КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра системного анализа и информационных технологий

И.В. КОННОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

Учебное пособие

Казань – 2022

ББК 22.18
УДК 519.6: 519.85

Рекомендовано к опубликованию на заседании учебно-методической комиссии Института вычислительной математики и информационных технологий от 30.06.2022 г., протокол № 11

Рецензент:
*кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры системного анализа
и информационных технологий КФУ А.А. Андрианова*

Коннов И.В.
Основы теории игр. / И.В. Коннов. – Казань: Казанск. ун-т, 2022. – 63 с.

В пособии излагаются основные типы игровых задач, возникающих в сложных системах. В этих задачах присутствуют неопределенные факторы, возникающие в условиях различных конфликтов, что требует применения соответствующих методов анализа и поиска решений. Описаны основные принципы определения понятия решения. В пособии также содержатся примеры игровых задач и некоторые методы их решения.

Предназначается для широкого круга читателей: студентов и магистров, обучающихся по физико-математическим, экономико-математическим и компьютерным направлениям. Рис. 7. Библиогр. 8 назв.

Оглавление

Введение

Принятие решения в сложных системах обычно опирается на исследование с помощью математических методов. В результате построения модели могут возникать различные классы задач: детерминированные, со случайными факторами, с неопределенными факторами, причем по различным причинам. Значительная часть задач с неопределенными факторами, возникающих в условиях конфликтов, изучается в теории игр. Приведем пример, показывающий как конфликт интересов приводит к появлению неопределенностей.

Задача выпуска изделий. Пусть предприятие выпускает n видов товаров (изделий) и использует m видов ресурсов. Пусть вначале на заданный период времени цены c_j на товары, запасы b_i ресурсов и удельные нормы затрат ресурсов a_{ij} (количество единиц i-го ресурса, которое нужно для выпуска единицы j-го изделия) фиксированы. Переменными являются объемы x_j выпуска товаров. Требуется найти, в каких количествах выпускать изделия, чтобы получить максимальный доход. Тогда получаем задачу линейного программирования:

$$\max \ \to \ \sum_{i=1}^{n} c_j x_j,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Решение такой полностью детерминированной задачи находится достаточно просто. Теперь предположим, что на рынке те же n видов товаров могут поставлять l предприятий, у h-го предприятия запасы ресурсов b_i^h, удельные нормы затрат ресурсов a_{ij}^h, объемы выпусков $x^h = (x_1^h, \ldots, x_n^h)$, $h = \overline{1, l}$. Если цены постоянны, то получаем l независимых задач линейного программирования, как выше. Теперь предположим, что цены могут зависеть от объемов выпусков всех предприятий, т.е. $c_j = c_j(x^1, \ldots, x^l)$, каждое предприятие по-прежнему ориентировано на максимальный доход. При этом объемы выпусков одних предприятий заранее неизвестны другим. Конфликт интересов здесь связан с зависимостью дохода каждого от действий других, в частности, увеличение дохода одного предприятия может снизить доход других, что приводит к задачам с неопределенностью, вместо полностью детерминированных задач оптимизации. Следовательно, надо описать возможные действия всех участников и поведение всей системы в целом.

Основные математические модели, изучаемые в теории игр, и методы их решения излагаются в настояшем пособии. Приводятся основные понятия теории игр, основные элементы теории игр, указываются принципы оптимальности и связь между ними. Приводятся условия существования ситуаций равновесия. Другие понятия решения даны для игр с координацией действий игроков. Приводятся основные методы решения игровых задач.

Пособие основано на лекциях, читаемых студентам ИВМИТ Казанского университета. Автор надеется, что изучение курса приведет к осознанию необходимости в условиях конфликтов учитывать и уважать интересы всех участников при выработке своих стратегий.

Автор благодарен Р. Мироновой за помощь в подготовке электронного варианта пособия.

Глава 1

Бескоалиционные игры

Для описания игры, под которой понимается математическая модель системы в условиях конфликта, требуется задать действующих элементов (игроков), их возможности (множества стратегий) и интересы (предпочтения или функции выигрыша). Вначале изучаются так называемые бескоалиционные игры, в которых игроки не взаимодействуют друг с другом.

1.1 Принципы оптимальности в антагонистических играх

В антагонистической игре участвуют всего два игрока, X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, тогда $S = X \times Y$ – множество ситуаций игры. Для любой ситуации $s = (x, y) \in S$ определено значение $H(x, y)$ функции выигрыша первого игрока и проигрыша второго игрока, т.е. интересы игроков прямо противоположны друг другу. Поэтому игроки не могут взаимодействовать и антагонистические игры относятся к бескоалиционным. Считается, что игроки выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, а множества стратегий, как правило, заранее известны игрокам.

Поскольку выигрыш каждого игрока зависит от действий другого, то возникают задачи с неопределенными факторами. Поэтому требуется вначале определить, что понимать под решением игры, т.е. указать принципы оптимальности.

Первый принцип оптимальности – гарантированного результата. Определим функцию гарантированного выигрыша первого игрока

$$v_1(x) = \min_{y \in Y} H(x, y),$$

тогда множество оптимальных стратегий первого игрока в смысле гарантированного результата

$$X^* = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} v_1(x),$$

а величина гарантированного выигрыша

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x, y)$$

называется нижним значением игры. Здесь и далее для упрощения предполагается, что все минимумы и максимумы достигаются. Из определения следует, что

$$x^* \in X^* : \ v_1 \le H(x^*, y) \quad \forall y \in Y. \tag{1.1}$$

По аналогии, определим функцию наибольшего проигрыша второго игрока

$$v_2(y) = \max_{x \in X} H(x, y),$$

тогда множество оптимальных стратегий второго игрока в смысле гарантированного результата

$$Y^* = \operatorname{Arg} \min_{y \in Y} v_2(y),$$

а величина гарантированного наименьшего проигрыша

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x, y)$$

называется верхним значением игры. Также из определения следует, что

$$y^* \in Y^* : \ H(x, y^*) \le v_2 \quad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) получаем, что

$$v_1 \le H(x^*, y^*) \le v_2 \quad \forall x^* \in X^*, y^* \in Y^*, \tag{1.3}$$

т.е. нижнее значение игры не больше верхнего.

Таким образом, любая ситуация $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ может быть взята в качестве решения игры. Недостатком такого подхода является возможность для каждого игрока односторонними действиями добиться улучшения значения своего выигрыша по сравнению с текущим. Это делает ситуацию (x^*, y^*) неустойчивой, поэтому следует использовать и другие принципы оптимальности.

Второй принцип оптимальности – равновесия. Ситуация $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ называется *ситуацией равновесия или седловой точкой*, если

$$\forall x \in X \quad H(x, \bar{y}) \le H(\bar{x}, \bar{y}) \le H(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y. \tag{1.4}$$

Иначе говоря, в состоянии равновесия любой игрок односторонними действиями уже не может добиться улучшения значения своего выигрыша. Множество седловых точек игры обозначим через $\bar{S}$. Установим связь между принципами оптимальности.

Теорема 1.1.

а) *Если выполняется условие:*

$$v_1 = v_2 = v, \tag{1.5}$$

то

$$\bar{S} = X^* \times Y^*. \tag{1.6}$$

б) *Если $\bar{S} \neq \varnothing$, то выполняются условия (1.5) и (1.6).*

Доказательство. Из (1.1)–(1.3) и (1.5) следует

$$X^* \times Y^* \subseteq \bar{S}.$$

Пусть теперь $(\bar{x}, \bar{y})$ – седловая точка. Тогда

$$\begin{aligned} v_2 &= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x,y) = \max_{x \in X} H(x, \bar{y}) \leq H(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq \min_{y \in Y} H(\bar{x}, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x,y) = v_1. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (1.3) выполняется (1.5) и $(\bar{x}, \bar{y}) \in X^* \times Y^*$. Отсюда следует (1.6). □

Величина v в (1.5) называется значением игры.

1.2 Матричные игры

Матричную игру можно определить как антагонистическую игру двух лиц (игроков), в которой игроки имеют конечные множества стратегий. Без ограничения общности можно считать, что первый игрок имеет m стратегий, а второй – n стратегий. Выбор первым игроком i-й стратегии, а вторым – j-й стратегии определяет ситуацию (i, j), в которой выигрыш первого игрока и одновременно проигрыш второго есть число a_{ij}. Таким образом, чтобы задать матричную игру, достаточно задать матрицу выигрышей $A = (a_{ij})$ размерностью $m \times n$. Если следовать принципу гарантированного результата, то оптимальной для первого игрока будет стратегия i^* такая, что

$$v_1 = \min_{j=\overline{1,n}} a_{i^*j} = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}.$$

Аналогично, оптимальной для второго игрока стратегией в смысле гарантированного результата будет стратегия j^* такая, что

$$v_2 = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij^*} = \min_{j=\overline{1,n}} \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}.$$

Однако при этом ситуация (i^*, j^*) не обязательно будет ситуацией равновесия, т.е. соотношения

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}$$

не обязательно выполняются. По теореме 1.1, гарантировать выполнение этих условий можно только в том случае, если игра имеет значение, т.е. когда

$$v_1 = v_2 = v.$$

Приведем простые примеры.

Пример 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Здесь $v = v_1 = v_2 = 2$, $i^* = 3$, $j^* = 1$, ситуация $(3, 1)$ является ситуацией равновесия.

Пример 1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Здесь $i^* = 1$, $j^* = 3$, но $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, т.е. $v_1 < v_2$. Поэтому в игре нет ситуаций равновесия.

Таким образом, ситуаций равновесия может не быть во многих играх даже с конечными множествами стратегий. Стандартным подходом в таком случае является применение смешанных стратегий. Иначе говоря, исходная игра заменяется так называемым смешанным расширением игры. Для этой игры множества стратегий игроков есть

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\},$$

которые интерпретируются как множества распределений вероятностей на множестве первоначальных (чистых) стратегий, т.е. x_i – вероятность выбора i-й стратегии первым игроком, y_j – вероятность выбора j-й стратегии вторым игроком. Здесь и далее все векторы будем считать строками, а $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}\}$ – неотрицательный ортант в $\mathbb{R}^m$. Поэтому новая функция выигрыша первого игрока

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x A y^\top = \langle xA, y \rangle$$

есть математическое ожидание выигрыша в ситуации, когда первый игрок выбирает стратегию $x = (x_1, ..., x_m)$, а второй – $y = (y_1, ..., y_n)$. Проигрыш второго игрока в этой же ситуации равен выигрышу первого. Если первый игрок выбирает в качестве стратегии i-й координатный вектор $e_i^{(m)}$в $\mathbb{R}^m$, а второй – j-й координатный вектор $e_j^{(n)}$ в $\mathbb{R}^n$, т.е. чистые i-ю и j-ю стратегию соответственно, то выигрыш первого игрока есть

$$H(e_i^{(m)}, e_j^{(n)}) = a_{ij},$$

это соответствует его выигрышу в исходной игре. Итак, игра в смешанных стратегиях содержит игру в чистых стратегиях. Такое усложнение исходной игры позволяет обеспечить в любом случае существование ситуации равновесия или значения игры. Для обоснования этого утверждения потребуются дополнительные свойства.

Теорема 1.2. (Отделимости) *Пусть L – непустое, выпуклое и замкнутое множество в конечномерном пространстве и $z \notin L$ – точка, тогда существует вектор $q \neq \mathbf{0}$ такой, что*
$$\langle q, z\rangle < \langle q, l\rangle \quad \forall l \in L.$$

Геометрический смысл утверждения:
Если у нас есть непустое выпуклое и замкнутое множество в конечномерном пространстве и точка вне его, то мы можем разделить пространство таким образом, что в одном полупространстве будет множество, а в другом – точка. И при этом ни множество, ни точка не будут касаться гиперплоскости, разделяющей их. Доказательство утверждения содержится, например, в книге [3], теорема 2.2.

Лемма 1.1. *Выполняются соотношения:*

$$x \in X: \; v_1(x) = \min_{y\in Y}\langle xA, y\rangle = \min_{j=\overline{1,n}}\langle A_j, x\rangle, \; v_1 = \max_{x\in X}\min_{j=\overline{1,n}}\langle A_j, x\rangle,$$
$$y \in Y: \; v_2(y) = \max_{x\in X}\langle x, A^\top y^\top\rangle = \max_{i=\overline{1,m}}\langle a_i, y\rangle, \; v_2 = \min_{y\in Y}\max_{i=\overline{1,m}}\langle a_i, y\rangle,$$

где A_j – j-й столбец матрицы A, a_i – i-я строка матрицы A.

Упражнение 1.1. Доказать, что решением задачи
$$\min_{y\in Y} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$$
является вектор $e_k^{(n)}$, где
$$b_k = \min_{j=\overline{1,n}} b_j.$$
Отсюда следует первое соотношение в лемме 1.1 при $b_j = \langle A_j, x\rangle$.

Лемма 1.2. (Об альтернативах для матриц) *Пусть D – произвольная матрица $m \times n$, тогда выполняется одна и только одна из следующих альтернатив:*

1. $\exists\, x \in X, \; \langle D_j, x\rangle \geq 0, \; j = \overline{1,n};$
2. $\exists\, y \in Y, \; \langle d_i, y\rangle \leq 0, \; i = \overline{1,m}.$

Доказательство. Пусть

$$L = \operatorname{conv}\left\{D_1, \ldots, D_n, e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)}\right\},$$

L – непусто, выпукло, замкнуто как выпуклая оболочка столбцов матрицы и единичных векторов. Рассмотрим два случая: начало координат содержится в множестве L/не содержится.

1. $\mathbf{0} \notin L$. Но тогда можно в качестве z взять $\mathbf{0}$ и использовать теорему 1.2. Получим

$$\sum_{i=1}^{m} z_i q_i = \langle q, z\rangle > 0 \quad \forall z \in L,$$

или $q_i > 0$ для любого i. Можно определить

$$x_i = \frac{q_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} q_j}, \quad i = \overline{1, m},$$

тогда $x \in X$ и

$$\langle x, z\rangle > 0 \quad \forall z \in L,$$

отсюда следует

$$\langle x, D_j\rangle > 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

2. $\mathbf{0} \in L$. Это значит, что

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i^{(m)}, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1,$$

$\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, $\beta_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$. По каждой координате:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d_{ij} + \beta_i, \quad i = \overline{1, m},$$

но $\beta_i \geq 0$, отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j d_{ij} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$, предположим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$. Тогда $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, это значит, что $\beta_i = 0$, но

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1,$$

противоречие. Определим

$$y_j = \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}, \quad j = \overline{1, n},$$

тогда $y \in Y$ и
$$\langle d_i, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j d_{ij} \le 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

□

Теорема 1.3. (Дж. фон Нейман) *Любая матричная игра в смешанных стратегиях имеет значение (ситуацию равновесия).*

Доказательство. Надо показать, что $v_1 = v_2 = v$. Известно, что всегда $v_1 \le v_2$. Предположим, что существует матричная игра с матрицей A, для которой в смешанных стратегиях $v_1 < v_2$. Тогда можно найти вещественное число t, которое находится строго между ними: $v_1 < t < v_2$. Определим матрицу $D = (d_{ij})$, $d_{ij} = a_{ij} - t$. Для этой матрицы имеет место одна из альтернатив по лемме 1.2. Если
$$\exists x \in X,\ \langle D_j, x\rangle \ge 0, \quad \forall j = \overline{1,n},$$
то
$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}x_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} - t)x_i \ge 0$$
и
$$\langle A_j, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge t\sum_{i=1}^{m} x_i = t, \quad j = \overline{1,n}.$$
Отсюда по лемме 1.1 следует
$$v_1 = \max_{x\in X}\min_{j=\overline{1,n}}\langle A_j, x\rangle \ge t.$$
Если выполняется вторая альтернатива
$$\exists\, y \in Y,\ \langle d_i, y\rangle \le 0,\ i = \overline{1,m},$$
то
$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - t)y_j = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_j \le 0$$
и
$$\langle a_i, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le t\sum_{j=1}^{n} y_j = t, \quad i = \overline{1,m}.$$
Отсюда по лемме 1.1 следует
$$v_2 = \min_{y\in Y}\max_{i=\overline{1,m}}\langle a_i, y\rangle \le t.$$

Получены противоречия для обеих альтернатив. Значит, $v_1 = v_2$. □

Итак, применение смешанных стратегий приводит к существенному усложнению исходной игры, но зато ослабляет условия существования ситуации равновесия. Наличие ситуаций равновесия делает поведение описываемой системы прогнозируемым. Реализация смешанных стратегий игроками состоит в проведении случайного эксперимента в соответствии с имеющимся распределением и выборе для действий полученной чистой стратегии. Такой подход выглядит достаточно искусственным, более того, он имеет смысл только в условиях многократного повторения разыгрывания одной и той же игры, тогда выигрыши игроков будут стремиться к среднему, т.е. к значению игры в смешанных стратегиях. Если же разыгрывание проводится однократно, или несколько раз, то использование смешанных стратегий игроками становится проблематичным. В некоторых случаях возможна явная реализация так называемой «физической смеси» стратегий, или долей чистых стратегий. Например, если чистая стратегия состоит в выборе культуры для засевания поля, то нет необходимости производить случайный эксперимент для ее выбора, а можно просто засеять поле в пропорциях, указанных смешанной стратегией.

