) пространством над полем F, если в нем заданы две операции: сложения $x+y$ векторов $x, y \in X$ и умножения λx вектора $x \in X$ на число $\lambda \in F$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

- коммутативность сложения $x+y=y+x$;
- ассоциативность сложения $(x+y)+z=x+(y+z)$;
- ассоциативность умножения $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;
- дистрибутивность сложения $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;
- дистрибутивность умножения $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;
- существование нулевого вектора 0: $x+0=x$;
- существование отрицательного вектора $-x$: $x+(-x)=0$;
- умножение вектора на 1: $1\,x=x$.

Простыми следствиями аксиом является существование для каждого $x \in X$ единственного отрицательного вектора $-x=(-1)x$.

Рассмотренные ранее метрические пространства $\mathbb{R}^n$, $C[0,1]$, $l_p\,\forall p \geqslant 1$ являются линейными, т.е. линейными метрическими пространствами.

Линейно независимые системы; размерность пространства

1. Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется вектор
$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots\lambda_n x_n,\ \lambda_i \in F. \tag{1}$$
Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.
2. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, если существует нетривиальная линейная комбинация (1), равная нулю, и линейно независимы, если только тривиальная комбинация (1) равна нулю.
3. Произвольная система векторов из X называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.
4. Линейное пространство X имеет размерность n, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторы линейно зависимы.
5. Линейное пространство X – бесконечномерное, если для любого натурального n в нем существует n линейно независимых векторов.
6. Если линейное пространство X над полем F имеет размерность n, то любая линейно независимая система из n его векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ образует **базис** X: любой вектор $x \in X$ однозначно представим в виде $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ x_i \in F$.

Подпространство и линейная оболочка

1. Непустое множество $X_0 \subset X$ в линейном пространстве X называется подпространством, если для любых $x, y \in X_0$ и $\lambda \in F$ справедливы включения $x + y \in X_0$, $\lambda x \in X_0$. Каждое подпространство $X_0 \subset X$ является линейным пространством относительно операций, определенных на всем пространстве X.

2. Наименьшее подпространство X_0, содержащее систему векторов $V \subset X$, называется линейной оболочкой этой системы и обозначается $\operatorname{span} V$. Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ состоит из всех векторов пространства X таких, которые представимы в виде конечной линейной комбинации: $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, где $\lambda_i \in F$ и $v_i \in X$.

Изоморфные пространства
Пусть X_1 и X_2 – два линейных пространства над полем F.

1. Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется линейным, если $f(\alpha + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $x, y \in X_1$ и любых чисел $\alpha, \beta \in F$.

2. Линейное взаимно однозначное отображение $f : X_1 \to X_2$ называется изоморфным, или изоморфизмом пространств X_1 и X_2.

1.2 Аксиомы нормы

Пусть на линейном пространстве X над числовым полем F определена вещественнозначная функция $\|x\|$, $\forall x \in X$, удовлетворяющая для всех элементов $x, y \in X$ и чисел $\lambda \in F$ следующим условиям (аксиомам нормы):

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (нулевой элемент X);

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Тогда эта функция называется нормой, а линейное пространство X с нормой $\|.\|$ – нормированным пространством.

Если необходимо подчеркнуть, что на X определена норма $\|.\|$, мы будем писать $(X, \|.\|)$.

1.3 Последовательности

1. Последовательность $\{x_n\} \in X$ элементов нормированного пространства X называется сходящейся, если существует элемент $x \in X$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.

2. Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется ограниченной, если существует число $R > 0$ такое, что $\|x_n\| \leqslant R \; \forall x \in X$.

3. Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется фундаментальной если $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Лемма 1. *(***Основные свойства сходящихся последовательностей***)*

1. *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел, ограничена и фундаментальна.*

2. *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

3. *Если последовательность фундаментальна в X и какая-либо ее подпоследовательность сходится, то и вся последовательность сходится к тому же пределу.*

4. *Норма является непрерывной функцией: если $x = \lim x_n$, то $\|x\| = \lim \|x_n\|$.*

В дополнение к перечисленным утверждениям приведем еще два свойства последовательностей, в которых используется линейность пространства:

Лемма 2.

1. *Если $x_n \to x$ в X и $\lambda_n \to \lambda$ в F, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;*

2. *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в X, то $x_n + y_n \to x + y$.*

1.4 Примеры нормированных пространств и сходящихся последовательностей

1. *Числовая прямая* $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел с нормой $\|x\| = |x|$. Сходимость последовательности означает обычную сходимость числовых последовательностей.

2. *Евклидово пространство* $\mathbb{R}^m$ m-мерных действительных векторов с нормой $\|x\| = \big(\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2\big)^{1/2}$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Сходимость последовательности $\{x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm})\}$ к вектору $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ равносильна координатной сходимости:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_{ni} - \xi_i| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3. *Пространство* $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций аргумента t с нормой $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$. Сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ означает равномерную на $[a, b]$ сходимость функциональной последовательности:

$$\|x_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

4. *Пространство* l_p, $1 \leqslant p < \infty$, элементами которого являются последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$, оснащенное нормой

$$\|x\| = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\big)^{1/p}, \ \ x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots).$$

5. *Пространство* l_∞ ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i|$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$. Сходимость $\{x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm}, \dots)\}$ к $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots)$ означает равномерную координатную сходимость:

$$\|x_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_{ni} - \xi_i| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

1.5 Открытые и замкнутые множества

1. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$ в нормированном пространстве $X = (X, \rho)$ называется множество $B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$.

