Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," куда я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 59

Условный экстремум

На этом занятии мы будем изучать методы отыскания локальных экстремумов (максимумов и минимумов) у функции $z = f(p)$ от n переменных: $p = (x_1, \dots, x_n)$, когда на эти переменные накладываются связи в виде $m\,(< n)$ уравнений

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Если из этих уравнений удается исключить m переменных, скажем $x_{n-m+1}, \dots, x_n$, в виде функций от $x_1, \dots, x_{n-m}$, то после подстановки $x_{n-m+1}, \dots, x_n$ в функцию f задача на условный экстремум сводится к отысканию экстремумов полученной после подстановки функции $g(x_1, \dots, x_{n-m})$.

Поясним на примере этот метод решения задач на условный экстремум.

Пример 1. *Найти все точки экстремума функции*

$$f = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

и определить их тип, если

$$x + y + z = 1, \qquad x + y - z = 0. \tag{2}$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения (2), получаем $z = 1/2, \;\; y = 1/2 - x$. Подставив эти решения системы (2) в уравнение (1), получаем, как говорят оптимальщики, «функцию цели»

$$f = 2x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

Дифференцируя эту функцию и приравнивая производную нулю, находим критическую точку экстремума: $f'(x) = 4x - 1 = 0$, критическая точка $x = 1/4$. Положительное значение второй производной в этой точке $f''(4) = 4$ показывает, что $x = 1/4$ – точка минимума.

Из полученных ранее выражений $z = 1/2, \;\; y = 1/2 - x$ для переменных y и z, находим что точка

$$p = (1/4, \; 1/4, \; 1/2)$$

есть единственная точка экстремума функции (1), а именно, ее минимума.

К сожалению, во многих прикладных задачах на условный экстремум дополнительные связи между аргументами целевой функции слишком сложны, и поэтому не представляется возможным сократить размерность пространства, в котором ищется экстремум. В этом случае существуеь универсальный метод отыскания экстремума, который называется

Метод неопределенных множителей Лагранжа.

В этом методе находятся стационарные точки $q(\lambda) = q(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ функции

$$L(p) = f(p) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(p)$$

при произвольных значениях компонент вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Полученные значения $x_k = x_k(\lambda), \;\; k = 1, \ldots, n$, подставляются в уравнения связей

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Данная система уравнений решается относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, после чего эти решения подставляются в найденные ранее произвольные стационарные точки $q(\lambda)$. Полученные («в числах») стационарные точки p_0 исследуются на свойство их экстремальности и выясняется тип экстремумов.

Существование и тип экстремума определяется по знаку квадратичной формы $d^2L(p_0)$ при дополнительных условиях на дифференциалы первого поряка функций φ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d\,x_k \Big|_{p=p_0} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Поясним этот метод на решении Примера 1.

В этом примере $p = (x, y, z,)$, функция $f(p) = x^2 + y^2 + z^2$ и условия на переменные x, y, z задаются уравнениями

$$x + y + z - 1 = 0, \quad x + y - z = 0. \tag{4}$$

Решение данной задачи на условный экстремум начинается с записи функции Лагранжа

$$L = L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(x + y - z).$$

Чтобы найти « произвольные» стационарные точки $q(\lambda)$, вычисляем производные от L и приравниваем их нулю:

$$L'_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad L'_y = 2y + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Решая эту линейную систему уравнений относительно x, y и z, получаем произвольные стационарные точки

$$x = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad y = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}. \tag{5}$$

Теперь подставляем эти значения в уравнения связей (4), полдучая уравнения для определения λ :

$$3\lambda_1 + \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$$

Корни этой системы $\lambda_1 = -3/4,\ \lambda_2 = 1/4$ после подстановки в произвольные стационарные точки (5) определяют искомую стационарную точку:

$$x_0 = \frac{1}{4}, \qquad y_0 = \frac{1}{4}, \qquad z_0 = \frac{1}{2}.$$

Чтобы решить вопрос экстремальности этой точки и определить ее тип, вычисляем вторые производные L и составляем дополнительные дифференциалы (3) (дифференциалы от левых частей уравнений (4)):