1.3 Свойства решений матричных игр

По определению, оптимальные стратегии первого игрока есть в точности решения задачи оптимизации:

$$\max_{x\in X} \to v_1(x),$$

где

$$v_1(x) = \min_{y\in Y} H(x,y).$$

Так же, оптимальные стратегии второго игрока есть в точности решения задачи оптимизации:

$$\min_{y\in Y} \to v_2(y),$$

где

$$v_2(y) = \max_{x\in X} H(x,y).$$

Эти задачи можно переписать в несколько ином эквивалентном виде:

$$\max \to \alpha, \tag{1.7}$$

ограничения:

$$\begin{aligned} &v_1(x) \geq \alpha,\\ &x \in X; \end{aligned}$$

а также

$$\min \to \beta, \tag{1.8}$$

ограничения:

$$\begin{aligned} & v_2(y) \leq \beta, \\ & y \in Y. \end{aligned}$$

В свою очередь, по лемме 1.1 задачи (1.7) и (1.8) эквивалентны следующим:

$$\max \to \alpha,$$

ограничения:

$$\begin{aligned} & \langle A_j, x \rangle \geq \alpha, \quad j = \overline{1,n}, \\ & x \in X; \end{aligned}$$

а также

$$\min \to \beta,$$

ограничения:

$$\begin{aligned} & \langle a_i, y \rangle \leq \beta, \quad i = \overline{1,m}, \\ & y \in Y. \end{aligned}$$

Теперь запишем обе задачи в полном виде:

$$\max \to \alpha, \tag{1.9}$$

ограничения:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \alpha, \quad j = \overline{1,n}, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \end{aligned}$$

а также

$$\min \to \beta, \tag{1.10}$$

ограничения:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \beta, \quad i = \overline{1,m}, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Обозначим оптимальное значение функции в задачах (1.9) и (1.10) через α^* и β^*, тогда по теореме 1.3

$$\alpha^* = \beta^* = v,$$

где v – значение игры.

Свойство 1.

а) *Если* (α^*, x^*) *и* (β^*, y^*) *– решения задач (1.9) и (1.10), то* $x^* \in X^*$ *и* $y^* \in Y^*$, $\alpha^* = \beta^* = v$.

б) *Если* $x^* \in X^*$ *и* $y^* \in Y^*$, v *– значение игры, то* (v, x^*) *и* (v, y^*) *– решения задач (1.9) и (1.10).*

Отметим, что задачи (1.9) и (1.10) являются взаимодвойственными задачами линейного программирования, т.е. они могут быть решены точно за конечное число арифметических операций, например, симплекс-методом.

Свойство 2.

а) *Если известно значение игры* v, *то* X^* *есть множество решений системы линейных равенств и неравенств:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \quad j = \overline{1, n},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

.

б) *Если известно значение игры* v, *то* Y^* *есть множество решений системы линейных равенств и неравенств:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \; y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доказательство следует из свойства 1.

Упражнение 1.2. Доказать вариант свойства 2.
Для системы линейных равенств и неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \alpha, \quad j = \overline{1, n},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \alpha, \quad i = \overline{1, m},$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \; y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n};$$

число α в решении есть значение игры v, а множества векторов x и y в решении совпадают с X^* и Y^*.

Определение 1.1. *Спектром смешанной стратегии $x \in X$ первого игрока называется множество индексов чистых стратегий $I(x) = \{i \mid x_i > 0\}$, для которых значения компонент положительны. Спектром смешанной стратегии $y \in Y$ второго игрока называется множество индексов чистых стратегий $J(y) = \{j \mid y_j > 0\}$, для которых значения компонент положительны.*

Свойство 3. *Если чистая стратегия одного игрока принадлежит спектру какой-то оптимальной стратегии, то тогда он может применять эту чистую стратегию против любой оптимальной стратегии другого игрока. При этом значение выигрыша будет равно значению игры. А именно:*

а) *Если $k \in I^* = I(x^*)$, $x^* \in X^*$, то*

$$H(e_k^{(m)}, y^*) = v, \quad \forall y^* \in Y^*.$$

б) *Если $l \in J^* = J(y^*)$, $y^* \in Y^*$, то*

$$H(x^*, e_j^{(n)}) = v, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Доказательство. Пусть $k \in I^* = I(x^*)$, $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$. Тогда

$$\forall x \in X, \quad H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) = v,$$

отсюда

$$\forall i = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = H(e_i^{(m)}, y^*) \le v.$$

Предположим, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j^* = H(e_k^{(m)}, y^*) < v.$$

После умножения неравенств выше на x_i^* с учетом $x_k^* > 0$ и их сложения получим противоречие

$$v = H(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* < v \sum_{i=1}^{m} x_i^* = v.$$

□

Отметим, что соотношения свойства 3 эквивалентны соотношениям дополнительности:

$$x_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* - v \right) = 0, \ i = \overline{1, m}, \quad y_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* - v \right) = 0, \ j = \overline{1, n}, \qquad (1.11)$$

для $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

Определение 1.2. (Доминирование стратегий) *Стратегия x' доминирует стратегию x'' первого игрока ($x' \succeq x''$), если выполняются неравенства:*

$$H(x', e_j^{(n)}) \geq H(x'', e_j^{(n)}), \quad j = \overline{1, n}.$$

Стратегия x' строго доминирует стратегию x'' первого игрока ($x' \succ x''$), если выполняются неравенства:

$$H(x', e_j^{(n)}) > H(x'', e_j^{(n)}), \quad j = \overline{1, n}.$$

Стратегия y' доминирует стратегию y'' второго игрока ($y' \succeq y''$), если выполняются неравенства:

$$H(e_i^{(m)}, y') \leq H(e_i^{(m)}, y''), \quad i = \overline{1, m}.$$

Стратегия y' строго доминирует стратегию y'' второго игрока ($y' \succ y''$), если выполняются неравенства:

$$H(e_i^{(m)}, y') < H(e_i^{(m)}, y''), \quad i = \overline{1, m}.$$

Запишем эти соотношения в полном виде:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i'' \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' > \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i'' \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j'' \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j'' \quad i = \overline{1, m}.$$

Для чистых стратегий:

$$e_k^{(m)} \succeq e_l^{(m)} \ (e_k^{(m)} \succ e_l^{(m)}): \ a_{kj} \geq a_{lj} \ (a_{kj} > a_{lj}), \quad j = \overline{1, n};$$

$$e_k^{(n)} \succeq e_l^{(n)} \ (e_k^{(m)} \succ e_l^{(m)}): \ a_{ki} \leq a_{li} \ (a_{ki} < a_{li}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Для краткости будем записывать также

$$\{k\} \succeq \{l\} \ (\{k\} \succ \{l\}).$$

Ясно, что $x' \succeq x''$ $(x' \succ x'')$ влечет

$$H(x', y) \geq H(x'', y) \ (H(x', y) > H(x'', y)), \quad \forall y \in Y;$$

так же $y' \succeq y''$ $(y' \succ y'')$ влечет

$$H(x, y') \leq H(x, y'') \ (H(x, y') < H(x, y'')), \quad \forall x \in X.$$

Свойство 4. *Никакая строго доминируемая чистая стратегия не может принадлежать спектру какой-либо оптимальной стратегии.*

Доказательство. Пусть $k \in I^* = I(x^*)$, $x^* \in X^*$, но стратегия $e_k^{(m)}$ строго доминируемая, т.е.

$$\exists x' \in X : \; H(x', e_j^{(n)}) > H(e_k^{(m)}, e_j^{(n)}), \quad j = \overline{1,n},$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' > a_{kj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Возьмем $y^* \in Y^*$. Тогда

$$H(x', y^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i' y_j^* > \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j^* = H(e_k^{(m)}, y^*) = v$$

по свойству 3, но

$$H(x', y^*) \le H(x^*, y^*) = v,$$

получено противоречие. □

Свойство 5.

а) *Исключение любой доминируемой чистой стратегии игрока приводит к подыгре с тем же значением, все решения которой (с дополнением нулем исключенной компоненты) будут решениями исходной игры.*

б) *Исключение любой строго доминируемой чистой стратегии игрока приводит к подыгре с тем же значением, все решения которой (с дополнением нулем исключенной компоненты) будут давать все решения исходной игры.*

Доказательство. Пусть имеется игра Γ с множествами индексов чистых стратегий игроков $I = \{1, \ldots, m\}$ и $J = \{1, \ldots, n\}$. Ее множества смешанных стратегий обозначим X и Y. Пусть $x' \succeq e_k^{(m)}$, где $x_k' \in [0, 1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_k' = 0$. В самом деле, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \ge a_{kj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Если $x_k' > 0$, то

$$\frac{1}{(1 - x_k')} \sum_{i \ne k} a_{ij} x_i' \ge a_{kj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Но

$$x_i' \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i' = 1,$$

поэтому для

$$\begin{cases} x_i'' = \frac{x_i'}{1-x_k'}, \quad i = \overline{1,m},\ i \neq k, \\ x_k'' = 0; \end{cases}$$

имеем

$$x_i'' \geq 0,\ i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i'' = 1,$$

и

$$\sum_{i \neq k} a_{ij} x_i'' \geq a_{kj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Возьмем усеченную игру Γ' с множествами индексов чистых стратегий игроков $I' = I \setminus \{k\}$ и $J' = J$. Ее множества смешанных стратегий обозначим X' и $Y' = Y$. Пусть $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X' \times Y'$ – ситуация равновесия усеченной игры, т.е.

$$\forall x \in X', \quad \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \tilde{y}_j \leq \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_i \tilde{y}_j \leq \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_i y_j, \quad \forall y \in Y'.$$

Определим $x^* = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}, 0, \tilde{x}_{k+1}, \ldots, \tilde{x}_m) \in X$ и $y^* = \tilde{y} \in Y$, тогда

$$\forall i \neq k, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j, \quad \forall y \in Y.$$

Кроме того, $\tilde{x}' = (x_1', \ldots, x_{k-1}', x_{k+1}', \ldots, x_m') \in X'$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i' \tilde{y}_j \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*.$$

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_m) \in X$ – любая смешанная стратегия первого игрока в исходной игре. Умножая соотношения выше на z_i и складывая, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*,$$

т.е. (x^*, y^*) – ситуация равновесия исходной игры. Утверждение п. а) доказано. Доказательство утверждения п. б) следует из п. а) и свойства 4. □

Свойство 6. *Если в любой матричной игре с матрицей A все элементы умножить на любое положительное число γ и добавить любое число δ, то множество оптимальных стратегий не изменится, а значение игры также умножится на γ и к нему добавится δ.*

Доказательство. Неравенства седловой точки

$$\forall x \in X,\ H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*) \leq H(x^*, y), \quad \forall y \in Y,$$

при

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

тогда сводятся к

$$\forall x\in X,\ \tilde{H}(x,y^*)\le\tilde{H}(x^*,y^*)\le\tilde{H}(x^*,y),\quad \forall y\in Y,$$

где $\tilde{H}(x,y)=\gamma H(x,y)+\delta$. □

1.4 Методы нахождения решений матричных игр

Итак, пусть задана матричная игра, т.е. известна матрица A размерности $m\times n$. Вначале, очевидно, необходимо проверить, не существует ли решение этой игры в чистых стратегиях. Для этого находим

$$v_1=\min_{j=\overline{1,n}}a_{i^*j}=\max_{i=\overline{1,m}}\min_{j=\overline{1,n}}a_{ij},$$
$$v_2=\max_{i=\overline{1,m}}a_{ij^*}=\min_{j=\overline{1,n}}\min_{j=\overline{1,n}}a_{ij}.$$

Если $v_1=v_2=v$, то (i^*,j^*) – решение игры в чистых стратегиях согласно теореме 1.1. Но, как было показано, возможна ситуация, когда $v_1<v_2$ ($v_1\le v_2$ всегда), т.е. не существует ситуации равновесия в чистых стратегиях. Тогда ищем решение игры в смешанных стратегиях. Для упрощения задачи предварительно исключаем доминируемые стратегии игроков, сокращая размерность матрицы. Например, если

$$a_{i_0j}\ge a_{i_1j}\ \forall j,\ \text{ то }\ e_{i_0}^{(m)}\succeq e_{i_1}^{(m)}(\{i_0\}\succeq\{i_1\}),$$

и чистую стратегию (строку) i_1 можно исключить по свойству 5. Кроме того, можно брать ещё доминирование смешанными стратегиями. Если

$$\sum_{i\ne i_1}a_{ij}x'_i\ge a_{i_1j}\ \ \forall j,$$

то $x'\succeq e_{i_1}^{(m)}$, и чистую стратегию i_1 также можно исключить. Для второго игрока соответственно имеем

$$a_{ij_0}\le a_{ij_1}\ \forall i,\ \text{ то }\ e_{j_0}^{(n)}\succeq e_{j_1}^{(n)}(\{j_0\}\succeq\{j_1\}),$$

либо

$$\sum_{j\ne j_1}a_{ij}y'_j\le a_{ij_1}\quad\forall i,\ \text{ то }\ y'\succeq e_{j_1}^{(n)},$$

тогда чистую стратегию (столбец) j_1 можно исключить.

1.4.1 Матричные игры при $m = n = 2$

Рассмотрим вначале простейший случай, когда либо после исключения доминируемых стратегий, либо изначально игра содержит по две чистых стратегии, т.е. матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad m = n = 2.$$

Оказывается, что такая игра имеет решение либо только в чистых стратегиях, либо только в смешанных стратегиях для обоих игроков.

В самом деле, пусть, например, $x^* = (1, 0)$ – оптимальная стратегия 1–го игрока, т.е. $I^* = \{1\}$, но при этом $J^* = \{1, 2\}$. Используем свойство 3, и обе чистых стратегии 2–го игрока против оптимальной 1–го дают v, т.е.

$$H(x^*, e_j^{(2)}) = v \text{ при } j = 1, 2 \text{ или } a_{11} = a_{12} = v,$$

это означает, что один из столбцов (чистых стратегий 2–го игрока) доминируется другим, и получаем решение в чистых стратегиях, т.е. противоречие.

Итак, если в игре 2×2 решения в чистых стратегиях нет, то оба игрока имеют полностью смешанные оптимальные стратегии $x^* = (\alpha, 1 - \alpha)$ и $y^* = (\beta, 1 - \beta)$, с $1 > \alpha > 0, 1 > \beta > 0$. Найдем x^*, используя свойство 3, т.е. чистые стратегии 2–го игрока против 1–го игрока, и получим

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{21}(1 - \alpha) = v, \\ a_{12}\alpha + a_{22}(1 - \alpha) = v, \end{cases}$$

– система с двумя уравнениями и двумя неизвестными. В матричном виде:

$$\left(\begin{array}{cc|c} (a_{11} - a_{21}) & -1 & -a_{21} \\ (a_{12} - a_{22}) & -1 & -a_{22} \end{array} \right).$$

Если вычесть строки, то при равенстве нулю определителя системы имеем: $\delta = a_{11} - a_{21} = a_{12} - a_{22}$, т.е. матрица игры A имеет доминирование строк

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} - \delta & a_{12} - \delta \end{pmatrix},$$

должно быть решение в чистых стратегиях. Поэтому решение системы единственно и определяется по формулам:

$$\alpha = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Аналогично можно найти оптимальную стратегию 2-го игрока:

$$\beta = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Итак, здесь решение выписывается в явном виде.