2. Точка $x \in A$ множества $A \subset X$ называется его внутренней точкой, если существует открытый шар $B(x, r) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначатся $\mathrm{int}A$.

3. Множество A называется открытым, если $\mathrm{int}A = A$.

4. Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от a:
$$B(a, r) \cap (A \setminus a) \neq \emptyset \; \forall r > 0.$$

5. Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки

Лемма 3. *(***Свойства открытых и замкнутых множеств***)*

1. *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда замкнуто его дополнение $X \setminus A$.*

2. *Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.*

3. *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

4. *Для того, чтобы $a \in X$ была предельной точкой множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \forall n$, сходящаяся к a.*

1.6 Полные пространства, изометрия, пополнение

1. Нормированное пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел. Полное нормированное пространство принято называть пространством Банаха, или банаховым пространством.

2. Нормированные пространства $(X_1, \|.\|_1)$ и $(X_2, \|.\|_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$ (см. определение 1.1), сохраняющий норму:
$$\|f(x)\|_2 = \|x\|_1 \; \forall x \in X_1.$$

3. Нормированное пространство $(X, \|.\|_X)$ называется пополнением нормированного пространства $(X_0, \|.\|_{X_0})$, если
   - пространство $(X, \|.\|_X)$ – полное. т.е. банахово;
   - существует всюду плотное в X подпространство $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ такое, что $(X_0, \|.\|_{X_0})$ и $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ изометрически изоморфны.

Пополнение $(X, \|.\|_X)$ является в определенном смысле минимальным полным пространством, содержащим $(X_0, \|.\|_{X_0})$.

Теорема 1. *Всякое нормированное пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.*

1.7 Примеры сепарабельных и полных пространств. Пополнение конкретных пространств

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ сепарабельное и полное.

2. Пространство $C[a,b]$ сепарабельное и полное.

   Доказательство. Множество

   $$P_\infty = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^k \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ \forall k\}$$

   алгебраических полиномов произвольной степени с вещественными коэффициентами всюду плотно в $C[0,1]$ по теореме Вейерштрасса: для любой непрерывной функции $u(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический полином $p(x)$ такой, что $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |u(x) - p(x)| < \varepsilon$ (доказательство этой теоремы можно провести, например, основываясь на свойствах тригонометрических рядов Фурье).

   В то же время, каждый полином $p(x)$ с вещественными коэффициентами можно сколь угодно точно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами.

   А множество всех алгебраических полиномов произвольной степени с рациональными коэффициентами счетно (объединение счетного числа счетных множеств).

   В результате доказана сепарабельность пространства $C[a,b]$.

   Доказательство полноты $C[a,b]$ основано на использовании известных из мат. анализа фактов о равномерной сходимости последоывтельностей функций.

   □

3. Пространство l_∞ не сепарабельное, но полное.

   Докажем, что l_∞ не сепарабельно.

   Обозначим через $A \subset l_\infty$ множество всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, у которых все члены ξ_k принимают значения либо 0, либо 1. Докажем, что это множество не счетно. Допустим противное. Тогда A эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, так что любому $n \in \mathbb{N}$ соответствует последовательность $(\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_k^n, \ldots) \in A$. Рассмотрим последовательность $(1 - \xi_1^1, 1 - \xi_2^2, 1 - \xi_3^3, \ldots, 1 - \xi_n^n, \ldots) \in A$. Допустим, что ей соответствует число n. Во взаимно однозначном соответствии $A \sim \mathbb{N}$ этому числу соответствует также последовательность $(\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_n^n, \ldots)$, поэтому последовательности $(\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_n^n, \ldots)$ и $(1 - \xi_1^1, 1 - \xi_2^2, 1 - \xi_3^3, \ldots, 1 - \xi_n^n, \ldots)$ должны совпадать. В частности, должно выполняться равенство $\xi_n^n = 1 - \xi_n^n$, что невозможно. Полученное противоречие обосновывает несчетность множества A.

   Предположим теперь, что l_∞ сепарабельно, так что в нем существует счетное, всюду плотное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим счетную совокупность шаров $\{B(x_i, 1/3)\}$ с центрами в точках $x_i \in M$ и радиуса $1/3$. Так как множество M по определению всюду плотно, то эти шары покрывают l_∞, в частности, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B(x_i, 1/3)$. Но множество A не счетно, поэтому хотя бы в одном шаре $B(x_{i_0}, 1/3)$ содержатся более одного элемента из A, пусть это будут последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots)$. Расстояние между x и y не должно превышать диаметра шара $B(x_{i_0}, 1/3)$, т.е. $\|x - y\| \leqslant 2/3$. С другой стороны, из определения последовательностей x и y как элементов A следует $\|x - y\| = 1$. Получено противоречие.

4. Множество рациональных чисел с нормой $\|r\| = |r|$ (норма пространства $\mathbb{R}$) является неполным пространством.

5. Пространство $CL[-1,1]$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с интегральной нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$ не является полным.

   Приведу один пример фундаментальной последовательности, которая не имеет предела в $CL[-1,1]$.

   Возьмем разрывную функцию

   $$u(x) = \{0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0;\ \ 1 \text{ при } 0 < x \leqslant 1\}$$

   и последовательность непрерывных функций

   $$u_n(x) = \{0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0;\ \ nx \text{ при } 0 < x \leqslant 1/n;\ \ 1 \text{ при } 1/n < x \leqslant 1\}.$$

   Эта последовательность фундаментальна по норме $CL[-1,1]$, но ее предел - разрывная функция, а в $CL[-1,1]$ у нее нет предела.

