

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт механики и математики
Кафедра теоретической механики

А.А. Саченков

Цикл лекций по теории пластин и оболочек

Учебное пособие

КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2018

УДК 531/534
ББК 22.251
Ц46

*Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
протокол № 8 от 28 июня 2018 года*

Составитель:
канд. физ.-мат. наук **А.А. Саченков**

Цикл лекций по теории пластин и оболочек: учеб. пособие / А.А. Саченков. –
Казань: Казан. ун-т, 2018. – 136 с.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела и занимающихся исследованиями прочности и устойчивости тонких пластин и оболочек.

Может быть использовано преподавателями университетов и технических вузов для подготовки к лекциям и практическим занятиям.

УДК 531/534
ББК 22.251

© Саченков А.А. 2018

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела и занимающихся исследованиями прочности и устойчивости тонких пластин и оболочек.

Может быть использовано преподавателями университетов и технических вузов для подготовки к лекциям и практическим занятиям.

ВВЕДЕНИЕ

Цикл лекций посвящен изложению теории тонких пластин и некоторых вопросов теории оболочек. Курс читается в Казанском федеральном университете студентам, специализирующимся в области механики деформируемого твердого тела. В основу излагаемой теории положена наиболее простая модель, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява, которые являются обобщением гипотезы плоских сечений теории балок в сопротивлении материалов.

Курс построен по принципу «от простого к сложному». Сначала рассматривается слабый изгиб пластин без деформации срединного слоя. Подробно разобрана процедура получения уравнения Софи Жермен, которое описывает поведение пластины в этом случае.

При прогибах порядка толщины пластины пренебрегать деформациями срединного слоя нельзя. Уравнение Софи Жермен справедливо и в этом случае, но лишь для описания изгибного состояния пластины. Оно дополняется уравнением для определения мембранных усилий.

Учет нелинейных слагаемых в геометрических соотношениях позволяет получить уравнения Кармана, которые пригодны для описания поведения пластины при нелинейной зависимости между прогибом и нагрузкой. Уравнение Софи Жермен включается в уравнения Кармана как частный случай. Сами уравнения Кармана служат основой для получения уравнений устойчивости пластин (линеаризованных уравнений).

Введением параметра кривизны уравнения Кармана адаптируются к задаче изгиба цилиндрической панели и оболочки.

Достаточно подробно разбирается постановка задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки. Приведены различные варианты решения этой задачи в случае осевого сжатия, внешнего давления и кручения. Даны сравнения результатов и их анализ. Определяется понятие пологости и приводятся уравнения изгиба пологой цилиндрической оболочки. Рассматривается влияние начальных неправильностей и подкреплений на несущие свойства оболочки.

На заключительном этапе цикла приведены уравнения изгиба для оболочки произвольной геометрии. Кроме того,

рассматривается постановка задачи изгиба при динамическом нагружении и задачи устойчивости за пределами упругости.

Представлены решения некоторых частных задач и разобраны отдельные методы их решений.

Все преобразования и выкладки в основном даны в декартовой системе координат.

Лекция 1.

Некоторые сведения из теории упругости.

Основные обозначения:

$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ - компоненты тензора напряжений;

$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ - компоненты тензора деформаций;

u, v, w - компоненты вектора перемещений;

X_n, Y_n, Z_n - компоненты поверхностной нагрузки $\overline{F_n}$ на участке поверхности тела с нормалью \overline{n} .

Уравнения равновесия элемента сплошной среды:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0.$$

Здесь $\rho X, \rho Y, \rho Z$ - компоненты массовых сил, ρ - плотность массовых сил.

Статические граничные условия (условия Коши на поверхности тела):

$$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz,$$

$$Y_n = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz, \quad (1.2)$$

$$Z_n = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz.$$

Физические соотношения (обобщенный закон Гука).

$$X_x = \lambda \Delta + 2\mu e_{xx},$$

$$Y_y = \lambda \Delta + 2\mu e_{yy},$$

$$Z_z = \lambda \Delta + 2\mu e_{zz}, \quad (1.3)$$

$$X_y = \mu e_{xy},$$

$$Y_z = \mu e_{yz},$$

$$Z_x = \mu e_{zx}.$$

Здесь: $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ - первый инвариант тензора деформаций;

λ, μ - коэффициенты Ляме;

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ - коэффициент упругости;

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига;

ν - коэффициент Пуассона;

E - модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Соотношения (1.3) справедливы для многих конструкционных материалов при условии малости деформаций, то есть в рамках упругого поведения материала.

Линейные геометрические соотношения Коши (связь деформаций и перемещений):

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Компоненты вектора перемещений u, v, w непрерывны и дифференцируемы вместе со своими производными до четвертого порядка включительно.

Соотношения (1.4) получены в предположении малости перемещений по сравнению с характерными размерами тела. Это утверждение справедливо при упругом деформировании массивов, то есть тел, у которых все три характерных размера одного порядка.

Для стержней большой гибкости или тонких, абсолютно гибких пластин (мембран) условие малости перемещений может не выполняться. Например, упругий прогиб мембраны может во много раз превышать ее толщину. При исследовании напряженно-деформированного состояния таких объектов уравнения (1.4) требуют уточнения (в правой части необходимо удерживать нелинейные слагаемые).

Способы решения задач теории упругости.

Решение задачи теории упругости в перемещениях.

При решении задачи теории упругости в перемещениях в качестве неизвестных величин выступают компоненты вектора перемещений. Уравнениями для их определения служат уравнения равновесия, записанные в перемещениях (1.5). Они получаются

подстановкой в (1.1) компонент тензора напряжений, записанных с помощью закона Гука (1.3) и геометрических соотношений Коши (1.4) через перемещения u, v, w .

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Эти соотношения называются уравнениями равновесия в форме Ляме. Статические граничные условия (условия Коши на поверхности тела) также записываются через перемещения:

$$\begin{aligned}X_n &= (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) \cos nx + \mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \cos ny + \mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \cos nz = 0, \\Y_n &= \mu (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \cos nx + (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \cos ny + \mu (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \cos nz = 0, \\Z_n &= \mu (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \cos nx + \mu (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \cos ny + (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}) \cos nz = 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Решение задачи теории упругости в напряжениях.

При решении задачи теории упругости в напряжениях уравнений (1.1) недостаточно, так как их три, а в качестве неизвестных выступают шесть компонент тензора напряжений. Для корректной постановки задачи необходима еще одна тройка уравнений. Недостающие уравнения можно получить исключая из геометрических соотношений Коши (1.4) компоненты вектора перемещений. Полученные уравнения носят название уравнений неразрывности деформаций (тождества Сен-Венана).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

И еще одна тройка уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Очевидно, что из шести уравнений (1.7) и (1.8) лишь три независимы.

Механический смысл тождеств Сен-Венана в том, что они представляют собой условия сплошности материала деформируемого тела. В математическом плане они являются условиями интегрируемости соотношений Коши (1.4) при данных компонентах деформации. Таким образом, компоненты деформации в (1.4) не могут быть произвольными. Они связаны тождествами Сен-Венана.

Если в уравнениях (1.7) или (1.8) компоненты деформации записать через напряжения с помощью закона Гука (1.3) и с привлечением уравнений равновесия (1.1), то в результате могут быть получены две тройки уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений. Эти уравнения называются уравнениями Бельтрами-Митчела (1.9), (1.10).

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right), \\
\nabla^2 Y_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right), \\
\nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}, \\
\nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
\nabla^2 Z_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь $\theta = X_x + Y_y + Z_z$ - первый инвариант тензора напряжений. Как и в случае с тождествами Сен-Венана из шести уравнений Бельтрами-

Митчела независимы лишь три. Уравнения (1.1) вкуче с любой из этих систем образуют замкнутую систему уравнений относительно компонент тензора напряжений. Граничные условия записываются в виде (1.2).

Некоторые свойства уравнений теории упругости.

При решении задач теории упругости массовые силы, как правило, известны и являются функциями координат: $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$. Они могут быть удалены из уравнений выбором частного решения. В теории пластин и оболочек соотношение между действующей нагрузкой и массовыми силами таково, что последними можно пренебречь. Уравнения Бельтрами-Митчела в этом случае переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0, \\ \nabla^2 Y_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0, \\ \nabla^2 Z_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \nabla^2 Z_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Складывая уравнения системы (1.11), получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (X_x + Y_y + Z_z) + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) &= 0, \text{ или} \\ \left(1 + \frac{1}{1+\nu} \right) \nabla^2 \theta &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{1.13}$$

Таким образом, первый инвариант тензора напряжений θ является гармонической функцией.

Сложим первые три уравнения системы (1.3). Получим:

$$\begin{aligned} X_x + Y_y + Z_z &= 3\lambda\Delta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \text{ или} \\ \theta &= 3K\Delta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь $K = 3\lambda + 2\mu$ - модуль всестороннего сжатия.

Из соотношений (1.13) и (1.14) следует, что

$$\nabla^2\Delta = \frac{1}{3K}\nabla^2\theta = 0. \quad (1.15)$$

Первый инвариант тензора деформаций Δ также является гармонической функцией.

Рассмотрим первое уравнение равновесия в форме Ляме:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = 0.$$

Воздействуя на него оператором Лапласа, получим:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Delta) + \mu\nabla^2\nabla^2 u = 0.$$

Вследствие (1.15) первое слагаемое равно нулю, следовательно

$$\nabla^2\nabla^2 u = 0. \quad (1.16)$$

По аналогии:

$$\nabla^2\nabla^2 v = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla^2\nabla^2 w = 0. \quad (1.18)$$

Все компоненты вектора перемещений являются бигармоническими функциями.

Вновь обратимся к соотношениям закона Гука (1.3). Действуя на обе части первого уравнения двойным оператором Лапласа, получим:

$$\nabla^2\nabla^2 X_x = \lambda\nabla^2\nabla^2\Delta + 2\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\nabla^2 u).$$

Правая часть уравнения равна нулю в силу (1.15) и (1.16), следовательно:

$$\nabla^2\nabla^2 X_x = 0.$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для остальных компонент тензора напряжений. Это означает, что все они являются бигармоническими функциями. Таким образом, все основные математические проблемы теории упругости связаны с решением гармонических и бигармонических уравнений.

Решение задачи теории упругости предполагает удовлетворение уравнений равновесия, выполнение граничных условий и условий неразрывности деформаций. В плане определения компонент тензоров напряжений и деформаций решение задачи теории

упругости единственное. Компоненты вектора перемещения определяются с точностью до жесткого смещения тела.

Граничные условия на поверхности тела могут быть заданы одним из трех следующих способов:

1. На всей поверхности тела заданы внешние поверхностные нагрузки.

$$\begin{aligned} X_n &= f_1(\sigma), \\ Y_n &= f_2(\sigma), \\ Z_n &= f_3(\sigma). \end{aligned} \tag{1.19}$$

f_i - известные функции.

2. На всей поверхности тела заданы упругие перемещения.

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(\sigma), \\ v &= \varphi_2(\sigma), \\ w &= \varphi_3(\sigma). \end{aligned} \tag{1.20}$$

φ_i - известные функции.

3. На части поверхности σ_1 заданы поверхностные нагрузки (1.19), а на другой части поверхности σ_2 заданы упругие перемещения (1.20).

Одним из эффективных методов решения задач теории упругости является полуобратный метод Сен-Венана, позволяющий уменьшить размерность решаемой задачи. В частности, при решении задачи в перемещениях, неизвестными являются функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. В рамках метода определяется лишь одна из них, например w , в то время как u и v задаются из каких-либо соображений. Тем самым трехмерная задача сводится к одномерной. В излагаемой теории пластин основой для реализации этого метода являются гипотезы Кирхгофа-Лява.

Лекция 2.

Классификация пластин.

Пластиной называется призматическое тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими характерными размерами. Это расстояние называется толщиной h . Плоскость, равноудаленная от поверхностей пластины, называется срединной плоскостью. К

срединной плоскости привязана одна из координатных плоскостей декартовой координатной системы (рис.2.1).

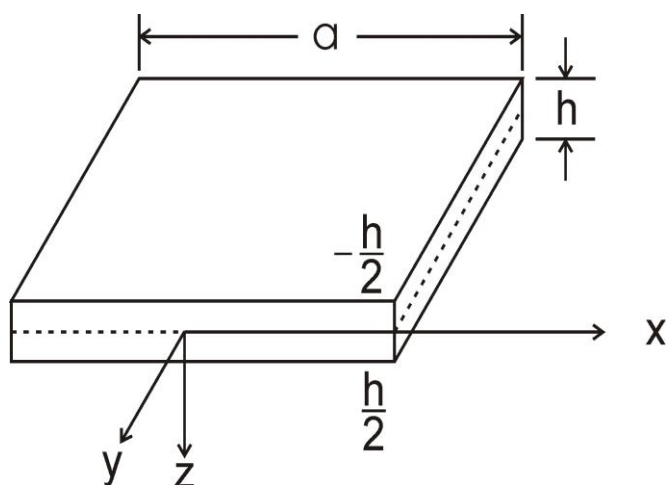


Рис 2.1

Пластина называется тонкой, если $\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 1$. Обычно считается, что $\left(\frac{h}{a}\right)^2 \sim 0,1; 0,001; 0,0001$. Тонкие пластины в рамках их упругого деформирования подразделяются на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие. Если упругий прогиб w таков, что $\frac{w}{h} \leq 0,25$, то пластина считается жесткой. В этом случае деформации срединного слоя пластины пренебрежимо малы, и в расчетах их можно не учитывать. Несущие свойства пластины обеспечиваются лишь ее изгибной жесткостью.

При $0,25 \leq \frac{w}{h} \leq 1$ пластина гибкая. Деформации срединного слоя пластины сравнимы с изгибными деформациями и пренебрегать ими нельзя.

Если пластина деформируется упруго при прогибах значительно превышающих толщину ($\frac{w}{h} \gg 1$), то такая пластина абсолютно гибкая (мембрана). Ее несущие свойства обусловлены наличием напряжений в срединном слое.

Деление пластин на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие в значительной степени условно. Поведение пластины под нагрузкой определяется не только ее геометрическими параметрами. Величина

упругих деформаций существенно зависит от механических свойств материала пластины и условий ее закрепления.

Задача изгиба пластины – трехмерная задача теории упругости. Для ее упрощения примем следующие допущения:

1. Плоское сечение, перпендикулярное срединной поверхности пластины до деформации, остается таковым и после деформации.
2. Нормальное напряжение Z_z много меньше напряжений X_x, Y_y, X_y и в расчетах им пренебрегают.
3. В процессе деформирования тонкая пластина не испытывает обжатия, то есть ее толщина не изменяется.

Эти допущения носят название гипотез Кирхгофа-Лява. Они являются обобщением гипотезы плоских сечений, принятой в сопротивлении материалов.

Слабый изгиб пластины без растяжения, сжатия и сдвига срединной поверхности.

Применение гипотез Кирхгофа-Лява.

Рассматривается изгиб тонкой пластины при прогибах, меньших четверти толщины ($w \leq 0,25h$).

Как отмечалось выше, такие пластины называются жесткими. Иногда их называют пластинами средней толщины или, по терминологии Б.Г. Галеркина «тонкими плитами». Получение уравнения изгиба основано на гипотезах Кирхгофа-Лява.

Первая гипотеза, гипотеза плоских сечений, предполагает отсутствие поперечного сдвига, то есть взаимного смещения слоев, параллельных срединному. Это накладывает ограничения на компоненты тензора деформации:

$$e_{xz} = 0, \quad (2.1)$$

$$e_{yz} = 0. \quad (2.2)$$

В соответствии с геометрическими соотношениями Коши (1.4) уравнения (2.1) и (2.2) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

После интегрирования получаем:

$$u = -\int \frac{\partial w}{\partial x} dz + \varphi(x, y),$$

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + \psi(x, y).$$

В силу третьей гипотезы прогиб не зависит от поперечной координаты z , то есть $w = w(x, y)$, поэтому

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(x, y), \quad (2.5)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + \psi(x, y). \quad (2.6)$$

В точках срединной поверхности (при $z=0$): $u = \varphi(x, y)$ и $v = \psi(x, y)$. Так как срединная поверхность не испытывает деформации растяжения, сжатия и сдвига, то и перемещение ее точек отсутствует. Это означает, что, при $z=0$: $u = v = 0$ и, следовательно, $\varphi = \psi = 0$. Окончательно, тангенциальные перемещения принимают вид:

$$u = -zw'_x, \quad (2.7)$$

$$v = -zw'_y. \quad (2.8)$$

Определение напряжений.

Воспользуемся второй гипотезой Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой напряжение $Z_z = 0$. На основании физических соотношений (1.3) можно записать:

$$Z_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ или}$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Из последнего соотношения получаем:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.9)$$

Здесь возникает противоречие. Согласно третьей гипотезе прогиб не зависит от поперечной координаты, то есть $w = w(x, y)$, следовательно, производная $\frac{\partial w}{\partial z}$ должна быть равна нулю. Это не

согласуется с формулой (2.9). Данное несоответствие является одним из противоречий гипотез Кирхгофа-Лява. Оно не приводит к серьезным погрешностям в решении и с ним приходится мириться.

Таким образом, считаем, что $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$. Выразив $\frac{\partial w}{\partial z}$ через тангенциальные перемещения u и v , находим напряжение X_x из физических соотношений (1.3).

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Подставляя $\frac{\partial w}{\partial z}$ из (2.9), после несложных преобразований получаем:

$$X_x = \frac{E}{1+\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

По аналогии

$$Y_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.11)$$

$$X_y = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

Подставляя в соотношения (2.10) - (2.12) касательные перемещения u, v из (2.7), (2.8), получаем окончательные выражения для напряжений X_x, Y_y, X_y :

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w''_{xx} + \nu w''_{yy}), \\ Y_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w''_{yy} + \nu w''_{xx}), \\ X_y &= -\frac{Ez}{1+\nu} w''_{xy}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Вновь вернемся к первой гипотезе, согласно которой $e_{xz} = e_{yz} = 0$. В соответствии с законом Гука

$$X_z = \mu e_{xz} = 0, \quad (2.14)$$

$$Y_z = \mu e_{yz} = 0. \quad (2.15)$$

По второй гипотезе напряжение Z_z также отсутствует. Таким образом, все компоненты тензора напряжений, ориентированные перпендикулярно срединному слою, равны нулю. Это снова приводит к противоречию. Пластина загружена поперечной нагрузкой, но ее действие не вызывает соответствующих

внутренних усилий. Нарушается условие равновесия пластины. Отсюда делаем заключение, что, как минимум, напряжения X_z, Y_z не равны нулю. Найдем их из первых двух уравнений равновесия (1.1) в отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляя сюда напряжения X_x, Y_y, X_y из (2.13), получаем:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \text{ или, после интегрирования}$$

$$X_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \varphi(x, y),$$

$$Y_z = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \psi(x, y). \quad (2.16)$$

Неизвестные функции φ и ψ находятся из статических граничных условий (1.2).

Реализация статических граничных условий

Предполагаем, что распределенная поперечная нагрузка действует на обеих поверхностях пластины (рис.2.2). На верхней плоскости, при $z = -\frac{h}{2}$:

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = -1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_2(x, y)$$

На нижней поверхности пластины, при $z = \frac{h}{2}$:

$$\cos nx = \cos ny = 0; \cos nz = 1; X_n = 0; Y_n = 0; Z_n = q_1(x, y)$$

Подставляя эти данные в уравнения (1.2), получаем при $z = -\frac{h}{2}$:

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = -q_2(x, y) \quad (2.17)$$

При $z = \frac{h}{2}$:

$$X_z = Y_z = 0; Z_z = q_1(x, y) \quad (2.18)$$

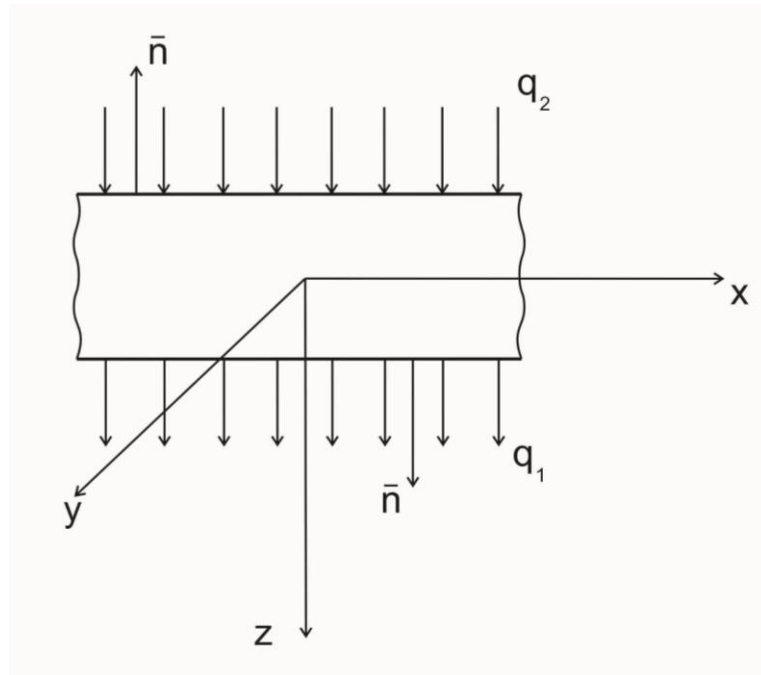


Рис 2.2

С учетом (2.17) и (2.18) неизвестные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в (2.16) принимают вид:

$$\varphi(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

$$\psi(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Это позволяет записать окончательные выражения компонент тензора напряжений X_z и Y_z :

$$X_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad (2.19)$$

$$Y_z = \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (2.20)$$

Соотношения (2.13), (2.19) и (2.20) позволяют оценить распределение напряжений по толщине пластины. Напряжения X_x, Y_y, X_y распределяются по линейному закону, обращаясь в ноль на уровне срединного слоя и достигая экстремальных значений на поверхностях пластины, то есть при $z = \pm \frac{h}{2}$. Напряжения X_z и Y_z распределяются по квадратичному закону. Максимальных значений

они достигают на уровне срединного слоя, а в ноль обращаются при $z = \pm \frac{h}{2}$.

Лекция 3.

Внутренние усилия и моменты.

Введем в рассмотрение интегральные характеристики:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz, \quad T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz, \quad S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz. \quad (3.1)$$

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz, \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz. \quad (3.2)$$

T_1, T_2, S - мембранные усилия,

N_1, N_2 - поперечные силы.

Мембранные усилия представляют из себя растягивающие, сжимающие и сдвигающие усилия, приведенные к срединному слою пластины. Как видно из (3.1), (3.2), введенные силовые факторы имеют размерность $\left[\frac{H}{M} \right]$, то есть характеризуют интенсивность внутренних усилий.

Еще одна группа интегральных характеристик:

$$G_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz, \quad G_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz, \quad H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz. \quad (3.3)$$

G_1, G_2 - внутренние изгибающие моменты.

H - крутящий момент.

В соответствии со своей размерностью $\left[\frac{H}{M} \right]$, или $\left[\frac{H \times M}{M} \right]$, эти величины характеризуют интенсивность внутренних моментов.

Представленные таким образом интегральные характеристики по-другому называются обобщенными усилиями и моментами. Все они приведены к срединному слою пластины и их действие показано на рис. 3.1.

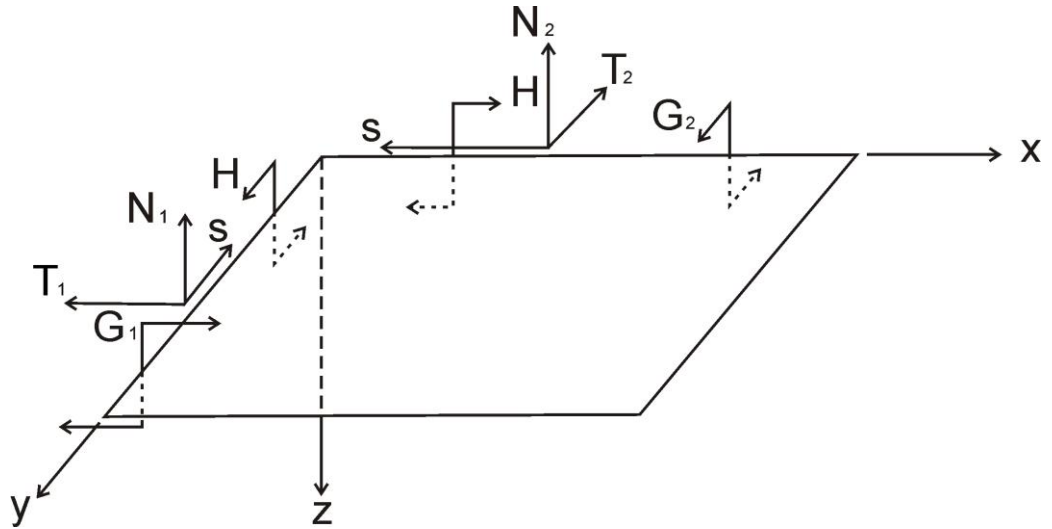


Рис.3.1

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 w_{xx} &= \chi_1, \\
 w_{yy} &= \chi_2, \\
 w_{xy} &= \tau.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

χ_1, χ_2 - параметры, характеризующие изменение кривизны срединного слоя вдоль координатных линий x и y .