Пример 1.3. Задана матричная игра при $m = n = 4$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 14 & 21 \\ 21 & \frac{21}{2} & 7 & 14 \\ 14 & 14 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

В чистых стратегиях

$$v_1 = \max\{7, 7, 7, \frac{7}{2}\} = 7,$$
$$v_2 = \min\{21, 14, 14, 21\} = 14.$$

Ситуаций равновесия здесь нет.

Решаем в смешанных стратегиях:

1) делим на 7

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{1-й игрок:}\{3\} \succeq \{4\}, \text{ после исключения}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{2–й игрок:}\{3\} \succeq \{4\}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(исключаем 4-е стратегии игроков);

2)

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{2-й игрок:}\{3\} \succeq \{1\}, \text{ после исключения}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{1-й игрок:}\{3\} \succeq \{2\},$$

(исключаем 1-ю стратегию 2-го и 2-ю стратегию 1-го игрока);

3)

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = 1 < v_2 = 2, \text{ здесь решение полностью смешанное.}$$

Имеем

$$\alpha = \frac{1-2}{1-2-2+1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1-4}{-2} = \frac{3}{2},$$
$$\beta = \frac{1-2}{1-2-2+1} = \frac{1}{2}.$$

Возвращаемся к исходной задаче, здесь

$$x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0),$$
$$y^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad v = \frac{21}{2}.$$

1.4.2 Сведе́ние матричных игр к задачам линейного программирования

В общем случае, когда удается исключить доминируемые стратегии игроков до двух, можно находить решение игры прямо на основе определения и леммы 1.1 как решения задач оптимизации:

$$\max_{x \in X} \to \min_{j=\overline{1,n}} \langle A_j, x \rangle \tag{1.12}$$

и

$$\min_{y \in Y} \to \max_{i=\overline{1,m}} \langle a_i, y \rangle. \tag{1.13}$$

Также можно находить решение игры на основе свойства 1, т.е. решив задачи линейного программирования (ЛП) (1.9) и (1.10). Однако можно еще больше упростить эти задачи в случае, когда $v > 0$. Поэтому предварительно, если есть элементы $a_{ij} < 0$, к элементам матрицы A добавляют число

$$c > \max_{a_{ij}<0} |a_{ij}|.$$

Согласно свойству 6 множество решений при этом не меняется, а значение игры увеличивается на c. Поскольку в новой матрице $\tilde{A}$ все элементы $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + c$ положительные, то теперь

$$H(x, y) = x\tilde{A}y^\top > 0, \;\; \forall x \in X, \;\; \forall y \in Y,$$

и $v > 0$, что и требовалось. Теперь в задачах (1.9) и (1.10) выполним замену переменных, а именно, определим

$$u_i = \frac{1}{\alpha} x_i, \quad w_j = \frac{1}{\beta} y_j,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{\alpha} \text{ и } \sum_{i=1}^{m} w_j = \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому вместо (1.9) и (1.10) получим следующую пару задач ЛП:

$$\min \to \sum_{i=1}^{m} u_i, \tag{1.14}$$

ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n},$$
$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

а также

$$\max \to \sum_{i=1}^{m} w_j, \tag{1.15}$$

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m},$$
$$w_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Количество переменных и ограничений сократилось. По теореме 1.2, задачи (1.9) и (1.10) имеют решения, значит, и задачи (1.14) и (1.15) имеют решения $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ и $w^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$, соответственно. Тогда имеем

$$v = \alpha^* = \beta^* = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* \right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j^* \right)^{-1}, \tag{1.16}$$

$$x_i^* = v \cdot u_i^* = \frac{u_i^*}{\sum\limits_{s=1}^{m} u_s^*}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.17}$$

$$y_j^* = v \cdot w_j^* = \frac{w_j^*}{\sum\limits_{s=1}^{m} w_s^*}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.18}$$

Заметим, что (1.14) и (1.15) есть пара взаимно двойственных задач ЛП, поэтому их решение можно найти стандартной процедурой одного из вариантов симплекс-метода за конечное число итераций. Кроме того, можно использовать свойство 3, так как если I^* – спектр стратегии $x^* \in X^*$, то согласно (1.11),

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v, \quad \forall i \in I^*. \tag{1.19}$$

Поэтому более удобно использовать подход, связанный с решением данной системы.

1.4.3 Матричные игры при $m = 2$ или $n = 2$

Нахождение решения значительно упрощается в случае, когда после исключения доминируемых стратегий хотя бы у одного из игроков остается всего две чистых стратегии, т.е. для игр $2 \times n$ или $m \times 2$.

Опишем подход, связанный с решением задач ЛП (1.14) и (1.15). В случае $m = 2$ надо вначале решить задачу (1.14), которая тогда имеет вид

$$\begin{aligned}
&\min \quad \rightarrow \quad u_1 + u_2 \\
&a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \\
&u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

и может быть решена графически. Требуется найти угловую точку допустимого многоугольника, для которой значение целевой функции $u_1 + u_2$ наименьшее. После определения решения

$$u^* = (u_1^*, u_2^*)$$

согласно (1.16)–(1.18) находим

$$\begin{aligned}
&v = (u_1^* + u_2^*)^{-1}, && \text{(значение игры)} \\
&x_1^* = u_1^* \cdot v, && \text{(оптимальная стратегия 1-го игрока)} \\
&x_2^* = u_2^* \cdot v.
\end{aligned}$$

В силу условий $v > 0$, поэтому $x_1^* + x_2^* = 1$, $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$. Случай $x_1^* \cdot x_2^* = 0$ невозможен, тогда игра имеет решение в чистых стратегиях. Для случая $x_1^* \cdot x_2^* > 0$ выбираем j_1 и j_2 такие, что

$$\begin{aligned}
a_{1,j_1} \cdot x_1^* + a_{2,j_1} \cdot x_2^* = v, \\
a_{1,j_2} \cdot x_1^* + a_{2,j_2} \cdot x_2^* = v.
\end{aligned}$$

Тогда по свойству 3 $y_{j_1}^* > 0$ и $y_{j_2}^* > 0$. Соответствующие значения y^* находим как в игре 2×2, т.е. вычисляем

$$\beta = (a_{2j_2} - a_{1j_2})/(a_{1j_1} - a_{1j_2} - a_{2j_1} + a_{2j_2})$$

для матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$$

и полагаем

$$y_{j_1}^* = \beta, \quad y_{j_2}^* = 1 - \beta.$$

В случае $n = 2$ в качестве исходной берем вначале задачу (1.15), находим графически w^*, отсюда y^* и v, а затем аналогично, с помощью свойства 3, получаем x^*.

Пример 1.4. Задана матричная игра при $m = n = 3$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В чистых стратегиях:

$$v_1 = \max\{1, 0, 1\} = 1,$$
$$v_2 = \min\{5, 4, 3\} = 3,$$

нет решения, поскольку $v_1 < v_2$.

Для 1-го игрока $\frac{1}{2}\{1, 3\} \succeq \{2\}$, поэтому после исключения 2-й стратегии имеем

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

1-й игрок имеет 2 чистых стратегии. Задача (1.14) здесь имеет вид:

$$\begin{aligned} &\min \ \rightarrow \ u_1 + u_2 \\ &u_1 + 5u_2 \qquad \geq 1 && (1) \\ &4u_1 + \ u_2 \qquad \geq 1 && (2) \\ &2u_1 + 3u_2 \qquad \geq 1 && (3) \\ &u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Из рис. 1.1 ясно, что u^* есть либо точка B, либо точка C.

$$C : (1), (3) \quad \begin{cases} u_1 + 5u_2 & = 1 \\ 2u_1 + 3u_2 & = 1 \end{cases} \implies C = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad f = \frac{3}{7};$$

$$B : (2), (3) \quad \begin{cases} 4u_1 + u_2 & = 1 \\ 2u_1 + 3u_2 & = 1 \end{cases} \implies B = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \quad f = \frac{2}{5} < \frac{3}{7}.$$

Поэтому

$$u^* = B, \quad v = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}, \quad x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}),$$

$$J^* = \{j_1, j_2\} = \{2, 3\}, \quad \text{матрица } A_{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \beta = \frac{3 - 2}{4 - 2 - 1 + 3} = \frac{1}{4},$$

$$y_1^* = 0, \ \ y_2^* = \beta, \ \ y_3^* = 1 - \beta, \quad \text{т.е. } y^* = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

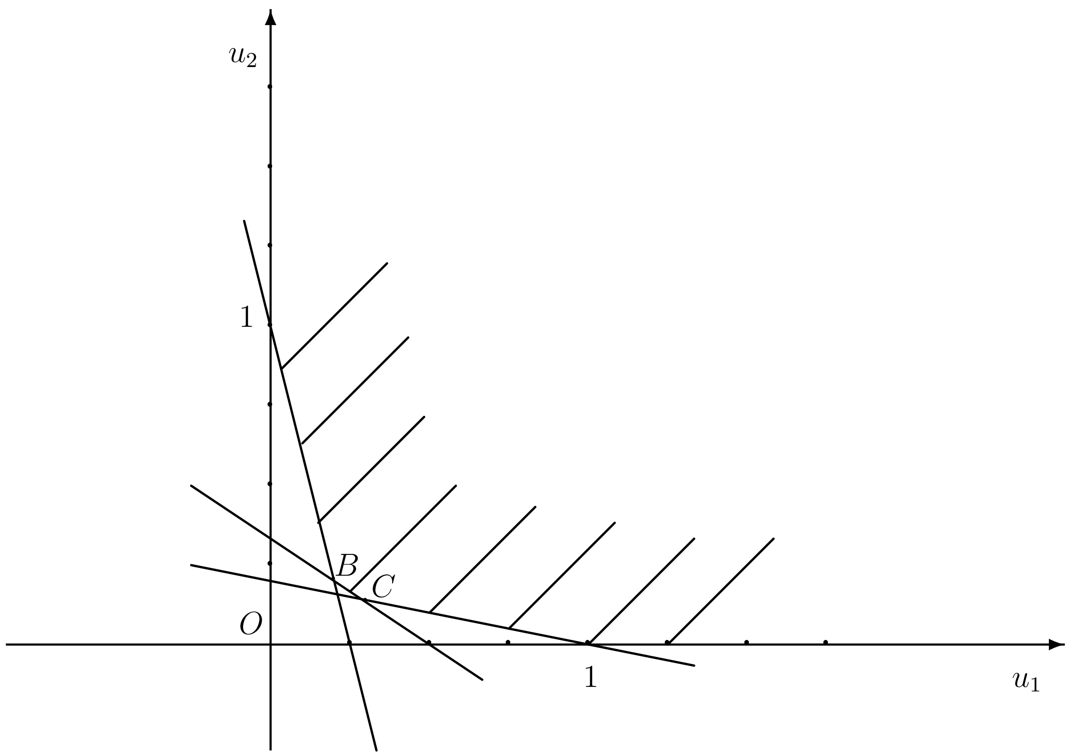

Рис. 1.1: Графическое решение игры при $m = 2$.

Можно использовать подход, связанный с решением задач оптимизации (1.12) и (1.13). В случае $m = 2$ надо вначале решить задачу (1.12), которая тогда имеет вид

$$\max_{\alpha \in [0,1]} \to \min_{j=\overline{1,n}} \{a_{1j}\alpha + a_{2j}(1-\alpha)\}$$

и может быть решена графически. Тогда $x^* = (\alpha, 1-\alpha)$. Выбираем индексы j_1 и j_2 такие, что

$$\begin{aligned} a_{1,j_1} \cdot x_1^* + a_{2,j_1} \cdot x_2^* &= v, \\ a_{1,j_2} \cdot x_1^* + a_{2,j_2} \cdot x_2^* &= v. \end{aligned}$$

Соответствующие значения y^* находим как выше в игре 2×2.

В случае $n = 2$ надо вначале решить задачу (1.13), которая тогда имеет вид

$$\min_{\beta \in [0,1]} \to \max_{j=\overline{1,n}} \{a_{1j}\beta + a_{2j}(1-\beta)\}$$

и может быть решена графически. Тогда $y^* = (\beta, 1-\beta)$. Выбираем индексы i_1 и i_2 такие, что

$$\begin{aligned} a_{i_1,1} \cdot y_1^* + a_{i_1,2} \cdot y_2^* &= v, \\ a_{i_2,1} \cdot y_1^* + a_{i_2,2} \cdot y_2^* &= v. \end{aligned}$$

Соответствующие значения x^* находим также как в игре 2×2.

1.5 Решение матричных игр сведе́нием к системе линейных уравнений

Получим вначале дополнительные свойства решений матричных игр. Пусть x^*, y^* – любая пара решений матричной игры, $I^* = I(x^*) = \{i \mid x_i^* > 0\}$, $J^* = J(y^*) = \{j \mid y_j^* > 0\}$. Тогда по свойству 2 точки x^* и y^* есть решения системы линейных неравенств и равенства:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* \geq v,\ j = \overline{1,n}, & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leq v,\ i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^* = 1, & \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* = 1, \\ x_i^* \geq 0,\ i = \overline{1,m}; & y_j^* \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{1.20}$$

Таким образом, геометрически X^* или Y^* – это пересечение симплекса с набором полупространств. Это значит, что X^* и Y^* – многогранники в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно, при фиксированном значении v. Эти множества можно задать с помощью их угловых точек как выпуклые оболочки, т.е.

$$X^* = \operatorname{conv}\{\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{m_1}\}, \quad Y^* = \operatorname{conv}\{\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^{n_1}\}.$$

Используя теорему 1.4, можно описать угловые точки и множества решений полностью. Заметим, что по свойству 3,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v, \quad \forall i \in I^*, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = v, \quad \forall j \in J^*,$$

а также

$$\sum_{j \in J^*} a_{ij} y_j^* = v, \quad \forall i \in I^*, \qquad \sum_{i \in I^*} a_{ij} x_i^* = v, \quad \forall j \in J^*.$$

Теорема 1.4. (Л. Шепли-Р. Сноу) *Пусть $v = v_A \neq 0$ в матричной игре $m \times n$. Тогда для любой пары (x^*, y^*) оптимальных смешанных стратегий, которые определяют угловую точку множества равновесий, найдется невырожденная квадратная подматрица $A_S = (a_{ij})_{(i,j)\in S}$, такая что $S = S_I \times S_j$, $|S_I| = |S_J| \geq \max\{|I^*|, |J^*|\}$, для которой выполняются соотношения:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in S_I} a_{ij} x_i^* = v, \quad \forall j \in S_J, & \sum\limits_{j \in S_J} a_{ij} y_j^* = v, \quad \forall i \in S_I, \\ \sum\limits_{i \in S_I} x_i^* = 1, & \sum\limits_{j \in S_J} y_j^* = 1. \end{cases} \tag{1.21}$$

Доказательство утверждения содержится, например, в книге [6], теорема 3.1.14.

Поэтому стратегии $x^*_{S_I}, y^*_{S_J}$ являются решениями матричной игры с усеченной матрицей A_S, чистые стратегии вне S не входят в спектр равновесных стратегий этой игры. Поскольку любая игра может быть преобразована к невырожденной (например, с $v > 0$), то эта теорема применима ко всем матричным играм. Если S_I и S_J выбраны, то $x^*_{S_I}$ и $y^*_{S_J}$ однозначно определяются из системы (1.21).