6. Возьмем пространство l_p^0, элементами которого являются последовательности с конечным числом ненулевых членов: $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)$, где ξ_i – произвольные действительные числа и k – произвольное натуральное число. На этом пространстве введем норму l_p:

   $$\|x\| = \big(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^p\big)^{1/p}$$

   Пространство l_p^0 является подпространством l_p, причем неполным. Обозначим пополнение l_p^0 через X, тогда X изометрично l_p.

7. Пусть X_0 – это пространство алгебраических многочленов $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_n t^n$, определенных на отрезке $[0,1]$, с произвольными вещественными коэффициентами a_i и произвольной степени n. Норму в X_0 зададим равенством $\|p\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |p(t)|$. Это пространство не полно. Пополнением X_0 является пространство, изометричное $C[0,1]$.

1.8 Линеалы, подпространства, аффинные многообразия

1. Подмножество X_0 нормированного пространства X над полем F называется линейным (или линеалом), если для любых $x, y \in X_0$ и любых $\alpha, \beta \in F$ линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in X_0$.

2. Замкнутый линеал $X_0 \subset X$ называется подпространством X.

   Подчеркнем здесь требование замкнутости. Напомним, что в линейном пространстве любой линеал является подпространством, что не так для нормированного пространства.

3. Множество $L = x_0 + X_0 = \{x \in X : x = x_0 + y, y \in X_0\}$ с фиксированным элементом $x_0 \in X$ называется аффинным многообразием. Ясно, что при $x_0 = 0$ аффинное многообразие является линеалом.

1.9 Примеры линеалов и подпространств

1. Множество

   $$P_\infty = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^k\ \forall a_i \in \mathbb{R}\ \ \forall k\}$$

   алгебраических полиномов произвольной степени с вещественными коэффициентами является линеалом, но не подпространством пространства $C[0,1]$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса P_∞ всюду плотно в $C[0,1]$. Тем самым, замыкание $\bar{P}_\infty$ совпадает с $C[0,1] \neq P_\infty$. $\square$

2. Множество $X_0 = \{u \in C[0,1] : u(x_0) = 0,\ x_0 \in [0,1]\}$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, равных нулю в некоторой фиксированной точке x_0, является бесконечномерным подпространством пространства $C[0,1]$.

   Доказательство. Ясно, что X_0 – линеал в $C[0,1]$. Далее, из сходимости последовательности $u_n \to u$ по норме $C[0,1]$ (т.е. равномерной сходимости на $[0,1]$) следует сходимость в точке x_0, поэтому предельная функция удовлетворяет условию $u(x_0) = 0$. Значит, X_0 – подпространство. Это подпространство имеет бесконечную размерность, так как содержит, например, бесконечное число линейно независимых функций

$$x - x_0, (x-x_0)^2, \ldots, (x-x_0)^n, \ldots$$

$\square$

3. Множество $P_k = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,\ \forall a_i \in \mathbb{R}\}$ алгебраических полиномов степени не выше k с вещественными коэффициентами является подпространством $C[0,1]$ размерности $k+1$.

   Доказательство. Ясно, что P_k – это линеал размерности $k+1$, в качестве его базиса можно взять функции $1, x, \ldots, x^k$.

   Докажем замкнутость P_k в $C[0,1]$. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждому многочлену $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ вектор из его коэффициентов $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Обозначив через $\|\vec{a}\|$ евклидову норму $\vec{a}$, докажем неравенства

$$\alpha\|\vec{a}\| \leqslant \|p\|_{C[0,1]} \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a}\| \quad \forall p \in P_k,\ \alpha > 0. \tag{2}$$

   Для доказательства правого неравенства воспользуемся тем, что $\sum\limits_{i=0}^{k} |a_i| \leqslant \sqrt{k+1}\big(\sum\limits_{i=0}^{k} |a_i|^2\big)^{1/2} = \sqrt{k+1}\|\vec{a}\|$. Будем иметь:

$$\|p\|_{C[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |a_i| \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a}\|.$$

   Введем теперь в рассмотрение неотрицательную функцию

$$f(\vec{a}) = \|p\|_{C[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k|.$$

   Эта функция непрерывна, так как

$$|f(\vec{a}) - f(\vec{b})| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_k - b_k)x^k| \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

   Пусть $S_1 = \{\vec{a} : \|\vec{a}\| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^{k+1}$. Непрерывная функция f достигает минимума на компакте S_1:

$$\exists \vec{a}^* \in S_1 :\ f(\vec{a}^*) = \min_{\vec{a}\in S_1} f(\vec{a}) = \alpha.$$

   Постоянная α положительна. Действительно, если допустить, что $f(\vec{a}^*) = 0$, то многочлен $a_0^* + a_1^* x + \ldots + a_k^* x^k = 0$ тождественно на отрезке $[0,1]$, поэтому соответствующий ему вектор коэффициентов $\vec{a}^* = 0$, что противоречит его принадлежности единичной сфере S_1. Используя положительную однородность функции F, для произвольного $\vec{a}$ получим:

$$f(\vec{a}) = \|\vec{a}\| f(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}) \geqslant \alpha \|\vec{a}\|,$$

т.е. левое неравенство в (2).