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2, \qquad L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0,$$

и дополнительные дифференциалы

$$dx + dy + dz, \qquad dx + dy - dz = 0. \tag{6}$$

Составляем из вторых производных квадратичную форму

$$d^2L = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Эта квадратичная форма всегда положительна, независимо от дополнительных условий (6) (зря мы их вычисляли!). Следовательно, точка $p_0 = (1/4,\ 1/4,\ 1/2)$ есть точка минимума функции f.

Рассмотрим более сложный пример, где дополнительный дифференциал играет существенную роль при определении типа экстремума.

Пример 2. *Найти все точки экстремума функции*

$$f = xyz$$

и определить их тип, если

$$xy + xz + yz = a^2, \qquad x > 0,\ y > 0,\ z > 0. \tag{7}$$

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L = L(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + xz + yz),$$

вычисляем ее производные и записываем уравнения для определения стационарных точек этой функции:

$$L'_x = yz + \lambda(y + z) = 0,$$

$$L'_y = xz + \lambda(x + z) = 0,$$
$$L'_z = xy + \lambda(x + y) = 0.$$

Это система нелинейных уравнений, и точка $x = y = z = 0$ не является ее решением в силу условия (7). Запись уравнений носит циклический характер ($x \Longrightarrow y \Longrightarrow z$), что свидетельствует о возможном равенстве компонент $x_\lambda,\ y_\lambda, x_\lambda$ у решения q_λ этой системы. Пологая $x = y = z$, подставим вместо y и z переменную x в первое уравнение. В результате получим $x^2 + 2\lambda x = 0$, что дает произвольную стационарную точку $x = y = z = -2\lambda$.

Решить вопрос о единственности этого решения предоставляется учащимся (студентам), мы же обратимся к поиску искомой стационарной точки, для чего подставим произвольную стационарную точку в уравнение связи (7). В результате получаем для λ уравнение $12\lambda^2 = a^2$. Так как по условию $x > 0$, $y > 0$ $z > 0$, то в этом уравнении выбираем корень $\lambda = -a/2\sqrt{3}$ и получаем стационарную точку

$$p_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\,,\ \frac{a}{\sqrt{3}}\,,\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

Определим теперь тип этой точки, вычислив вторые производные:

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0, \qquad L''_{xy} = z + \lambda\ L''_{xz} = y + \lambda,\ L''_{yz} = x + \lambda.$$

Все смешанные производные в стационарной точке имеют одно и тоже значение, равное $a/(2\sqrt{3})$. Следовательно, тип точки p_0 определяется знаком квадратичной формы

$$d^2L = \frac{a}{\sqrt{3}}(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz),$$

при условии (см. (7))

$$d(xy + xz + yz)\big|_{p=p_0} = [\,](y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz\,]\big|_{p=p_0} = 0,$$

откуда

$$dx + dy + dz + = 0. \tag{8}$$

Представив второй дифференциал в виде

$$d^2L = \frac{a}{\sqrt{3}}[\,(dx + dy + dz)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,]$$

и используя условие (8), находим, что тип стационарной точки определяется знаком квадратичной формы $-(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, которая всегда принимает только отрицательные значения. Следовательно, точка

$$p_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

доставляет функции f максимум.

Рассмотрим еще одну задачу на условный экстремум с якобы практическим уклоном.

Пример 3. *При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность.*

Математическая постановка задачи. Судя по всему, дело идет об экономии материала на изготовлении ванны. Давайте сформулируем эту задачу в математических терминах условного экстремума.