Для краткости, пусть $e = e_{S_I} = e_{S_J}$ – вектор с единичными координатами одной размерности, $x_I^* = x^*_{S_I}$, $y_J^* = y^*_{S_J}$. Тогда (1.21) перепишем в векторном виде:

$$\begin{cases} x_I^* A_S = ve, & A_S\,(y_J^*)^\top = v\,e^\top, \\ x_I^* e^\top = 1, & e(y_J^*)^\top = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_I^* = v\,e\,A_S^{-1}, \quad (y_J^*)^\top = v\,A_S^{-1}\,e^\top$$

и далее

$$1 = x_I^* e^\top = v\,e\,A_S^{-1} e^\top,$$
$$1 = e\,(y_J^*)^\top = v\,e\,A_S^{-1} e^\top,$$

что дает

$$
\begin{aligned}
&v = (eA_S^{-1}e^\top)^{-1}, \qquad \text{(значение игры для усеченной матрицы)}\\
&x_I^* = \frac{eA_S^{-1}}{eA_S^{-1}e^\top}, \quad (y_J^*)^\top = \frac{A_S^{-1}e^\top}{eA_S^{-1}e^\top}.
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Главным образом, для поиска решений матричной игры надо последовательно перебирать невырожденные квадратные подматрицы A_S матрицы A, после чего находить решения подыгры по формулам (1.22) и проверять их на применимость для исходной игры с матрицей A, для чего использовать формулы (1.20). При небольшой размерности так можно найти все решения игры в смешанных стратегиях.

Вместо системы (1.21) можно решать вначале приведенную систему (при $v > 0$)

$$
u_I^* A_S = e, \quad A_S (w_J^*)^\top = e^\top, \tag{1.23}
$$

где

$$
u_I^* = \frac{1}{v}\, x_I^*, \quad w_J^* = \frac{1}{v}\, y_J^*.
$$

Из (1.23) сразу получаем

$$
u_I^* = e\, A_S^{-1}, \quad (w_J^*)^\top = A_S^{-1} e^\top,
$$

отсюда

$$
\begin{aligned}
&u_I^*\, e^\top = \frac{1}{v}\, x_I^*\, e^\top = \frac{1}{v}, \quad \text{т.е. } v = (e\, A_S^{-1}\, e^\top)^{-1},\\
&e(w_J^*)^\top = \frac{1}{v}\, e(y_J^*)^\top = \frac{1}{v},\\
&x_I^* = v\, u_I^*,\ y_J^* = v\, w_J^*,
\end{aligned}
$$

что совпадает с (1.22). Вместо вычисления обратной матрицы A_S^{-1} более просто найти решение системы (1.23), потом вычислить v, а затем легко находятся равновесные стратегии x_I^* и y_J^*.

Можно выделить подкласс матричных игр, где решения находятся очень просто. Из теоремы 1.4 следует, что в случае, когда оптимальные стратегии x^* и y^* имеют полный спектр, т.е. $I^* = \{1, \dots, m\}$, $J^* = \{1, \dots, n\}$, получаем $m = n$. Действительно, $|S_I| = |S_J| \ge \max\{|S_I|, |S_J|\}$, решение находится из (1.22) при $A_S = A$. Более того, если равновесные стратегии имеют только полный спектр (т.е. все чистые стратегии положительные), то точка равновесия единственная.

Для игры $m = n = 2$ эта ситуация встречается, если нет решения в чистых стратегиях, тогда для матрицы

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

имеем
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \; e = (1,1),$$
поэтому из (1.22) следует
$$\begin{aligned} &v = (e\,A^{-1}\,e^{\top})^{-1} = \frac{|A|}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \\ &x^* = v\,\frac{1}{|A|}\,e \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{т.е} \quad x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \\ &(y^*)^{\top} = v\,\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е} \quad y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \end{aligned}$$
что соответствует ранее полученным формулам.

Пример 1.5. Задана матричная игра при $m = 4$, $n = 5$, с матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Игра с подматрицей
$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
где $S = \{(1,4),(1,5)\}$, имеет решение
$$\bar{x}_S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \bar{y}_S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad v_S = \frac{1}{2}.$$
При дополнении стратегий нулями получаем
$$\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \; \bar{y} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \; v = \frac{1}{2},$$
поскольку
$$\bar{x}A \geq ve, \quad A\,\bar{y}^{\top} \geq ve.$$

Пример 1.6. Задана матричная игра при $m = n = 3$, с матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
В чистых стратегиях нет решения:
$$v_1 = 1, \; v_2 = 3, \; v_1 \neq v_2.$$

В смешанных стратегиях $v > 0$, определяем $u_i = \frac{x_i}{v}$, $w_j = \frac{y_j}{v}$. Приведенная система

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + u_3 &= 1, \\ u_1 + 2u_2 + 3u3 &= 1, \\ 3u_1 + u_2 + 2u_3 &= 1, \end{cases}$$

решается методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right),$$

она имеет единственное решение $\tilde{u}_i = \frac{1}{6}$, $j = 1, 2, 3$, $v = 2$, поэтому $x_i^* = \frac{1}{3}$, $j = 1, 2, 3$. Система

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 + 3w_3 &= 1, \\ 3w_1 + 2w_2 + w_3 &= 1, \\ w_1 + 3w_2 + 2w_3 &= 1, \end{cases}$$

имеет такое же единственное решение $\tilde{w}_j = \frac{1}{6}$, $j = 1, 2, 3$. Поэтому

$$x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), v = 2.$$

1.6 Многошаговые игры

В многошаговых играх, в отличие от ранее рассмотренных случаев, задача является динамической, т.е. игра определяется во времени. В данном случае будем рассматривать игры с двумя игроками, интересы которых прямо противоположны. Существует много видов многошаговых игр, здесь подробнее рассмотрим позиционные игры. Такие игры формально определяются на основе некоторого множества позиций Γ, элементы которого частично упорядочены отношением предшествования $\prec$, при этом

1) если $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, то из условий: $\alpha \prec \gamma$ и $\beta \prec \gamma$ следует либо $\alpha \preccurlyeq \beta$, либо $\beta \preccurlyeq \alpha$;

2) существует $\alpha \in \Gamma$ такое, что $\forall \beta \in \Gamma, \quad \beta \succcurlyeq \alpha$.

Такое множество для игры на рис. 1.2 можно задать с помощью графа $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{15}\}$, точнее дерева, вершины которого являются позициями, а ребра (дуги) определяют отношение упорядочения. Например, $\alpha_3 \prec \alpha_6$, $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_i$, $i = \overline{1, 15}$. Если $\alpha \prec \beta$, то позиция α предыдущая к β, а β последующая за α. Отметим, что для позиций $\alpha_8, \ldots, \alpha_{15}$ отсутствуют последующие, такие позиции называются окончательными, или $\alpha \in T$, остальные – неокончательные, или $\alpha \in Q$, следовательно, $Q \cap T = \varnothing$, $Q \cup T = \Gamma$.

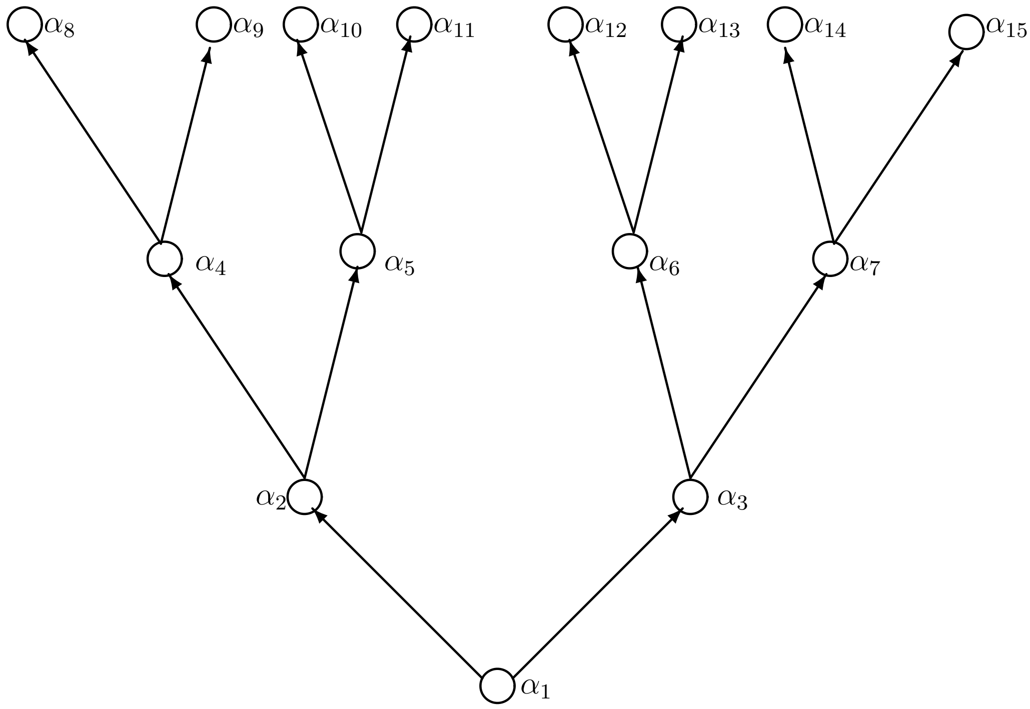

Рис. 1.2: Граф позиционной игры.

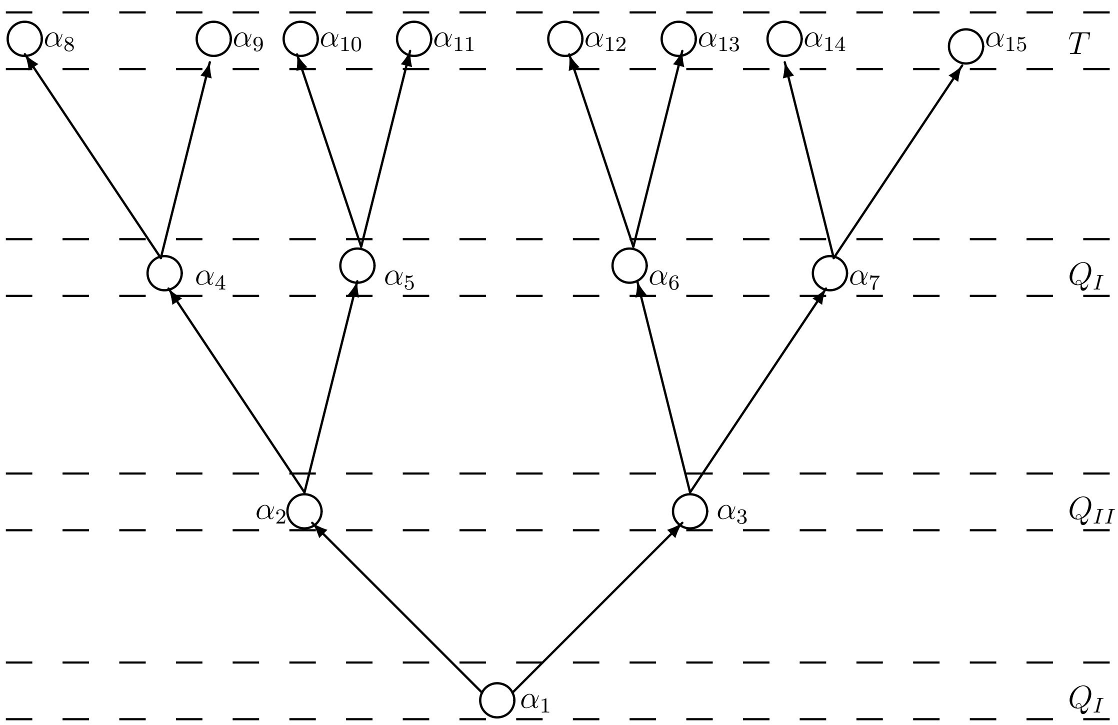

Рис. 1.3: Множества очередности позиционной игры.

Содержательный смысл позиции заключается в том, что в ней делает ход один из игроков, выбирая одну из возможных альтернатив (дуг), после чего игра будет находиться в последующей позиции, где делает ход другой игрок и т.д. Кроме игроков, участвующих в игре, выбор альтернативы в некоторых позициях может быть осуществлен случайным образом. Тогда считают, что ход делает игрок 0. Подробнее будут рассматриваться игры двух лиц, т.е. на множестве Q ходы делают игроки $0, I, II$, (Q_0, Q_I, Q_{II}), Q_i – множество очередности или множество всех позиций, в которых делает ход i-й игрок, как показано на рис. 1.3.

Игра заканчивается, когда после очередного хода получаем позицию из T. На множестве окончательных позиций T определяется функция выигрыша W_i. В позиции $\alpha \in T$ игроки получают выигрыш $W_1(\alpha)$ и $W_2(\alpha)$, для антагонистической игры $W_1(\alpha) = -W_2(\alpha)$, $\forall \alpha \in T$. Таким образом, каждая ветвь указывает возможную последовательность позиций. Как отмечалось, множество Q разбивается на Q_i – множества очередности ходов игроков, если $\alpha \in Q_i$, то в позиции α ход делает

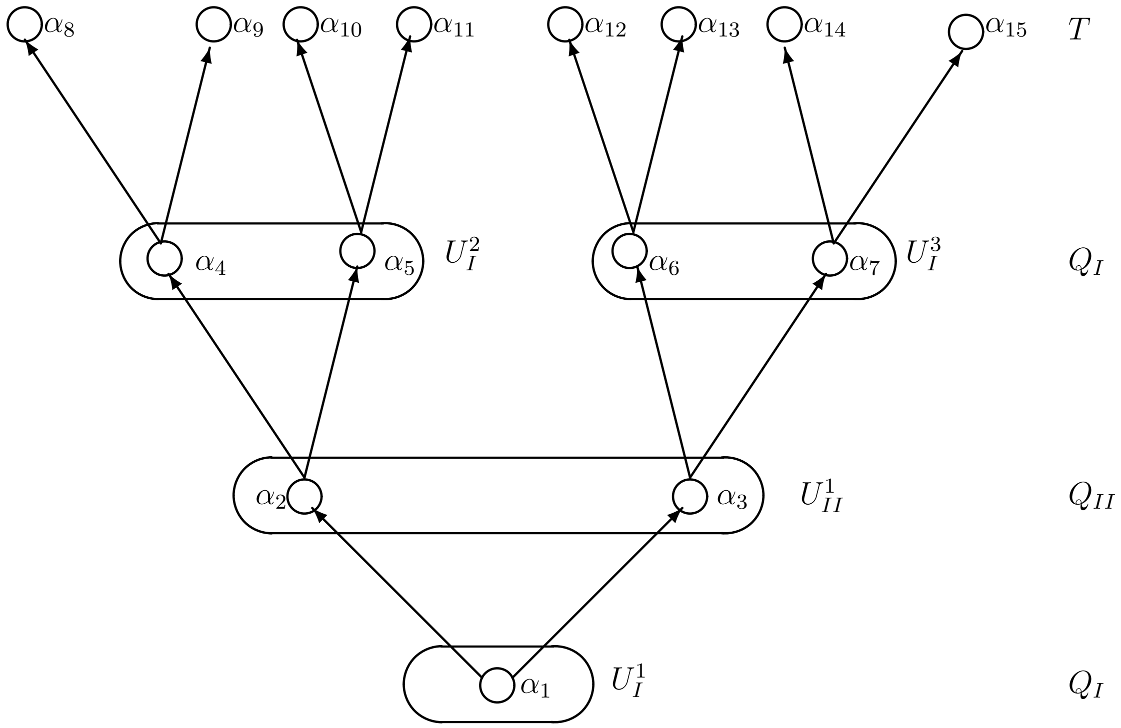

Рис. 1.4: Информационные множества позиционной игры.

i-й игрок. В свою очередь, множества очередности разбиваются на информационные множества игроков U_i^j, т.е. $Q_i = \bigcap\limits_{j=1}^{l(i)} U_i^j$, где $l(i)$ – количество информационных множеств i-го игрока, как показано, например, на рис. 1.4. Все позиции, находящиеся в одном информационном множестве, должны содержать одинаковое число альтернатив, кроме того, для любого $\alpha \in U_i^j, \quad \bar{\exists} \beta \in U_i^j, \quad \beta \prec \alpha$. Иначе говоря, все позиции одного информационного множества неразличимы для данного игрока, т.е. игрок, делая ход, знает в каком информационном множестве он находится, но не знает, в какой именно позиции этого множества. Поэтому позиции одного информационного множества не могут предшествовать друг другу.