τ - параметр кручения срединного слоя.

С учетом этих обозначений и соотношений (2.13), (2.19) и (2.20) запишем выражения обобщенных усилий и моментов и вычислим их значения.

Мембранные усилия:

$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0,$$

$$T_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_2 + \nu\chi_1) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0,$$

$$S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = -\frac{E}{1+\nu} \tau \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0.$$

Мембранные усилия T_1, T_2, S равны нулю. Это соответствует исходному предположению об отсутствии в срединной плоскости пластины деформаций растяжения, сжатия и сдвига.

Обобщенные моменты:

$$G_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_1 + \nu\chi_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz =$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu\chi_2),$$

$$G_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu\chi_1),$$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau = -\frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \tau.$$

Введем обозначение:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.5)$$

D - изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины, характеризующая способность пластины сопротивляться изгибу.

Как известно из курса сопротивления материалов, для балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины жесткость на изгиб определяется величиной $\frac{Eh^3}{12}$, сравнимой с (3.5).

Пластину можно рассматривать как совокупность множества балок единичной ширины, соединенных друг с другом боковыми поверхностями. Взаимодействие балок учитывается множителем $(1-\nu^2)$ в выражении изгибной жесткости пластины (3.5).

С учетом (3.5) обобщенные моменты записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_1 &= -D(\chi_1 + \nu\chi_2), \\ G_2 &= -D(\chi_2 + \nu\chi_1), \\ H &= -D(1-\nu)\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поперечные силы:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z^2 - \frac{h^2}{4})}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \text{ или}$$

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

$$N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (3.7)$$

Уравнение равновесия пластины.

Первые два уравнения равновесия (1.1) были использованы ранее для выражения сдвигающих напряжений X_z, Y_z через прогиб (2.19), (2.20). Рассмотрим третье уравнение равновесия в отсутствии массовых сил.

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

С учетом закона парности касательных напряжений оно может быть записано в виде:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

Проинтегрируем его по толщине пластины:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dz = 0.$$

Преобразуем первое и второе слагаемые:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x},$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Y_z}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}.$$

Третье слагаемое:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z\left(\frac{h}{2}\right) - Z_z\left(-\frac{h}{2}\right) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q,$$

где q - интенсивность внешней суммарной нагрузки, действующей на верхней и нижней поверхностях пластины (рис. 2.2).

Таким образом, после интегрирования по толщине третье уравнение равновесия приобретает вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0. \quad (3.8)$$

Подставляя вместо N_1 и N_2 их значения из (3.7) получаем:

$$-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w)\right) + q = 0, \text{ или} \\ D\nabla^2\nabla^2 w = q. \quad (3.9)$$

В развернутом виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{q}, \quad (3.10)$$

где $\bar{q} = \frac{q}{D}$.

Уравнение (3.9) или (3.10) – основное разрешающее уравнение слабого изгиба тонкой пластины. Оно обладает следующими свойствами:

1. Линейность (следствие линейности геометрических соотношений);
2. Инвариантность по отношению к перестановке координат ($x \rightleftharpoons y$). Это следствие изотропии материала.

Уравнение (3.9) было получено в 1815 году француженкой Софи Жермен и носит ее имя.

После нахождения из уравнения (3.9) функции прогиба $w(x, y)$ можно определить все компоненты напряженно-деформированного состояния в произвольной точке пластины. Вместе с тем, решение этого уравнения приводит к появлению констант интегрирования, подлежащих определению. Их нахождение осуществимо с использованием краевых условий.

На контуре пластины могут быть реализованы следующие основные виды закреплений:

1. Шарнирное закрепление.

Если на участке контура s пластина закреплена шарнирно, то на этом участке отсутствуют прогиб и изгибающий момент: $w(s)=0, G_n=0$. В случае малого прогиба пластины аналогично формулируются и условия для контура, свободно лежащего на опоре.

2. Жесткое защемление.

В этом случае на соответствующем участке контура отсутствует прогиб $w(s)=0$, а внутренняя нормаль к контуру не поворачивается в плоскости, перпендикулярной к плоскости пластины, то есть $\frac{\partial w}{\partial n}=0$.

3. Свободный край.

Если некоторый участок контура пластины свободен, то граничные условия формулируются исходя из отсутствия на этом участке внешних силовых факторов.

В соответствии с уравнением изгиба пластины (3.9) граничные условия удобно формулировать таким образом, чтобы ограничения накладывались на функцию прогиба $w(x, y)$ и ее производные. Этому требованию соответствуют лишь условия жесткого защемления.

Лекция 4.

Формулировка краевых условий на контуре пластины.

Рассмотрим пластину толщиной h произвольного очертания и определенным образом закрепленную (рис.4.1).

Выделим элементарный участок контура. С некоторой точкой этого участка свяжем две координатные системы. Одна из них (x, y) - базовая, другая (x_1, y_1) построена так, что ее оси параллельны единичным векторам касательной \bar{s} и нормали \bar{n} в выбранной точке участка и, соответственно, повернуты относительно осей базовой системы на угол θ . В произвольной точке пластины построим элемент цилиндрической поверхности, параллельный выделенному участку контура. В окрестности данной точки на площадках, перпендикулярных осям базовой системы координат,

напряженное состояние определяется компонентами тензора напряжений X_x, Y_y, X_y, X_z, Y_z .

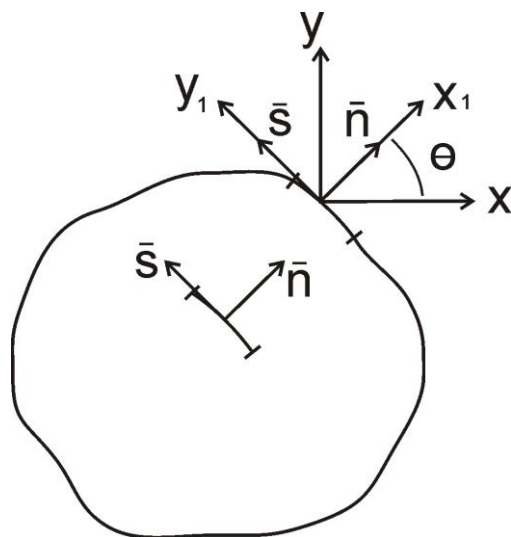


Рис 4.1

На площадке, перпендикулярной оси x_1 компоненты тензора напряжений могут быть записаны в соответствии с известными формулами для преобразования компонент тензора второго ранга:

$$\begin{aligned} X_{1x_1} &= X_x \cos^2 \theta + Y_y \sin^2 \theta + X_y \sin 2\theta, \\ X_{1y_1} &= \frac{1}{2} (X_x - Y_y) \sin 2\theta + X_y \cos 2\theta, \\ X_{1z_1} &= Y_z \sin \theta + X_z \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проинтегрируем соотношения (4.1) по толщине пластины. Первые два позволяют определить мембранные усилия:

$$\begin{aligned} T_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz \cos^2 \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \sin^2 \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \sin 2\theta = 0, \\ S_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} dz = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_y dz \right) \sin 2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz \cos 2\theta = 0. \end{aligned}$$

Мембранные усилия T_n и S_n равны нулю, так как выражаются через мембранные усилия T_1, T_2, S (3.1), равные нулю. Из третьего уравнения получаем поперечную силу на площадке, перпендикулярной оси x_1 :

$$N_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1z_1} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_z dz \sin \theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz \cos \theta .$$

С учетом (3.2) выражение для поперечной силы N_n будет иметь вид:

$$N_n = N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta . \quad (4.2)$$

Умножая первые два соотношения (4.1) на z и интегрируя по толщине пластины, получим изгибающий и крутящий моменты, действующие на выделенном элементе цилиндрической поверхности:

$$G_n = G_1 \cos^2 \theta + G_2 \sin^2 \theta + H \sin 2\theta , \quad (4.3)$$

$$H_n = \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \sin 2\theta + H \cos 2\theta . \quad (4.4)$$

Здесь $G_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1x_1} z dz$, $H_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{1y_1} z dz$, а G_1, G_2, H вычисляются в соответствии с (3.3).

G_n - изгибающий момент, действующий на элементе цилиндрической поверхности и стремящийся повернуть этот элемент вокруг вектора касательной \bar{s} . H_n - крутящий момент, поворачивающий элемент поверхности вокруг вектора нормали \bar{n} . N_n - поперечная сила, действующая в направлении оси z .

Выделенный элемент цилиндрической поверхности будем мысленно приближать к элементарному участку контура пластины. При этом моменты G_n и H_n , а также поперечная сила N_n будут стремиться совпасть с соответствующими внешними моментами и поперечной силой G_0, H_0, N_0 . Таким образом, на контуре пластины должны выполняться условия:

$$G_n = G_0, H_n = H_0, N_n = N_0 \quad (4.5)$$

Корректная постановка задачи требует задания только двух краевых условий на участке контура пластины. Из трех условий (4.5) лишь два независимы. Второе и третье условия (4.5) могут быть заменены одним:

$$N_n - \frac{\partial H_n}{\partial s} = N_0 - \frac{\partial H_0}{\partial s} . \quad (4.6)$$

К нему необходимо добавить первое условие (4.5)

$$G_n = G_0. \quad (4.7)$$

Краевые условия (4.6), (4.7) называются статическими краевыми условиями Кирхгофа на контуре пластины.

Пример реализации условий Кирхгофа.

Рассмотрим прямоугольную пластину (рис. 4.2), на контуре которой реализовано три вида граничных условий.

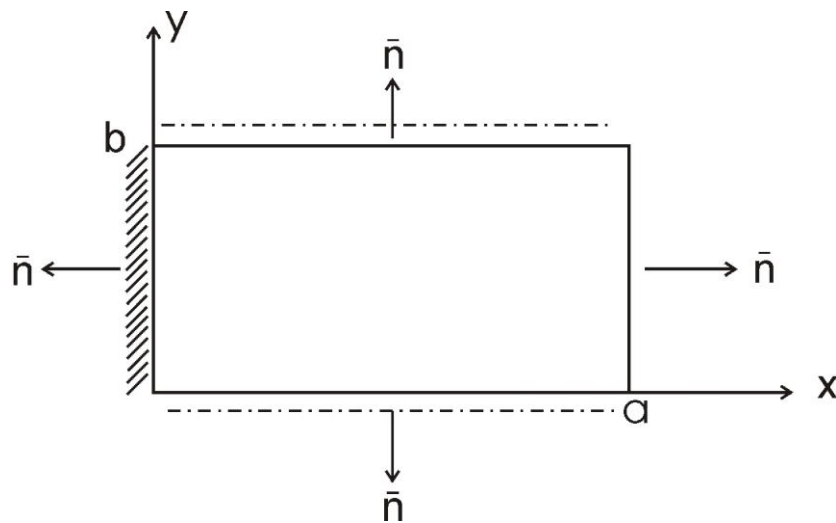


Рис 4.2

На левой кромке пластина жестко закреплена.

$$x = 0: w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4.8)$$

Вектор внешней нормали \bar{n} параллелен оси абсцисс, поэтому условие $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ записывается как $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$.

На кромках, параллельных оси абсцисс пластина закреплена шарнирно.

$$y = 0, y = b: w = 0, G_n = 0.$$

Так как для данных участков контура угол между осью абсцисс и вектором внешней нормали \bar{n} (угол θ) равен $\pm \frac{\pi}{2}$, то, как следует из формулы (4.3),

$$G_n = G_2 = -D(w''_{yy} + \nu w''_{xx}).$$

Отсутствие изгибающего момента G_n можно записать в виде $w''_{yy} + \nu w''_{xx} = 0$, а, поскольку кромки $y = 0, b$ остаются прямолинейными, то из условия $w = 0$ следует, что и $w''_{xx} = 0$. Таким образом, условия шарнирного закрепления окончательно записываются в виде:

$$y = 0, b: w = 0, w''_{yy} = 0 \quad (4.9)$$

Если шарнирное закрепление реализовано на кромке, параллельной оси y , то условие $w''_{yy} = 0$ необходимо заменить условием $w''_{xx} = 0$.

Правая кромка пластины свободна.

$$x = a: G_n = 0, N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0.$$

На этом участке контура вектор касательной \bar{s} параллелен оси ординат, поэтому $\frac{\partial H_n}{\partial s} = \frac{\partial H_n}{\partial y}$.

Так как изгибающий момент $G_n = 0$, то, в соответствии с (4.9), $w_{xx} = 0$. Имея в виду, что угол $\theta = 0$, с учетом (4.2) и (4.4) условие $N_n - \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0$ можно переписать в виде

$$N_1 - \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

После подстановки вместо N_1 и H их значений из (3.7) и (3.6) данное выражение легко преобразуется к виду:

$$D(w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy}) = 0, \text{ или} \\ w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy} = 0.$$

Окончательный вид граничных условий на свободном крае пластины следующий:

$$x = a: w''_{xx} = 0, w'''_{xxx} + \nu w'''_{xyy} = 0 \quad (4.10)$$

Если свободная кромка пластины параллельна оси абсцисс, то в соотношениях (4.10) координаты x и y меняются местами.

Пример 1. Изгиб прямоугольной пластины поперечной нагрузкой.

Шарнирно закрепленная по контуру, прямоугольная пластина нагружена поперечной нагрузкой, интенсивности q , меняющейся по синусоидальному закону (рис.4.3):

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.11)$$

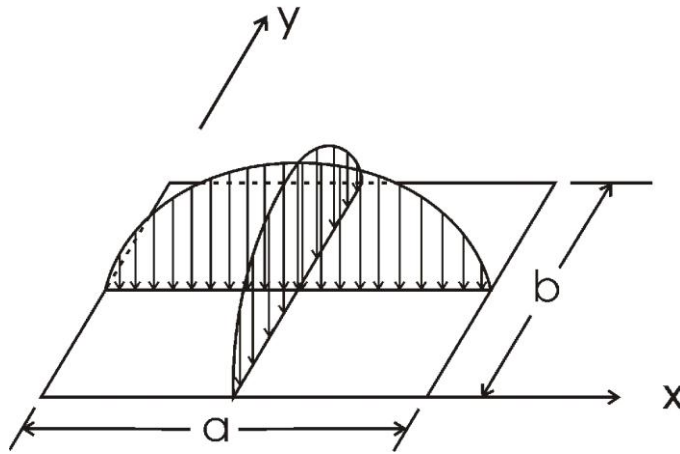


Рис 4.3

В центре пластины, при $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ реализуется максимальное давление. В этой точке интенсивность $q = q_0$. Уравнение Софи Жермен записывается в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.12)$$

Так как пластина шарнирно закреплена по контуру, то граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x=0, a: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ y=0, b: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение уравнения (4.12) будем искать в форме правой части, то есть

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.14)$$

Функция прогиба, записанная в виде (4.14) соответствует характеру деформации пластины и граничным условиям (4.13). Амплитуда прогиба в центре пластины w_0 подлежит определению. После подстановки функции прогиба (4.14) в уравнение (4.12) и сокращения на тригонометрические множители, получаем:

$$w_0 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 = \frac{q_0}{D}.$$

Амплитуда прогиба

$$w_0 = \frac{q_0 a^4 b^4}{D \pi^4 (a^2 + b^2)^2}. \quad (4.15)$$

С учетом (4.15) решение (4.14) принимает вид:

$$w = \frac{q_0 a^4 b^4}{D \pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.16)$$

Если интенсивность распределенной нагрузки задана в виде:

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4.17)$$

то получаем следующее выражение функции прогиба:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4.18)$$

Имея функцию прогиба можно определить все компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины.

Пример 2.

Поперечная нагрузка, действующая на пластину, равномерна вдоль одной координаты, а вдоль другой изменяется по синусоидальному закону. Интенсивность записывается в виде:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{b}. \quad (4.19)$$

Уравнение Софи Жермен:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.20)$$

Граничные условия на кромках пластины $x = 0, a$ на данном этапе решения задачи не уточняются. На кромках $y = 0, b$ пластина закреплена шарнирно:

$$y = 0, b: w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Как и в предыдущем примере, решение ищем в форме правой части уравнения

$$w = w_0(x) \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.21)$$

После подстановки (4.21) в (4.20) и сокращения на тригонометрический множитель, получаем обычное линейное, неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $w_0(x)$ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_0 = \frac{q_0}{D}. \quad (4.22)$$

Решение уравнения (4.22) записывается в виде:

$$w_0(x) = w_{0,1}(x) + w_{0,2}(x).$$

Здесь $w_{0,1}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_{0,1}}{dx^4} - \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{d^2 w_{0,1}}{dx^2} + \frac{\pi^4}{b^4} w_{0,1} = 0 \quad (4.23)$$

$w_{0,2}(x)$ - частное решение уравнения (4.22). Очевидно, что $w_{0,2}$ - постоянная величина, легко определяемая подбором:

$$w_{0,2} = \frac{q_0 b^4}{D \pi^4} \quad (4.24)$$

Легко убедиться, что подстановка (4.24) в (4.22) превращает последнее в тождество. Для нахождения решения уравнения (4.23) записываем соответствующее ему характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - \frac{2\pi^2}{b^2} \lambda^2 + \frac{\pi^4}{b^4} = 0.$$

Данное биквадратное уравнение имеет две пары одинаковых корней:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi}{b}, \lambda_{3,4} = -\frac{\pi}{b}.$$

Соответственно, $w_{0,1}(x)$ имеет вид:

$$w_{0,1}(x) = C_1 sh \frac{\pi}{b} x + C_2 x sh \frac{\pi}{b} x + C_3 ch \frac{\pi}{b} x + C_4 x ch \frac{\pi}{b} x \quad (4.25)$$

После нахождения $w_0(x)$ можем записать окончательное выражение функции прогиба:

$$w = (C_1 sh \frac{\pi}{b} x + C_2 x sh \frac{\pi}{b} x + C_3 ch \frac{\pi}{b} x + C_4 x ch \frac{\pi}{b} x + \frac{q_0 b^4}{D \pi^4}) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.26)$$

Четыре уравнения для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 могут быть записаны, если сформулировать краевые условия на краях пластины $x = 0, x = a$.

Лекция 5.

Слабый изгиб пластины с учетом растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое.

Растягивающие, сжимающие и сдвигающие усилия в срединном слое изгибаемой пластины следует учитывать, если прогиб становится больше четверти ее толщины ($\frac{w}{h} \geq 0,25$). Мембранные напряжения при этом соизмеримы с изгибными. Кроме того, значительные мембранные усилия могут возникать в результате приложения внешней нагрузки в плоскости срединного слоя.

Процедура получения основных разрешающих уравнений полностью соответствует той, что была реализована в случае изгиба пластины без деформаций срединного слоя. В основу принятой модели положены гипотезы Кирхгофа-Лява. Первая гипотеза (отсутствие поперечного сдвига) позволяет выразить тангенциальные перемещения u, v через прогиб w в виде (2.5), (2.6). Однако, в данном случае для определения функций φ и ψ необходимо воспользоваться условиями, наложенными на перемещения точек срединного слоя.

$$z = 0: u = u_0(x, y); v = v_0(x, y). \quad (5.1)$$

Здесь u_0, v_0 - перемещения точек срединного слоя. С учетом условий (5.1) неизвестные функции в (2.5) и (2.6) определяются:

$$\varphi = u_0(x, y), \quad \psi = v_0(x, y).$$

При этом можно записать окончательные выражения для тангенциальных перемещений:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z w'_x, \\ v &= v_0 - z w'_y. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В соответствии с геометрическими соотношениями Коши (1.4) деформации записываются в виде:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_1 - z \chi_1, \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_2 - z \chi_2, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \omega - 2z \tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ - деформации растяжения, сжатия и сдвига в точках срединного слоя пластины, причем

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \\ \omega &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

На основании физических соотношений (1.3) и с учетом формул (5.3) определяем напряжения. При этом используется вторая гипотеза Кирхгофа-Лява, в соответствии с которой напряжение Z_z равно нулю.

$$\begin{aligned}X_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_1 + \nu\chi_2), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(\chi_2 + \nu\chi_1), \\ X_y &= \frac{E}{2(1+\nu)}\omega - \frac{Ez}{1+\nu}\tau.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Подставляя напряжения в формулы (3.1) и (3.3), получим выражения для мембранных усилий, изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned}T_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ T_2 &= K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ S &= \frac{K(1-\nu)}{2}\omega.\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} - \text{жесткость пластины на растяжение – сжатие.}$$

В отличие от случая изгиба пластины без растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое мембранные усилия не равны нулю. Что касается изгибающих и крутящего моментов, то они остаются без изменений и имеют вид (3.5).

Таким образом, для исследования напряженно-деформированного состояния пластины необходимо определить касательные перемещения в срединном слое $u_0(x, y), v_0(x, y)$ и прогиб $w(x, y)$. Для этого воспользуемся уравнениями равновесия (1.1), записанными в отсутствии массовых сил. Умножая каждое уравнение на dz и интегрируя по толщине пластины, получим:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dz &= 0, \\
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) dz &= 0, \\
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) dz &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Данные соотношения представляют собой уравнения равновесия, осредненные по толщине пластины. Преобразуем первое уравнение, интегрируя каждое слагаемое по отдельности:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x dz = \frac{\partial T_1}{\partial x}, \\
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y dz = \frac{\partial S}{\partial y}.
\end{aligned}$$

При вычислении третьего слагаемого необходимо учесть граничные условия (2.17), (2.18), в соответствии с которыми на поверхностях пластины напряжения X_z и Y_z равны нулю.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dX_z = X_z \left(\frac{h}{2} \right) - X_z \left(-\frac{h}{2} \right) = 0.$$

Подобным образом вычисляются и все слагаемые второго уравнения. В третьем уравнении

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_x}{\partial x} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = \frac{\partial N_1}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_y}{\partial y} dz = \frac{\partial N_2}{\partial y}.$$

С учетом граничных условий (2.17), (2.18) преобразуем последнее слагаемое третьего уравнения:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dZ_z = Z_z\left(\frac{h}{2}\right) - Z_z\left(-\frac{h}{2}\right) = q_1 - (-q_2) = q_1 + q_2 = q .$$

В итоге осредненные уравнения равновесия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Получим уравнения моментов. Для этого первые два уравнения равновесия (1.1), записанные в отсутствии массовых сил, умножаем на zdz и интегрируем по толщине:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) z dz &= 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) z dz &= 0, \end{aligned}$$

Преобразуем первое уравнение:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_x}{\partial x} z dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_x z dz = \frac{\partial G_1}{\partial x}, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_y}{\partial y} z dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_y z dz = \frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned}$$

При вычислении третьего слагаемого первого уравнения выполняем процедуру интегрирования по частям:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial X_z}{\partial z} z dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z z dz = zX_z \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_z dz = -N_1$$

Здесь внеинтегральное слагаемое равно нулю в силу граничных условий (2.17), (2.18). Второе уравнение преобразуется аналогично. Таким образом, уравнения моментов записываются в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} - N_2 &= 0.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Подставляя в третье уравнение (5.8) поперечные силы N_1 и N_2 , выраженные из (5.9), преобразуем его к виду:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + q = 0\tag{5.10}$$

Если в данном уравнении изгибающие и крутящий моменты выразить через прогиб с помощью соотношений (3.6) и (3.4), то, после несложных преобразований, оно может быть записано в виде:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

Это уравнение Софи Жермен (3.9), полученное ранее. Оно позволяет определить прогиб пластины. Для определения мембранных усилий T_1, T_2, S необходимо воспользоваться первыми двумя уравнениями системы (5.8), которых, однако, для этой цели недостаточно. В качестве недостающего уравнения используем уравнение неразрывности деформаций, получаемое исключением из системы уравнений (5.4) тангенциальных перемещений u_0 и v_0 .

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 0.\tag{5.11}$$

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ с помощью системы (5.6) необходимо выразить через мембранные усилия:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{T_1 - \nu T_2}{K(1 - \nu^2)}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{T_2 - \nu T_1}{K(1 - \nu^2)}, \\ \omega &= \frac{2S}{K(1 - \nu)}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Подставляя данные выражения в уравнение (5.11) получаем:

$$\frac{\partial^2 (T_1 - \nu T_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (T_2 - \nu T_1)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0\tag{5.13}$$

Таким образом, система уравнений для определения мембранных усилий в срединной плоскости пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 (T_1 - \nu T_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (T_2 - \nu T_1)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

С помощью уравнения Софи Жермен (3.9) и системы уравнений (5.14) задача слабого изгиба пластины при наличии деформаций в срединном слое может быть решена полностью.

Введение функции усилий.