Пусть последовательность $\{p_n = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_k^n x^k\} \in P_k$ сходится в $C[0,1]$ при $n \to \infty$ к некоторой функции $u \in C[0,1]$. Докажем, что $u \in P_k$. Последовательность $\{p_n\}$ фундаментальна в $C[0,1]$. В силу левого неравенства (2) последовательность векторов $\vec{a}^n = (a_0^n, a_1^n, \ldots, a_k^n)$ также фундаметальна в $\mathbb{R}^{k+1}$, поэтому сходится к некоторому вектору $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Но из правого неравенства (2) следует, что тогда последовательность $\{p_n\}$ сходится в $C[0,1]$ к $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^k$. □

1.10 Эквивалентные нормы

Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют положительные постоянные m и M такие, что

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \;\; \forall x \in X.$$

Далее отношение эквивалентности норм обозначаем $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$.

Отметим, что отношение эквивалентности норм транзитивно: если $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ и $\|.\|_2 \sim \|.\|_3$., то $\|.\|_1 \sim \|.\|_3$.

Понятие эквивалентных норм является весьма существенным для анализа, поскольку линейные пространства $(X, \|.\|_1)$ и $(X, \|.\|_2)$ с эквивалентными нормами $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ обладают одними и теми же метрическими и топологическими свойствами. Например, если некоторое множество (или последовательность) ограничено (открыто, замкнуто) в $(X, \|.\|_1)$, то оно ограничено (соответственно, открыто или замкнуто) и в $(X, \|.\|_2)$; если последовательность сходится (фундаментальна) в $(X, \|.\|_1)$, то она также сходится (фундаментальна) в $(X, \|.\|_2)$; если пространство $(X, \|.\|_1)$ – полное, то и пространство $(X, \|.\|_2)$ с эквивалентной нормой – полное.

Теорема 2. *Все нормы в конечномерном линейном пространстве эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X – линейное пространство над полем F ($F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$) размерности n с базисом $\{e_i\}, i = 1, 2 \ldots, n$. Определим на X норму $\|.\|_1$. Далее будем использовать обозначение $\beta_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|_1 > 0$. Возьмем произвольный элемент $x \in X$ и пусть $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n, \xi_i \in F$, – его разложение по данному базису. Поставим в соответствие элементу x вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \in F^n$ пространства F^n с нормой $\|\xi\|_\infty = \max\limits_i |\xi_i|$. Из аксиомы треугольника для норм следует неравенство

$$\|x\|_1 = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|_1 \, \|e_i\|_1 \leqslant \beta \|\xi\|_\infty.$$

Докажем теперь неравенства противоположного вида. Для этого определим функцию $f(\xi) = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1$. Она непрерывна, так как

$$|f(\xi) - f(\eta)| = \big| \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 - \|\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots \eta_n e_n\|_1 \big| \leqslant$$
$$\leqslant \|(\xi_1 - \eta_1) e_1 + (\xi_2 - \eta_2) e_2 + \ldots (\xi_n - \eta_n) e_n\|_1 \leqslant \beta_1 \|\xi - \eta\|_\infty \; \forall \xi, \eta \in F^n.$$

Пусть $S_1 = \{\xi \in F^n : \|\xi\|_\infty = 1\}$ –ограниченное и замкнутое множество в конечномерном пространстве F^n, т.е. компакт. По теореме Вейерштрасса (см. следствие **??** к теореме **??** в параграфе **??**) непрерывная функция $f(\xi)$ достигает минимума на S_1:

$$\exists \xi^0 \in S_1 : f(\xi^0) = \min_{\xi \in S_1} f(\xi) = \alpha_1.$$

Число α_1 положительно. Действительно, если допустить, что $\alpha_1 = f(\xi^0) = 0$, то $\|\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \dots \xi_n^0 e_n\|_1 = 0$, поэтому $\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \dots \xi_n^0 e_n = 0$ для ненулевого вектора ξ^0. Это противоречит линейной независимости системы $\{e_i\}, i = 1, 2 \dots, n$.

Пусть теперь ξ – любой ненулевой вектор и $\eta = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi\|_\infty}, \frac{\xi_2}{\|\xi\|_\infty}, \dots \frac{\xi_n}{\|\xi\|_\infty}\right) \in S_1$. Тогда

$$\|x\|_1 = f(\xi) = \|\xi\|_\infty f(\eta) \geqslant \alpha_1 \|\xi\|_\infty.$$

Итак, мы установили, что для любой нормы $\|.\|_1$ в пространстве X справедливы неравенства

$$\alpha_1 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta_1 \|\xi\|_\infty. \qquad (3)$$

Для любой другой нормы $\|.\|_2$ в X справедливы аналогичные неравенства:

$$\alpha_2 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta_2 \|\xi\|_\infty \qquad (4)$$

с постоянными $\alpha_2 = \min\limits_{\xi \in S_1} \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots \xi_n e_n\|_2 > 0$ и $\beta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|_2 > 0$. Из неравенств (3) и (4) следует эквивалентность норм $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1} \|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

□

Следствие 1. *Конечномерное нормированное пространство полно.*

Доказательство. Пусть X – конечномерное нормированное пространство над полем F и $\{e_i\}, i = 1, 2 \dots, n$, – какой-либо его базис. При доказательстве теоремы установлено взаимно однозначное соответствие между X и пространством F^n, а также неравенства (3) для $X \ni x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots \xi_n e_n, \xi_i \in F$. Отсюда следует, что сходимость и фундаментальность последовательности в X равносильны, соответственно, сходимости и фундаментальности последовательности векторов из коэффициентов разложения по базису в F^n. В силу полноты F^n пространство X также полно. □

1.11 Примеры эквивалентных нормировок пространств

1. Согласно теореме 2 все нормы в пространстве n-мерных векторов эквивалентны. Примеры норм:

   евклидова норма $\|x\| = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2}$, максимум-норма $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, норма $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Для них справедливы следующие неравенства эквивалентности:

   $$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

2. Определим линейное пространство $X = \{u \in C^1[0,1]) : u(0) = 0\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, равных нулю в точке 0. Оснастим его нормой

$$\|u\|_1 = \Big(\int_0^1 (u^2(x) + u'^2(x))dx\Big)^{1/2}.$$

Наряду с этим пространством рассмотрим пространство X с нормой

$$\|u\|_2 = \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2}.$$

Докажем, что эти нормы эквивалентны. Ясно, что $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$, поэтому достаточно доказать противоположное неравенство.