Стратегией игрока в позиционной игре является последовательность правил выбора альтернатив (по числу информационных множеств). Каждое правило указывает, какую альтернативу должен выбрать игрок в каждом информационном множестве. Таким образом, если для i-го игрока в j-м информационном множестве

U_i^j каждая позиция содержит d_j альтернатив, то i-й игрок имеет

$$d_1 \times \ldots \times d_{l(i)} = \prod_{j=1}^{l(i)} d_j$$

чистых стратегий. На этой основе конечная позиционная игра может быть сведена к матричной игре, число чистых стратегий при этом достаточно большое.

Если в игре не участвует игрок 0, то выбор стратегии $z = (x, y)$ однозначно определяет $\tau \in T$ и выигрыш $H(z) = W(\tau)$. Если игрок 0 участвует, то стратегия $z = (x, y)$ однозначно определяет некоторое вероятностное распределение $P(\xi)$ на множестве T и выигрыш здесь можно определить следующим образом:

$$H(z) = \mathsf{M}(z, \xi) = \sum_{\alpha \in T} W(\alpha) P(\xi, \alpha), \quad P(\xi, \alpha) \geq 0, \quad \alpha \in T, \quad \sum_{\alpha \in T} P(\xi, \alpha) = 1$$

($\mathsf{M}(\xi)$ – математическое ожидание на множестве окончательных позиций). Таким образом, в итоге получается матричная игра H, X, Y, где $H(x, y) = H(z)$, которая называется игрой в нормальной форме. Решение игры может быть найдено методами, используемыми для обычных матричных игр. Рассмотрим пример решения позиционной игры.

Пример 1.7. *(Карточная игра двух лиц)* В колоде m картинок и n некартинок. Первый игрок выбирает карту из колоды, смотрит ее и либо делает ставку величины a, либо пасует. Если он пасует и карта – картинка, то он выигрывает 1, а если некартинка, то проигрывает 1. Если он ставит, то ход переходит ко второму. Если второй ставит, то при картинке он проигрывает $1 + a$, при некартинке – выигрывает $1 + a$. Если второй пасует, то он проигрывает 1. В этой игре игре игроку 0 принадлежит позиция 1, $Q_I = \{2, 3\}$, $Q_{II} = \{4, 5\}$, при этом $U_I^1 = \{2\}$, $U_I^2 = \{3\}$, $U_{II}^1 = \{4, 5\}$, т.е. первый игрок имеет два информационных множества по одному элементу, второй – одно с двумя элементами, поскольку он не знает взятую карту. Граф этой позиционной игры показан на рис. 1.5.

Пусть $a = 2$, также $m = 16, n = 20$, тогда $p = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ – вероятность того, что взятая карта – картинка.

Стратегии игроков: I – С (ставить), СК (ставить при картинке), СН (ставить при некартинке), П (пасовать); II – С (ставить), П (пасовать); игра 4×2;

$$A = \begin{pmatrix} (a+1)(2p-1) & 1 \\ (a+2)p - 1 & 2p - 1 \\ p - (a+1)(1-p) & 1 \\ 2p - 1 & 2p - 1 \end{pmatrix}.$$

При $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{11}{9} & 1 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

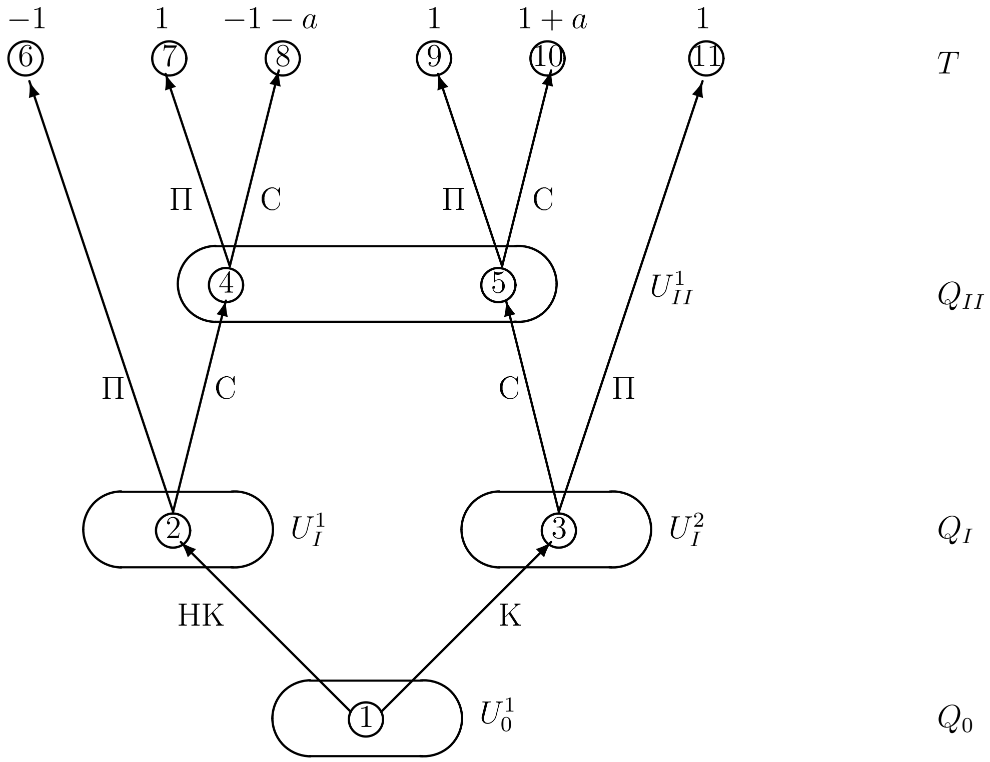

Рис. 1.5: Граф карточной игры двух лиц.

1-я стратегия 1-го игрока доминирует 3-ю, 2-я доминирует 4-ю, после исключения

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

умножаем на 9:

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этой игре 2×2 решение единственно и определяется по формулам:

$$x_1^* = \frac{-1-7}{-3-1-7-9} = \frac{2}{5}, \qquad x_2^* = \frac{3}{5},$$

$$y_1^* = \frac{-1-9}{-3-1-7-9} = \frac{1}{2}, \qquad y_2^* = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{v} = \frac{3-63}{-20} = 3.$$

Для исходной игры

$$x^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0),\ y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ v = \frac{1}{3}.$$

Поскольку число чистых стратегий в позиционной игре достаточно большое, то прямое применение методов решения матричных игр вызывает вычислительные трудности. Существуют классы позиционных игр, которые допускают более эффективные методы решения. К ним в первую очередь относятся т.н. игры с полной информацией, в которых информационные множества игроков содержат лишь по одному элементу. Это значит, что игроки помнят точно как все свои ходы, так и ходы противника. Примеры игр с полной информацией – шахматы, шашки и т.п. Для таких игр после перехода к матричным играм можно просто получить решение в чистых стратегиях.

Теорема 1.5. (Э. Цермело-Дж. фон Нейман) *Любая позиционная игра с полной информацией имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях.*

Доказательство утверждения содержится, например, в книге [2], теорема 5.1, а также в книге [6], теорема 2.5.1.

Обобщением игр с полной информацией являются игры с полной памятью, где каждый игрок точно помнит свои ходы, но может не помнить чужие. В таких играх любые два его информационных множества могут быть связаны лишь одной ветвью, если они находятся в разных уровнях очередности. В этом случае каждый игрок может использовать стратегии поведения, представляющие собой множество распределений вероятностей на альтернативах каждого информационного множества. Задание игры со стратегиями поведения проще, чем матричной игры в смешанных стратегиях. В этом случае, как показал Г. Кун, существует ситуация равновесия в стратегиях поведения. Обобщением конечных позиционных игр являются различные динамические многошаговые игры, которые в принципе могут содержать бесконечное множество позиций. В этом случае игроки после определенного числа шагов получают выигрыш и определяют, продолжать ли им игру дальше. Более подробно свойства таких игр описаны, например, в книге [7].

1.7 Бесконечные антагонистические игры

В конечной антагонистической игре (матричной игре) интересы игроков противоположны, игроки имеют конечное множество стратегий. В отличие от этого, в бесконечной игре игроки могут иметь бесконечное число количество стратегий. Общие антагонистические игры уже изучались в разделе 1.1. Для них справедлива теорема 1.1 об эквивалентности принципов оптимальности, поэтому основным здесь является вопрос о существовании ситуации равновесия (значения) игры. Один из наиболее общих результатов формулируется следующим образом.

Теорема 1.6. (О ситуациях равновесия в чистых стратегиях) *Если множества стратегий игроков X и Y есть непустые выпуклые компакты в конечномерных пространствах, а функция выигрыша $H(x, y)$ непрерывна, вогнута по x и выпукла по y, то игра имеет значение (ситуацию равновесия) в чистых стратегиях.*

Эта теорема обобщает теорему 1.3 о ситуациях равновесия для матричных игр в смешанных стратегиях, поскольку матричная игра в смешанных стратегиях есть также бесконечная антагонистическая игра, для которой выполняются условия теоремы 1.6. В то же время она является частным случаем теоремы 1.9 о ситуациях равновесия в бескоалиционных играх. Следует отметить, что утверждение теоремы остается справедливым, если множества стратегий игроков есть непустые выпуклые компакты в бесконечномерных (линейных топологических) пространствах.

Если игра не удовлетворяет условиям теоремы 1.6, то можно также перейти к смешанным стратегиям. Пусть $\tilde{X}, \tilde{Y}$ – множества чистых стратегий игроков общей антагонистической игры, $\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y})$ – функция выигрыша первого игрока. *Смешанной стратегией игрока* тогда является вероятностная мера, заданная на σ-алгебре множества его чистых стратегий. Тогда получаем множества смешанных стратегий X и Y как множества всех таких мер. Если $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ конечны, то X и Y – множества распределений вероятностей. Напомним, что вероятностная мера является конечной счетно-аддитивной функцией, заданной на соответствующем множестве. В общем случае, если $x \in X$, то

$$\int\limits_{\tilde{X}} dx(\tilde{x}) = 1, \quad \int\limits_{Z} dx(\tilde{x}) \geq 0, \quad \forall\, Z \subseteq \tilde{X},$$

аналогично для $y \in Y$. Определим теперь функцию выигрыша первого игрока для смешанного расширения игры также в виде математического ожидания

$$H(x,y) = \int\limits_{\tilde{X}} \int\limits_{\tilde{Y}} \tilde{H}(\tilde{x},\tilde{y})\, dx(\tilde{x})\, dy(\tilde{y}),$$

все интегралы здесь понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса.

Теорема 1.7. (О ситуациях равновесия в смешанных стратегиях) *Если множества чистых стратегий игроков $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ есть непустые компакты в конечномерных пространствах, а функция выигрыша $\tilde{H}(x,y)$ непрерывна, то игра имеет значение (ситуацию равновесия) в смешанных стратегиях.*

Очевидно, что условия этой теоремы намного слабее, чем условия теоремы 1.6. В то же время утверждение этой теоремы можно вывести из обобщения теоремы 1.6 для бесконечномерных пространств, поскольку множества X и Y в этих условиях представляют собой непустые выпуклые компакты, а функция H линейна по каждой компоненте, т.е. вогнуто-выпукла и непрерывна, причем в той же топологии. Детальное описание содержится, например, в книгах [2], глава III и [7], глава III.

Для поиска решений бесконечных игр можно использовать различные подходы. Для некоторых классов можно получить решение в явном виде, как в примере 1.8. В некоторых случаях удобно игру аппроксимировать матричной игрой с заданной степенью точности на основе дискретной аппроксимации множеств чистых стратегий. Переход к смешанным стратегиям может быть достаточно сложен. В условиях теоремы 1.6 можно использовать итеративные методы, например, *метод фиктивного разыгрывания*.

Выбираются изначально любые стратегии $x^0 \in X, y^0 \in Y$, последовательность $\{\lambda_k\}$ такая, что

$$\lambda_k \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {\lambda_k}^2 < \infty. \tag{1.24}$$

На k-й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеем точки $x^k \in X, y^k \in Y$. Находим

$$\tilde{x}^k \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X} H(x, y^k), \quad \tilde{y}^k \in \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} H(x^k, y). \tag{1.25}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (1-\lambda_k)x^k + \lambda_k \tilde{x}^k, && \text{(игроки смещаются от} \\ y^{k+1} &= (1-\lambda_k)y^k + \lambda_k \tilde{y}^k. && \text{своих стратегий на } \lambda_k) \end{aligned}$$

Иначе говоря, на стратегии x^k, y^k в (1.25) каждый игрок выбирает свой наилучший ответ. Но игроки не остаются на этих наилучших ответах $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$, потому что они должны учитывать и накопленный опыт. Для выполнения (1.24), например, можно определить

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k+1}, \quad \lambda > 0.$$

В этом случае последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ сходятся к седловой точке (x^*, y^*). Сходимость этого метода довольно медленная. Детальное описание и обоснование метода содержится, например, в книге [1].

Упражнение 1.3. Записать реализацию вычисления $\tilde{x}^k, \tilde{y}^k$ на итерации метода фиктивного разыгрывания для матричных игр.

Приведем примеры решения бесконечных антагонистических игр.

Пример 1.8. *(Игра на квадрате)* Пусть в антагонистической игре множества стратегий игроков $X = Y = [-1, 1]$, функция выигрыша первого игрока (проигрыша второго игрока) $H(x, y) = x - y$. По определению,

$$v_1 = \max_{x\in[-1,1]} \min_{y\in[-1,1]} (x - y) = \max_{x\in[-1,1]} (x - 1) = 0$$

и

$$v_2 = \min_{y\in[-1,1]} \max_{x\in[-1,1]} (x - y) = \min_{y\in[-1,1]} (1 - y) = 0.$$

По теореме 1.1, $v = 0$, существуют ситуации равновесия, точнее, $X^* = Y^* = \{1\}$. Отметим, что здесь выполняются условия теоремы 1.6.

Пример 1.9. *(Игра «нападение-защита»)* Имеется n районов, где возможно перейти в наступление, нападающая сторона имеет всего Q единиц средств, обороняющаяся – S единиц. Для упрощения средства считаются однородными. Можно применить модель к компьютерным системам, где районы интерпретируются как объекты для кибервоздействия, интенсивность применения средств нападения или защиты определяется в единицах, и все воздействия считаются однородными. Определяется функция выигрыша нападающей стороны (или функция проигрыша защищающейся стороны)

$$H(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\},$$

т.е. выигрыш зависит от соотношения сил в одном месте, а также множества стратегий игроков

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = Q \right\}, Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} y_i = S \right\}.$$

Требуется найти точки равновесия в этой антагонистической игре.