Размеры любого прямоугольного тела (параллепипеда) определяются тремя величинами шириной x, длиной y и высотой z. Фиксирован (задан) объем ванны $xyz = V$. Площадь открытой ванны состоит из площади днища xy плюс площади четырех боковых поверхностей : $2xz$ и $2yz$. Следовательно, минимизировать надо функцию

$$f = xy + 2xz + 2yz$$

при условии

$$xyz = V.$$

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$L = xy + 2xz + 2yz + \lambda xyz,$$

дифференцируем ее и выписываем уравнения для определения стационарных точек:

$$\begin{aligned} L'_x &= y + 2z + \lambda yz = 0, \\ L'_y &= x + 2z + \lambda xz = 0, \\ L'_z &= 2x + 2y + \lambda xy = 0. \end{aligned}$$

Если из первого уравнения вычесть второе, то получим равенство

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0,$$

из которого следует, что дно должно быть квадратным $x = y$, или $z = -1/\lambda$, или то и другое.

Решение $x = y$ целесообразно подставить в третье уравнение, где отсутствует z. После подстановки получаем уравнение $4x + \lambda x^2 = 0$. Понятно, что значение $x = 0$ нам ни к чему, так что остается $x = -4/\lambda\,(= y)$. Наконец, второе уравнение (это, где L'_y)с полученными значениями x и y дает

$$z = -\frac{x}{2 + \lambda x} = -\frac{2}{\lambda}.$$

Итак, $z = -1/\lambda$ – посторонний корень, и только точка $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ с

$$x = y = -4/\lambda, \qquad z = -\frac{x}{2 + \lambda x} = -\frac{2}{\lambda}$$

дает произвольную (с точностью до произвольного λ) стационарную точку. Подстановка ее в условие $xyz = V$:

$$-\frac{16}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{\lambda} = V \Longrightarrow \lambda = -2\sqrt[3]{\frac{4}{V}},$$

дает искомую стационарную точку

$$x = y = \sqrt[3]{2V}, \qquad z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

Осталось убедится, что это точка, доставляющая минимум. Вычисляем вторые производные от функции Лагранжа:

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L'' - zz = 0, \qquad L''_{xy} = 1 + \lambda z, \quad L''_{xz} = 2 + \lambda y, \quad L''_{yz} = 2 + \lambda x.$$

В стационарной точке эти производные равны:

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L'' - zz = 0, \qquad L''_{xy} = -1, \quad L''_{xz} = -2, \quad L''_{yz} = -2.$$

Итак, надо проверить, что квадратичная форма

$$d^2L = -2[dx\,dy + 2dx\,dz + 2dy\,dz] > 0,$$

если

$$yz\,dx + xz\,dy + yz\,dz = (2V)^{2/3}\left(\frac{dx}{2} + \frac{dy}{2} + dz\right) = 0,$$

или, что тоже,

$$dx\,dy + 2dx\,dz + 2dy\,dz < 0, \tag{9}$$

если

$$dz = -\frac{dx + dy}{2}.$$

Подставляя это dz в правую часть (9), получаем, что следует установить справедливость неравенства

$$dx\,dy - dx(dx + dy) - dy(dx + dy) = -(dx^2 + dx\,dy + dy^2) < 0. \tag{10}$$

Легко проверить, что

$$dx^2 + dx\,dy + dy^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{2} + \frac{(dx + dy)^2}{2},$$

так что положиттельность последнего выражения влечет справедливость неравенства (10).

Ответ: дно оптимальной ванны квадратное со стороной $\sqrt[3]{2V}$ высота ванны $\sqrt[3]{V/4}$.

Задание 59

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

001. *Найти все точки экстремума функции*

$$f = xy$$

и определить их тип, если

$$x + \frac{y^2}{3} = 1.$$

3657.1. *Найти все точки экстремума функции*

$$z = x^2 + 12xy + 2y^2$$

и определить их тип, если

$$4x^2 + y^2 = 25.$$

3663*. *Найти все точки экстремума функции*

$$u = xyz$$

и определить их тип, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x + y + z = 0$$

3663.1. *Найти все точки экстремума функции*

$$u = xy + yz$$

и определить их тип, если

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2 \qquad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

3684. Данное положительное число a разложить на n слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была минимальной.

3693*. Найти треугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.