В силу условия $u(0) = 0$ справедливо равенство

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \;\forall x \in [0,1].$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим:

$$u^2(x) = \Big(\int_0^x u'(t)dt\Big)^2 \leqslant x\int_0^1 u'^2(t)dt \leqslant \int_0^1 u'^2(t)dt \;\forall x \in [0,1].$$

Отсюда легко вывести два следующих неравенства:

$$\Big(\int_0^1 u^2(x)dx\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2} \quad \forall u \in X. \tag{5}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |u(x)| \leqslant \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2} \quad \forall u \in X. \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2$.

1.12 Задачи и упражнения

1. Доказать лемму 1.

2. Доказать лемму 2.

3. Пусть $C^\alpha[a,b]$, $\alpha \in (0,1]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера:

$$L_\alpha(x) \equiv \sup_{t_1,t_2\in[a,b];\, t_1\neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} < +\infty.$$

Проверить, что

$$\|x\|_{C^\alpha} = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| + L_\alpha(x)$$

является нормой этого пространства.

4. Проверить, можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций использовать в качестве нормы следующие функции:

   (a) $|x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$;

   (b) $\int\limits_a^b |x(t)|\, dt + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$.

5. Доказать лемму 3.

6. Какие из норм предыдущего примера эквивалентны исходной норме пространства $C^1[a, b]$: $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$?

7. Являются ли подпространствами пространства $C[-1, 1]$ следующие множества:

   (a) четные функции;

   (b) непрерывно дифференцируемые функции;

8. Доказать, что множество $X_0 = \{u \in C[0, 1] : \int\limits_0^1 u(x)dx = 0\}$ функций с нулевым средним значением является бесконечномерным подпространством $C[0, 1]$.

9. Доказать, что на множестве непрерывных на $[a, b]$ функций нормы

   $\|x\|_C = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ и $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|\, dt$

   не эквивалентны.

10. Доказать, что конечномерный линеал нормированного пространства является подпространством.

§2 Гильбертово пространство

2.1 Скалярное произведение, предгильбертово и гильбертово пространства

Пусть X - линейное пространство над полем F действительных или комплексных чисел.

1. Скалярным произведением в X называется функция (x, y) двух переменных $x, y \in X$ со значениями в F, обладающая следующими свойствами:

   (a) линейность: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;

   (b) симметричность: $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

   (c) положительность: $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$

   для всех $x, y, z \in X$ и всех $\alpha, \beta \in F$.

2. Линейное пространство X, в котором задано скалярное произведение, называется предгильбертовым (а также унитарным в комплексном случае и евклидовым в действительном случае).

3. Полное предгильбертово пространство называется пространством Гильберта, или гильбертовым пространством.

Лемма 1. *Функция от* $x \in X$
$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1}$$
определяет норму в предгильбертовом пространстве X.

Доказательство. Первые две аксиомы нормы легко проверить, используя свойства скалярного произведения:
$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2, \quad \|x\| > 0 \text{ при } x \neq 0.$$
Для доказательства неравенства треугольника для нормы прежде докажем следующее неравенство Коши-Буняковского:
$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{2}$$
При $y = 0$ неравенство (2) очевидно, поэтому считаем $y \neq 0$. Для любого $\lambda \in F$ имеем
$$0 \leqslant (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2(y, y).$$
Положив в этом неравенстве $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(y, y)}$, получим
$$(x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)}\overline{(x, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y) \geqslant 0,$$
т.е. неравенство (2):
$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0.$$
Теперь неравенство треугольника для нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ следует из неравенства Коши-Буняковского (2):
$$\|x + y\|^2 = (x, y) + 2Re(x, y) + (y, y) \leqslant (x, y) + 2\|x\|\|y\| + (y, y) \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2.$$
$\square$

Из леммы 1 следует, что предгильбертово (гильбертово) пространство является частным случаем линейного нормированного (соответственно, банахова) пространства, что позволяет перенести на эти пространства основные понятия и результаты теории нормированных пространств. В следующих пунктах мы уделим внимание специфическим свойствам пространств со скалярным произведением, связанным с понятием ортогональности.

Лемма 2. *Скалярное произведение является непрерывной функцией своих аргументов:*
если $x_n \to x$, $y_n \to y$ по норме $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, порожденной скалярным произведением, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

2.2 Изоморфизм гильбертовых протранств

Предгильбертовы (гильбертовы) пространства $(H_1, (.,.)_1)$ и $(H_2, (.,.)_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$ (см. определение 1.1), сохраняющий скалярное произведение:

$$(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1 \quad \forall x, y \in H_1.$$

Теорема 1. *Всякое предгильбертово пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.*

2.3 Критерий "гильбертовости"нормированного пространства

Легко проверить, что для нормы, определенной в пространстве H со скалярным произведением равенством (1) $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, справедливо следующее соотношение (равенство параллелограмма):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \ \ \forall x, y \in H. \tag{3}$$

Оказывается, что это равенство является критерием того, что в нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой равенством (1):

Теорема 2. **(фон Нейман, Йордан)** *Если в нормированном пространстве $(H, \|.\|)$ выполнено равенство параллелограмма (3), то H– предгильбертово пространство, т.е. в нем можно ввести (причем, единственным образом) скалярное произведение, связанное с нормой равенством $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$.*

2.4 Ортогональность и ортогональная проекция

Пусть H – гильбертово пространство над полем F со скалярным произведением $(.,.)$.