Удобно прежде всего провести замену переменных $u_i = \dfrac{x_i}{Q}$, $\quad w_i = \dfrac{y_i}{S}$ и получить игру с множеством стратегий

$$U = W = S_+^n = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

и функцией выигрыша

$$\tilde{F}(u, w) = \frac{Q}{S} \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{u_i}{w_i} \right\}.$$

Поскольку Q и S фиксированы, то можно взять

$$F(u, w) = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{u_i}{w_i} \right\}.$$

По определению,

$$v_2(u) = \max_{u \in U} F(u, w) = \max_{u \in U} \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{u_i}{w_i} \right\} = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{1}{w_i} \right\},$$

поэтому второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию

$$w_i^* = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{и} \quad v_2 = v_2(w^*) = n.$$

Поскольку

$$F(u, w^*) = n \max_{i=\overline{1,n}} \{u_i\},$$

то первый игрок может выбрать любой единичный вектор $e_i^{(n)}$, и тогда

$$F(e_i^{(n)}, u^*) = n = v_2.$$

Отсюда следует, что векторы $e_i^{(n)}$, $i = \overline{1,n}$ могут входить в спектр оптимальной смешанной стратегии первого игрока. Возьмем смешанную стратегию u^*, сосредоточенную на конечном числе векторов (чистых стратегий) $e_i^{(n)}$ с равной вероятностью $\frac{1}{n}$. Тогда в смешанных стратегиях

$$F(u^*, w^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(e_i^{(n)}, w^*) = n,$$

для любого $u \in U$ имеем

$$F(u, w^*) = u \max_{i=\overline{1,n}} \{u_i\} \leq n,$$

поэтому неравенство выполняется и для смешанных стратегий, аналогично, для любого $w \in W$ имеем

$$F(u^*, w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i} \geq n,$$

тогда неравенство выполняется и для смешанных стратегий. Итак, (u^*, w^*) – точка равновесия игры. Для исходной игры получаем: x^* – смешанная стратегия первого игрока, которая с равной вероятностью применяет чистые стратегии

$$d_i^{(n)} = Q\, e_i^{(n)}, \quad i = \overline{1, n},$$

(вектор, у которого i-я компонента Q, остальные 0, т.е. все имеющиеся средства будут направляться на i-й пункт); y^* – чистая стратегия второго игрока,

$$y_i^* = \frac{S}{n}, \quad i = \overline{1, n},$$

значение игры $v = \dfrac{Q}{S}\, n$. Поэтому выигрыш первого игрока зависит не только от соотношения средств, но и от количества районов.

Модификация игры может состоять в ограничении средств нападения для отдельных районов (пунктов), тогда множества стратегий заменяются на следующие:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = Q,\ q_i' \leq x_i \leq q_i'',\ i = \overline{1, n} \right\}, \quad X \neq \varnothing,$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \right\}.$$

Тогда аналогичной заменой переменных получим игру с функцией выигрыша $F(u, w)$ и множествами стратегий

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} u_i = 1,\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i,\ i = \overline{1, n} \right\}, \quad W = S^n_+,$$

$$\alpha_i = q_i'/Q > 0, \quad \beta_i = q_i''/Q > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Получаем

$$v_2(w) = \max_{u \in U} \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{u_i}{w_i} \right\} = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\beta_i}{w_i} \right\},$$

отсюда

$$u_i^* = \frac{\beta_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j}, \quad i = \overline{1, n} \qquad \text{– оптимальная стратегия второго игрока.}$$

Для первого игрока надо использовать смешанную стратегию с равными вероятностями для чистых стратегий вида

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} \beta_i, & i = i_0, \\ \alpha_i, & i \neq i_0, \ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

В исходной игре первый игрок в равновесной стратегии x^* с равными вероятностями применяет чистые стратегии вида

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} q_i'', & i = i_0, \\ q_i', & i \neq i_0, \ i = \overline{1,n}; \end{cases}$$

второй игрок использует чистую стратегию

$$y_i^* = \frac{q_i'' S}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_j''}, \quad i = \overline{1,n};$$

значение игры

$$v = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} q_i''.$$

1.8 Общие бескоалиционные игры n лиц

В игре может участвовать более двух игроков, тогда используемая модель зависит от уровня их взаимодействия. Если участвуют n игроков, причем игроки не координируют свои действия, то получается бескоалиционная игра, в которой каждый игрок имеет свое множество стратегий X_i и функцию выигрыша $H_i : X \to \mathbb{R}$, где $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Таким образом, антагонистические игры являются частным случаем бескоалиционных, где $n = 2$ и $H_1 = -H_2$. Функции выигрыша H_i определены на множестве ситуаций, т.е. если каждый игрок выбирает свою стратегию $x_i \in X_i, \ i = \overline{1,n}$, то получается ситуация $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, для элемента x определено значение $H_i(x)$ выигрыша i-го игрока, $i = \overline{1,n}$. Элементы множества X_i могут быть достаточно произвольными, обычно они определяются в метрических пространствах.

Поскольку выигрыш участника зависит от выбора стратегий всеми игроками, то необходимо определить понятие решения. Здесь в общем случае интересы игроков не совпадают, но и необязательно противоположны. Такое понятие равновесия для бескоалиционых игр предложил Дж. Нэш, оно является обобщением понятия седловой точки для антагонистических игр. Обозначим для краткости $(x_{-i}, y_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – набор x, в котором компонента x_i заменена на y_i.

Определение 1.3. *Набор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X$ называется ситуацией равновесия по Нэшу, если*

$$H_i(x^*) \geq H_i(x_{-i}^*, y_i), \quad \forall y_i \in X_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.26}$$

Иначе говоря, в ситуации равновесия ни одному из участников по отдельности невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии, если другие придерживаются своих стратегий. Поскольку здесь не предполагается какая-либо координация действий участников, то это понятие вполне естественно. В случае $n = 2, H_1 = -H_2$, (1.26) совпадает с точкой равновесия в антагонистической игре, т.е. с седловой точкой.

Следующий вопрос – о существовании ситуаций равновесия. Для обоснования условий этого утверждения потребуются дополнительные свойства.

Пусть U и V – два непустых множества, через $\Pi(V)$ обозначим набор всех непустых подмножеств для V. Если каждой точке $u \in U$ поставлено в соответствие множество $T(u) \subseteq V$, то тем самым задано многозначное отображение $u \mapsto T(u)$ или $T : U \to \Pi(V)$.

Определение 1.4. *Отображение $T : U \to \Pi(V)$ называется замкнутым, если из условий $\{u^k\} \to u \in U$, $\{v^k\} \to v$, $u^k \in U$, $v^k \in T(u^k)$, следует $v \in T(u)$.*

Замкнутость отображения является обобщением свойства непрерывности функции. Также потребуется теорема о неподвижной точке для многозначных отображений.

Теорема 1.8. (С. Какутани) *Если X – непустое, выпуклое и компактное множество в конечномерном пространстве, отображение $T : X \to \Pi(X)$ замкнуто и имеет выпуклые компактные образы на X, то существует точка $x^* \in X$, такая что $x^* \in T(x^*)$.*

Доказательство утверждения содержится, например, в книге [6], теорема 1.11.5.

Теорема 1.9. (О ситуациях равновесия в чистых стратегиях) *Если множества стратегий игроков X_i есть непустые выпуклые компакты в конечномерных пространствах, функции H_i непрерывны по всем переменным и вогнуты по x_i, для $i = \overline{1,n}$, то в игре существует ситуация равновесия по Нэшу.*

Доказательство. Определим отображение $T : X \to \Pi(X)$ следующим образом:

$$T(x) = \{z \in X \mid H_i(x_{-i}, z_i) = \max_{y_i \in X_i} H_i(x_{-i}, y_i),\ i = \overline{1,n}\}.$$

Для любой ситуации $x \in X$ множество

$$Z_i(x) = \operatorname{Arg\,max}\{H_i(x_{-i}, y_i) \mid y_i \in X_i\}$$

будет непустым, выпуклым и компактным, поэтому таково же и множество

$$T(x) = Z_1(x) \times \cdots \times Z_n(x).$$

Пусть $\{x^k\} \to \bar{x},\ x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in X$, тогда $\bar{x} \in X$ из-за компактности X. Если $z^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k)$, где $z_i^k \in Z_i(x^k)$, $i = \overline{1,n}$ и $\{z^k\} \to \bar{z}$, то также $\bar{z} \in X$, кроме того,

$$H_i(x_{-i}^k, z_i^k) \geq H_i(x_{-i}^k, y_i), \quad \forall y_i \in X_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$H_i(\bar{x}_{-i}, \bar{z}_i) \geq H_i(\bar{x}_{-i}, y_i), \quad \forall y_i \in X_i, \quad i = \overline{1,n},$$

т.е. $\bar{z}_i \in Z_i(\bar{x})$, $i = \overline{1,n}$, $\bar{z} \in T(\bar{x})$. Поэтому отображение T замкнуто и по теореме 1.8 должна существовать неподвижная точка $x^* \in X$, при которой

$$H_i(x^*) = H_i(x_{-i}^*, x_i^*) \geq H_i(x_{-i}^*, y_i), \quad \forall y_i \in X_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Это значит, что x^* совпадает с точкой равновесия по Нэшу. □

Эта теорема обобщает теорему 1.6 о ситуациях равновесия для антагонистических игр. Следует отметить, что утверждение теоремы остается справедливым, если множества стратегий игроков есть непустые выпуклые компакты в бесконечномерных (линейных топологических) пространствах.

Условия существования ситуации равновесия по Нэшу могут оказаться достаточно жесткими, т.е. не выполняться для широких классов игр. Тогда в принципе можно переходить к смешанным стратегиям, но при этом надо учитывать ограниченную применимость такого подхода, в частности, только при многократном разыгрывании и сохранении одинаковых условий ожидаемые результаты будут сближаться с полученными. Смешанные стратегии игроков определяются так же, как и в разделах 1.2 и 1.7, в зависимости от типа множеств чистых стратегий игроков. При этом условия существования ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях гораздо слабее, чем в теореме 1.9. В частности, снимаются все условия выпуклости/вогнутости, как в теореме 1.7. При этом сама задача равновесия становится намного сложнее. Детальное описание бескоалиционных игр в смешанных стратегиях содержится, например, в книгах [2], глава VII и [4], глава IV.

Помимо понятия решения на основе равновесия по Нэшу можно применять также решения по принципу *гарантированного результата* $\bar{x}$, а также брать *оптимальные по Парето* точки $\bar{x}$. В первом случае:

$$\bar{x}_i \in \operatorname{Arg} \max_{y_i \in X_i} \min_{\substack{x_j \in X_j \\ j \neq i}} H_i(x_i, y_i), \quad i = \overline{1,n};$$

т.е. надо решать задачи оптимизации. Этот принцип не совсем оправдан при отсутствии антагонистических интересов игроков.

Во втором случае:

$$\bar{x} \in X, \quad \nexists y \in X, \quad H(y) \succ_P H(\bar{x}),$$

где $H(x) = (H_1(x), \ldots, H_n(x))$. Напомним, что $a \succ_P b$ для двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ (a лучше, чем b в смысле Парето), если $a_i \geq b_i$ для $i = \overline{1,n}$ и $a \neq b$. Здесь Парето-оптимальные точки можно находить с помощью свертки критериев, т.е. также надо решать задачи оптимизации. Но при таком подходе возможны ситуации, когда один участник (или сразу несколько участников) отклоняется от точки $\bar{x}$ и увеличивает свой выигрыш, при этом уменьшая выигрыш других. Поэтому принцип равновесия по Нэшу считается более удобным для бескоалиционных игр. Для вычисления ситуаций равновесия можно использовать различные итеративные методы, они описаны, например, в книгах [1] и [3].

Приведем примеры приложений бескоалиционных игр n лиц.

Пример 1.10. *(Олигополистический рынок)* Пусть имеется рынок одного товара, цена на который p зависит от объема поставок σ. Всего на рынке n поставщиков, i-й поставляет товар в количестве x_i, тогда $\sigma_x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, доход от продажи $x_i p(\sigma_x)$, существуют издержки производства $f_i(x_i)$. Таким образом, множества стратегий игроков $\mathbb{R}_+ = \{\tau \mid \tau \geq 0\}$, множество ситуаций $\mathbb{R}_+^n$, функция выигрыша i-го игрока

$$H_i(x) = x_i p(\sigma_x) - f_i(x_i).$$

Рассмотрим случай, когда цена и издержки меняются линейно, т.е. $p(\sigma) = \alpha - \beta\sigma$, $f_i(x_i) = \gamma_i x_i + \delta_i$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma_i > 0$, $\delta_i > 0$. Условие равновесия

$$H_i(x^*_{-i}, y_i) \leq H_i(x^*), \quad \forall y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.27}$$

если пренебречь ограничением (неотрицательности), можно записать в виде:

$$\frac{\partial H_i(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.28}$$

поскольку функция

$$H_i(x_{-i}, y_i) = y_i \left[\alpha - \beta \sum_{s \neq i} x_s - \beta y_i\right] - \gamma_i y_i - \delta_i$$

вогнута по y_i. Отсюда получаем систему

$$\alpha - \beta \sum_{s=1}^{n} x^*_s - \beta x^*_i - \gamma_i = 0, \quad i = \overline{1,n};$$

или

$$\begin{cases} 2x^*_1 + \ x^*_2 + \ldots + \ x^*_n & = \tau_1, \\ \ x^*_1 + 2x^*_2 + \ldots + \ x^*_n & = \tau_2, \\ \qquad \qquad \ldots \\ \ x^*_1 + \ x^*_2 + \ldots + 2x^*_n & = \tau_n; \end{cases}$$

где $\tau_i = \frac{\alpha-\gamma_i}{\beta}$, $i = \overline{1,n}$. Для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ & & \dots & \\ -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_i^* = \tau_i - \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^{n} \tau_s = \frac{1}{n+1} \left[n\tau_i - \sum_{s \neq i} \tau_s \right], \quad i = \overline{1,n}.$$

Если все величины τ_i достаточно близки (т.е. издержки участников примерно одинаковы), то $x_i^* > 0$, получаем ситуацию равновесия. Если у кого-то из них, например, слишком большие издержки γ_i, то ему вообще невыгодно запускать производство, при решении системы (1.28) получится отрицательная величина. Вместо системы (1.28) тогда для получения ситуации равновесия надо решать задачу (1.27) или эквивалентную задачу дополнительности

$$x_i^* \geq 0, \ \frac{\partial H_i(x^*)}{\partial x_i} \leq 0, \ x_i^* \frac{\partial H_i(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример 1.11. *(Бескоалиционная игра с двумя целями)* Задачи данного типа изучались Ю.Б. Гермейером и И.А. Вателем. Пусть n участников распределяют все имеющиеся у них средства $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ между двумя целями. Первая цель – это объект или мероприятие, приносящее частную или прямую прибыль, вторая цель – это объект или мероприятие, приносящее общую или косвенную прибыль, например, охрана окружающей среды. Пусть x_i – объем средств i-го участника на вторую цель, $0 \leq x_i \leq \alpha_i$. Тогда он получит доход $\mu_i(\alpha_i - x_i)$ от реализации первой цели и доход $\eta_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \right)$ от реализации второй цели, а его общий доход

$$H_i(x) = \mu_i(\alpha_i - x_i) + \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right).$$

Получена бескоалиционная игра n участников, где $H_i(x)$ – функция выигрыша i-го игрока, $X_i = [0, \alpha_i]$ – множество стратегий i-го игрока, $i = \overline{1,n}$. Для упрощения возьмем линейные функции μ_i и η_i, а именно, пусть

$$H_i(x) = (\alpha_i - x_i) + \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right),$$

где $\beta_i \in (0,1)$, $i=\overline{1,n}$.

Покажем, что $\bar{x} = \mathbf{0}$ – единственная точка равновесия по Нэшу в игре. В самом деле, $H_i(\bar{x}) = \alpha_i$, но

$$H_i(\bar{x}_{-i}, y_i) = \alpha_i - y_i(1-\beta_i) < \alpha_i$$

при $y_i > 0$. Пусть x' – любая ситуация и $x'_i > 0$, тогда

$$H_i(x'_{-i}, x'_i - y_i) = \alpha_i - x'_i + \beta_i \sum_{j=1}^{n} x'_j + (1-\beta_i) y_i > H_i(x')$$

при $0 < y_i < x'_i$, т.е. x' – не точка равновесия по Нэшу. Возьмем теперь точку (ситуацию) $x'' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и получим

$$H_i(x'') = \beta_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j > H_i(\bar{x}) = \alpha_i,$$

если

$$\beta_i > \alpha_i / \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Игроки получают здесь больший выигрыш, чем в точке $\bar{x}$, но x'' – тоже не точка равновесия по Нэшу.