Введем в рассмотрение функцию F таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ T_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ S &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если подставить данные выражения мембранных усилий в уравнения (5.14), то первые два из них превращаются в тождества. Третье уравнение после несложных преобразований записывается следующим образом:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (5.16)$$

Функция F называется функцией усилий (функцией Эри). Введение ее позволяет вместо трех уравнений системы (5.14) записать одно уравнение (5.16), но более высокого порядка. Таким образом, система уравнений для решения задачи слабого изгиба пластины с учетом растяжения, сжатия и сдвига в срединном слое состоит из уравнения Софи Жермен (3.9) и уравнения (5.16). Эти два уравнения независимы. Данная задача фактически разбивается на две:

1. Задача определения прогиба w - задача исследования чистого изгиба пластины.
2. Задача исследования напряженно деформированного состояния срединной поверхности пластины без изгиба – плоская задача теории упругости.

Напряжения (5.5), с учетом выражений для мембранных усилий (5.6) и моментов (3.6), могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{T_1}{h} + \frac{12z}{h^3} G_1, \\ Y_y &= \frac{T_2}{h} + \frac{12z}{h^3} G_2, \\ X_y &= \frac{S}{h} + \frac{12z}{h^3} H. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Первые слагаемые в правых частях представляют собой мембранные напряжения. Они равномерно распределяются по толщине пластины. Вторые слагаемые – изгибные напряжения, линейно изменяющиеся по толщине. Экстремальных значений напряжения (5.17) достигают на поверхностях пластины, при $z = \pm \frac{h}{2}$.

$$\begin{aligned} X_{x\min}^{\max} &= \frac{T_1}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_1, \\ Y_{y\min}^{\max} &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6}{h^2} G_2, \\ X_{y\min}^{\max} &= \frac{S}{h} \pm \frac{6}{h^2} H. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Лекция 6.

Примеры решения плоской задачи теории упругости.

Одностороннее сжатие прямоугольной пластины.

Рассмотрим прямоугольную пластину, произвольным образом закрепленную по контуру (рис. 6.1). В срединной плоскости пластины в направлении оси абсцисс действуют сжимающие усилия интенсивности T_0 .

Запишем статические граничные условия (1.2) на загруженном участке контура $x = a$.

$$\begin{aligned} X_n &= -\frac{T_0}{h} = X_x, \\ Y_n &= 0 = Y_x, \\ Z_n &= 0 = Z_x. \end{aligned} \quad (6.1)$$

На противоположной стороне пластины (при $x = -a$) второе и третье условия (1.2) записываются аналогично, а первое условие имеет вид:

$$X_n = \frac{T_0}{h} = -X_x. \quad (6.2)$$

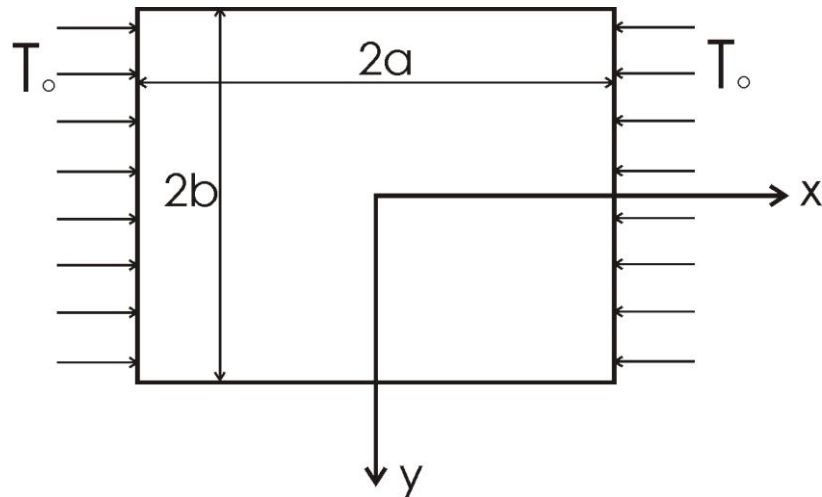


Рис 6.1

Из соотношений (5.17) следует, что, в отсутствии изгибающего момента, напряжение $X_x = \frac{T_1}{h}$. Имея в виду (6.1) и (6.2), на нагруженных сторонах пластины получаем следующие выражения для мембранных усилий:

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0, \\ S &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Кроме того, на незагруженных кромках $y = \pm b$:

$$\begin{aligned} T_2 &= 0, \\ S &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Уравнения для определения мембранных усилий (5.14) выполняются во всей области пластины, включая контур. Из первого и второго уравнений (5.14) с учетом (6.3) и (6.4) следует, что в каждой точке срединного слоя пластины

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0, \\ T_2 &= 0, \\ S &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Таким образом, вся область пластины находится в условиях одностороннего, однородного сжатия.

Равномерное двустороннее сжатие пластины.

По всему контуру в срединной плоскости пластина подвергается действию сжимающих усилий интенсивности T_0 (рис. 6.2).

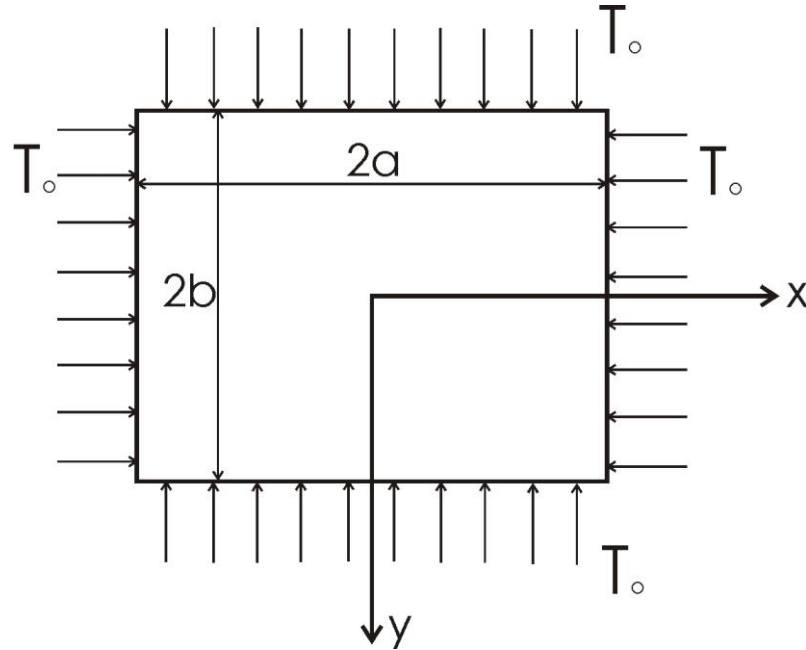


Рис 6.2

Статические граничные условия (1.2) на участках контура $x = \pm a$ записываются как и в предыдущем примере в соответствии с соотношениями (6.1), (6.2). На стороне $y = b$ они имеют вид:

$$\begin{aligned} X_n &= 0 = X_y, \\ Y_n &= -\frac{T_0}{h} = Y_y, \\ Z_n &= 0 = Z_y. \end{aligned} \tag{6.6}$$

На стороне $y = -b$ первое и третье условия (1.2) остаются без изменения, а второе записывается в виде:

$$Y_n = \frac{T_0}{h} = -Y_y \tag{6.7}$$

Таким образом, с учетом соотношений (5.17), (6.6) и (6.7) на сторонах пластины $x = \pm a$ мембранные усилия записываются в виде (6.3), а на сторонах $y = \pm b$ они имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} T_2 &= -T_0, \\ S &= 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Интегрируя уравнения равновесия (5.14) с учетом выражений для мембранных усилий на контуре (6.3) и (6.8), получаем, что в каждой точке срединного слоя пластины:

$$\begin{aligned} T_1 &= -T_0, \\ T_2 &= -T_0, \\ S &= 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Вся область пластины находится в условиях двустороннего однородного сжатия.

Сдвиг пластины.

На контуре пластины заданы сдвигающие усилия интенсивности S_0 (рис.6.3).

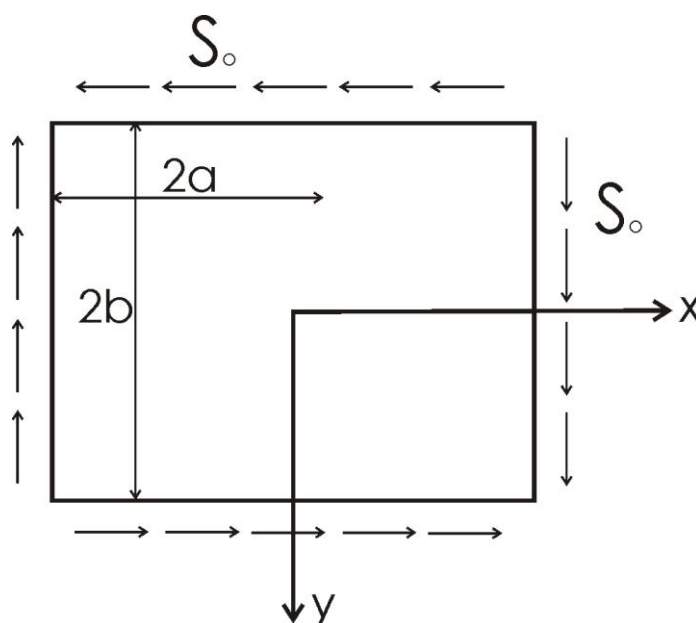


Рис 6.3

Реализуя, по аналогии с предыдущими примерами, статические граничные условия на кромках пластины, получаем выражения для мембранных усилий. На сторонах $x = \pm a$:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, \\ S &= S_0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

На сторонах $y = \pm b$:

$$\begin{aligned} T_2 &= 0, \\ S &= S_0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Уравнения (5.14) удовлетворяются, если во всей области пластины $T_1 = T_2 = 0$.

Первые два из них переписутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Они не противоречат друг другу, если $S = const$. С учетом выражений (6.10) и (6.11) получаем, что во всей области пластины $S = S_0$. Таким образом, вся пластина находится в условиях однородного сдвига.

Изгиб свободно опертой прямоугольной пластинки (решение Навье).

Пусть a и b - длины сторон пластины, свободно опертой по контуру. Пластина отнесена к системе координат так, как показано на рисунке 6.4.

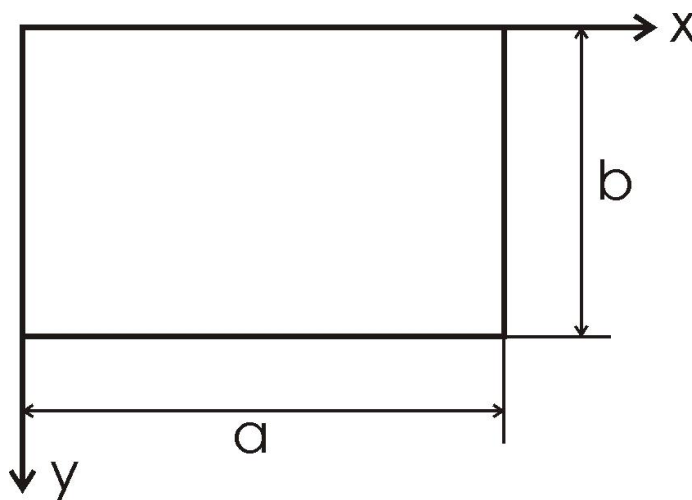


Рис 6.4

Интенсивность распределенной изгибающей нагрузки задана выражением

$$q = f(x, y)\tag{6.13}$$

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины принимает вид:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = f(x, y) \quad (6.14)$$

Так как края пластинки свободно оперты, то на контуре прогиб w и изгибающие моменты G_1 и G_2 должны равняться нулю. Таким образом:

$$\begin{aligned} x=0, a: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ y=0, b: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Представим функцию $f(x, y)$ в виде двойного тригонометрического ряда:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.16)$$

a_{mn} - коэффициенты, подлежащие определению. Для нахождения какого-либо коэффициента $a_{m_1 n_1}$ ряда, умножим обе части уравнения (6.16) на $\sin \frac{n_1 \pi y}{b} dy$ и проинтегрируем от 0 до b . С учетом следующих равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n_1 \pi y}{b} dy &= 0, \text{ при } n \neq n_1, \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n_1 \pi y}{b} dy &= \frac{b}{2}, \text{ при } n = n_1, \text{ получаем:} \\ \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n_1 \pi y}{b} dy &= \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m n_1} \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Умножаем обе части (6.17) на $\sin \frac{m_1 \pi x}{a} dx$ и интегрируем от 0 до a .

В результате получаем следующее равенство:

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_1 \pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m_1 n_1},$$

откуда

$$a_{m_1 n_1} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_1 \pi y}{b} dx dy. \quad (6.18)$$

В соответствии с соотношением (6.18) все коэффициенты ряда (6.16) определяются. Заданная нагрузка интенсивности $q = f(x, y)$ представляется в виде суперпозиции синусоидальных нагрузок.

Прогиб от каждой такой частичной синусоидальной нагрузки определяется по формуле (4.18). Полный прогиб получается суммированием соответствующих слагаемых и записывается в виде:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.19)$$

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба пластинки равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q_0 . В этом случае $f(x, y) = q_0$. Коэффициенты a_{mn} в соответствии с формулой (6.18) записываются в виде:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}. \quad (6.20)$$

В выражении (6.20) m и n - нечетные целые числа. При четных m или n коэффициенты a_{mn} обращаются в ноль. Подставляя (6.20) в (6.19) находим прогиб

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (6.21)$$

Здесь: $m, n = 1, 3, 5, \dots$ Это соответствует характеру изгиба пластины под равномерно распределенной нагрузкой. Изогнутая поверхность в этом случае симметрична относительно осей $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$. Все слагаемые с четными m и n в ряде (6.21) должны исчезнуть, так как они приводят к его несимметричности относительно указанных осей. Максимальный прогиб реализуется в центре пластинки и получается подстановкой в выражение (6.21) значений $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \quad (6.22)$$

Этот ряд быстро сходится. Достаточная точность обеспечивается уже при $m, n = 1$. Для квадратной пластинки это дает:

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0,00416 \frac{q_0 a^4}{D}, \quad (6.23)$$

или, с учетом выражения (3.5) изгибной жесткости D при $\nu = 0.3$:

$$w_{\max} = 0,0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}. \quad (6.24)$$

Погрешность этого результата около 2,5 процентов.

Изгиб круглой пластины

Решение задачи изгиба круглой пластины осуществляется в полярной системе координат. Вводя в рассмотрение полярный радиус r и полярный угол φ , в соответствии с известными соотношениями $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение изгиба пластины запишется в виде:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = q. \quad (6.24)$$

Рассмотрим простейший случай, когда нагрузка распределена по поверхности пластины симметрично относительно центра. При этом $w = w(r)$, то есть прогиб не зависит от полярного угла φ .

Уравнение (6.24) упрощается

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}. \quad (6.25)$$

Общий интеграл этого уравнения записывается в виде:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + w^* \quad (6.26)$$

Первые четыре слагаемых в правой части образуют общее решение соответствующего однородного уравнения, а w^* - частное решение уравнения (6.25). В случае равномерно распределенной нагрузки (q - постоянно)

$$w^* = \frac{qr^4}{64D}.$$

Из условий конечности прогиба и кривизны в центре пластины в решении (6.26) полагаем $C_1 = C_2 = 0$, а постоянные интегрирования C_3 и C_4 определяются из условий на контуре пластины (при $r = a$).

Для заделанного края:

$$(w)_{r=a} = 0; \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (6.27)$$

Для опертого края:

$$(w)_{r=a} = 0; \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0. \quad (6.28)$$

Реализуя условия (6.27), получаем для пластины с заделанным контуром

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (6.29)$$

Аналогично, с учетом (6.28) находим прогиб для пластины с опертым краем

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \nu} \right]. \quad (6.30)$$

Имея выражение прогиба, находим значения изгибающих и крутящего моментов. При симметричном распределении нагрузки они вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} G_1 &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ G_2 &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ H &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Лекция 7

Большие прогибы пластины

При получении уравнения изгиба пластины (3.9) мы не учитывали наличие в ее срединном слое мембранных усилий T_1, T_2, S . Это допустимо, если пластина изгибается таким образом, что $\frac{w}{h} \leq 0,25$, края пластины свободно перемещаются в плоскости контура и в срединном слое не действуют внешние нормальные или сдвигающие усилия. Если $0,25 \leq \frac{w}{h} \leq 1$, не учитывать мембранные усилия T_1, T_2, S нельзя, поскольку их вклад в несущие свойства пластины становится значительным. Пластина начинает работать как вантовая система, воспринимая поперечную нагрузку за счет деформации срединного слоя. Мембранные усилия в рамках решения плоской задачи теории упругости определяются из системы уравнений (5.14), либо, после введения функции усилий, из

уравнения (5.16). Изогнутая поверхность пластины в этом случае по-прежнему хорошо описывается уравнением Софи Жермен (3.9).

Если прогиб w превосходит толщину пластины h , то система уравнений (3.9), (5.16) становится некорректной, так как погрешность геометрических соотношений, записанных линейно в виде (1.4), получается весьма существенной. Полученные в курсе теории упругости нелинейные геометрические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\
 e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Из этих соотношений уравнения (1.4) получаются как частный случай после отбрасывания нелинейных слагаемых. Применительно к задаче изгиба пластины их влияние несущественно, если $w \leq h$. При больших прогибах необходимо использовать геометрические соотношения в виде (7.1), однако, в этом случае, процесс получения уравнения изогнутой поверхности пластины в значительной степени усложняется. Упростить его можно с учетом следующих соображений. Как показывает анализ деформированного состояния пластины при изгибе, в уравнениях (7.1) одинаковый порядок имеют линейные слагаемые и нелинейные слагаемые, содержащие прогиб w . Порядок нелинейных слагаемых, зависящих от тангенциальных перемещений u, v существенно меньший, поэтому соответствующими слагаемыми в уравнениях (7.1) пренебрегаем.

Решение задачи изгиба пластины при прогибах, превышающих ее толщину, реализуем, как и в предыдущих случаях, в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Обобщенные усилия и моменты записываются без изменений в виде (5.6) и (3.6), а входящие в обобщенные усилия деформации срединного слоя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ в

соответствии с вышеприведенными рассуждениями принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины можно получить следующим образом. Рассмотрим элементарный участок изогнутой срединной плоскости пластины площадью $dxdy$, представленный на рисунке 7.1.

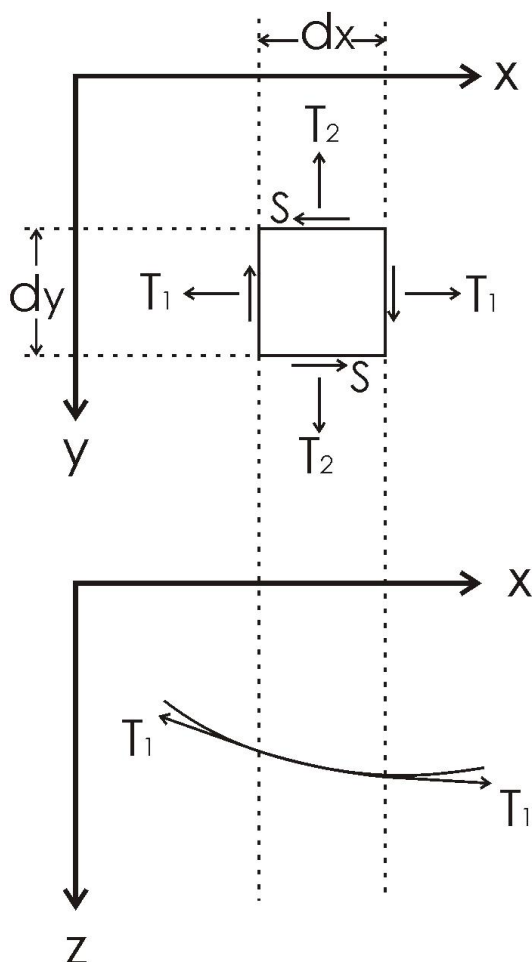


Рис 7.1

Действующие на сторонах этого участка усилия T_1, T_2, S дают на направление оси z составляющие

$$T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxdy, T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy, 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy.\tag{7.3}$$

Решая задачу изгиба пластины при прогибах, меньших толщины, мы этими составляющими пренебрегали ввиду их малости в сравнении с поперечной нагрузкой $q dx dy$, приложенной к данному элементарному участку.

Имея в виду соотношения (7.3), учет проекций усилий T_1, T_2, S на ось z формально можно свести к замене поперечной нагрузки интенсивности q нагрузкой интенсивности

$$q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.4)$$

Уравнение изогнутой поверхности пластины (Софи Жермен) записывается, таким образом, в виде:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.5)$$

Дальнейшее решение этой задачи полностью аналогично решению задачи слабого изгиба пластины с учетом деформации срединного слоя, представленному выше. Для определения мембранных усилий решается плоская задача теории упругости. Соответствующая система уравнений имеет вид, аналогичный системе уравнений (5.8). Первые два уравнения этой системы, получаемые из уравнений равновесия, сохраняются без изменения, а третье записывается иначе. Оно является следствием уравнения неразрывности деформаций, которое в данном случае с учетом геометрических соотношений (7.2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad (7.6)$$

Наличие нелинейных слагаемых в этом уравнении, в отличие от уравнения (5.11), обусловлено присутствием нелинейных слагаемых в геометрических соотношениях (7.2).

В уравнении (7.6) деформации выражаются через мембранные усилия с помощью соотношений (5.12). После введения функции усилий (5.15) первые два уравнения системы (5.8) тождественно удовлетворяются, а уравнение (7.6), записанное в усилиях, принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Eh \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (7.7)$$

Уравнение (7.5) можно записать иначе, представив мембранные усилия T_1, T_2, S через функцию усилий

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q. \quad (7.8)$$

Система уравнений (7.7), (7.8) называется системой уравнений Кармана и является разрешающей системой уравнений изгиба пластины при больших прогибах. Уравнения Кармана являются нелинейными уравнениями в частных производных и описывают упругое поведение пластины во всем диапазоне изменения ее прогибов. За исключением некоторых частных случаев они точно не интегрируются. Уравнения слабого изгиба пластины получаются из них отбрасыванием нелинейных слагаемых.

Граничные условия на контуре пластины формулируются аналогично случаю слабого изгиба в виде условий Кирхгофа (4.6), (4.7). Вместе с тем, поскольку пластина изгибается с деформацией срединного слоя, граничные условия на ее контуре необходимо сформулировать и для мембранных усилий.

Как показано на рисунке 7.2, на произвольном участке контура пластины в ее срединном слое должны быть заданы нормальное мембранное усилие T_n и сдвигающее мембранное усилие S_n , совпадающие с соответствующими внешними силами T_0 и S_0 . Таким образом, для мембранных усилий граничные условия формулируются в виде:

$$T_n = T_0, S_n = S_0 \quad (7.9)$$

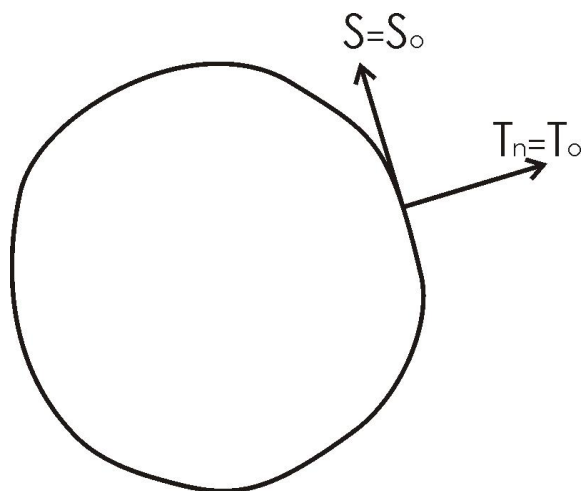


Рис 7.2.

Контурные усилия, в свою очередь, выражаются через мембранные усилия T_1, T_2, S по известным формулам преобразования компонент тензора напряжений

$$T_n = T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta + S \sin 2\theta ,$$

$$S_n = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) \sin 2\theta + S \cos 2\theta . \quad (7.10)$$

Соотношения (4.6), (4.7) и (7.9) представляют из себя статические граничные условия для системы уравнений (7.7) и (7.8). Конкретный вид они принимают в зависимости от способа закрепления того или иного участка контура пластины.

В качестве примера сформулируем граничные условия на кромке $x = a$ прямоугольной пластины, изображенной на рисунке 4.2. Так как этот участок контура не закреплен и свободен от внешней нагрузки, то условия (4.6), (4.7) принимают вид (4.10), а в условиях (7.9) $T_n = 0$, $S_n = 0$. Внешняя нормаль параллельна оси абсцисс, поэтому соотношения (7.10) упрощаются и записываются в виде:

$$T_n = T_1 ,$$

$$S_n = S ,$$

или, после введения функции напряжений

$$T_n = F_{yy} ,$$

$$S_n = F_{xy} .$$

Таким образом, с учетом представленных рассуждений, граничные условия на данном участке контура пластины записываются следующим образом:

$$w''_{xx} = 0 ,$$

$$w'''_{xyy} + \nu w'''_{xyy} = 0 ,$$

$$F''_{yy} = 0 ,$$

$$F''_{xy} = 0 .$$

Постановка задачи устойчивости пластины

Если при деформации пластины в ее срединном слое возникают мембранные усилия, то наряду с расчетом на прочность необходимо проводить расчет на устойчивость. Расчет на устойчивость предполагает нахождение критических значений мембранных усилий и соответствующих им внешних нагрузок, при которых пластина меняет форму равновесного состояния. Предположим, что в срединной плоскости пластины действует внешняя сжимающая нагрузка интенсивности p (рис 7.3).