1. Векторы $x, y \in H$ ортогональны, если $(x, y) = 0$; далее используем обозначение $x \perp y$.
2. Ортогональное дополнение к множеству $S \subset H$ – это множество $S^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.
3. В случае вещественного гильбертова пространства ($F = \mathbb{R}$) определен угол α между векторами x и y с помощью равенства
$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \ \alpha \in [0, \pi].$$

Лемма 3. *Для любого множества $S \subset H$ его ортогональное дополнение $S^\perp$ является подпространством H.*

Доказательство. Прежде всего, $S^{\perp}$ – линеал. Действительно, если $x, y \in S^{\perp}$, то для любых чисел $\alpha, \beta \in F$ справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0 \;\forall z \in S.$$

Докажем замкнутость $S^{\perp}$. Пусть последовательность $\{x_n\} \in S^{\perp}$ сходится к x. Тогда в силу леммы 2

$$(x, z) = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = 0 \;\forall z \in S \;\Rightarrow x \in S^{\perp}.$$

□

Теорема 3. **(Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства)**
Пусть H – гильбертово пространство и L – его подпространство. Тогда любой вектор $x \in H$ однозначно представим в виде

$$x = y + z, \; y \in L, z \in L^{\perp}. \tag{4}$$

Доказательство. Если $x \in L$, то $y = x$ и $z = 0$.

Пусть $x \notin L$ и

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2.$$

Обозначим через $\{y_n\}$ минимизирующую последовательность:

$$y_n \in L, \; d_n = \|x - y_n\|^2 \to d \text{ при } n \to \infty.$$

Для любого $h \in L$ и числа α элемент $y_n + \alpha h$ принадлежит подпространству L, поэтому

$$d \leqslant \|x - (y_n + \alpha h)\|^2 = \|x - y_n\|^2 - \overline{\alpha}(x - y_n, h) - \alpha\overline{(x - y_n, h)} + |\alpha|^2\|h\|^2.$$

Выбрав $\alpha = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$, получим $\|x - y_n\|^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geqslant d$, или

$$|(x - y_n, h)| \leqslant \|h\|\sqrt{d_n - d}. \tag{5}$$

Из этого неравенства следует

$$|(y_k - y_n, h)| \leqslant |(x - y_k, h)| + |(x - y_n, h)| \leqslant \left(\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_n - d}\right)\|h\| \;\; \forall h \in L.$$

Пусть теперь $h = y_k - y_n$, тогда

$$\|y_k - y_n\| \leqslant \sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_n - d} \to 0 \text{ при } k, n \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n\} \in L$ фундаментальна. Поскольку H – полное пространство, а L – замкнутое подпространство, то существует предел $y \in L$ последовательности $\{y_n\}$. Переходя к пределу при $n \to n\infty$ в неравенстве (5), получим $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$, т.е. вектор $z = x - y \perp L$.

Итак, разложение $x = y + z$ с $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$ построено. Осталось доказать его единственность. Допустим, что справедливо, также, равенство $x = \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{y} \in L, \tilde{z} \in L^{\perp}$. Тогда $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$, при этом $y - \tilde{y} \in L$, а $\tilde{z} - z \in L^{\perp}$. Поэтому

$$\|y - \tilde{y}\|^2 = (y - \tilde{y}, \tilde{z} - z) = 0 \;\Rightarrow y - \tilde{y} = 0 \text{ и } \tilde{z} = z.$$

□

Следствие 2. *Пусть L – линеал в гильбертовом пространстве H. Для того, чтобы L было всюду плотно в H, необходимо и достаточно, чтобы $L^{\perp} = \{0\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z – какой-либо вектор из $L^{\perp}$. Он ортогонален L, а значит, и замыканию этого множества $\overline{L}$, которое совпадает с H в силу плотности L. В частности, $z \perp z$, поэтому $z = 0$.

Достаточность. Допустим, что L не всюду плотно в H, т.е. $\overline{L} \neq H$. Тогда существует вектор $x \notin \overline{L}$ и по теореме 3 его можно представить в виде $x = y + z$ где $y \in \overline{L}$ и $z \in (\overline{L})^{\perp} = L^{\perp}$. При этом $z \neq 0$, так как $x \notin \overline{L}$. Но это противоречит условию $L^{\perp} = \{0\}$. □

2.5 Ортогональные системы и ряды Фурье

1. Множество L векторов гильбертова пространства H называется ортогональной системой, если любые два различных вектора этой системы ортогональны: $(x, y) = 0 \; \forall x \neq y, \; x, y \in L$.

2. Ортогональная система L называется ортонормированной, если $\|x\| = 1$ для любого $x \in L$.

Любую конечную или счетную линейно независимую систему (см. определение 1.1 в §1) в H можно преобразовать в ортонормированную с помощью процесса ортогонализации Шмидта. Ниже приведено доказательство этого утверждения в случае счетной системы.