Упражнение 1.4. Сформулировать в виде бескоалиционной игры задачу выпуска изделий l предприятиями при ценах, зависимых от объемов выпусков, которая приведена во введении. Указать условия существования ситуации равновесия в такой игре.

1.9 Биматричные игры

Биматричная игра – это бескоалиционная игра двух участников с конечными множествами стратегий. Биматричная игра отличается от матричной игры только тем, что она не обязана быть антагонистической, т.е. два игрока также имеют конечные множества стратегий, скажем, всего m и n, но в ситуации (i,j) выигрыш 1-го игрока – a_{ij}, выигрыш 2-го – b_{ij}, при этом может быть $a_{ij} \neq -b_{ij}$ (интересы противников не противоположны друг другу в общем случае). Таким образом, чтобы задать биматричную игру, достаточно задать две матрицы выигрышей $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размерностью $m \times n$. При $A = -B$ получим матричную игру. Очевидно, что это более общий класс игр, поэтому можно использовать все принципы оптимальности бескоалиционных игр: равновесие (по Нэшу), гарантированный результат и оптимальность по Парето. Вначале опишем эти принципы для чистых стратегий.

По принципу гарантированного результата ситуация (i^*, j^*) будет решением, если

$$i^* = \arg\max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}, \tag{1.29}$$
$$j^* = \arg\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} b_{ij}.$$

Но этот принцип здесь не имеет такого серьезного основания для применения, поскольку игроки прежде всего заинтересованы в своем выигрыше, а не в желании навредить другому.

По принципу равновесия (по Нэшу) пара стратегий (k, l) есть ситуация равновесия, если

$$a_{il} \leq a_{kl} \quad \forall i = \overline{1, m}, \qquad b_{kl} \leq b_{kj} \quad \forall j = \overline{1, n}, \tag{1.30}$$

т.е. ни одному из игроков невыгодно отклоняться от ситуации (k, l), если другой не меняет стратегию. Здесь, в отличие от матричной игры, может быть несколько значений, т.е. несколько ситуаций равновесия с разными выигрышами. Очевидно, что как и в матричных играх, ситуаций равновесия в чистых стратегиях может и не быть.

Принцип оптимальности по Парето требует согласования действий игроков. Определим вначале обратное отношение предпочтения по Парето $\succcurlyeq$. Для двух векторов $c, d \in \mathbb{R}^l$ считаем, что $c \succcurlyeq d$, если либо $c_i > d_i$ для некоторого i, либо $c = d$, т.е. d не лучше, чем c в смысле Парето. Пара стратегий (k, l) оптимальна по Парето, если

$$(a_{kl}, b_{kl}) \succcurlyeq (a_{ij}, b_{ij}) \qquad \forall i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Если эта ситуация не является ситуацией равновесия, то игроки по отдельности могут отклоняться от нее, чтобы увеличить свой выигрыш. В этом случае получается противоречие между частными и общими интересами.

Данные принципы могут использоваться и для смешанного расширения игры, где множества стратегий игроков есть

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\},$$

которые интерпретируются как множества распределений вероятностей на множестве первоначальных (чистых) стратегий, новые функции выигрыша игроков определяются как математическое ожидание выигрыша в ситуации (x, y), по формулам

$$H_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = xAy^\top = \langle xA, y \rangle$$

и

$$H_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j = xBy^\top = \langle xB, y\rangle.$$

При этом надо учитывать ограниченную применимость такого подхода, указанную ранее в разделах 1.2 и 1.8. Но при этом в смешанных стратегиях обеспечивается в любом случае существование ситуации равновесия по Нэшу. Очевидно, что в смешанных стратегиях также можно использовать все указанные принципы оптимальности бескоалиционных игр.

Определим функцию гарантированного выигрыша первого игрока

$$v_1(x) = \min_{y\in Y} H_1(x,y),$$

тогда множество оптимальных стратегий первого игрока в смысле гарантированного результата

$$X_A^* = \operatorname{Arg}\max_{x\in X} v_1(x).$$

По аналогии, определим функцию наибольшего проигрыша второго игрока

$$v_2(y) = \min_{x\in X} H_2(x,y),$$

тогда множество оптимальных стратегий второго игрока в смысле гарантированного результата

$$Y_B^* = \operatorname{Arg}\max_{y\in Y} v_2(y).$$

Здесь оптимальные стратегии можно находить на основе решения задач выпуклой оптимизации.

Набор $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$ называется ситуацией равновесия по Нэшу в биматричной игре в смешанных стратегиях, если

$$H_1(x,\bar{y}) \le H_1(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall x\in X, \quad H_2(\bar{x},y) \le H_2(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall y \in Y. \tag{1.31}$$

Все множество ситуаций равновесия обозначим через S^*.

Теорема 1.10. *Любая биматричная игра в смешанных стратегиях имеет ситуацию равновесия.*

Эта теорема является частным случаем теоремы 1.9 о ситуациях равновесия в бескоалиционных играх. Вычисление ситуаций равновесия здесь может быть достаточно сложной задачей, как и для общих бескоалиционных игр.

Набор $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$ называется оптимальной по Парето ситуацией в биматричной игре в смешанных стратегиях, если

$$(H_1(\bar{x},\bar{y}), H_2(\bar{x},\bar{y})) \not\prec (H_1(x,y), H_2(x,y)) \quad \forall x\in X,\ \forall y\in Y.$$

Здесь Парето-оптимальные точки можно находить с помощью свертки критериев, т.е. также надо решать задачи оптимизации. Но если эта ситуация не является ситуацией равновесия, то игроки также по отдельности могут отклоняться от нее и увеличивать свой выигрыш. Поэтому принцип равновесия по Нэшу при отсутствии координации действий игроков является более удобным для биматричных игр.

На биматричные игры можно перенести некоторые свойства матричных. В частности, свойство 6: если заменить функцию выигрыша $H_i(x,y)$ на $\alpha H_i(x,y)+\beta$, где $\alpha > 0, \beta$ – любое число, то множество ситуаций равновесия не меняется, только изменятся соответствующие значения в точках равновесия.

Далее, соотношения (1.31) эквивалентны следующим:

$$H_1(e_i^{(m)}, \bar{y}) \le H_1(\bar{x}, \bar{y}),\ i = \overline{1,m}, \quad H_2(\bar{x}, e_j^{(n)}) \le H_2(\bar{x}, \bar{y}),\ j = \overline{1,n}. \tag{1.32}$$

Действительно, из (1.31) следует (1.32), в обратную сторону доказать можно, умножая неравенства в (1.32) на компоненты смешанных стратегий $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$, и складывая их, поскольку $\bar{x} \in X = S_+^m$ и $\bar{y} \in Y = S_+^n$.

Для стратегии $x \in X$ определим спектр $I(x) = \{i \mid x_i > 0\}$, аналогично для $y \in Y$ определим спектр $J(y) = \{j \mid y_j > 0\}$. Получим аналог свойства 3.

Свойство 7. *Если* $(\bar{x}, \bar{y}) \in S^*$, *то*

$$\begin{aligned} &H_1(e_k^{(m)}, \bar{y}) = H_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall k \in I(\bar{x}), \\ &H_2(\bar{x}, e_l^{(n)}) = H_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall l \in J(\bar{x}). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Доказательство. Из (1.32) следует

$$\sum_{j=1}^{n} e_{kj}\bar{y}_j = H_1(e_k^{(m)}, \bar{y}) \le H_1(\bar{x}, \bar{y}) = v_1.$$

Если выполняется строгое неравенство для $i = k$, то, умножая неравенства в (1.32) на x_i^* и суммируя, получаем противоречие $H_1(\bar{x}, \bar{y}) < H_1(\bar{x}, \bar{y})$. □

Это свойство позволяет получить простые условия равновесия.

Теорема 1.11. *Ситуация* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} &H_1(e_i^{(m)}, \bar{y}) = H_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall i \in I(\bar{x}), \\ &H_1(e_i^{(m)}, \bar{y}) \le H_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall i \notin I(\bar{x}), \\ &H_2(\bar{x}, e_j^{(n)}) = H_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall j \in J(\bar{y}), \\ &H_2(\bar{x}, e_j^{(n)}) \le H_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall j \notin J(\bar{y}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Доказательство. Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ – ситуация равновесия, тогда выполняются соотношения (1.32) и (1.33), откуда следует (1.34). Пусть теперь выполняются соотношения (1.34) для некоторой ситуации $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$. Тогда выполняются соотношения (1.33), т.е. $(\bar{x}, \bar{y})$ – ситуация равновесия. □

По аналогии с матричными играми здесь также можно определять доминируемые стратегии и исключать их, как в свойствах 4 и 5, для сокращения размеров матриц. Вычеркивания строк и столбцов проводятся синхронно в двух матрицах.

Для решения биматричных игр используются как общие методы поиска равновесий бескоалиционных игр, так и специализированные. Детальное описание содержится, например, в книгах [4, 6, 7]. Можно выделить подкласс биматричных игр, где решение находятся очень просто, как в разделе 1.5 для матричных игр. Из теоремы 1.11 следует, что в случае ситуации вполне смешанного равновесия, когда оптимальные смешанные стратегии $\bar{x}$ и $\bar{y}$ имеют полный спектр, т.е. $I(\bar{x}) = \{1, \ldots, m\}$, $J(\bar{y}) = \{1, \ldots, n\}$, получаем $m = n = d$, причем матрицы A и B должны быть невырожденными. Тогда условия (1.34) заменяются равенствами, что дает систему

$$\begin{aligned} A\bar{y}^\top &= v_1 e, \quad e\bar{y}^\top = 1, \\ \bar{x}B &= v_2 e, \quad xe^\top = 1, \end{aligned}$$

где $v_1 = H_1(\bar{x}, \bar{y}), v_2 = H_2(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\bar{y}^\top = v_1 A^{-1} e \quad \text{и} \quad e\bar{y}^\top = v_1 e A^{-1} e^\top = 1, \\ &\bar{x} = v_2 e B^{-1} \quad \text{и} \quad \bar{x}e^\top = v_2 e B e^\top = 1, \end{aligned} \tag{1.35}$$

т.е.

$$v_1 = (eA^{-1}e^\top)^{-1}, \quad v_2 = (eBe^\top)^{-1} \tag{1.36}$$

что обобщает формулы для решения матричной игры, здесь $v_1 \neq v_2$ в общем случае.

Таким образом, при наличии вполне смешанного решения его можно вычислить по формулам (1.35) – (1.36). Надо заметить, что биматричная игра в этом случае может иметь и другие ситуации равновесия, но вполне смешанное равновесие определяется единственным образом.

Можно использовать приведенную систему, если известно, что $v_1, v_2 > 0$ (для выполнения этого условия нужно добавить достаточно большое положительное число к каждому элементу матриц):

$$\begin{aligned} A\bar{w}^\top = e \quad &\Rightarrow \quad \bar{w}^\top = A^{-1}e^\top, \qquad \text{где} \quad \bar{w} = \frac{1}{v_1}\bar{y}, \\ \bar{u}B = e \quad &\Rightarrow \quad \bar{u} = eB^{-1}, \quad \text{где} \quad \bar{u} = \frac{1}{v_2}\bar{x}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} &e\bar{w}^\top = eA^{-1}e^\top = \frac{1}{v_1}, \quad \text{т.е.} \quad v_1 = (eA^{-1}e^\top)^{-1}, \\ &\bar{u}e^\top = eB^{-1}e^\top = \frac{1}{v_2}, \quad \text{т.е.} \quad v_2 = (eB^{-1}e^\top)^{-1}, \\ &\bar{x} = v_2\bar{u}, \quad \bar{y} = v_1\bar{w}. \end{aligned}$$

Приведем примеры, иллюстрирующие свойства решений биматричных игр.

Пример 1.12. Имеются два предприятия, выпускающие продукцию и вредные вещества, которые требуют очистки. В зависимости от режима работы (1 – обычный, 2 – напряженный) возможны разные величины доходов и штрафов. Игра определяется матрицами выигрышей A и B игроков-предприятий.
Вариант 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь при обычном режиме обоих доход по 2 ед. без штрафов, при переходе на напряженный режим одного его доход увеличивается, но штраф не берется, если же оба переходят на напряженный, то штрафы совпадают с доходами. Решения $(2,1)$ или $(1,2)$ с разными доходами обоих, они же оптимальны по Парето.
Вариант 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от предыдущего случая, здесь переход одного на напряженный режим влечет для него штраф. Решение $(1,1)$, оно оптимально по Парето.
Вариант 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь при переходе одного предприятия на напряженный режим штраф берется с обоих, но перешедшему все-таки выгоднее перейти (3 ед. дохода против 2 ед.), если другое предприятие не перешло. Здесь решения $(1,2)$ и $(2,1)$, они оптимальны по Парето.
Вариант 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь также отклонение одного вызывает штраф для обоих, но теперь и не отклонившемуся штраф больше, чем в случае 3. Напротив, если оба выбирают напряженный режим, то доход от продукции перекрывает штраф. Решение $(2,2)$, но не оптимально по Парето, есть лучшая точка $(1,1)$.

Приведем пример решения биматричной игры.

Пример 1.13.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

В чистых стратегиях нет ситуации равновесия. Смешанное равновесие находится по приведенной системе:

$$Aw^\top = e \quad \sim \quad \begin{cases} 10w_1 + 10w_2 & = 1, \\ \ \ 9w_1 + 12w_2 & = 1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \ w^* = \left(\frac{3}{40}, \frac{1}{40}\right) \ \Longrightarrow \quad v_1 = 10,$$

$$uB = e \quad \sim \quad \begin{cases} -10u_1 + 6u_2 & = 1, \\ \quad\ 2u_1 + 2u_2 & = 1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \ u^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) \ \Longrightarrow \quad v_2 = 2,$$

$$\bar{x} = v_2 u^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \bar{y} = v_1 w^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right);$$

v_1, v_2 – это не гарантированные выигрыши, это выигрыши в точке равновесия. При этом

$$\bar{x}A = \left(\frac{37}{4}, \frac{49}{4}\right), \quad \text{т.е. при } \tilde{y} = (1,0)^\top \text{ получаем} \quad \bar{x}A\tilde{y}^\top = \frac{37}{4} < 10 = v_1,$$

$$B\bar{y}^\top = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. при } \tilde{x} = (1,0)^\top \text{ получаем} \quad \tilde{x}B\bar{y}^\top = -7 < 2 = v_2.$$

Равновесные стратегии не являются стратегиями гарантированного результата, как в антагонистической игре.

Глава 2

Игры с координацией

2.1 Арбитражные схемы

Помимо бескоалиционных игр можно определить модели различных видов координации действий между участниками (игроками) с целью увеличения своих выигрышей. Одним из таких возможных способов являются арбитражные схемы.

Прежде всего, каждый игрок определяет свой гарантированный выигрыш

$$d_i^* = \max_{x_i \in X_i} \min_{\substack{x_j \in X_j \\ j \neq i}} H_i(x), \quad i = \overline{1, n},$$

таким образом получается точка $d^* = (d_1^*, \ldots, d_n^*) \in \mathbb{R}_n$, которая называется точкой status quo. Далее, каждой ситуации x будет также соответствовать точка $d(x) = (H_1(x)), \ldots, H_n(x))$. Перебирая все возможные ситуации, получим все множество возможных выигрышей D. В частности, при конечном множестве чистых стратегий игроков каждая ситуация в чистых стратегиях будет давать вектор выигрышей d^k, $k = \overline{1, K}$, т.е. $D = \{d^1, \ldots, d^k\}$, а если включить смешанные стратегии, то векторы выигрышей в смешанных стратегиях будут определяться как выпуклые комбинации векторов выигрыша в чистых стратегиях, т.е. $D = \mathrm{conv}\{d^1, \ldots, d^k\}$ и векторы d^k будут угловыми точками множества D.

Задача состоит в том, чтобы выбрать элемент $t^* \in D$, который мог бы быть признан решением всеми участниками. Согласно принципу арбитражного решения игроки обращаются к арбитру, который сообщает им правила (аксиомы), на которых будет основан выбор точки t^*. Если они согласны и обещают его реализовать, то они сообщают арбитру конкретные значения множества D и точки d^*, после чего получают точку t^* как реализацию правила $t^* = \varphi(D, d^*)$. Одним из возможных способов задания арбитражных аксиом предложил Дж. Нэш.