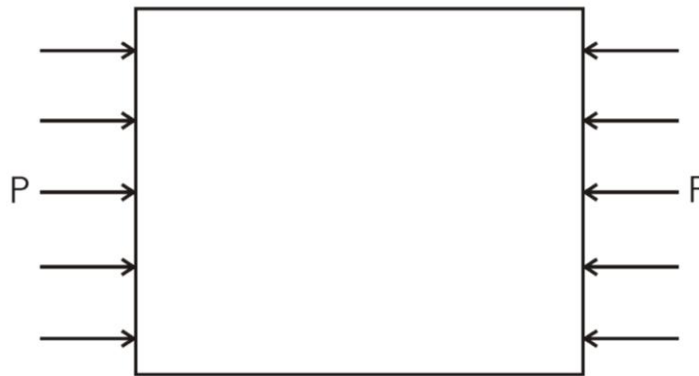


Рис 7.3

При значениях нагрузки меньших некоторой величины \bar{p} пластина остается плоской. Дадим нагрузке \bar{p} бесконечно малое приращение Δp . Пластина при этом переходит в другое, изогнутое, равновесное состояние, то есть теряет устойчивость. Таким образом, при нагрузке, меньшей \bar{p} пластина находится в плоском, устойчивом равновесном состоянии. При $p = \bar{p}$ возможно два равновесных состояния пластины, а именно: плоское, неустойчивое, либо изогнутое, но устойчивое. Нагрузка \bar{p} называется критической. При потере устойчивости пластина принимает такую изогнутую форму, которой соответствует минимум потенциальной энергии деформации. Бесконечно малому приращению нагрузки Δp соответствуют бесконечно малые приращения прогиба δw и функции усилий δF . Полный прогиб пластины, таким образом, равен $w + \delta w$, где w - величина прогиба к моменту потери устойчивости (докритическое значение прогиба). По аналогии и функция усилий равна $F + \delta F$.

Выше было отмечено, что система уравнений Кармана (7.7), (7.8) описывает изгиб пластины во всем диапазоне изменения прогибов. Это означает, что данная система должна быть пригодна и для описания процесса потери устойчивости. Для нахождения приращений (вариаций) прогиба и функции усилий $\delta w, \delta F$ с помощью системы (7.7), (7.8) последняя должна быть подвергнута операции варьирования (линеаризации). В результате этого действия уравнения Кармана принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + Eh(w''_{xx} \delta w''_{yy} + w''_{yy} \delta w''_{xx} - 2w''_{xy} \delta w''_{xy}) &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} \delta w''_{xy} - w''_{yy} \delta F''_{xx} - \\ - w''_{xx} \delta F''_{yy} + 2w''_{xy} \delta F''_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

При этом надо иметь в виду, что варьирование происходит при условии постоянства внешней нагрузки q . Это означает, что вариация нагрузки δq равна нулю.

Уравнения системы (7.11) обладают следующими свойствами:

1. Относительно искомым вариаций прогиба и функции усилий эти уравнения линейны.

2. Уравнения являются однородными.

3. Функции w и F - известные функции. Они определяются из решения системы уравнений Кармана для до критического состояния пластины, то есть при $0 \leq p \leq \bar{p}$.

Если в до критическом состоянии пластины прогиб отсутствует ($w=0$ при $0 \leq p \leq \bar{p}$), то система уравнений (7.11) упростится

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} \delta w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

С учетом выражений для функции усилий (5.15) уравнения (7.12) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - T_2 \delta w''_{yy} - T_1 \delta w''_{xx} - 2S \delta w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Если в до критическом состоянии пластины прогиб отсутствует, то такое до критическое состояние называется безмоментным. При этом полный прогиб после потери устойчивости равен δw . Знак вариации в выражении прогиба в уравнениях (7.12) и (7.13) можно, таким образом, убрать. Кроме того, уравнение совместности деформаций в вариациях $\nabla^2 \nabla^2 \delta F = 0$ не связано со вторым уравнением системы. Таким образом, для решения задачи устойчивости пластины в предположении безмоментности докритического состояния остается одно уравнение:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - T_{1,0} w''_{xx} - T_{2,0} w''_{yy} - 2S_0 w''_{xy} = 0. \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) называется уравнением нейтрального равновесия. $T_{1,0}, T_{2,0}, S_0$ - мембранные усилия, которые реализуются в нейтральном слое в до критическом состоянии. Они определяются из уравнений плоской задачи теории упругости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{1,0}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{2,0}}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2(T_{1,0} + T_{2,0}) &= 0.\end{aligned}\tag{7.15}$$

Лекция 8

Примеры решения задач устойчивости пластины

Устойчивость пластины при одностороннем сжатии

Ранее были получены значения мембранных усилий T_1, T_2, S при одностороннем сжатии пластины в рамках решения плоской задачи теории упругости (6.5). С учетом их значений уравнение нейтрального равновесия (7.14) принимает следующий вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + T_0 w''_{xx} = 0.\tag{8.1}$$

Считаем, что кромки пластины шарнирно закреплены, поэтому в соответствии с рисунком 7.4 граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}x = 0, a: w = 0, w''_{xx} &= 0, \\ y = 0, b: w = 0, w''_{yy} &= 0,\end{aligned}\tag{8.2}$$

Решение уравнения (8.1) ищем в виде:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.\tag{8.3}$$

Здесь m и n - волновые числа. Они характеризуют число полуволн в продольном и поперечном направлениях пластины. Вводя (8.3) в (8.1), после выполнения операции дифференцирования и сокращения на тригонометрические множители, получаем уравнение:

$$D(m_1^2 + n_1^2)^2 - T_0 m_1^2 = 0,\tag{8.4}$$

где $m_1 = \frac{m\pi}{a}, n_1 = \frac{n\pi}{b}$.

Из (8.4) получаем:

$$T_0 = D(m_1^2 + 2n_1^2 + \frac{n_1^4}{m_1^2})$$

При целых значениях волновых чисел m и n получаем спектр критических нагрузок, из которых интерес представляет наименьшая. Введем следующие обозначения:

$$m_1^2 = z, n_1^2 = z_1.$$

При этом критическое сжимающее усилие можно представить в виде:

$$T_0 = D(z + 2z_1 + \frac{z_1^2}{z}). \quad (8.5)$$

T_0 - функция двух переменных z и z_1 . Для ее минимизации необходимо выполнить следующие условия:

$$\frac{\partial T_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial z_1} = 0. \quad (8.6)$$

Из первого условия (8.6) следует, что $z = z_1$. Второе условие дает:

$$\frac{\partial T_0}{\partial z_1} = 2 + \frac{2z_1}{z} > 0.$$

Это означает, что с ростом z_1 усилие T_0 растет. Минимум T_0 реализуется при значении $z_1 = \frac{\pi^2}{b^2}$, которое соответствует одной полуволне в направлении оси y ($n=1$). Из условия $z = z_1$ следует $m_1 = n_1$. Последнее позволяет определить волновое число m , которое при $n=1$ равно отношению сторон пластины $\frac{a}{b}$. Однако, m - целое число, поэтому данное решение имеет смысл при условии, что $\frac{a}{b} = 1, 2, 3, \dots$.

Пусть $a = b$. В этом случае $m = n = 1$, а $z = z_1 = \frac{\pi^2}{a^2}$. С учетом (8.5) критическое сжимающее усилие имеет вид:

$$T_{0,k} = \frac{4\pi^2 D}{a^2}. \quad (8.7)$$

Критическое напряжение

$$X_x = \frac{4\pi^2 D}{a^2 h} = \frac{4\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)a^2} \quad (8.8)$$

Если рассмотреть одностороннее сжатие пластины при не закрепленных кромках $y = 0, b$, то в этом случае величина

критического напряжения определяется по линейной теории Эйлера для сжатого стержня

$$X_x = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2 E h^2}{12 a^2} \quad (8.9)$$

Сравнение формул (8.8) и (8.9) позволяет сделать вывод, что шарнирное закрепление продольных кромок квадратной пластины при одностороннем сжатии приводит к более чем четырехкратному росту критических напряжений.

Устойчивость пластины при всестороннем равномерном сжатии.

С учетом выражений мембранных усилий (6.9) уравнение нейтрального равновесия (7.14) в этом случае может быть представлено в виде:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + T_0 \nabla^2 w = 0. \quad (8.10)$$

Считаем, что кромки пластины шарнирно закреплены, поэтому граничные условия записываются как и в предыдущей задаче в форме (8.2). При таких предположениях можно показать, что уравнение (8.10) приводится к виду:

$$D \nabla^2 w + T_0 w = 0, \quad (8.11)$$

или, после введения обозначения $\lambda^2 = \frac{T_0}{D}$,

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0 \quad (8.12)$$

Для доказательства проинтегрируем уравнение (8.10). Получим:

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = \Gamma_0. \quad (8.13)$$

Γ_0 - гармоническая функция. Для ее определения воспользуемся граничными условиями (8.2). При $x=0, a$ прогиб $w=0$,

следовательно, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. В результате получаем, что на этих

кромках пластины граничные условия могут быть записаны в виде:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (8.14)$$

Аналогично рассуждая можно утверждать, что такой же вид граничные условия примут и на кромках $y=0, b$. Итак, левая часть уравнения (8.13), и, следовательно, функция Γ_0 обращаются в ноль на всем контуре пластины. Вместе с тем, уравнение (8.13)

справедливо во всей области пластины включая контур. Таким образом, $\Gamma_0 = 0$ в любой точке пластины и уравнение (8.12) действительно имеет место. Решение этого уравнения будем искать, задавая функцию прогиба в виде:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.15)$$

Подставляя w в (8.12) получаем:

$$\lambda^2 = \frac{T_0}{D} = \frac{(m\pi)^2}{a^2} + \frac{(n\pi)^2}{b^2}, \text{ или}$$

$$T_0 = D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (8.16)$$

С ростом волновых чисел m и n критическое сжимающее усилие растет. Для квадратной пластины со стороной a минимальное критическое сжимающее усилие реализуется с образованием одной поперечной волны в каждом направлении и определяется по формуле

$$T_{0,k} = \frac{2\pi^2 D}{a^2}. \quad (8.17)$$

Критическое напряжение

$$X_x = \frac{2\pi^2 D}{a^2} = \frac{2\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)a^2}. \quad (8.18)$$

Сравнение с формулой (8.8) показывает, что по сравнению со случаем одностороннего сжатия пластины критические напряжения уменьшаются в два раза.

Устойчивость пластины при сдвиге.

Имея в виду соответствующее решение плоской задачи теории упругости, записываем уравнение нейтрального равновесия в виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (8.19)$$

Граничные условия, как и в предыдущих примерах, принимаем в форме (8.2). Решение уравнения (8.19) можно было бы искать в виде:

$$w = A \sin(m_1 x + n_1 y) \quad (8.20)$$

Эта функция хорошо описывает картину волнообразования, но она не соответствует граничным условиям шарнирного закрепления (8.2). Таким образом, аппроксимация прогиба в форме (8.20) невозможна.

Решать задачу будем приближенно с помощью метода Бубнова-Галеркина. В качестве аппроксимирующей функции возьмем следующее выражение:

$$w = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin m_1(x - ky) \quad (8.21)$$

Здесь $m_1 = \frac{m\pi}{a}$, m - число полуволн в направлении оси x , коэффициент k характеризует угол наклона волн на поверхности пластины после потери устойчивости. Функция (8.21) на краях пластины $y = 0, b$ удовлетворяет условию $w = 0$, но не удовлетворяет условию $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. При $x = 0, a$ граничные условия шарнирного закрепления не выполняются. В качестве аппроксимирующей эту функцию можно использовать лишь для пластины, вытянутой в направлении оси x , то есть при $a \gg b$. В рамках реализации метода Бубнова-Галеркина сдвигающее усилие S_0 определяем, вычисляя интеграл

$$\int_0^a \int_0^b (D \nabla^2 \nabla^2 w + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) w dx dy = 0. \quad (8.22)$$

Сдвигающее усилие S_0 представляется в виде следующей функциональной зависимости:

$$S_{0,k} = f(m_1, k). \quad (8.23)$$

Минимизируя $S_{0,k}$ по параметрам m_1 и k , получаем критическое сдвигающее усилие в виде:

$$S_{0,k} = \frac{5,64D}{b^2}. \quad (8.24)$$

Соответствующее критическое напряжение:

$$X_y = \frac{5,64D}{b^2 h}. \quad (8.25)$$

Теорема П.Ф.Папковича

Рассмотрим пластину, находящуюся под действием системы нагрузок. Каждая из этих нагрузок, действуя по отдельности, приводит к потере устойчивости пластины. Соответствующие критические напряжения получены в результате вышеприведенных решений и определяются из соотношений (8.8), (8.18) и (8.25). Для

решения задачи устойчивости пластины в условиях комбинированного нагружения необходимо воспользоваться уравнением (7.14), которое, переходя от усилий к напряжениям, можно записать в виде:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w + \sigma_1 w''_{xx} + \sigma_2 w''_{yy} + 2\tau w''_{xy} = 0. \quad (8.26)$$

Здесь σ_1, σ_2, τ - критические значения напряжений X_x, Y_y и X_y при комбинированном нагружении. Очевидно, что их определение из уравнения (8.26) невозможно. Введем следующие обозначения: $\sigma_{1,k}, \sigma_{2,k}$ - критические напряжения при раздельном нагружении пластины односторонним сжимающим усилием, действующим соответственно вдоль оси x или y . С учетом обозначения длины стороны пластины они определяются по формуле (8.8). τ_k - критическое напряжение при раздельном нагружении пластины сдвигающей нагрузкой. Для его нахождения с поправкой на размеры пластины можно использовать соотношение (8.25). Кроме того, введем в рассмотрение безразмерные напряжения:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}, \frac{\sigma_2}{\sigma_{2,k}}, \frac{\tau}{\tau_k}. \quad (8.27)$$

Запишем уравнение поверхности.

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}\right)^p + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,k}}\right)^q + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^r = 1. \quad (8.28)$$

Теорема Папковича утверждает следующее:

В пространстве безразмерных напряжений (8.27) поверхность (8.28) является выпуклой, для чего необходимо выполнение условия: $p, q, r \geq 1$.

Поверхность Папковича (8.28) позволяет при комбинированном нагружении пластины установить такое взаимное сочетание нагрузок, при котором пластина будет находиться в устойчивом состоянии. Схематично это показано на рисунке 8.1.

Замкнутая область пространства безразмерных напряжений (8.27), заключенная между координатными плоскостями и поверхностью (8.28), представляет из себя область устойчивости пластины.

Прокомментируем ситуацию на примере. Допустим, что пластина находится одновременно в условиях сжатия вдоль оси x и сдвига. Уравнение Папковича в этом случае имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}}\right)^p + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^r = 1. \quad (8.29)$$

Геометрически эта плоская кривая в общем виде показана на рисунке 8.2.

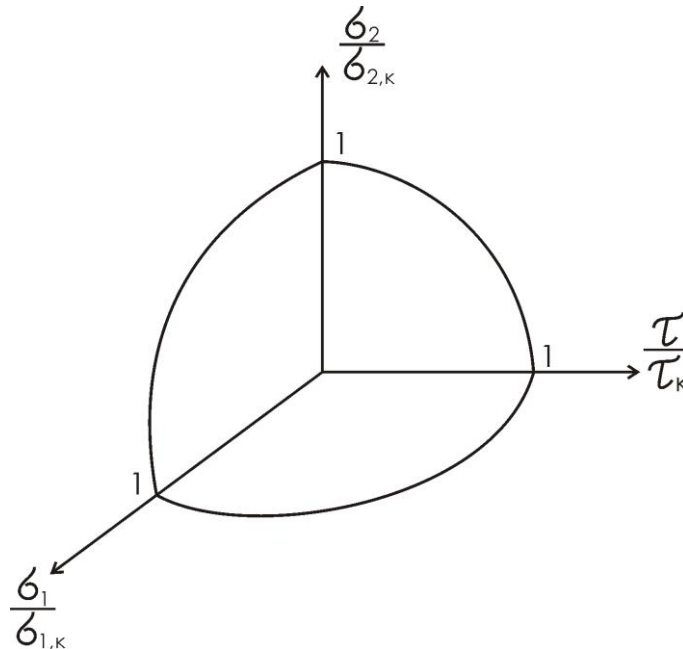


Рис 8.1.

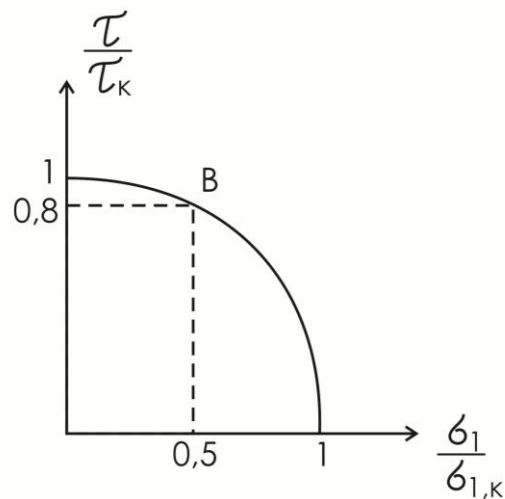


Рис. 8.2.

Очевидно, что координатные оси она (как и любая другая поверхность Папковича) пересекает в точках $\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,k}} = 1$, $\frac{\tau}{\tau_k} = 1$. Пусть величина сжимающих усилий такова, что соответствующие

напряжения σ_1 составляют половину от критического значения, то есть $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$. Какова должна быть величина сдвигающих усилий и соответствующих им касательных напряжений τ , чтобы пластина сохраняла устойчивость? Ответ легко получить, анализируя рисунок 8.2. Напряжению $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$ соответствует точка «В» на кривой Папковича. По оси безразмерных касательных напряжений эта точка имеет координату $\frac{\tau}{\tau_k} = 0,8$. Таким образом, при заданном уровне нормальных напряжений $\sigma_1 = 0,5\sigma_{1,k}$, устойчивое состояние пластины будет обеспечено, если касательные напряжения τ не будут превышать $0,8\tau_k$.

Теорема Папковича является основой для реализации теоретико-экспериментального метода решения задачи устойчивости пластины при комбинированном нагружении. Уравнение (8.28) в этом случае представляет из себя структурную зависимость между безразмерными комплексами. Показатели степени p, q, r определяются из эксперимента. В результате получается расчетная формула, обеспечивающая надежные количественные результаты.

Лекция 9

Изгиб круговой цилиндрической панели.

В отличие от пластины поверхность цилиндрической панели обладает кривизной в направлении одной из координатных осей. Если цилиндрическая панель круговая, то радиус кривизны фиксирован. Наличие кривизны во многом определяет специфику в поведении панели при нагружении, в частности, более высокую несущую способность. В то же время, получение уравнений изгиба круговой цилиндрической панели при поперечной нагрузке практически не отличается от соответствующей процедуры для пластины. Рассмотрим круговую цилиндрическую панель, отнесенную к координатным осям так, как показано на рисунке 9.1.

Радиус кривизны срединного слоя панели равен R , толщина - h . Как и в случае пластины, считаем, что при изгибе выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява.

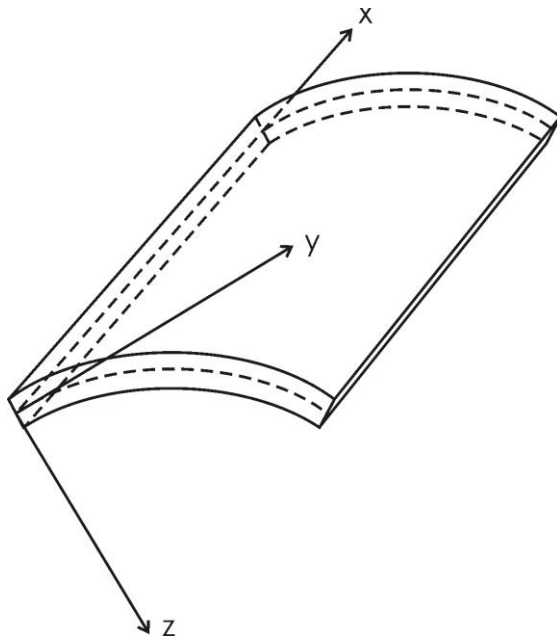


Рис 9.1.

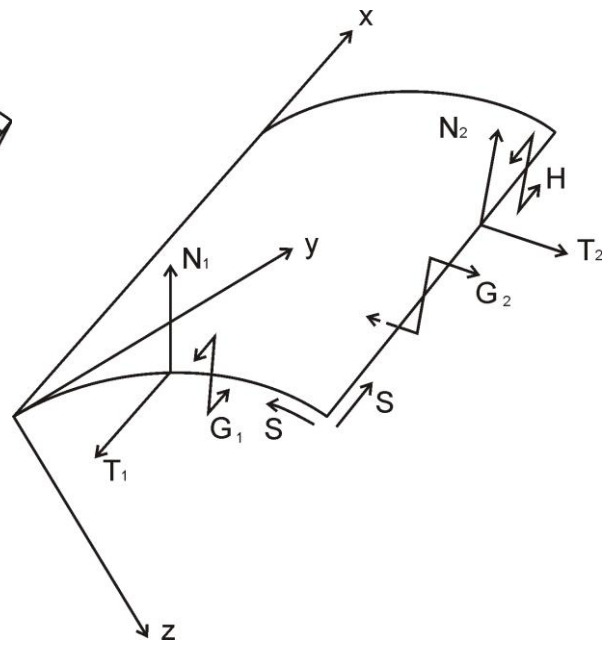


Рис 9.2.

Обобщенные моменты и усилия, представленные на рисунке 9.2, записываются без изменений в виде (3.6), (3.7) и (5.6). Входящие в выражения моменты изменения кривизны и параметр кручения срединного слоя χ_1, χ_2, τ также сохраняются в форме (3.4), а деформации срединного слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

В отличие от соответствующих соотношений для пластины (7.2), здесь, в выражении деформации ε_2 , присутствует слагаемое $-\frac{w}{R}$, обусловленное кривизной.

Система уравнений равновесия мембранных усилий в проекции на касательную к боковой поверхности панели плоскость записываются, как и для пластины, в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

Уравнение изогнутой поверхности панели аналогично соответствующему уравнению (7.5) для пластины:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q + \frac{T_2}{R} + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.3)$$

Слагаемое $\frac{T_2}{R}$, как видно из рисунка 9.3, появляется в результате проектирования мембранных усилий T_2 на ось z .

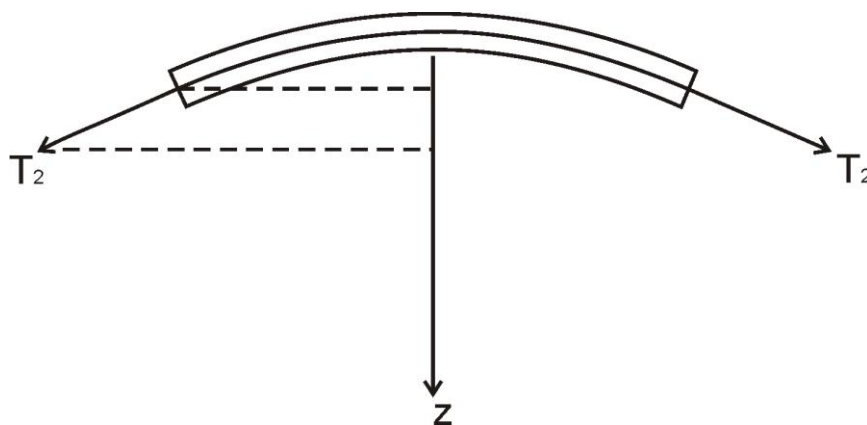


Рис 9.3.