Лемма 4. *(**Ортогонализация**) Пусть $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\} \equiv \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ – линейно независимая система в H. Тогда существует ортонормированная в H система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая, что*

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} g_i, \text{ где } c_{nn} \neq 0, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Доказательство. Построим сначала ортогональную систему $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ полагая последовательно

$$f_1 = g_1, f_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1} d_{ni} f_i, \; n = 2, 3, \ldots$$

Коэффициенты d_{ni} выберем из условия ортогональности f_n всем векторам $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, т.е. как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(f_n, f_k) = (g_n, f_k) - d_{nk}\|f_k\|^2 = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

По построению каждый f_k есть линейная комбинация $g_1, g_2, \ldots, g_k$, при этом коэффициент при g_k равен 1, поэтому $f_k \neq 0$ и данная система уравнений имеет единственное решение:

$$d_{nk} = \frac{(f_n, f_k)}{\|f_k\|^2}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее положим $e_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$ для всех n и получим ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Как и f_n, каждый вектор e_n является линейной комбинацией $g_1, g_2, \ldots, g_n$, поэтому имеет вид (6). □

Следствие 3. *При каждом n треугольная матрица C_n коэффициентов c_{ni} в равенстве* (6) *– треугольная с ненулевой диагональю, поэтому имеет обратную. Это означает, что каждый элемент g_n исходной линейно независимой системы $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ также является линейной комбинацией $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Отсюда следует, что линейные оболочки систем векторов $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ совпадают.*

Коэффициенты и ряд Фурье

Пусть H – (бесконечномерное) гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H.

1. Для любого $x \in H$ числа $x_k = (x, e_k)$ называются коэффициентами Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

2. Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ называются рядом Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Теорема 4. *(**Сумма ряда Фурье**)*

1. *Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится по норме.*

2. *Если $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ – сумма ряда Фурье для вектора x, то разность $x - S$ ортогональна всем векторам системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$:*
$$(x - S, e_i) = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots \tag{7}$$

Доказательство. 1. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ –частичная сумма ряда Фурье и $y_n = x - S_n$. Поскольку векторы e_i образуют ортонормированную систему, то

$$(y_n, e_i) = (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, e_i) = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots n \ \Rightarrow (y_n, S_n) = 0, \tag{8}$$

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k,i=1}^{n} x_k \overline{x}_i (e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2. \tag{9}$$

Воспользовавшись соотношениями (8), (9), получим:

$$\|x\|^2 = \|y_n + S_n\|^2 = \|y_n\|^2 + \|S_n\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Отсюда следует оценка
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2 \ \forall n,$$

т.е. сходимость числового ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ и неравенство (т.н. неравенство Бесселя):
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{10}$$

В силу неравенства Бесселя (10) последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм фундаментальна. Действительно,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Поскольку H – полное пространство, то последовательность $\{S_n\}$ имеет предел $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

2. Для доказательства того, что вектор $x - S$ ортогонален e_i для любого i, достаточно воспользоваться равенством (8) и непрерывностью скалярного произведения:

$$(x - S, e_i) = (x - \lim_{n\to\infty} S_n, e_i) = \lim_{n\to\infty} (x - S_n, e_i) = 0 \ \forall i.$$

□

2.6 Полные и замкнутые системы

Полная система

Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется полной в H, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. Не существует ненулевого вектора в H, ортогонального всем e_i, $i = 1, 2, \ldots$:

$$(x, e_i) = 0 \; \forall i \; \Rightarrow x = 0. \tag{11}$$

2. Линейная оболочка $\mathrm{span}\{e_i\}$ системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна в H.

Эквивалентность этих определений следует из того, что $x \perp e_i \; \forall i$ равносильно $x \perp \mathrm{span}\{e_i\}$, что, в свою очередь, равносильно плотности $\mathrm{span}\{e_i\}$ в пространстве H (следствие 2).

Теорема 5. *(***Полные и замкнутые системы***)*
Пусть H – гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в H.*

2. *Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится к x:*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \; \textit{где } x_i = (x, e_i).$$

3. *Для любой пары векторов $x, y \in H$ справедливо равенство*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i, \; \textit{где } x_i = (x, e_i), y_i = (y, e_i). \tag{12}$$

4. *Для любого вектора $x \in H$ справедливо равенство Парсеваля (уравнение* **замкнутости** *системы):*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2, \; \textit{где } x_i = (x, e_i). \tag{13}$$

Доказательство. Проведем "круговое" доказательство утверждений.

$1 \Rightarrow 2$. Утверждение следует из (7) и (11).

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда

$$(S_n, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

В пределе при $n \to \infty$ отсюда следует равенство (12).

$3 \Rightarrow 4$. Положив $y = x$ в равенстве (12), получим (13).

$4 \Rightarrow 1$. Пусть $x \in H$ такой, что $(x, e_i) = 0 \; \forall i$. Тогда $x_i = (x, e_i) = 0 \; \forall i$, поэтому из (13) следует равенство $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

□

2.7 Примеры полных систем

1. Пусть $H = L_2(-\pi, \pi)$ и

$$\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots\}$$

– тригонометрическая система функций. Она ортонормирована и полна. Первое свойство проверяется непосредственными вычислениями. Для доказательства полноты системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ докажем, что ее линейная оболочка $\operatorname{span}\{e_i\}$ всюду плотна в $L_2(-\pi, \pi)$.