Набор правил (аксиом) Нэша.

1. $t^* \in D$. (реализуемость)

2. $t^* \geq d^*$. (индивидуальная рациональность, получаемое решение должно быть не хуже значений выигрышей в точке status quo)

3. $\bar{\exists}\, d \in D,\ d \geq t^*,\ d \neq t^*$. (оптимальность по Парето)

4. Если $t^* \in \tilde{D} \subset D$, то $\varphi(\tilde{D}, d^*) = t^*$ (независимость от посторонних альтернатив, на подмножестве выбор будет тем же самым)

5. Если $\tilde{D} = \alpha D + \beta$ и $t^* = \varphi(\tilde{D}, d^*)$, то $\varphi(\tilde{D}, \alpha d^* + \beta) = \alpha t^* + \beta$. (линейность, смещение точки status quo дает такое же смещение решения)

6. Если $\pi(d)$ – вектор, полученный из d некоторой перестановкой координат и $\pi(d) \in D$, то из $\pi(d^*) = d^*,\ t^* = \varphi(D, d^*)$ следует $\pi(t^*) = t^*$. (симметрия)

Если игроки соглашаются с этими достаточно разумными правилами выбора решения, то они обязаны его выполнять. Оказывается, этим аксиомам соответствует единственное правило выбора решения. Дополнительно требуется, чтобы в множестве D существовал вектор $d' > d^*$.

Теорема 2.1. (Дж. Нэш) *При сделанных предположениях единственное правило φ, удовлетворяющее аксиомам 1–6, определяется по формуле*

$$\varphi(D, d^*) = \arg\max \left\{ \prod_{i=1}^{n} (d_i - d_i^*) \,\middle|\, d \in D,\ d \geq d^* \right\}.$$

Доказательство утверждения содержится, например, в книге [2], теорема 9.1. Заметим, что можно перейти к эквивалентной задаче

$$\max_{d \in D,\ d \geq d^*} \to \sum_{i=1}^{n} \ln(d_i - d_i^*),$$

которая является задачей максимизации строго вогнутой функции на выпуклом множестве и имеет единственное решение. Таким образом, арбитражное решение Нэша вычисляется достаточно просто. Приведем пример решения игры на основе арбитражной схемы.

Пример 2.1. Используем биматричную игру с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 300 & 900 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 500 & 1500 \\ 2000 & 500 \end{pmatrix}.$$

В чистых стратегиях ситуации равновесия нет, в смешанных стратегиях ситуация равновесия

$$x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right),\ y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \text{тогда}\ v_1 = x^* A (y^*)^\top = 500,\ v_2 = x^* B (y^*)^\top = 1100.$$

В самом деле (если игроки попытаются отклониться),

$$H_1(x^*,y^*) = 500 \ \geq \ H_1(x,y^*) = xA(y^*)^\top = 500(x_1+x_2) \qquad \forall x \in S_+^2,$$
$$H_2(x^*,y^*) = 1100 \ \geq \ H_2(x^*,y) = x^*Ay^\top = 1100(y_1+y_2) \qquad \forall y \in S_+^2.$$

Более того, для матричной игры с матрицей A имеем по формулам игр 2×2: $v_A = 500$, аналогично для матричной игры с матрицей B имеем $v_B = 1100$. Это значит, что $d^* = (500, 1100)$, но стратегии гарантированного результата игроков могут отличаться от равновесных стратегий x^* и y^*. Множество D будет выпуклой комбинацией 4-х точек A_0, B_0, C_0, D_0, где

$$\begin{array}{cccc} A_0 \begin{pmatrix} \text{1-й} \to \text{1 стр.} \\ \text{2-й} \to \text{1 стр.} \end{pmatrix} & B_0 \begin{pmatrix} \text{1-й} \to \text{1 стр.} \\ \text{2-й} \to \text{2 стр.} \end{pmatrix} & C_0 \begin{pmatrix} \text{1-й} \to \text{2 стр.} \\ \text{2-й} \to \text{1 стр.} \end{pmatrix} & D_0 \begin{pmatrix} \text{1-й} \to \text{2 стр.} \\ \text{2-й} \to \text{2 стр.} \end{pmatrix} \\ (600, 500) & (300, 1500) & (300, 2000) & (900, 500) \end{array}$$

Перейдем для удобства к новым координатам $u_i = d_i - d_i^*$, тогда

$$\begin{array}{cccc} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ (100, -600) & (-200, 400) & (-200, 900) & (400, -600) \end{array}$$

Получаем трапецию, при добавлении условия $d \geq d^*$, т.е. $u \geq 0$, получим треугольник OC_1D_1, на котором надо найти максимум функции u_1u_2 или $\ln u_1 + \ln u_2$, как показано на рис. 2.1. Ясно, что решение находится на прямой, проходящей через точки C_1 и D_1, ее уравнение

$$5u_1 + 2u_2 = 800.$$

Тогда можно выразить $u_2 = 400 - \frac{5}{2}u_1$ и просто найти максимум функции

$$u_1(400 - \frac{5}{2}u_1),$$

который равен 16000 при $u_1^* = 80$, отсюда $u_2^* = 200$. Точка $u^* = (80, 200)$ находится на отрезке $[C_1, D_1]$, поэтому она является решением исходной задачи. Отсюда $t^* = (580, 1300)$.

Арбитражное решение дает выигрыш обоим игрокам по сравнению с гарантированным и равновесным. Вычислим стратегии игроков для его реализации. В точках C_0 и D_0 (и на линии C_0D_0) 1-й игрок применяет 2-ю чистую стратегию, 2-й игрок применяет 1-ю в точке C_0, 2-ю в точке D_0. Поэтому выпишем систему

$$2000\beta + 500(1-\beta) = 1300, \quad \beta \in [0,1],$$

отсюда $\beta = \frac{8}{15}$. Итак, арбитражные стратегии игроков:

$$\tilde{x} = (0,1), \quad \tilde{y} = \left(\frac{8}{15}, \frac{7}{15}\right),$$

тогда

$$\tilde{x}A(\tilde{y})^\top = 580, \ \tilde{x}B(\tilde{y})^\top = 1300.$$

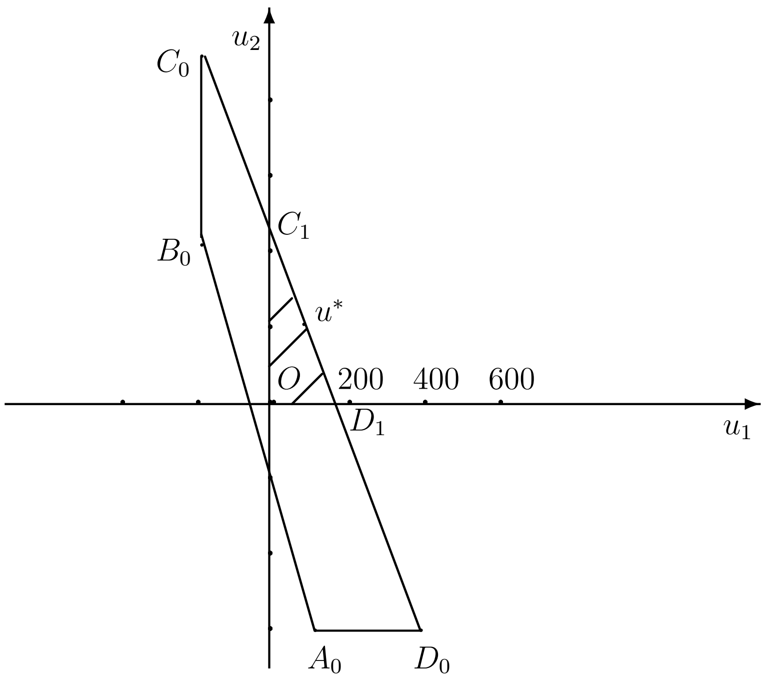

Рис. 2.1: Арбитражное решение игры.

2.2 Кооперативные игры n лиц

В отличие от рассматривавшихся ранее, в кооперативных играх игроки могут вступить в коалиции и за счет этого увеличивать свой выигрыш. Такие коалиции, как правило, возникают, когда интересы игроков не являются противоположными друг другу, т.е. неантагонистическими. Математические модели значительного числа прикладных задач являются кооперативными играми, так как системы, в которых интересы активных элементов непротивоположные, достаточно распространены.

Для решения таких задач необходимо находить коалиции, обеспечивающие наибольший выигрыш игрокам. На множестве коалиций определяется функция выигрыша v, где $v(I)$ – гарантированный суммарный выигрыш игроков, находящихся в коалиции I. То есть, если всего n игроков, $N = \{1, \dots, n\}$, то в случае объединения игроков из $N \setminus I$ в коалицию суммарный выигрыш игроков из I не меньше, чем $v(I)$. Кооперативная игра считается заданной, если определены множество игроков и функция выигрыша, или характеристическая функция.

Будут рассматриваться игры, в которых $v(\varnothing) = 0$, $v(I_1 \cup I_2) \geq v(I_1) + v(I_2)$, для любых $I_1, I_2 \subset N$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Иначе говоря, объединение игроков не уменьшает их гарантированный выигрыш. Также отсюда следует

$$\sum_{j=1}^{k} v(I_j) \leq v(\cup_{j=1}^{k} I_j), \quad \text{если } I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing,\ j_1 \neq j_2,\ I_j \subset N,\ j = \overline{1, k}.$$

Поэтому

$$\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N).$$

При этом равенство показывает на невыгодность вступления игроков в коалиции, и игра называется несущественной. Игра называется существенной, если

$$\sum_{i \in N} v(i) < v(N).$$

В существенной игре основным вопросом является оптимальное распределение выигрыша. Пусть x_i – сумма, которую получает i-й игрок при распределении выигрыша.

Определение 2.1. *Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется дележом, если*

1) $x_i \geq v(i)$, $i \in N$;

2) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти делёж, который можно считать решением. Для несущественных игр очевидно, что $x_i^* = v(i)$, $i = \overline{1, n}$. В существенных играх для нахождения решения используется понятие доминирования дележей.

Определение 2.2. *Делёж x доминирует дележ y по коалиции I $\quad(x \succ_I y)$, если*

1) $x_i > y_i$, $i \in I$;

2) $x(I) \leq v(I)$.

Здесь $x(I) = \sum\limits_{i \in I} x_i$. Второе условие определяет реализуемость дележа. При доминировании $I \neq \{i\}$, иначе $y_i < x_i \leq v(i)$, что противоречит п.1) в определении дележа. Также при доминировании $I \neq N$, иначе в этом случае $x_i > y_i$, $i \in N$, отсюда $x(N) > y(N) = v(N)$, что противоречит п.2) в определении дележа.

В качестве решения теперь можно определить дележ x, который не доминируется никаким другим дележом по какой-либо коалиции. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех недоминируемых дележей.

Теорема 2.2. *Для того чтобы $x \in \mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы $x(I) \geq v(I)$ для любого $I \subset N$ (сумма выигрышей игроков в дележе, входящих в любую коалицию, не меньше гарантированного выигрыша игроков, входящих в эту коалицию).*

Доказательство. Пусть $x(J) \geq v(J)$ для любого $J \subset N$, но $x \notin \mathcal{A}$. Тогда существуют делёж y и коалиция I такие, что $y \succ_I x$. Следовательно, $x(I) < y(I) \leq v(I)$, что противоречит условию.

Пусть теперь $x \in \mathcal{A}$, предположим, что существует $I \subset N$, $x(I) < v(I)$. Определим вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$ по формулам:

$$y_i = \begin{cases} x_i + (v(I) - x(I))/|I|, & i \in I, \\ v(i) + \left(v(N) - v(I) - \sum\limits_{i \in N} v(i)\right)/(|N| - |I|), & i \notin I. \end{cases}$$

Поскольку $v(I) > x(I)$,

$$v(N) \geq v(I) + v(N \setminus I) \geq v(I) + \sum_{i \in N \setminus I} v(i),$$

то $y_i \geq v(i)$, $i \in N$. Также

$$\sum_{i \in N} y_i = v(I) + \sum_{i \in N \setminus I} v(i) + v(N) - v(I) - \sum_{i \in N \setminus I} v(i) = v(N),$$

т.е. y – делёж. По определению теперь получаем $y \succ_I x$, что противоречит предположению $x \in \mathcal{A}$. □

В результате поиск оптимального дележа сводится к задаче решения системы линейных неравенств и равенства.

Пример 2.2. Пусть $n = 3$, 1-е предприятие выпускает товары A_1 или A_2 в количестве 900 ед., 2-е предприятие выпускает товары A_1 или A_2 в количестве 700 ед., 3-е предприятие выпускает товары B_1 или B_2 в количестве 1000 ед. Выпуск товаров A_1 и B_1 не приносит прибыли, прибыль получается при выпуске A_2 и B_2 комплектами по ед. товара, существует спрос на 1000 комплектов. Определим v для игры по формулам:

$$v(I) = \begin{cases} 0 & I = \{1\}, \{2\}, \{1,2\}; \\ 1800 & I = \{1,3\}; \\ 1400 & I = \{2,3\}; \\ 2000 & I = N = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Таким образом, получается кооперативная игра, можно определить недоминируемый делёж. Согласно утверждению теоремы 2.2, тогда $x(I) \geq v(I)$, $I \subset N$, кроме того, по определению дележа $x(N) = v(N)$. Получаем систему

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_i \geq 0 & i = \overline{1,3}, \\ x_1 + x_2 \geq 0 & \text{(можно исключить)} \\ x_1 + x_3 \geq 1800 & \\ x_2 + x_3 \geq 1400 & \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2000. & \end{cases}$$

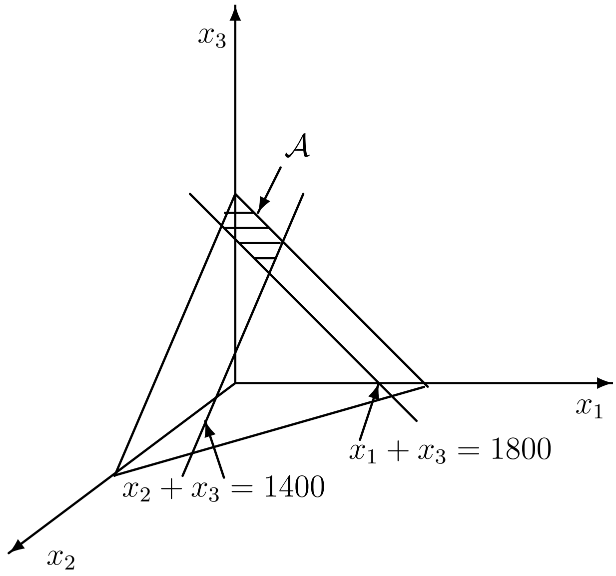

Рис. 2.2: Решение кооперативной игры.

Решение находится на симплексе $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$, $x_1 + x_2 + x_3 = 2000$, при дополнительных условиях, т.е. $\mathcal{A}$ является параллелограммом, как показано на рис. 2.2. Например, решением будет угловая точка, $x^* = (600, 200, 1200) \in \mathcal{A}$. Можно легко определить другие недоминируемые дележи.

Множество $\mathcal{A}$ существует не для всех игр. Тогда можно применить другие определения понятия решения, дополнительные условия, задание векторного критерия полезности, либо определение приближенного решения. Эти методы обычно используются при решении задач определения подходящего дележа.

Литература

1. Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А. и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. - М.: Наука, 1974.

2. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. - М.: Наука, 1981.

3. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. - Казань: Казанск. ун-т, 2013.

4. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М: Мир, 1985.

5. Оуэн Г. Теория игр. - М.: Наука, 1971.

6. Партхасарати Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. - М.: Мир, 1974.

7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. - М: Высшая школа, 1998.

8. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. - М.: Кн. дом «Университет», 2002.