Уравнение неразрывности деформаций, как и в предыдущих случаях, получается в результате исключения из системы уравнений (9.1) тангенциальных перемещений u, v . Оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0. \quad (9.4)$$

От соответствующего уравнения (7.6) для пластины оно отличается наличием слагаемого $\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. После выражения деформаций через мембранные усилия по формулам (5.12) и введения функции усилий (5.15) уравнение (9.4) может быть записано следующим образом:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} + Eh(w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) = 0 \quad (9.5)$$

Система (9.2) при этом тождественно удовлетворяется. Уравнение (9.3) с использованием функции усилий также может быть переписано

$$D\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} - F''_{xx} w''_{yy} - F''_{yy} w''_{xx} + 2F''_{xy} w''_{xy} = q. \quad (9.6)$$

Система уравнений (9.5), (9.6) является системой уравнений равновесия пологой, круговой цилиндрической панели под действием поперечной нагрузки интенсивности q . Она аналогична системе уравнений Кармана для пластины (7.7), (7.8). Уравнения (9.5), (9.6) нелинейные и описывают упругое поведение круговой цилиндрической панели во всем диапазоне изменения прогибов. Уравнения Кармана для пластины получаются из них как частный случай, если в соответствующих слагаемых положить радиус кривизны равным бесконечности. Полученные уравнения равновесия для панели применимы и для круговой цилиндрической оболочки. При реализации различие заключается лишь в формулировке граничных условий.

Пологость цилиндрической панели и оболочки.

Цилиндрическая панель пологая в смысле своей геометрии, если выполняется следующее неравенство:

$$\frac{f}{b} \leq 0,2. \quad (9.7)$$

Здесь f - подъем панели, b - кратчайшее расстояние между прямолинейными кромками (рисунок 9.4).

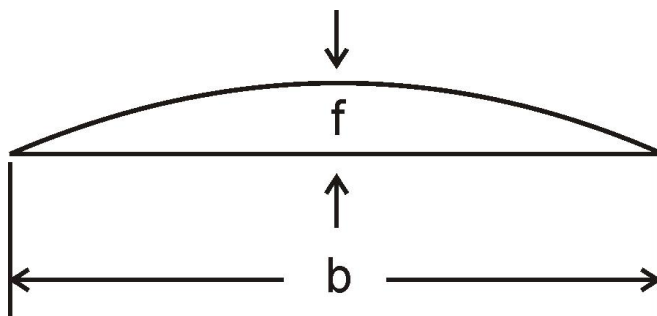


Рис 9.4.



Рис 9.5

Панель может быть полой в смысле волнообразования при изгибе. В этом случае условие (9.7) может не выполняться для

панели в целом, но оно выполняется в рамках одной полуволны. При таком подходе f имеет смысл прогиба, а b - длина полуволны в окружном направлении (рисунок 9.5). Очевидно, что круговая цилиндрическая оболочка не может быть полой в смысле своей геометрии, поскольку в этом случае $\frac{f}{b} = \frac{R}{2R} = 0,5$. Она может быть полой лишь в рамках каждой полуволны в окружном направлении.

Слабый изгиб круговой цилиндрической оболочки.

Все рассуждения в дальнейшем будем вести для круговой цилиндрической оболочки, имея в виду их справедливость и для панели, как части оболочки. Предполагаем, что при деформации оболочки прогибы удовлетворяют условию: $w \leq 0,25h$. В этом случае, в уравнениях (9.5), (9.6), как и при слабом изгибе пластины, можно пренебречь нелинейными слагаемыми. Упрощенная система уравнений примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (9.8)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = q. \quad (9.9)$$

В предположении, что радиус кривизны R равен бесконечности, данная система уравнений переходит в систему (3.9), (5.16) для случая слабого изгиба пластины с деформацией растяжения, сжатия и сдвига срединного слоя. При этом прогибы пластины могут варьироваться в более широком диапазоне ($0 \leq \frac{w}{h} \leq 1$). Если $\frac{w}{h} \leq 0,25$, то уравнение (5.16) удовлетворяется тождественно, что соответствует отсутствию мембранных усилий в срединном слое пластины. В уравнении (9.8) слагаемое $\nabla^2 \nabla^2 F$ не может быть тождественно равным нулю даже при прогибах, меньших четверти толщины. Это означает, что прогиб боковой поверхности оболочки, даже самый незначительный, всегда приводит к возникновению мембранных усилий. Этот факт, в частности, объясняет лучшие несущие свойства панели и оболочки по сравнению с пластиной.

1. Симметричная деформация.

На практике довольно часто возникают ситуации, когда действующие на оболочку силовые факторы распределены симметрично относительно оси цилиндра. К подобным задачам можно, например, отнести задачу о распределении напряжений в цилиндрических резервуарах с вертикальной осью, находящихся под воздействием жидкости. Применительно к уравнениям (9.8) и (9.9) симметрия нагружения означает, что интенсивность распределенной нагрузки не зависит от дуговой координаты, то есть $q = q(x)$. В силу симметрии нагружения и симметрии самой оболочки ее боковая поверхность деформируется симметрично относительно продольной оси цилиндра. Соответственно, функции усилий и прогиба зависят только от координаты x : $F = F(x)$, $w = w(x)$. Система уравнений (9.8) и (9.9) в этом случае преобразуется к виду:

$$\frac{d^4 F}{dx^4} + \frac{Eh}{R} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (9.10)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 F}{dx^2} - q = 0. \quad (9.11)$$

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины l , шарнирно закрепленную по торцам. Это означает, что при $x = 0, l$:

$$w = 0, \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (9.12)$$

Дважды интегрируя уравнение (9.10), получим:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{Eh}{R} w = C_0 + C_1 x \quad (9.13)$$

Потребуем, чтобы радиус торцевых сечений оболочки не изменялся в процессе деформирования. В этом случае, при $x = 0, l$ кольцевое усилие $T_2 = F''_{xx} = 0$. Реализуя краевые условия, получим, что постоянные интегрирования $C_0 = C_1 = 0$. Уравнение (9.13) принимает вид:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{Eh}{R} w = 0.$$

Выражая из этого уравнения $\frac{d^2 F}{dx^2}$ и подставляя в уравнение (9.11), последнее переписываем в виде:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = q, \text{ или}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \bar{q}. \quad (9.14)$$

Здесь приняты обозначения: $\frac{Eh}{DR^2} = 4\beta^4$, $\frac{q}{D} = \bar{q}$.

Полученное уравнение является основным разрешающим уравнением изгиба круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины в случае симметричной деформации. По форме оно совпадает с уравнением изгиба балки на упругом основании. У оболочки роль упругого основания играет кривизна $\frac{1}{R}$. В уравнении изгиба балки параметр β является коэффициентом упругости основания. Уравнение (9.14) является линейным, неоднородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{1}{4\beta^4} \bar{q}. \quad (9.15)$$

C_i - постоянные интегрирования, определяемые из условий на торцах цилиндра.

Рассмотрим в качестве примера длинную цилиндрическую оболочку, к одному из торцов которой ($x=0$) приложены изгибающий момент G_0 и поперечная сила N_0 , равномерно распределенные по окружности цилиндра. Схема нагружения показана на рисунке 9.6.

Так как поверхностной нагрузки нет, в решении (9.15) необходимо положить $\bar{q} = 0$. Силовые факторы, приложенные на торце цилиндра $x=0$, вызывают местный изгиб, затухающий с увеличением расстояния x от торца. В силу этого в выражении функции прогиба (9.15) необходимо положить $C_3 = C_4 = 0$, так как множитель $e^{\beta x}$ возрастает с ростом продольной координаты. Функция прогиба принимает следующий вид:

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \quad (9.16)$$

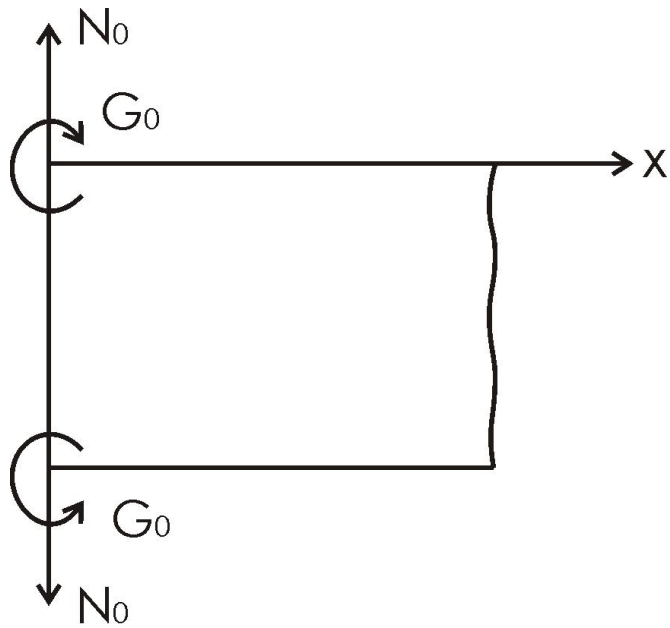


Рис 9.6

Постоянные C_1 и C_2 необходимо определить из условий на нагруженном торце оболочки. При $x=0$:

$$G_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = G_0,$$

$$N_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = N_0.$$

Подставляя в полученные выражения w из (9.16), определяем C_1 и C_2 .

$$C_1 = \frac{G_0}{2\beta^2 D}, \quad C_2 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (N_0 + \beta G_0).$$

Окончательное выражения для прогиба получается следующим:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [\beta G_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - N_0 \cos \beta x]. \quad (9.17)$$

Максимальный прогиб получается на нагруженном торце оболочки (при $x=0$).

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta G_0 + N_0). \quad (9.18)$$

В качестве другого примера симметричной деформации круговой цилиндрической оболочки можно рассмотреть изгиб длинной цилиндрической оболочки под нагрузкой, равномерно распределенной по круговому сечению (рисунок 9.7).

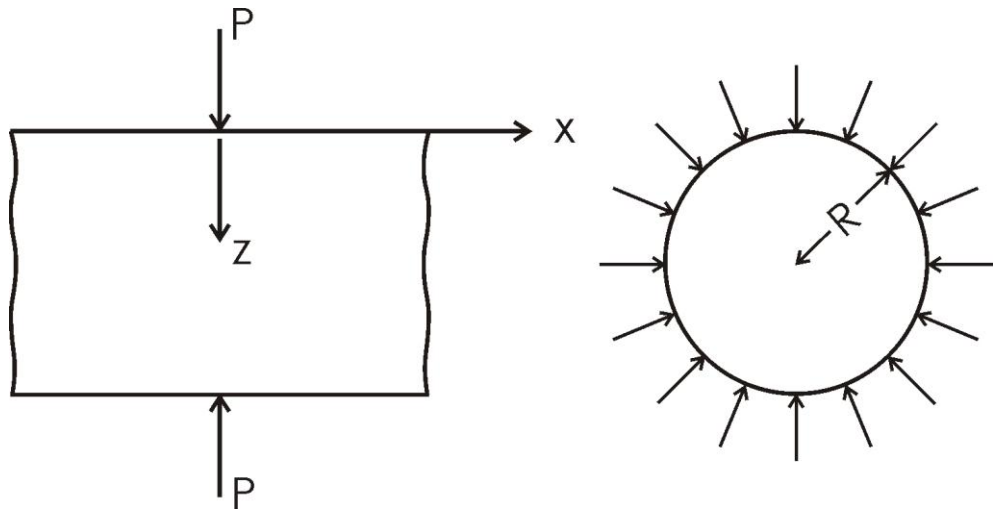


Рис 9.7

Участок боковой поверхности оболочки под нагрузкой находится в условиях местного деформирования. Длина этого участка соизмерима с длиной зоны краевого эффекта $l_1 = 1,2\sqrt{Rh}$. Если плоскость приложения нагрузки находится достаточно далеко от торцов цилиндра, то для каждой части оболочки справа и слева от нагрузки решать задачу можно отдельно, воспользовавшись решением (9.17) и отсчитывая продольную координату от плоскости нагружения. При этом в выражении функции прогиба в силу симметрии необходимо положить $N_0 = -\frac{P}{2}$.

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} \left[\beta G_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) + \frac{P}{2} \cos \beta x \right]. \quad (9.19)$$

Для нахождения G_0 воспользуемся тем фактом, что вследствие симметрии нагружения оболочки $\frac{dw}{dx} = 0$ при $x = 0$.

$$\frac{dw}{dx} = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [2\beta G_0 \cos \beta x + N_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)].$$

При $x = 0$:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta G_0 + N_0) = 0, \text{ откуда получаем:}$$

$$G_0 = -\frac{N_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta}.$$

Окончательное выражение функции прогиба имеет вид:

$$w = \frac{P e^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x). \quad (9.20)$$

Максимальный прогиб получается под нагрузкой (при $x=0$) и его значение равно

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{PR^2\beta}{Eh} \quad (9.21)$$

Максимальный изгибающий момент также реализуется в плоскости нагружения

$$G_{1,\max} = \frac{P}{4\beta} \quad (9.22)$$

2. Несимметричная деформация.

Предполагается, что интенсивность распределенной нагрузки является произвольной функцией координат $q = q(x, y)$. Иногда в этом случае систему (9.8), (9.9) можно привести к одному уравнению. Соответствующим образом дифференцируя уравнение (9.9), приводим его к виду:

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w - \frac{1}{R}(\nabla^2\nabla^2 F)''_{xx} = \nabla^2\nabla^2 q, \text{ или с учетом уравнения (9.8):}$$

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^2\nabla^2 q \quad (9.23)$$

Решение задачи сводится к интегрированию уравнения восьмого порядка (9.23).

Безмоментные уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки.

При определенных условиях оболочка деформируется таким образом, что изменения кривизны и кручения срединного слоя ее боковой поверхности не происходит ($\chi_1 = \chi_2 = \tau = 0$). В силу соотношения (3.6) изгибающие и крутящий моменты равны нулю ($G_1 = G_2 = H = 0$). Уравнения (9.8) и (9.9) в этом случае упрощаются.

$$\nabla^2\nabla^2 F = 0. \quad (9.24)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -q. \quad (9.25)$$

С учетом выражения функции усилий их можно записать иначе.

$$\nabla^2(T_1 + T_2) = 0, \quad (9.26)$$

$$\frac{T_2}{R} = -q. \quad (9.27)$$

Система (9.24), (9.25) – система безмоментных уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки.

Уравнения равновесия в этом случае можно записать и без введения функции усилий. Для этого необходимо использовать систему уравнений (9.2), дополненную уравнением (9.27).

Пример. Круговая цилиндрическая оболочка в условиях всестороннего равномерного обжатия.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, торцы которой закрыты жесткими цилиндрическими фланцами. Оболочка находится под действием всестороннего нормального давления, интенсивности q (рисунок 9.5).

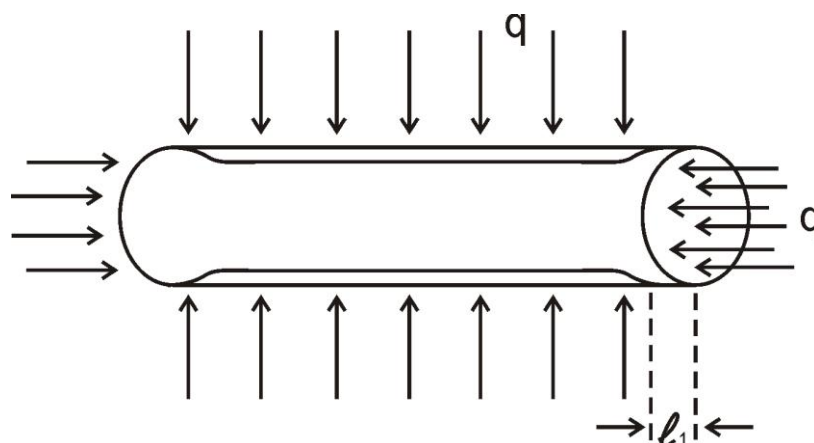


Рис 9.5

В местах, удаленных от торцов оболочки, боковая поверхность деформируется без искривлений так, как это показано на рисунке. Ее можно считать находящейся в безмоментном состоянии. Вблизи края образуются искривления. Напряженное состояние в этой области моментное, а сама эта область называется зоной краевого эффекта. Ее длина $l_1 \approx 1,2\sqrt{Rh}$. Все аксиальные сечения оболочки находятся в одинаковых условиях вследствие симметрии нагружения, поэтому внутренние усилия не зависят от дуговой координаты u . Кольцевое усилие T_2 сразу получается из уравнения (9.27):

$$T_2 = -qR. \quad (9.28)$$

Поскольку $T_2 = const$, из второго уравнения (9.2) сразу получаем $S = f(y)$. Но мембранные усилия от дуговой координаты не зависят, поэтому $S = S_0 = const$. Величина S_0 определяется краевыми условиями. Если на торцах оболочки внешних сдвигающих усилий нет (как в данном примере), то $S = 0$. Тогда, из первого уравнения (9.2) следует, что $T_1 = const$. Величина T_1 легко определяется из анализа равновесия торцевого фланца оболочки. Полная внешняя нагрузка, действующая на фланец в направлении оси x , равна $-q\pi R^2$. Она уравнивается соответствующим по направлению суммарным усилием $T_1 2\pi R$, которое возникает в оболочке. Таким образом:

$$T_1 = -\frac{qR}{2}. \quad (9.29)$$

К соотношениям (9.28), (9.29) необходимо добавить выражение для сдвигающих усилий.

$$S = 0. \quad (9.30)$$

Область применимости безмоментных уравнений довольно узка. Если участок боковой поверхности оболочки (или панели) удален от края и имеет постоянную или плавно изменяющуюся кривизну, нагрузка также постоянная или плавно меняющаяся, то с большой степенью точности можно использовать безмоментные уравнения.

Лекция 10

Постановка задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки.

На рис. 10.1 представлены варианты нагружения цилиндрической оболочки, для которых известны классические решения задачи устойчивости.

В целом, постановка задачи устойчивости оболочки осуществляется аналогично случаю пластины. Рассмотрим ее на примере цилиндрической оболочки, подверженной действию поперечного внешнего давления. При нагрузке, изменяющейся от 0 до \bar{q} , происходит обжатие боковой поверхности с сохранением ее гладкой цилиндрической формы, при этом равновесное состояние оболочки устойчиво. На всей поверхности, кроме зон краевого эффекта, реализуется безмоментное докритическое состояние. При

нагрузке $q = \bar{q}$ оболочка находится в состоянии неустойчивого равновесия, а при $q = \bar{q} + \Delta q$ ($\Delta q \rightarrow 0$) происходит потеря устойчивости оболочки. При этом на боковой поверхности образуются волны, количество которых определяется геометрическими параметрами оболочки, а сам процесс волнообразования сопровождается хлопком.

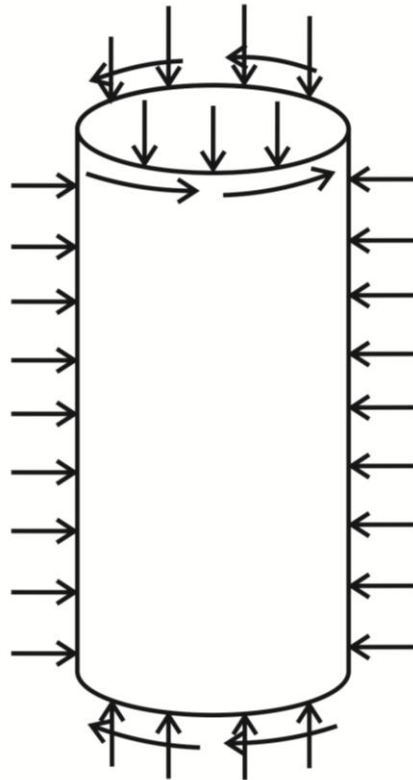


Рис 10.1

Задача состоит в определении критической нагрузки \bar{q} . В рамках математической постановки задачи устойчивости считается, что бесконечно малому приращению нагрузки Δq соответствуют бесконечно малые приращения (вариации) функций усилия и прогибов δF и δw . Для пластины это выполняется. Для оболочки данное предположение является идеализацией, поскольку на самом деле, на боковой поверхности оболочки образуются очень глубокие вмятины (до десяти толщин). Как и в случае пластины, процесс потери устойчивости описывается уравнениями, которые получаются из уравнений (9.5), (9.6) путем вариирования и имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} + Eh(w''_{xx} \delta w''_{yy} + w''_{yy} \delta w''_{xx} - 2w''_{xy} \delta w''_{xy}) &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} \delta w''_{xy} - \delta F''_{xx} w''_{yy} - \\ - \delta F''_{yy} w''_{xx} + 2\delta F''_{xy} w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

В этих уравнениях все величины со знаками вариации являются неизвестными. Производные от функций усилия и прогиба рассматриваются как известные. Они описывают докритическое состояние оболочки и определяются из уравнений (9.5), (9.6) при заданной внешней нагрузке. В предположении безмоментности докритического состояния изменение кривизны и кручение срединного слоя отсутствуют, то есть $\chi_1 = \chi_2 = \tau = 0$, или, что то же самое $w''_{xx} = w''_{yy} = w''_{xy} = 0$. Уравнения системы (10.1) упрощаются

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} - F''_{xx} \delta w''_{yy} - F''_{yy} \delta w''_{xx} + 2F''_{xy} w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

С учетом обозначений (5.15) их можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} - T_{2,0} \delta w''_{yy} - T_{1,0} \delta w''_{xx} - 2S_0 \delta w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь: $T_{1,0} = F''_{yy}$ - нормальное меридианальное усилие, $T_{2,0} = F''_{xx}$ - нормальное кольцевое усилие, $S_0 = -F''_{xy}$ - сдвигающее усилие. Если в уравнениях (10.2) или (10.4) положить $\frac{1}{R} = 0$ (кривизна отсутствует), то получим известные уравнения (7.12) или (7.13) для пластины. Однако, если для пластины два уравнения систем (7.12) или (7.13) являются независимыми и задача устойчивости пластины в предположении безмоментности докритического состояния сводится в итоге к одному уравнению нейтрального равновесия (7.14), то для оболочки ситуация иная. Уравнения систем (10.2) или (10.3) зависят друг от друга и свести задачу к одному уравнению невозможно. Если иметь в виду, что, как и для пластины, прогиб боковой поверхности оболочки в безмоментном докритическом состоянии отсутствует, то полный прогиб w определяется лишь прогибом в момент потери устойчивости δw . С учетом этого

уравнения устойчивости круговой цилиндрической оболочки (уравнения нейтрального равновесия) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} - T_{2,0} w''_{yy} - T_{1,0} w''_{xx} - 2S_0 w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Граничные условия.

Уравнения (10.4) являются уравнениями четвертого порядка как относительно прогиба, так и относительно функции усилий. Поэтому для каждой из этих величин необходимо формулировать по два условия на каждом торце оболочки. Для прогиба w условия формулируются как и для пластины. Остальные условия накладываются либо непосредственно на мембранные усилия T_1, T_2, S (а, следовательно, и на функцию усилий), либо на тангенциальные перемещения u и v или деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$, которые, в конечном итоге, также могут быть выражены через функцию усилий. Сформулируем некоторые варианты граничных условий:

1. Жесткая заделка: $w=0, \frac{\partial w}{\partial n}=0, u=0, v=0.$

2. Шарнирное опирание: $w=0, G_n=0, \varepsilon_2=0$ (деформация в окружном направлении), $\omega=0$ (деформация сдвига).

Иногда, при шарнирном опирании, условие $\omega=0$ не выполняется и его заменяют условием $\varepsilon_1=0$ (деформация в направлении образующей боковой поверхности).

3. Свободный край: $G_n=0, N - \frac{\partial H}{\partial s}=0, T_n=0, S_n=0.$

4. Скользящее защемление: $w=0, \frac{\partial w}{\partial n}=0, T_n=0, S_n=0.$

(Тангенциальные перемещения u и v в ноль не обращаются)

Граничные условия формулируются для уравнений в вариациях, то есть во всех граничных условиях предполагаются вариации функций прогиба и усилий. Это означает, что ограничения на торцах оболочки накладываются лишь в момент потери устойчивости.

Осевое сжатие цилиндра

Как видно из рисунка 10.2 для получения уравнений нейтрального равновесия в системе уравнений (10.4) необходимо положить $T_{1,0} = -T_0$, $T_{2,0} = 0$, $S_0 = 0$. С учетом этого система разрешающих уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} + T_0 w''_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$



Рис 10.2

Рассмотрим несколько вариантов решения этой задачи.

Симметричная деформация.