Воспользуемся известным фактом: множество непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций всюду плотно в $L_2(-\pi, \pi)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для функции $v \in L(-\pi, \pi)$ найдем непрерывную функцию $u(x)$ такую, что

$$\|v - u\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $M = \max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |u(x)|$ и $\delta > 0$ таково, что $\sqrt{\delta}2M < \frac{\varepsilon}{3}$. Определим функцию $\tilde{u}(x)$ равенством

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi - \delta \\ \text{линейная функция, соединяющая точки } (\pi - \delta, u(\pi - \delta)) \text{ и } (\pi, u(-\pi)). \end{cases}$$

Тогда

$$\|u - \tilde{u}\|_{L_2} = \Big(\int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} |u(x) - \tilde{u}(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{\delta}2M < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Построенная функция $\tilde{u}$ непрерывна и удовлетворяет равенству $\tilde{u}(-\pi) = \tilde{u}(\pi)$, поэтому она может быть приближена сколь угодно точно тригонометрическим полиномом по норме пространства $C[-\pi, \pi]$:

$$\exists T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x : \max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |\tilde{u}(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Ясно, что тогда

$$\|\tilde{u} - T_n\|_{L_2} = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}(x) - T_n(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi} \max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |\tilde{u}(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Соединив полученные неравенства, придем к следующему результату: для любой функции $v \in L(-\pi, \pi)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация тригонометрический полином T_n – линейная комбинация элементов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|v - T_n\|_{L_2} < \varepsilon,$$

т.е. $\operatorname{span}\{e_i\}$ всюду плотна в $L_2(-\pi, \pi)$.

Теперь можно сформулировать основной вывод, справедливый в силу теоремы 5:

тригонометрический ряд Фурье любой функции из $L_2(-\pi, \pi)$ сходится к этой функции по норме $L_2(-\pi, \pi)$.

2. Пусть $H = L_2(a, b)$ и $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty} = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ – линейно независимая система. Применив процесс ортогонализации (см. теорему 4), получим ортонормированную систему т.н. полиномов Лежандра $\{L_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$. Для доказательства полноты системы $\{L_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ достаточно доказать полноту системы $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, так как линейные оболочки этих систем совпадают (см.

следствие 3). Но линейная оболочка $\mathrm{span}\{g_i(t)\}$ – это множество всех алгебраических полиномов, всюду плотное в $C[a,b]$. Поскольку, в свою очередь, непрерывные функции всюду плотны в $L_2(a,b)$, а для норм справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2} = \Big(\int\limits_a^b |u(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \leqslant (b-a)^{1/2} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |u(t)| = (b-a)^{1/2}\|u\|_C,$$

то $\mathrm{span}\{g_i(t)\}$ всюду плотно в $L_2(a,b)$.

2.8 Задачи

1. В линейном пространстве непрерывных на $[0,+\infty)$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}x^2(t)\,dt < +\infty$$

определим функцию

$$(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}x(t)\,y(t)\,dt.$$

Доказать, что это скалярное произведение.

2. Доказать лемму 2: если $x_n \to x$, $y_n \to y$ по норме $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, порожденной скалярным произведением, то $(x_n,y_n) \to (x,y)$.

3. Пусть $\{x_n\},\{y_n\}$ – последовательности в гильбертовом пространстве, причем $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|y_n\| \leqslant 1$ и $(x_n,y_n) \to 1$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Указание. Доказать от противного, предположив, что для некоторой подпоследовательности индексов $\|x_{n_k} - y_{n_k}\|^2 \geqslant \epsilon > 0$.

4. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением два вектора y и x линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$|(x,y)| = \|x\|\,\|y\|.$$

Частичное решение. Пусть $(x,y) = \|x\|\,\|y\|$ и $x \neq 0$, $y \neq 0$. Докажем, что существует постоянная k, такая что $y = kx$. Будем искать k, решая уравнение $\|y - kx\|^2 = 0$,

$$0 = \|y-kx\|^2 = \|y\|^2 + k^2\|x\|^2 - 2k(y,x) = \|y\|^2 + k^2\|x\|^2 - 2k\|y\|\|x\| = (\|y\| - k\|x\|)^2,$$

откуда $k = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}$, т.е. действительно $y = kx$ и векторы y и x линейно зависимы.

5. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением два вектора y и x лежат на одном луче (т.е. $y = kx$ для некоторого $k \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

6. Пусть H_0 – (замкнутое) подпространство гильбертова пространства H. Доказать, что для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $y_0 \in H_0$ такой, что

$$\|x - y_0\| = \inf_{y\in H_0} \|x - y\|.$$

(y_0 – это ортогональная проекция x на подпространство H_0).

7. Для любого множества A в гильбертовом пространстве H через $A^{\perp}$ обозначается его ортогональное дополнение:
$$x \in A^{\perp} \Leftrightarrow (x, y) = 0 \ \ \forall y \in A.$$
Пусть $A \subset B$. Доказать, что $A^{\perp} \supset B^{\perp}$.

8. Пусть A – подмножество гильбертова пространства H. Доказать, что
   (a) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$;
   (b) $(A^{\perp})^{\perp}$ совпадает с замыканием линейной оболочки A.

9. Пусть H – гильбертово пространство и последовательность $\{x_n\} \in H$ такова, что
$$(x_n, y) \to (x, y) \ \ \forall y \in H; \quad \|x_n\| \to \|x\|.$$
Доказать, что $\|x_n - x\| \to 0$.

10. Доказать, что предгильбертово пространство, изометрически изоморфное гильбертову пространству, также гильбертово.

11. Пусть H – гильбертово пространство, $A \subset H$ и $\bar{A}$ – замыкание множества A. Доказать, что $A^{\perp} = \bar{A}^{\perp}$.