В этом случае все аксиальные сечения находятся в одинаковых условиях, поэтому функции усилий и прогиба можно считать не зависящими от окружной координаты (рис. 10.3).

$$\begin{aligned} F &= F(x), \\ w &= w(x). \end{aligned} \quad (10.6)$$

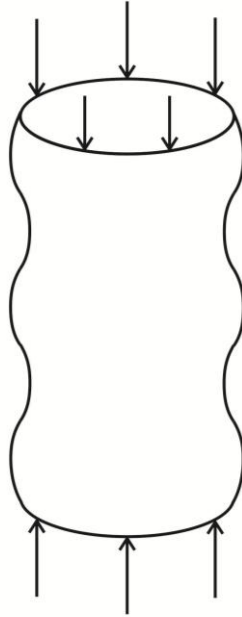


Рис 10.3

Уравнения нейтрального равновесия (10.5) при этих условиях упрощаются

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F}{dx^4} + \frac{Eh}{R} \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0, \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 F}{dx^2} + T_0 \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Дважды интегрируя первое уравнение системы получим:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{Eh}{R} w = C_0 + C_1 x. \quad (10.8)$$

Предполагая шарнирное опирание торцевых сечений оболочки,

$$x = 0, l: w = 0, w''_{xx} = 0, F = 0, F''_{xx} = 0, \quad (10.9)$$

легко получаем, что константы интегрирования C_0 , C_1 обращаются в ноль. Тогда из (10.8) следует:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = -\frac{Eh}{R} w. \quad (10.10)$$

Подставляя данное соотношение во второе уравнение (10.7), получаем уравнение нейтрального равновесия сжатого цилиндра в случае симметричной деформации:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w + T_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (10.11)$$

Так как данное уравнение не зависит от функции усилий, то граничные условия, налагаемые на эту функцию, считаем выполненными. Таким образом, условия шарнирного опирания упрощаются и окончательно записываются в виде:

$$x = 0, l: w = 0, \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (10.12)$$

Введем в рассмотрение безразмерную координату $x_1 = \frac{x}{l}$ ($0 \leq x_1 \leq 1$). Уравнение (10.11) принимает более компактный вид:

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} + \eta^2 w + t_0^* \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0. \quad (10.13)$$

Здесь введены обозначения: $\eta^2 = \frac{Ehl^4}{RD}$, $t_0^* = \frac{Tl^2}{D}$.

Граничные условия также переписутся:

$$x_1 = 0, 1: w = 0, \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0. \quad (10.14)$$

Решение ищем в виде: $w = e^{\lambda x_1}$. Подставляя в (10.13) получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + t_0^* \lambda^2 + \eta^2 = 0,$$

корни которого: $\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left[-\frac{t_0^*}{2} \pm \left(\frac{t_0^{*2}}{4} - \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$.

В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами прогиб w представляется в виде суперпозиции частных решений

$$w = A_1 e^{\lambda_1 x_1} + A_2 e^{\lambda_2 x_1} + A_3 e^{\lambda_3 x_1} + A_4 e^{\lambda_4 x_1},$$

или, с учетом граничных условий (10.14):

$$w = A \sin m\pi x_1, \quad (10.15)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ - волновое число. Это число полуволн, возникающих в направлении образующей оболочки, в момент потери устойчивости. Оно должно быть целым. Линии, вдоль которых $w = 0$, называются узловыми линиями. Подставляя (10.15) в (10.13) и, сокращая на $\sin m\pi x_1$, получим:

$$m_1^4 + \eta^2 - t_0^* m_1^2 = 0 \quad (m_1 = m\pi),$$

откуда

$$t_0^* = m_1^2 + \frac{\eta^2}{m_1^2}. \quad (10.16)$$

В зависимости от m_1 получаем спектр критических нагрузок. Интерес представляет минимальная критическая нагрузка. Обозначая $m_1^2 = z$, получаем:

$$t_0^* = z + \frac{\eta^2}{z}.$$

Из условия минимума $\frac{\partial t_0^*}{\partial z} = 0$ записываем соотношение для определения z :

$$1 - \frac{\eta^2}{z^2} = 0,$$

откуда $z_{кр} = m_{1,кр} = \eta$. Подставляя в (10.16), получаем $t_{0,кр}^* = 2\eta$, или, с

учетом ранее введенных обозначений: $\frac{T_{0,к} l^2}{D} = \frac{2l^2}{R} \sqrt{\frac{Eh}{D}}$.

Таким образом, критическое значение погонного сжимающего усилия имеет вид:

$$T_{0,к} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R}. \quad (10.17)$$

Критическое сжимающее напряжение

$$\sigma_{0,к} = \frac{T_{0,к}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh}{R}. \quad (10.18)$$

При $\nu = 0.3$:

$$\sigma_{0,к} = 0.605 \frac{Eh}{R}. \quad (10.19)$$

Соотношения (10.18) и (10.19) служат для определения критического напряжения при осевом сжатии цилиндра. Определим

волновое число $m_1 = m\pi = \eta^{\frac{1}{2}}$. С учетом выражения изгибной

жесткости $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ и обозначения $\eta^2 = \frac{Ehl^4}{RD}$ получаем формулу

для количества полуволн в направлении образующей цилиндра:

$$m = \frac{[12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}} l}{\pi \sqrt{Rh}}. \quad (10.20)$$

Предположим, что рассматривается оболочка средней длины (например $l = R$). Тогда

$$m = \frac{[12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}} \sqrt{R}}{\pi \sqrt{h}}.$$

Количество полуволн растет с увеличением радиуса оболочки и с уменьшением ее толщины. Если, например, положить $\frac{R}{h} = 900$, то $m = 14$.

Определим размер полуволн. Пусть l_1 - длина полуволны. Тогда $ml_1 = l$ - длина оболочки. Следовательно $l_1 = \frac{l}{m} = \frac{\pi \sqrt{Rh}}{[12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}}}$. При

$\nu = 0,3$: $l_1 = 1,727 \sqrt{Rh}$. Таким образом, длина полуволны имеет порядок длины зоны краевого эффекта.

Определим полную критическую сжимающую нагрузку для цилиндра:

$$T = 2\pi R T_{0,k}.$$

С учетом (10.17) получаем:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E h^2. \quad (10.21)$$

В формулы (10.17), (10.18) и (10.21) длина оболочки не входит. Таким образом, при потере устойчивости цилиндра в случае осевого сжатия реализуется локальная потеря устойчивости и граничные условия в этой ситуации не существенны. Этим потеря устойчивости цилиндрической оболочки при сжатии отличается от потери устойчивости сжатого стержня. Известно, что Эйлера критическая нагрузка существенно зависит от длины стержня и условий его закрепления.

Несимметричная деформация.

Эксперименты показывают, что в реальных условиях симметричная форма потери устойчивости не реализуется, Это означает, что функции прогиба и усилий должны зависеть не только от продольной, но и от дуговой координаты:

$$\begin{aligned} w &= w(x, y), \\ F &= F(x, y). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Система основных разрешающих уравнений имеет вид (10.5). Как и в случае симметричной деформации будем рассматривать граничные условия шарнирного опирания (10.9). Решение системы уравнений (10.5) ищем в виде:

$$\begin{aligned} F &= A \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \\ w &= B \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Здесь $m_1 = \frac{m\pi R}{l}$, m и n - волновые числа (количество полуволн соответственно в продольном и окружном направлениях). Легко проверяется, что функции усилий и прогиба в виде (10.23) удовлетворяют и уравнениям (10.5) и граничным условиям (10.9). Подставляя (10.23) в (10.5) и сокращая на произведение синусов, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}A + \alpha_{12}B &= 0, \\ \alpha_{21}A + \alpha_{22}B &= 0. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Коэффициенты α_{ij} имеют вид: $\alpha_{11} = (m_1^2 + n^2)^2$, $\alpha_{12} = -EhRm_1^2$, $\alpha_{21} = \frac{m_1^2 R}{D}$, $\alpha_{22} = (m_1^2 + n^2)^2 - \frac{T_0 m_1^2 R^2}{D}$. Приравнивая к нулю определитель из коэффициентов α_{ij} , после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \frac{T_0 R^2}{D} &= \frac{(m_1^2 + n^2)^2}{m_1^2} + \frac{EhR^2}{D} \frac{m_1^2}{(m_1^2 + n^2)^2}, \text{ или} \\ t_0^* &= z + \frac{EhR^2}{D} \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Обозначения: $t_0^* = \frac{T_0 R^2}{D}$, $z = \frac{(m_1^2 + n^2)^2}{m_1^2}$.

Из условия минимума $\frac{\partial t_0^*}{\partial z} = 0$:

$$z_{кр} = \sqrt{\frac{EhR^2}{D}}. \quad (10.26)$$

Подставляя (10.26) в (10.25) с учетом принятых обозначений, получаем:

$$T_{0,к} = \frac{2\sqrt{EhD}}{R},$$

или, с учетом выражения изгибной жесткости D

$$T_{0,\kappa} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R},$$

Что полностью совпадает с формулой (10.17). Таким образом, несимметричность формы волнообразования не влияет на величину критической нагрузки, а, следовательно, и критических напряжений. Для определения количества полуволн перепишем соотношение (10.26) с учетом принятых обозначений:

$$\frac{(m_1^2 + n^2)^2}{m_1^2} = \sqrt{\frac{EhR^2}{D}}. \quad (10.27)$$

Очевидно, что это единственное уравнение для нахождения m_1 и n . Следовательно, в рамках данной постановки задачи, их определить невозможно. Можно только отметить, что, как показывают эксперименты, количество полуволн в окружном и продольном направлениях сопоставимы между собой.

Лекция 11

Метод В.З. Власова.

Установлено, что при осевом сжатии цилиндрической оболочки реализуется локальная форма потери устойчивости с волнообразованием в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Условия закрепления торцов оболочки не влияют на величину критической силы. Множеству видов граничных условий соответствует множество форм волнообразования и единственная критическая нагрузка. Идея метода Власова состоит в том, чтобы задачу нахождения критической нагрузки отделить от задачи определения конкретной формы потери устойчивости. В соответствии с данным методом ко второму уравнению системы (10.5) применим оператор $\nabla^2 \nabla^2 (*)$. Получим уравнение:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} (\nabla^2 \nabla^2 F)''_{xx} + T_0 (\nabla^2 \nabla^2 w)''_{xx} = 0,$$

или, с учетом первого уравнения системы (10.5)

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} w''''_{xxxx} + T_0 (\nabla^2 \nabla^2 w)''_{xx} = 0. \quad (11.1)$$

Это уравнение восьмого порядка относительно функции w . Решение его будем искать в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -\lambda w''_{xx}. \quad (11.2)$$

При этом

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 \nabla^2 w) = \nabla^2 \nabla^2 (-\lambda w''_{xx}) = -\lambda (\nabla^2 \nabla^2 w)''_{xx} = \lambda^2 w''''_{xxxx}.$$

Уравнение (11.1) принимает вид:

$$D\lambda^2 w''''_{xxxx} + \frac{Eh}{R^2} w''''_{xxxx} - T_0 \lambda w''''_{xxxx} = 0,$$

или, после сокращения

$$T_0 = D\lambda + \frac{Eh}{R^2 \lambda}. \quad (11.3)$$

Минимизируя T_0 по λ , получаем:

$$\lambda = \sqrt{\frac{Eh}{R^2 D}}. \quad (11.4)$$

Подставляя λ в (11.3) получаем критическое значение погонной сжимающей нагрузки

$$T_{0,k} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R},$$

такое же, как и в предыдущих двух случаях. Если значение λ из формулы (11.4) подставить в (11.2) то получим уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \sqrt{\frac{Eh}{DR^2}} w''_{xx} = 0,$$

которое определяет множество форм потери устойчивости.

Еще один подход к решению задачи.

Зададимся следующей зависимостью:

$$F = Aw, \quad (11.5)$$

где A - неопределенная величина. Выбор данной зависимости следует из вида уравнений (10.5). После подстановки (11.5) в систему разрешающих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{AR} w''_{xx} &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{Aw''_{xx}}{DR} + \frac{T_0}{D} w''_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Из этих уравнений:

$$\frac{Eh}{AR} = \frac{T_0}{D} - \frac{A}{DR}, \text{ или}$$

$$T_0 = \frac{A}{R} + \frac{EhD}{AR}. \quad (11.7)$$

Для минимизации T_0 необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial T_0}{\partial A} = 0$, из которого следует:

$$A = \pm \sqrt{EhD}. \quad (11.8)$$

Знак (-) можно отбросить, так как он приводит к отрицательному значению нагрузки. После подстановки (11.8) в (11.7):

$$T_{0,k} = \frac{2\sqrt{EhD}}{R}, \text{ или, с учетом значения изгибной жесткости}$$

$$T_{0,k} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R}, \text{ что полностью соответствует значениям}$$

критического сжимающего усилия, полученным ранее. Если параметр A из (11.8) подставить в одно из уравнений системы (11.6), то получаем соотношение вида:

$$\nabla^2 \nabla^2 w \pm \sqrt{\frac{Eh}{D}} \frac{1}{R} w''_{xx} = 0. \quad (11.9)$$

Это уравнение описывает форму потери устойчивости при нагрузке, равной критической. Если второе слагаемое взять со знаком (+), то функция прогиба w носит периодический характер по координатам x, y и является ограниченной. Знак (-) предполагает неограниченные значения функции прогиба, что не соответствует физическому смыслу задачи.

Из линейной зависимости $F = Aw$, или $F = \sqrt{EhD}w$ следует:

$F''_{xx} = \sqrt{EhD}w''_{xx}$, $F''_{xy} = \sqrt{EhD}w''_{xy}$, $F''_{yy} = \sqrt{EhD}w''_{yy}$, или, с учетом соответствующих обозначений

$$T_2 = \sqrt{EhD}\chi_1, \quad S = -\sqrt{EhD}\tau, \quad T_1 = \sqrt{EhD}\chi_2.$$

Последние зависимости показывают, что мембранные усилия пропорциональны изменению параметров кривизны и кручения срединной поверхности оболочки.

Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при внешнем давлении.

Будем предполагать, что оболочка находится в условиях всестороннего сжатия (рис.10.4), и шарнирно закреплена по торцам,

то есть, при $x=0, l$: $w=0, w''_{xx}=0, F=0, F''_{xx}=0$.

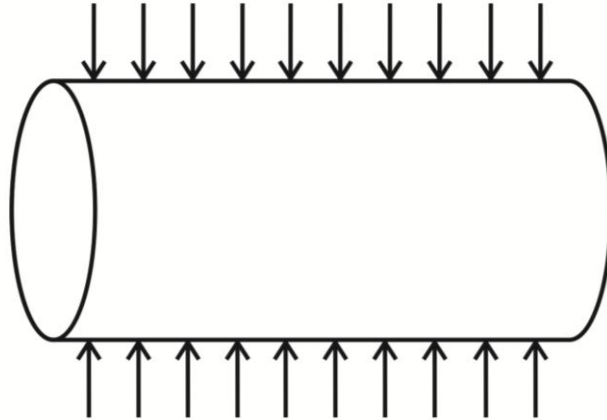


Рис 10.4

В условиях безмоментного докритического состояния мембранные усилия записываются в виде (9.28-9.30). При этом, на основании (10.4), получаем следующую систему уравнений нейтрального равновесия:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} + \frac{qR}{2} w''_{xx} + qR w''_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде:

$$\begin{aligned} F &= A \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \\ w &= B \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Представленные функции являются точными интегралами системы уравнений (11.10), кроме того, они удовлетворяют граничным условиям шарнирного опирания. Приняты следующие обозначения:

n - число волн в окружном направлении оболочки; $m_1 = \frac{m\pi R}{l}$, m - число полуволн в направлении образующей оболочки. Подставляя (11.11) в (11.10) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} A + \alpha_{12} B &= 0, \\ \alpha_{21} A + \alpha_{22} B &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю определитель данной системы, после несложных преобразований получаем следующее выражение для критической нагрузки:

$$q = \frac{D}{R^3} \left\{ \frac{(m_1^2 + n^2)^2}{\left(\frac{m_1^2}{2} + n^2\right)} + \frac{\beta^2 m_1^4}{(m_1^2 + n^2)\left(\frac{m_1^2}{2} + n^2\right)} \right\}, \quad (11.12)$$

где $\beta^2 = \frac{EhR^2}{D}$.

Для минимизации критической нагрузки по волновым числам, необходимо потребовать выполнения условий:

$$\frac{\partial q}{\partial m_1^2} = 0, \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial n^2} = 0. \quad (11.14)$$

Условие (11.13) не выполняется, поскольку производная $\frac{\partial q}{\partial m_1^2}$ всегда положительна, то есть с ростом m_1 критическая нагрузка возрастает. Очевидно, что минимальная нагрузка реализуется при одной полуволне в направлении образующей оболочки ($m=1$), что соответствует $m_1 = \frac{\pi R}{l}$. Из (11.14) находим критическое значение n , и, подставляя его в (11.12), с учетом выражения изгибной жесткости D получаем:

$$q_{кр} = \frac{0,85Eh}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}l} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(1 - \frac{0,9\sqrt{hR}}{l}\right). \quad (11.15)$$

Полученная формула известна как формула Мизеса. Обращает на себя внимание зависимость критической нагрузки от длины оболочки, Таким образом, в отличие от случая осевого сжатия, здесь влияние граничных условий существенно. Анализ характера волнообразования показывает, что в продольном направлении оболочки реализуется Эйлерова форма потери устойчивости, а в окружном - локальная. Определим кольцевые напряжения:

$$\sigma_{0,кр} = \frac{T_{2,0}}{h} = \frac{q_{кр}R}{h} = \frac{0,85ER}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}l} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(1 - \frac{0,9\sqrt{hR}}{l}\right). \quad (11.16)$$

Проведем оценку величины этих напряжений. Предположим для определенности, что длина оболочки равна ее радиусу ($l=R$).

Кроме того, если оболочка тонкая, то величина $\frac{\sqrt{hR}}{l}$ весьма мала. В этом случае

$$\sigma_{0,кр} \approx \frac{0,85}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} E \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (11.17)$$

Сравнивая полученный результат с критическими напряжениями при осевом сжатии (10.19), можно констатировать, что при внешнем давлении напряжения в момент потери устойчивости существенно ниже. Это говорит о том, что при внешнем давлении оболочка хуже противодействует нагрузке.

В целях упрощения решения задачи цилиндрические оболочки принято делить на классы: длинные оболочки, оболочки средней длины, короткие оболочки. Длина оболочки характеризуется параметрами $\theta = \frac{\sqrt{hR}}{l}$, $m_1 = \frac{\pi R}{l}$.

Длинные оболочки: $m_1^2 \ll 1$, $\theta \rightarrow 0$.

Оболочки средней длины: $m_1^2 \sim 1$, $\theta \sim \alpha \cdot 10^{-2}$, где $1 \leq \alpha \leq 10$.

Короткие оболочки: $m_1^2 \gg 1$, $\theta \sim \alpha \cdot 10^{-1}$, где $1 \leq \alpha \leq 10$.

С учетом этой классификации можно сделать вывод, что именно для длинных оболочек и оболочек средней длины справедлива формула (11.17).

Обратимся вновь к уравнениям (11.10), заранее предполагая, что исследуемая оболочка относится к классу оболочек средней длины. Имея в виду решение (11.11), вычислим производные

$$w''_{xx} = -B \frac{m_1^2}{R^2} \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R},$$

$$w''_{yy} = -B \frac{n^2}{R^2} \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R},$$

$$F''_{xx} = -A \frac{m_1^2}{R^2} \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R},$$

$$F''_{yy} = -A \frac{n^2}{R^2} \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}.$$

Принимаем во внимание, что для оболочки средней длины $m_1^2 \sim 1$. Количество волн в окружном направлении, как следует из соотношения (11.14), существенно больше единицы. Таким образом $n^2 \gg 1$, или $n^2 \gg m_1^2$. С учетом этого можно утверждать, что

вычисленные производные имеют различный порядок, а именно: $w''_{yy} \gg w''_{xx}$, $F''_{yy} \gg F''_{xx}$. Это позволяет, в свою очередь, уравнения (11.10) записать в упрощенной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + qR \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} F &= f(x) \sin \frac{ny}{R}, \\ w &= \overline{w(x)} \sin \frac{ny}{R}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Подставляя (11.19) в (11.18), после преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{n^4}{R^4} f(x) + \frac{Eh}{R} \frac{d^2 \overline{w}}{dx^2} &= 0, \\ D \frac{n^2}{R^4} \overline{w} - \frac{1}{R} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{qn^2}{R} \overline{w} &= 0. \end{aligned}$$

С учетом первого уравнения второе перепишем следующим образом:

$$D \frac{n^4}{R^4} \overline{w} + \frac{EhR^2}{n^4} \frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} - \frac{qn^2}{R} \overline{w} = 0, \text{ или} \quad (11.20)$$

$$\frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} - \lambda^4 \overline{w} = 0, \text{ где} \quad (11.21)$$

$$\lambda^4 = \frac{n^4}{EhR^2} \left(\frac{qn^2}{R} - \frac{Dn^4}{R^4} \right). \quad (11.22)$$

Уравнение (11.21) по форме совпадает с уравнением свободных колебаний балки. В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решение данного уравнения имеет вид:

$$\overline{w(x)} = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \operatorname{ch} \lambda x + D \operatorname{sh} \lambda x. \quad (11.23)$$

Для нахождения постоянных A, B, C, D необходимо сформулировать граничные условия.

1. Шарнирное опирание: $w = 0$, $w''_{xx} = 0$ при $x = 0, l$.

Постоянные A, C, D равны нулю и, следовательно, $\overline{w(x)} = B \sin \lambda x$. При этом решение (11.19) конкретизируется:

$$w = B \sin \lambda x \sin \frac{ny}{R}. \quad (11.24)$$

Сравнивая данное решение с решением (11.11), получаем $\lambda = \frac{\pi R}{l}$. Подставляя λ в (11.22), после преобразований можно записать следующее соотношение:

$$\frac{qR^3}{D} = n^2 + \frac{\beta m_1}{n^6}, \text{ где} \quad (11.25)$$

$$\beta = \frac{EhR^2}{D}. \quad (11.26)$$

Вводя обозначение $n^2 = z$, последнее соотношение переписываем в виде:

$$\frac{qR^3}{D} = z + \frac{\beta m_1^4}{z^3}. \quad (11.27)$$

Минимизация по z дает позволяет записать выражение для волнового числа:

$$z = n^2 = 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\beta m_1}. \quad (11.28)$$

Подставляя (11.28) в (11.27) получаем формулу для критической нагрузки:

$$q_{кр} = \frac{0,85Eh}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}} l} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (11.29)$$

Данная формула полностью соответствует полученному ранее соотношению (11.17) для критического значения кольцевых напряжений. Она представляет собой упрощенный вариант формулы Мизеса для класса оболочек средней длины.

2. Жесткая заделка: $w = 0, w'_x = 0$ при $x = 0, l$.

Уточняя вид функции $\overline{w(x)}$ при выполнении граничных условий жесткого защемления, получаем следующий результат:

$$q_{кр}^{(з)} = 1,5q_{кр}, \quad (11.30)$$

где $q_{кр}$ - критическая нагрузка, определяемая по формуле (11.29) для случая шарнирного опирания.

3. Смешанное закрепление краев оболочки: $w = 0, w''_{xx} = 0$ при $x = 0$; $w = 0, w'_x = 0$ при $x = l$.

В этом случае получаем следующую зависимость между критическими нагрузками:

$$q_{кр}^{(с)} = 1,25q_{кр}. \quad (11.31)$$

4. Один конец оболочки шарнирно закреплен, другой конец свободен: $w=0$, $w''_{xx}=0$ при $x=0$; $w''_{xx}=0$, $w'''_{xxx}=0$ при $x=l$.

Свободный край оболочки испытывает деформацию смятия и принимает форму овала. При этом $n=2$ и, соответственно, $n^2=4$. Пренебрегать единицей по сравнению с n^2 нельзя. Таким образом, упрощенная система уравнений (11.18) в данном случае неприменима.

5. Оба конца оболочки свободны: $w''_{xx}=0$, $w'''_{xxx}=0$ при $x=0, l$.

В этом случае, как и в предыдущем, нельзя применять предлагаемую теорию, поскольку по всей длине оболочки испытывает деформацию смятия в овал ($n=2$). Однако, формальное применение полубезмоментной теории позволяет получить значение критической нагрузки в виде:

$$q_{кр} = \frac{n^2 D}{R^3}, \text{ или, при } n=2:$$

$$q_{кр} = \frac{4D}{R^3} \quad (11.32)$$

Более строгое решение на основании уравнений (11.10) дает следующее значение критической нагрузки:

$$q_{кр} = \frac{(n^2 - 1)D}{R^3}, \quad (11.33)$$

или, при $n=2$:

$$q_{кр} = \frac{3D}{R^3}. \quad (11.34)$$

Стоит отметить, что в формулы (11.32) и (11.34) длина не входит.

Изложенная теория устойчивости круговой цилиндрической оболочки средней длины носит название полубезмоментной теории В.З. Власова. Она основана на свойстве осциллирующей функции быстро возрастать по дуговой координате. Рассмотрим ее подробнее. Реализация допущений данной теории предполагает, что в первом из уравнений нейтрального равновесия (10.4) мы отбрасываем слагаемые $\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}$, а слагаемое $\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$ оставляем. С учетом выражения функции усилий, это означает пренебрежение мембранными усилиями T_2 и S по сравнению с T_1 . Кроме того, во

втором уравнении отбрасываются слагаемые $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$ при сохранении слагаемого $\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}$. Суммируя вышеизложенное, можно утверждать, что полубезмоментная теория В.З. Власова основана на допущениях:

$$T_2 = 0, S = 0, G_1 = 0, H = 0. \quad (11.35)$$

В рассмотренном случае полубезмоментная теория применена к решению задачи устойчивости, но ее можно использовать и применительно к задаче изгиба круговой цилиндрической оболочки средней длины, то есть при решении задачи прочности.

Лекция 12.

Кручение цилиндрической оболочки.

С большой степенью достоверности будем считать докритическое состояние безмоментным. Уравнения нейтрального равновесия получим, полагая в системе (10.4) $T_{1,0} = 0$, $T_{2,0} = 0$, $S_0 = -S$.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} + 2S w''_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Как показывают эксперименты, при кручении оболочка теряет устойчивость с образованием достаточно большого числа наклонных волн в окружном направлении. В направлении образующей оболочки, как и при внешнем давлении, реализуется Эйлерова форма потери устойчивости. В связи с этим уравнения (12.1) можно упростить в рамках полубезмоментной теории.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Решение ищем в виде:

$$F = f(x)e^{\frac{iny}{R}}, \quad w = \overline{w(x)}e^{\frac{iny}{R}}. \quad (12.3)$$

Здесь $f(x)$ и $\overline{w(x)}$ - функции, подлежащие определению. После подстановки (12.3) в (12.2) получаем:

$$\frac{n^4}{R^4} f + \frac{Eh}{R} \frac{d^2 \overline{w}}{dx^2} = 0,$$

$$D \frac{n^4}{R^4} \overline{w} - \frac{1}{R} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2S \cdot in}{R} \frac{d \overline{w}}{dx} = 0. \quad (12.4)$$

Выражая f через \overline{w} из первого уравнения, и, подставляя во второе, получаем соотношение вида:

$$\frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} + \frac{S}{h} \frac{d \overline{w}}{dx} + \lambda \overline{w} = 0. \quad (12.5)$$

Отсюда получаем сдвигающее усилие:

$$S_{кр} = \frac{1,21Eh}{(1-\nu^2)^{\frac{5}{8}}} \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{2R}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12.6)$$

или касательное напряжение

$$\tau_{кр} = \frac{S_{кр}}{h} = \frac{1,21E}{(1-\nu^2)^{\frac{5}{8}}} \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{2R}{l}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12.7)$$

Если положить $l = 2R$, то

$$\tau_{кр} = \frac{1,21E}{(1-\nu^2)^{\frac{5}{8}}} \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{5}{4}}. \quad (12.8)$$

Сравнение формул (10.19), (11.17) и (12.8) позволяет оценить порядок величины критических напряжений при осевом сжатии, внешнем давлении и кручении круговой цилиндрической оболочки. Очевидно, что критические напряжения при кручении лежат между соответствующими напряжениями при сжатии и внешнем давлении.

Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки при внешнем давлении.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную кольцевым шпангоутом (рис. 12.1). Очевидно, что расчет на устойчивость в этом случае предполагает два подхода. Шпангоут может быть достаточно гибким, и при потере устойчивости он будет деформироваться вместе с оболочкой. Критическая нагрузка будет возрастать за счет возрастания усредненной изгибной жесткости боковой поверхности вместе со

шпангоутом. С другой стороны, если шпангоут будет жестким, он не будет деформироваться. Количество полуволн по длине оболочки возрастет и, соответственно, увеличится критическая нагрузка. Будем жесткость шпангоута называть критической, если при введении его в конструкцию равновероятной становится потеря устойчивости как по одной, так и по нескольким полуволнам в продольном направлении.

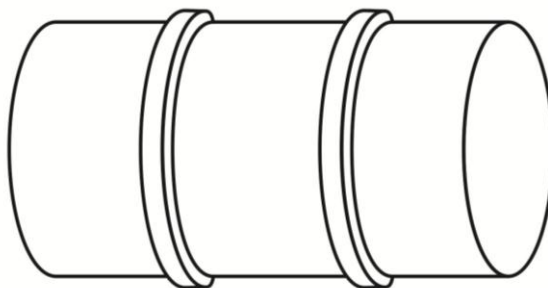


Рис 12.1

Рассмотрим шпангоут прямоугольного сечения (рис.12.2).

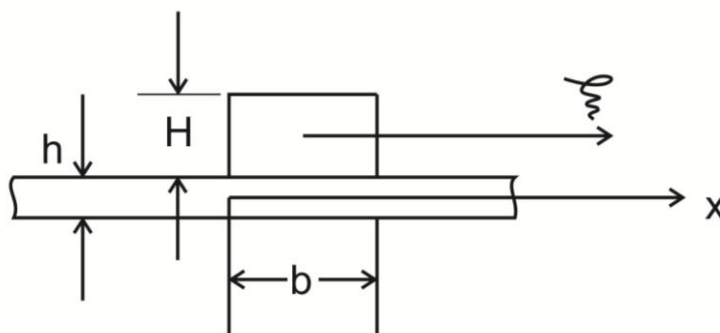


Рис 12.2

H и b - соответственно высота и ширина его профиля. Жесткость шпангоута, отнесенная к единице длины линии изменения координаты x : $D_1 = \frac{EI}{b}$. Здесь I - момент инерции сечения шпангоута относительно оси x . Предполагая, что $H \gg h$, можно записать

$$I = I_{\xi} + F \frac{H^2}{4}.$$

Для выбранного прямоугольного профиля шпангоута $I_{\xi} = \frac{bH^3}{12}$ - главный момент инерции сечения, $F = bH$ - площадь сечения.

Необходимо определить критическую жесткость шпангоута $D_{1,кр}$. Критическое внешнее давление для оболочки средней длины определяется по формуле (11.29). Если оболочка длинная, то реализуется формула (11.34). Оболочка ведет себя в этом случае как совокупность колец. Имея в виду, что шпангоут представляет собой кольцо, получаем критическое значение нагрузки для шпангоута:

$$q_{кр}^{ш} = \frac{D_1(n^2 - 1)}{R_1^3}, \text{ где} \quad (12.9)$$

$R_1 = R + \frac{H}{2}$ - радиус осевой линии шпангоута. Если шпангоут работает вне связи с оболочкой, то, при $n = 2$:

$$q_{кр}^{ш} = \frac{3D_1}{R_1^3}. \quad (12.10)$$

Если шпангоут работает вместе с оболочкой, то

$$q_{кр}^{ш} = \frac{D_1 n^2}{R_1^3}. \quad (12.11)$$

При этом считаем, что $n^2 \gg 1$. Само же волновое число n неизвестно. Чтобы оболочка теряла устойчивость вместе со шпангоутом, необходимо потребовать

$$q_{кр}^{ш} = q_{кр}. \quad (12.12)$$

Сопоставляя соотношения (12.12), (12.11) и (11.25) можно записать

$$\frac{D_1 n^2}{R_1^3} = \frac{D}{R^3} \left(n^2 + \frac{\beta m_1^4}{n^6} \right), \quad (12.13)$$

где параметр β имеет вид (11.26). Вводя обозначение $\delta = \frac{D_1}{D}$, и учитывая, что $R_1 \approx R$, из (12.13) получаем:

$$\delta = \left(1 + \frac{\beta m_1^4}{n^8} \right), \text{ откуда}$$

$$n^2 = \left(\frac{\beta m_1^4}{\delta - 1} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Подставляя последнее соотношение в (11.25), получаем формулу для критической нагрузки оболочки со шпангоутом:

$$q_{кр}^* = \frac{D}{R^3} n^2 \left(1 + \frac{\beta m_1^4}{n^8}\right) = \frac{D\delta}{R^3} \frac{\beta^{\frac{1}{4}} m_1}{(\delta-1)^{\frac{1}{4}}}. \quad (12.14)$$

Приравнивая критические нагрузки $q_{кр}^*$ и $q_{кр}$, вычисленные соответственно по формулам (11.29) и (12.14), находим минимальную критическую жесткость шпангоута:

$$D_{1,кр} = \frac{4}{3} D.$$

С таким шпангоутом оболочка теряет устойчивость по одной полуволне в направлении образующей. Если жесткость шпангоута будет достаточна для потери устойчивости по двум полуволнам, то

$$q_{кр}^* = 2q_{кр}.$$

В этом случае получаем максимальную жесткость шпангоута, при которой равновероятны формы потери устойчивости по одной и по двум полуволнам. Потеря устойчивости оболочки между шпангоутами – потеря устойчивости первого рода, а вместе со шпангоутом – общая потеря устойчивости.

Уравнения равновесия полой оболочки в ортогональных координатах линий кривизны срединной поверхности.

Приведем эти уравнения без вывода.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BT_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 = 0, \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BS) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AT_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 = 0, \quad (12.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (BN_2) + AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + T_1 \chi_1 + T_2 \chi_2 + 2S\tau \right) + q = 0. \quad (12.17)$$

Первые два уравнения являются условиями равновесия сил в проекции на касательную плоскость, а уравнение (12.17) записано в проекции на нормаль к срединной поверхности.

Уравнения моментов.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BH) - \frac{\partial}{\partial \beta} (AG_2) + G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + H \frac{\partial B}{\partial \alpha} + N_2 AB = 0, \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BG_1) - \frac{\partial}{\partial \beta} (AH) - H \frac{\partial A}{\partial \beta} - G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - N_1 AB = 0. \quad (12.19)$$

В этих уравнениях наряду с введенными ранее обозначениями обобщенных сил и моментов (3.6), (3.7) и (5.6) приняты следующие обозначения:

A, B - коэффициенты первой и второй квадратичной формы срединной поверхности;

α, β - ортогональные координаты вдоль линий главных кривизн.

Деформации.

$$\varepsilon_1 = e_{11} + \frac{1}{2} e_{13}^2, \quad \varepsilon_2 = e_{22} + \frac{1}{2} e_{23}^2, \quad \omega = e_{12} + e_{21} + e_{13} e_{23}. \quad (12.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1}, \quad e_{22} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad e_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \\ e_{21} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad e_{13} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad e_{23} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Искривления (изменения параметров кривизны и кручения срединной поверхности).

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \quad \chi_2 = \frac{1}{BA^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \\ \tau &= -\frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Если в записанных соотношениях усилия T_1, T_2, S, N_1, N_2 , моменты G_1, G_2, H , а также перемещения u, v, w являются полными выражениями (не вариациями), то уравнения (12.15) – (12.19) являются разрешающими нелинейными уравнениями равновесия полой оболочки, деформирующейся с большими прогибами.

Если прогибы малы по сравнению с толщиной, то в выражениях для деформаций (12.20) необходимо отбросить нелинейные слагаемые. Получим:

$$\varepsilon_1 = e_{11}, \quad \varepsilon_2 = e_{22}, \quad \omega = e_{12} + e_{21}. \quad (12.23)$$

В уравнении (12.17) отбрасываем слагаемые $T_1 \chi_1, T_2 \chi_2, 2S\tau$. В итоге система уравнений (12.15) – (12.19) будет представлять из себя систему уравнений равновесия полой оболочки произвольной геометрии.

Пусть все усилия, моменты и перемещения являются вариациями неизвестных функций. В силу малости вариаций в этом случае также справедливы соотношения (12.23). Уравнения (12.15) – (12.19) будут уравнениями нейтрального равновесия, описывающими процесс потери устойчивости оболочки.

Устойчивость не пологой цилиндрической оболочки.

Как было отмечено ранее, круговая цилиндрическая оболочка не является пологой по своей геометрии. Пологость определяется лишь в смысле волнообразования при выполнении условия $n > 2$. В этом случае в рамках каждой полуволны в окружном направлении при малых прогибах может выполняться условие пологости (9.7). Если $n = 2$, то оболочка сминается в овал и условие пологости нарушается (рис. 12.3).

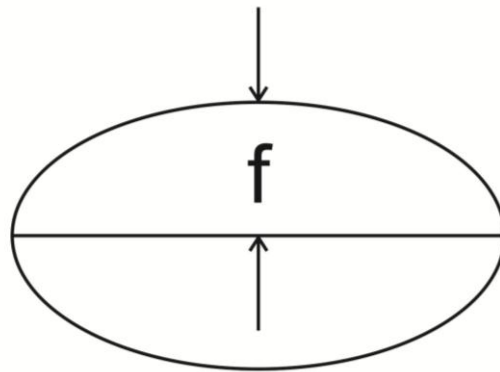


Рис.12.3

Для описания процесса потери устойчивости при этом необходимо использовать уточненные уравнения нейтрального равновесия, которые получаются из соответствующих нелинейных уравнений равновесия путем варьирования.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - S_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_{2,0} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + S_0 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + T_{1,0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + \frac{T_2}{R} + T_{1,0} \chi_1 + T_{2,0} \chi_2 + 2S_0 \tau + q \varepsilon_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

При записи этих уравнений в перемещениях, необходимо воспользоваться соотношениями упругости (3.6), (5.6), имея в виду при этом, следующие выражения для деформаций и искривлений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right), \quad \tau = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right). \end{aligned} \quad (12.25)$$

Во всех приведенных соотношениях подчеркнутые слагаемые удерживаются для не пологих оболочек.

Устойчивость длинной цилиндрической оболочки.

В соответствии с введенной ранее классификацией для длинных оболочек выполняются условия $\frac{\sqrt{hR}}{l} \rightarrow 0$, $(\frac{\pi R}{l})^2 \ll 1$. Как уже было отмечено, особенностью поведения длинных оболочек при потере устойчивости является образование двух полуволн в окружном направлении (рис. 12.3).

Условие пологости нарушается, и для описания процесса потери устойчивости необходимо использовать систему уравнений (12.24). В этих уравнениях $T_{1,0} = -T_0$, $T_{2,0} = -q_0 R$, $S_0 = -S$ - мембранные усилия в безмоментном докритическом состоянии, u, v, w - вариации прогибов. Решение уравнений (12.24) ищем в виде:

$$u = A \cos\left(\frac{m_1 x}{R} + \frac{ny}{R}\right); \quad v = B \sin\left(\frac{m_1 x}{R} + \frac{ny}{R}\right); \quad w = C \sin\left(\frac{m_1 x}{R} + \frac{ny}{R}\right). \quad (12.26)$$

Уравнения (12.24) линейные относительно вариаций перемещений, с постоянными коэффициентами, поэтому соотношения (12.26) являются их точными решениями. Вместе с тем, вопрос об удовлетворении граничных условий в данном случае не рассматривается, а длина оболочки исключается из базы определяющих параметров. Это возможно лишь для длинных оболочек, так как для них условия закрепления не оказывают существенного влияния на величину критической нагрузки. Необходимо лишь потребовать ограниченности решения ($u, v, w \neq \infty$). Кроме того, решение должно быть периодичным по дуговой координате, то есть волновое число n должно быть целым. Подставляя (12.26) в (12.24) получаем систему из трех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}A + \alpha_{12}B + \alpha_{13}C &= 0, \\ \alpha_{21}A + \alpha_{22}B + \alpha_{23}C &= 0, \\ \alpha_{31}A + \alpha_{32}B + \alpha_{33}C &= 0. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Для существования не нулевого решения, необходимо, чтобы обращался в ноль определитель, составленный из коэффициентов α_{ij} .

$$\Delta = 0. \quad (12.28)$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} T_0 m_1^2 n^2 (n^2 + 1) + q_0 R n^4 (n^2 - 1) + 2 S m_1 n^3 (n^2 - 1) = \\ = K(1 - \nu^2) m_1^4 + \frac{D}{R^2} n^4 (n^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (12.29)$$

При получении этого уравнения предполагалось, что $m_1^2 \ll n^2$. Соответственно, слагаемые $m_1^2 n^2$ и m_1^4 рассматривались как слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с $n^4 (n^2 - 1)$ и n^4 и отбрасывались.

Осевое сжатие.

В уравнении (12.29) полагаем $q_0 = 0$. $S = 0$. Соответственно T_0 имеет вид:

$$T_0 = \frac{K(1 - \nu^2) m_1^2}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{D}{R^2} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{m_1^2 (n^2 + 1)}. \quad (12.30)$$

Для длинных оболочек волновое число $n = 2$. Количество полуволн m в продольном направлении не известно, поэтому необходимо минимизировать T_0 по m_1 . Из условия минимума $\frac{\partial T_0}{\partial m_1} = 0$ находим m_1 и, подставляя в (12.30), получаем:

$$\begin{aligned} T_{0,кр} = 0,2\sqrt{3} \frac{Eh^2}{R(1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ или} \\ \sigma_{0,кр} = \frac{0,34}{(1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{Eh}{R}. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Для оболочек средней длины вместо коэффициента $\frac{0,34}{(1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}$, который при $\nu = 0,3$ имеет значение 0,356, фигурирует коэффициент 0,605. Если предположить, что в продольном направлении оболочка теряет устойчивость по одной полуволне ($m = 1$), то $m_1 = \frac{\pi R}{l}$. При этом оболочка теряет устойчивость как тонкостенный трубчатый стержень. Имея в виду в этом случае, что $n = 1$, из (12.30) получаем:

$$T_{0,кр} = \frac{Eh\pi^2 R^2}{2l^2} \quad (12.32)$$

Данная формула соответствует известной формуле Эйлера для критической нагрузки сжатого стержня.

Внешнее давление.

$T_0 = 0$, $S = 0$. Из уравнения (12.29) получаем:

$$q_0 R = \frac{K(1-\nu^2)m_1^4}{n^4(n^2-1)} + \frac{D(n^2-1)}{R^2}. \quad (12.33)$$

При $l \rightarrow \infty$ и $m = 1$ параметр $m_1 = \frac{\pi R}{l} = 0$ Критическое внешнее давление имеет вид:

$$q_{0,кр} = \frac{D(n^2-1)}{R^3}, \quad (12.34)$$

или, при $n = 2$

$$q_{0,кр} = \frac{3D}{R^3},$$

что совпадает с формулой (11.34).

Кручение.

$q_0 = 0$, $T_0 = 0$. Выражение для сдвигающего усилия принимает вид:

$$2S = \frac{K(1-\nu^2)m_1^2}{n^3(n^2-1)} + \frac{D}{R^2} \frac{n(n^2-1)}{m_1}. \quad (12.35)$$

В данном случае нельзя утверждать, что в продольном направлении возникает одна полуволна. Минимизируя S по m_1 и, полагая $n = 2$, получаем:

$$\tau_{кр} = \frac{S_{кр}}{h} = \frac{0,66E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12.36)$$

Совместное действие осевого сжатия и внешнего давления.

$S = 0$. Удобно представить зависимость критического осевого усилия от уровня внешнего давления:

$$T_0 = f(m_1^2, n^2, q_0).$$

После минимизации по m_1 , получаем:

$$T_{0,кр} = \left[0,48K(1-\nu^2) \left(\frac{3D}{R^3} - q_0R \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12.37)$$

Учет поперечного давления обеспечивается слагаемым q_0R . Если данное слагаемое положительно (внешнее давление), то критическая осевая нагрузка падает. В противном случае (внутреннее давление) – повышается.

Лекция 13.

Устойчивость цилиндрической оболочки с учетом краевого эффекта.

В рамках постановки задачи устойчивости было сделано предположение, что при изменении внешнего давления в пределах $0 \leq q \leq \bar{q}$, не происходит искривления образующей оболочки. Это позволяет считать ее докритическое состояние безмоментным. Однако, у краев оболочки возникает местный изгиб, что противоречит данному предположению (рис. 9.5). Противоречие удается обойти формулируя граничные условия для вариаций функции усилий и прогиба, то есть формально закрепляя оболочку лишь в момент потери устойчивости, когда нагрузка достигает уровня \bar{q} . В реальных условиях она закреплена с самого начала нагружения, поэтому не учитывать краевой эффект нельзя. Таким образом, учет краевого эффекта означает отказ от допущения о безмоментности докритического состояния. В связи с этим будем разбивать напряженное состояние оболочки на два этапа.

1. Основное состояние (до потери устойчивости).

2. Состояние, связанное с потерей устойчивости, определяемое вариациями искомых функций.

Первое состояние считаем моментным и, в целях упрощения решения задачи, осесимметричным, то есть $w = w(x)$. В этом случае уравнения равновесия записываются в виде (9.10), (9.11), которые, как было показано, преобразуются к системе уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} &= -\frac{Eh}{R} w, \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 F}{dx^2} &= q. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Из этих уравнений, в свою очередь, легко получается уравнение относительно w (9.14). Решение этого уравнения было представлено в виде (9.15). Предположим, что оболочка шарнирно оперта, то есть $w=0, w''_{xx}=0$ при $x=0, l$. Используя эти условия, находим константы интегрирования в решении (9.15). Нахождение функции прогиба позволяет определить все компоненты напряженно деформированного состояния до потери устойчивости. В частности, из первого уравнения системы (13.1) находим кольцевое усилие

$$T_2 = F''_{xx} = -\frac{Eh}{R} w. \quad (13.2)$$

Второе состояние определяется уравнениями в вариациях (10.1). Имея в виду осесимметричность докритического состояния, в этих уравнениях необходимо положить $w''_{yy} = w''_{xy} = 0$. Кроме того, отсутствие до момента потери устойчивости осевого усилия и сдвига предполагает, что $T_1 = F''_{yy} = 0$, и $S = -F''_{xy} = 0$. Таким образом, уравнения (10.1) упрощаются и приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} + Ehw''_{xx} \delta w''_{yy} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} - F''_{xx} \delta w''_{yy} - w''_{xx} \delta F''_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Граничные условия для этих уравнений в случае шарнирного опирания оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta w = 0, \quad \delta w''_{xx} = 0, \\ \delta F''_{xx} = 0, \quad \delta F''_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Производные от функции усилий и прогиба без знака вариации считаются известными и определяются из уравнений (13.1) для первого состояния. Наличие в этих уравнениях множителя w''_{xx} является характерным именно для случая учета краевого эффекта, поскольку предполагая безмоментность докритического состояния вместо уравнений (13.1) необходимо использовать уравнения (9.24) и (9.25). При этом кольцевое усилие сразу может быть записано в виде $T_2 = -qR$. В рассматриваемом случае с учетом выражения функции прогиба (9.15) и соотношения (13.2) для кольцевого усилия получаем следующую зависимость:

$$T_2 = -\frac{Eh}{R} \left[e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{\bar{q}}{4\beta^4} \right] \dots (13.5)$$

Таким образом, исследование процесса потери устойчивости оболочки в предположении моментности докритического состояния требует решения системы линейных уравнения (13.3) с переменными коэффициентами. В этом сложность решения данной задачи.

Круговая цилиндрическая оболочка под действием синусоидальной нагрузки.

Рассмотрим оболочку (рис. 13.1), нагруженную поперечной нагрузкой, изменяющейся по закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (13.6)$$

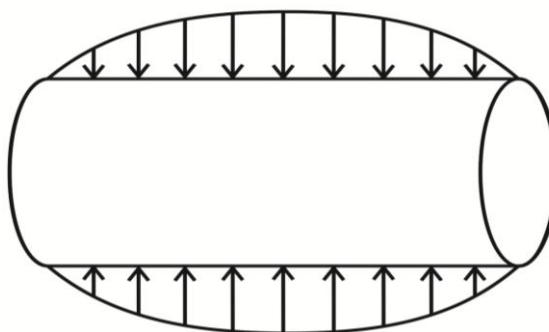


Рис 13.1

Вводя в рассмотрение параметр $m_1 = \frac{\pi R}{l}$, перепишем соотношение (13.6) в виде:

$$q = q_0 \sin \frac{m_1 x}{R}. \quad (13.7)$$

Будем предполагать, что оболочка шарнирно оперта, то есть, при $x=0, l$: $w=0$, $w''_{xx}=0$. Эти условия выполняются до момента потери устойчивости (в первом состоянии). В момент потери устойчивости (во втором состоянии) на концах оболочки выполняются условия (13.4). Уравнение равновесия, описывающее состояние оболочки до момента потери, в соответствии с соотношением (9.14) имеет вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q_0}{D} \sin \frac{m_1 x}{R}. \quad (13.8)$$

Решение этого уравнения ищем в форме правой части:

$$w = A \sin \frac{m_1 x}{R}. \quad (13.9)$$

Здесь A - коэффициент, подлежащий определению. Подставляя (13.9) в (13.8) получаем:

$$A \left(\frac{m_1^4}{R^4} + 4\beta^4 \right) \sin \frac{m_1 x}{R} = \frac{q_0}{D} \sin \frac{m_1 x}{R}. \text{ Из этого соотношения}$$

$$A = \frac{q_0 R^4}{D(m_1^4 + 4R^4 \beta^4)}.$$

Таким образом, для первого состояния

$$w = \frac{q_0 R^4}{D(m_1^4 + 4R^4 \beta^4)} \sin \frac{m_1 x}{R}. \quad (13.10)$$

Решение в форме (13.10) удовлетворяет всем поставленным граничным условиям. В рамках дальнейшего решения задачи вводим решение (13.10) в уравнения (13.3). Получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} - \frac{Eh q_0 m_1^2 R^2}{D(m_1^4 + 4R^4 \beta^4)} \sin \frac{m_1 x}{R} \delta w''_{yy} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} + \frac{Eh}{R} \frac{q_0 R^4}{D(m_1^4 + 4R^4 \beta^4)} \sin \frac{m_1 x}{R} \delta w''_{yy} + \\ + \frac{m_1^2 q_0 R^2}{D(m_1^4 + 4R^4 \beta^4)} \sin \frac{m_1 x}{R} \delta F''_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Если предположить безмоментность докритического состояния оболочки, то в левой части уравнения (13.8) необходимо отбросить слагаемое $\frac{d^4 w}{dx^4}$. Тогда прогиб w запишется в виде:

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0 R^4}{4DR^4 \beta^4} \sin \frac{m_1 x}{R}, \text{ или, после преобразования} \\ w &= \frac{q_0}{4D\beta^4} \sin \frac{m_1 x}{R}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

В этом случае система уравнений нейтрального равновесия по сравнению с системой (13.11) упростится:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \delta F + \frac{Eh}{R} \delta w''_{xx} &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 \delta w - \frac{\delta F''_{xx}}{R} + \frac{Eh}{R} \frac{q_0}{D} \frac{1}{4\beta^4} \sin \frac{m_1 x}{R} \delta w''_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Данная система уравнений получается из системы (13.3) путем отбрасывания слагаемых, содержащих множитель w''_{xx} и записи функции прогиба в виде (13.12). Сравнение систем уравнений нейтрального равновесия (13.11) и (13.12) позволяет сделать вывод, что при учете краевого эффекта (моментности докритического состояния) удерживается слагаемое m_1^4 наряду со слагаемым $4R^4\beta^4$.

Имея в виду принятые обозначения: $m_1^4 = \left(\frac{\pi R}{l}\right)^4$,

$4R^4\beta^4 = \frac{EhR^2}{D} = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2}$, можно утверждать, что эти слагаемые

одного порядка, если $m_1^4 = \left(\frac{\pi R}{l}\right)^4 \gg 1$. Данное условие реализуется

для коротких оболочек. Таким образом, именно для коротких оболочек учет краевого эффекта становится существенным.

Проанализируем сумму $m_1^4 + 4R^4\beta^4$:

$$m_1^4 + 4R^4\beta^4 = m_1^4 \left(1 + \frac{4R^4\beta^4}{m_1^4}\right) = m_1^4 \left[1 + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4\theta^4}\right] \approx m_1^4 \left(1 + \frac{0,1}{\theta^4}\right).$$

Здесь $\theta = \frac{\sqrt{hR}}{l}$. В лекции 11 была представлена классификация, в

соответствии с которой для коротких оболочек $\theta \leq 1$, следовательно $\frac{0,1}{\theta^4} \sim 10$. Учет краевого эффекта означает удержание единицы по

сравнению с величиной $\frac{0,1}{\theta^4}$. Анализируя формулу Мизеса (11.15),

можно также сделать вывод, что удержание параметра θ позволяет уточнить величину критической поперечной нагрузки. При этом, чем короче оболочка, тем это уточнение более значимое.

Решение системы уравнений (13.11) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \delta F &= A \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \\ \delta w &= B \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Это решение справедливо при нагрузке, равномерно распределенной по длине оболочки, поэтому по координате x его можно рассматривать лишь как приближенное, но соответствующее физической картине поведения оболочки. В то же время по координате y оно является точным интегралом системы уравнений

(13.11). Воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. Левые части уравнений (13.11) обозначим соответственно символами (1) и (2). Тогда, в соответствии с реализуемым методом необходимо вычислить интегралы

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} (1) A \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R} dx dy ,$$

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} (2) B \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R} dx dy .$$

В результате получим систему уравнений вида:

$$\alpha_{11} A + \alpha_{12} B = 0 ,$$

$$\alpha_{21} A + \alpha_{22} B = 0 .$$

Приравнявая к нулю определитель этой системы, получим критическое значение интенсивности распределенной нагрузки в виде:

$$q_0 = f(m_1, n, Eh, D). \quad (13.15)$$

Имея в виду, что в направлении образующей возникает одна полуволна, для получения конкретного значения q_0 необходима минимизация выражения (13.15) по количеству волн в окружном направлении n , которая реализуется выполнением условия $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$.

Определение нижней критической нагрузки для цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

Критическое сжимающее усилие для цилиндрической оболочки, полученное в виде (10.17) носит название верхней критической нагрузки. При этой нагрузке оболочка хлопком теряет устойчивость с образованием волн на боковой поверхности, поэтому иначе верхняя критическая нагрузка называется нагрузкой хлопка. Если в случае пластины потеря устойчивости означает потерю несущей способности, то при нагружении оболочки ситуация более сложная. После потери устойчивости оболочка не теряет своих несущих свойств и продолжает нести возрастающую нагрузку вплоть до разрушения. Этот процесс хорошо иллюстрируется графиками на рисунках 13.2 и 13.3.

По оси ординат откладывается осевая нагрузка, приложенная к оболочке, а по оси абсцисс откладывается прогиб. Участок ON

определяет устойчивое докритическое состояние. Точка N соответствует безразличному равновесному состоянию и в ней реализуется верхняя критическая нагрузка. Участок NM - это участок неустойчивого состояния равновесия. Он определяет величину падения нагрузки после хлопка. Поведение оболочки на этом участке становится динамическим. Точка M соответствует нижней критической нагрузке, а последующий участок MQ соответствует равновесному состоянию оболочки после потери устойчивости. На этом участке оболочка вновь несет возрастающую нагрузку вплоть до разрушения. Таким образом, если верхняя критическая нагрузка характеризует несущие свойства оболочки до потери устойчивости, то нижняя критическая нагрузка – после потери устойчивости. На рисунке 13.3 видно, что некоторому текущему значению нагрузки (точка q) соответствует три значения прогиба. Математически это означает не единственность решения уравнений, описывающих состояние оболочки при больших прогибах. Эта ситуация является наиболее сложной в теории устойчивости.

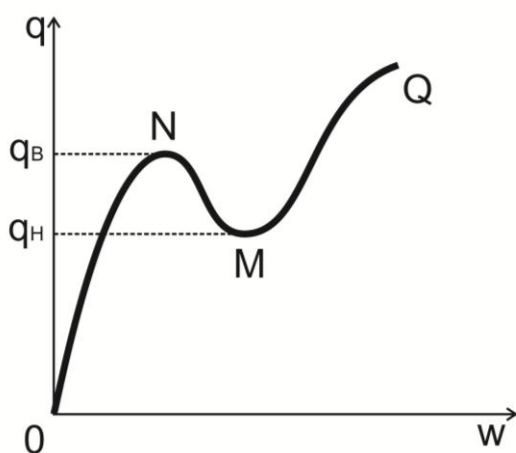


Рис 13.2

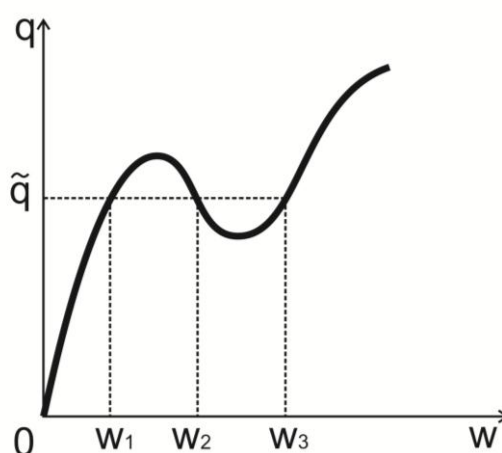


Рис 13.3

Верхняя и нижняя критические нагрузки определяют «вилку», в которой происходит реальная потеря устойчивости. Нижнюю критическую нагрузку можно определять на основе явления локальной потери устойчивости, отделяя задачу определения критической нагрузки от задачи определения формы изогнутой поверхности оболочки. Будем исходить из уравнений (10.4). Механическая картина состояния оболочки после потери

устойчивости противоположна той, что наблюдалась до хлопка. Внутри вмятин мембранные усилия очень малы, поэтому будем считать, что $T_1, T_2, S \rightarrow 0$. Это означает, что в тех областях боковой поверхности, где наибольшие деформации, напряжения минимальны. В силу этого решение ищем в виде:

$$F = -Aw - \frac{T_0 y^2}{2}. \quad (13.16)$$

Отметим, что при нахождении верхней критической нагрузки в рамках одного из подходов решение принималось в виде (11.5): $F = Aw$.

Осевые усилия с учетом (13.16) имеют вид:

$$T_1 = F''_{yy} = -Aw''_{yy} - T_0 \quad (13.17)$$

Подставляя (13.16) в (10.4) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{Eh}{AR} w''_{xx} - \frac{Eh}{A} (w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{A}{DR} w''_{xx} + \frac{T_0}{D} w''_{xx} + \frac{2A}{D} (w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) &= 0, \end{aligned} \quad (13.18)$$

или, после их сложения, одно уравнение:

$$2\nabla^2 \nabla^2 w + w''_{xx} \left(\frac{A}{D} + \frac{T_0}{D} - \frac{Eh}{AR} \right) + \left(\frac{2A}{D} - \frac{Eh}{A} \right) (w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) = 0. \quad (13.19)$$

Пользуясь неопределенностью A и T_0 , приравняем к нулю скобки. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{2A}{D} &= \frac{Eh}{A}, \\ \frac{T_0}{D} &= \frac{Eh}{AR} - \frac{A}{DR}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Из первого уравнения: $A = \pm \sqrt{\frac{EhD}{2}}$. Отрицательное значение можно не рассматривать, так как ему соответствует отрицательное значение нагрузки. Из второго уравнения: $T_0 R = \frac{EhD}{A} - A$. С учетом полученного значения множителя A и выражения изгибной жесткости D находим величину нижней критической сжимающей нагрузки

$$T_{0,н} = \frac{\sqrt{2EhD}}{R} - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{EhD}{2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{EhD}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{Eh^2}{\sqrt{1-\nu^2} R}, \text{ или}$$

$$T_{0,н} \approx 0,2 \frac{Eh^2}{R\sqrt{1-\nu^2}}. \quad (13.21)$$

По сравнению со значением верхней критической нагрузки (10.17) полученный результат примерно в три раза ниже.

С учетом полученных значений A и T_0 запишем выражение функции усилий (13.16)

$$F = -\sqrt{\frac{EhD}{2}}w - \sqrt{\frac{EhD}{2}}\frac{y^2}{2R} = -\sqrt{\frac{EhD}{2}}\left(w + \frac{y^2}{2R}\right).$$

При этом мембранные усилия, соответствующие нижней критической нагрузке будут иметь вид:

$$\begin{aligned} T_1 = F''_{yy} &= -\sqrt{\frac{EhD}{2}}\left(w''_{yy} + \frac{1}{R}\right), \\ T_2 = F''_{xx} &= -\sqrt{\frac{EhD}{2}}w''_{xx}, \\ S = -F''_{xy} &= \sqrt{\frac{EhD}{2}}w''_{xy}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

При полученных из (13.20) значениях A и T_0 уравнение (13.19) преобразуется к виду:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0, \quad (13.23)$$

что позволяет, в свою очередь, из первого уравнения (13.18) записать следующее соотношение:

$$\frac{w''_{xx}}{R} + (w''_{xx}w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) = 0. \quad (13.24)$$

Левую часть полученного уравнения можно геометрически интерпретировать как изменение полной Гауссовой кривизны деформируемой поверхности. Равенство ее нулю означает, что поверхность оболочки при выпучивании стремится развиться в поверхность, площадь каждого элемента которой равна площади соответствующего элемента не выпученной конфигурации. Таким образом, можно утверждать, что выпученная поверхность и исходная недеформированная изометричны между собой.

С учетом (13.22) уравнения (13.23) и (13.24) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F &= 0, \\ F''_{xx}F''_{yy} - F''_{xy}{}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Эти уравнения не противоречат предположению, что в области вмятин мембранные усилия крайне малы. Из них можно сделать вывод о качественном изменении самих деформаций после потери

устойчивости. Кроме того, из второго уравнения (13.25) следует, что мембранные усилия T_1 и T_2 одного знака.

Лекция 14.

Влияние начальных неправильностей поверхности оболочки на верхнюю и нижнюю критические нагрузки.

Будем предполагать, что до начала нагружения оболочка имеет начальную погибь $w_0 \leq h$, причем $w_0 = w_0(x, y)$. Тогда полный прогиб можно представить в виде суммы

$$w = w_0 + w_1,$$

где w_1 - дополнительный прогиб, возникающий в процессе нагружения оболочки. Кроме того, предполагаем, что наличие погиби до начала нагружения не вызывает напряжений в материале оболочки.

Запишем основные соотношения.

Деформации и искривления:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R_1}(w - w_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R_2}(w - w_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Физические соотношения остаются без изменения и записываются в виде (5.6), (3.6). Уравнения равновесия получаются так же, как и в случае оболочки без неправильностей и имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + Eh \left[\frac{(w''_{xx} - w''_{0xx})}{R_2} + \frac{(w''_{yy} - w''_{0yy})}{R_1} \right] + \\ + Eh \left[w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2 - w''_{0xx} w''_{0yy} + w''_{0xy}{}^2 \right] = 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) - \frac{F''_{xx}}{R_2} - \frac{F''_{yy}}{R_1} - F''_{xx} (w''_{yy} - w''_{0yy}) - \\ - F''_{yy} (w''_{xx} - w''_{0xx}) + 2F''_{xy} (w''_{xy} - w''_{0xy}) - q = 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Сложность решения задачи заключается в том, что форма неправильностей неизвестна. Вместе с тем, опытом установлено, что из всех видов неправильностей наибольшее влияние на поведение оболочки оказывают те, которые подобны ожидаемой форме выпучивания. Предположим, что такое подобие действительно имеет место. В этом случае должно выполняться соотношение

$$w_0 = fw_1, \quad (14.3)$$

где f - параметр, зависящий от состояния оболочки.

Верхняя критическая нагрузка в этом случае имеет вид:

$$T_{0,k} = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R} \frac{1}{\sqrt{1+2f}} \quad (14.4)$$

Аналогично может быть представлена и нижняя критическая нагрузка:

$$T_{0,n} = \frac{Eh^2}{2\sqrt{6}\sqrt{(1-\nu^2)}R} \frac{1}{\sqrt{(1+f)^3}\sqrt{1+2f}} \quad (14.5)$$

Анализируя формулы (14.4) и (14.5), можно отметить следующее. Верхняя критическая нагрузка, это нагрузка, действующая на оболочку непосредственно до момента потери устойчивости. В этом состоянии дополнительный прогиб w_1 мал, так как оболочка еще не потеряла устойчивость. Можно условно считать $w_1 \approx w_0$, и,

следовательно $f \approx 1$. Поэтому влияние множителя $\frac{1}{\sqrt{1+2f}} \approx 0,6$ в

формуле (14.4) на величину верхней критической нагрузки весьма существенно. Если рассматривать нижнюю критическую нагрузку, то оболочка, потеряв устойчивость, приобретает большие прогибы

и, следовательно, $w_1 \gg w_0$, а $f = \frac{w_0}{w_1} \ll 1$. При этом, влияние

множителя $\frac{1}{\sqrt{(1+f)^3}\sqrt{1+2f}}$ на величину нижней критической

нагрузки в формуле (14.5) становится незначительным.

Эти рассуждения легко объясняют известный из эксперимента факт: верхняя критическая нагрузка очень чувствительна к начальным несовершенствам формы боковой поверхности оболочки, в то время как нижняя от начальных неправильностей почти не зависит.

Основные уравнения линейной теории прочности оболочек (в обозначениях В.В.Новожилова).

Выбираем линии кривизны α_1 и α_2 в качестве координатных линий, \bar{n} - вектор внешней нормали (рис.14.1).

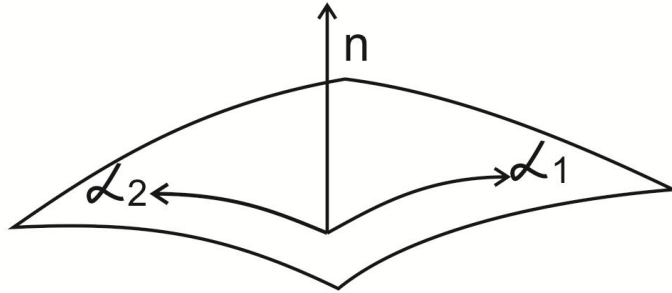


Рис 14.1

Квадрат длины элемента срединной поверхности:

$$ds^2 = A_1 d\alpha_1^2 + A_2 d\alpha_2^2. \quad (14.6)$$

A_1 и A_2 - параметры Ляме, $k_1 = \frac{1}{R_1}$, $k_2 = \frac{1}{R_2}$ - главные кривизны,

u, v - тангенциальные перемещения в направлении координат α_1 и α_2 , w - нормальное перемещение (прогиб).

Линейные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и деформация сдвига ω :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2}, \\ \omega &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u}{A_1} \right). \end{aligned} \quad (14.7)$$

Изменения параметров кривизны и кручения срединной поверхности (искривления):

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right), \\ \chi_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right), \end{aligned} \quad (14.8)$$

$$\tau = -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right).$$

Соотношения (14.7), (14.8) верны для малых деформаций и малых перемещений (по сравнению с толщиной оболочки). Они справедливы для пологих и не пологих оболочек положительной, отрицательной и нулевой Гауссовой кривизны. Если оболочка пологая, то параметры χ_1, χ_2, τ не зависят от тангенциальных перемещений u и v (12.22). В общем случае деформации и искривления выражаются дифференциальными зависимостями от трех непрерывных функций u, v, w . Эти функции непрерывны и дифференцируемы до восьмого порядка включительно. Исключая путем дифференцирования из соотношений (14.7), (14.8) перемещения u, v, w , получаем уравнения неразрывности деформаций, которые по смыслу являются условиями сплошности срединной поверхности.

$$A_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\chi_2 - \chi_1) - A_1 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega +$$

$$+ \frac{1}{R_1} \left[A_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega - A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0,$$

$$A_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\chi_1 - \chi_2) - A_2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} - 2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau + \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega +$$

$$+ \frac{1}{R_2} \left[A_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega - A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0, \quad (14.9)$$

$$A_1 A_2 \left(\frac{\chi_1}{R_2} + \frac{\chi_2}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A_1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{A_2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega \right] = 0.$$

Первые два уравнения (14.9) называются уравнениями Кодацци, а третье – уравнением Гаусса. Математический смысл этих уравнений в том, что они являются условиями интегрируемости уравнений (14.7), (14.8) при заданных компонентах деформаций и искривлений. Для односвязной области выполнение условий Кодацци-Гаусса является необходимым и достаточным условием сплошности срединной поверхности. Для многосвязной области –

лишь необходимым, но не достаточным. Для достаточности требуется условие однозначности перемещений. Уравнения (14.9) являются аналогом условий совместности деформаций в теории упругости.

Соотношения упругости:

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2}\omega,$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2), \quad M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1), \quad H = D(1-\nu)\tau. \quad (14.10)$$

Здесь M_1 , M_2 - изгибающие моменты. Все остальные обозначения соответствуют ранее принятым.

Если из соотношений (14.10) выразить деформации и искривления через усилия и моменты и внести их в уравнения Кодацци-Гаусса, то получим уравнения неразрывности деформаций в усилиях и моментах (аналог уравнений Бельтрами-Митчела в теории упругости). В целях упрощения приведем их при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0$

$$\frac{\partial(A_2M_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1H)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}H - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_1 -$$

$$- \frac{h^2}{12R_1} \left[\frac{\partial(A_2T_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_1 - 2\frac{\partial(A_1S)}{\partial\alpha_2} - 2\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S \right] = 0,$$

$$\frac{\partial(A_1M_1)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial(A_2H)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}H - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_2 -$$

$$- \frac{h^2}{12R_2} \left[\frac{\partial(A_1T_1)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_2 - 2\frac{\partial(A_2S)}{\partial\alpha_1} - 2\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S \right] = 0, \quad (14.11)$$

$$\frac{12A_1A_2}{h^2} \left(\frac{M_2}{R_1} + \frac{M_1}{R_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \right) \left[\frac{\partial(A_2T_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1S)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_1 \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \right) \left[\frac{\partial(A_1T_1)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial(A_2S)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_2 \right] = 0.$$

Первые два уравнения (14.11) – уравнения Кодацци в усилиях и моментах, третье – Уравнение Гаусса.

Запишем уравнения равновесия в усилиях и моментах (при $\nu = 0$).

$$\frac{\partial(A_2T_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1S)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2 \frac{\partial(A_1 H)}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] = -A_1 A_2 q_1, \\
& \frac{\partial(A_1 T_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 S)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \\
& + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2 \frac{\partial(A_2 H)}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] = -A_2 A_1 q_2, \quad (14.12) \\
& A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \right) \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 H)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \right) \left[\frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 H)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] = A_1 A_2 q_n.
\end{aligned}$$

Здесь q_1, q_2, q_n - проекции поверхностной нагрузки на направления координатных линий α_1, α_2 и нормали n . Получение уравнений основано на гипотезах Кирхгофа-Лява при условии малости деформаций и перемещений.

Системы уравнений (14.11) и (14.12) обладают свойством симметрии (если не учитывать постоянный множитель $\frac{h^2}{12}$). Соответствующие уравнения получаются одно из другого заменой неизвестных T_1, T_2, S, M_1, M_2, H на неизвестные $M_2, M_1, -H, -T_2, -T_1, -S$. В этом заключается статикогеометрическая аналогия.

В качестве примера запишем вышеприведенные соотношения для пластины.

$$\alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = y; \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1; \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Уравнения Кодацци:

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0.$$

Уравнение Гаусса:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = q_n.$$

Эти уравнения соответствуют полученным ранее уравнениям (5.8), (5.9).

Уравнения неразрывности в усилиях и моментах (при $\nu = 0$):

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0.$$

Очевидна аналогия двух последних систем уравнений. Одна получается из другой взаимной заменой величин T_1 и M_2 , T_2 и M_1 , S и $-H$.

Приведенные системы уравнений позволяют решать задачу прочности оболочки в усилиях, но сами по себе эти уравнения очень сложные. Наибольшую сложность обеспечивают подчеркнутые слагаемые в первых двух уравнениях системы (14.12), а также касательные перемещения u, v в выражениях (14.8) для искривлений χ_1, χ_2, τ . Вместе с тем, и подчеркнутые слагаемые и касательные перемещения в выражениях искривлений мало влияют на результаты расчета, особенно в ситуации, когда в процессе деформирования оболочка делится на большое число пологих участков. С учетом этого в 1946 году В.З.Власов предложил техническую теорию пологих оболочек, согласно которой вышеуказанные факторы в уравнениях (14.12) и (14.8) отбрасываются.

Соотношения технической теории пологих оболочек.

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ сохраняются без изменений и записываются в виде (14.7). Соотношения упругости (14.10) также не изменяются.

Изменения параметров кривизны и кручения срединной поверхности:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \\
\chi_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \\
\tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right).
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(A_2 T_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 S)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 &= -A_1 A_2 q_1, \\
\frac{\partial(A_1 T_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 S)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 &= -A_1 A_2 q_2, \\
A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \right) \left[\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 H)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] - \\
- \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \right) \left[\frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 H)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] &= A_1 A_2 q_n.
\end{aligned} \tag{14.14}$$

Порядок погрешности уравнений технической теории пологих оболочек соответствует порядку погрешности гипотез Кирхгофа-Лява. Уравнения равновесия (14.14) с помощью соотношений упругости (14.10), (14.13), а также геометрических соотношений (14.7) могут быть записаны через компоненты вектора перемещений u, v, w . При этом может быть реализован способ решения задачи в перемещениях. Другой способ предполагает введение функции усилий Φ по формулам:

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}, \\
T_2 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}, \\
S &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \right).
\end{aligned} \tag{14.15}$$

Эти соотношения вводим в уравнения равновесия (14.14). При этом первые два из них тождественно удовлетворяются. В третьем уравнении системы (14.11) (уравнении Гаусса) усилия T_1, T_2, S также выражаем через функцию усилий Φ . Кроме того, и в третьем уравнении равновесия и в уравнении Гаусса моменты M_1, M_2, H с помощью соотношений (14.10), (14.13) выражаем через прогиб. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + Eh \bar{\nabla}(w) &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \bar{\nabla}(\Phi) &= q_n. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Операторы $\nabla^2(*)$, $\bar{\nabla}(*)$ имеют вид:

$$\nabla^2(*) = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(*)}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(*)}{\partial \alpha_2} \right] \right\}, \quad (14.17)$$

$$\bar{\nabla}(*) = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{R_2} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(*)}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(*)}{\partial \alpha_2} \right] \right\}. \quad (14.18)$$

Система (14.16) является разрешающей системой уравнений технической теории прочности пологих оболочек. С ее помощью можно определять компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки до потери устойчивости. Для описания процесса потери устойчивости эта система не годится.

Лекция 15.

Пример составления уравнений. Сферическая оболочка.

Рассмотрим сферическую оболочку радиуса R (рис. 15.1). Для данного объекта характерно использование сферических координат, в рамках которых можно записать основные геометрические зависимости.

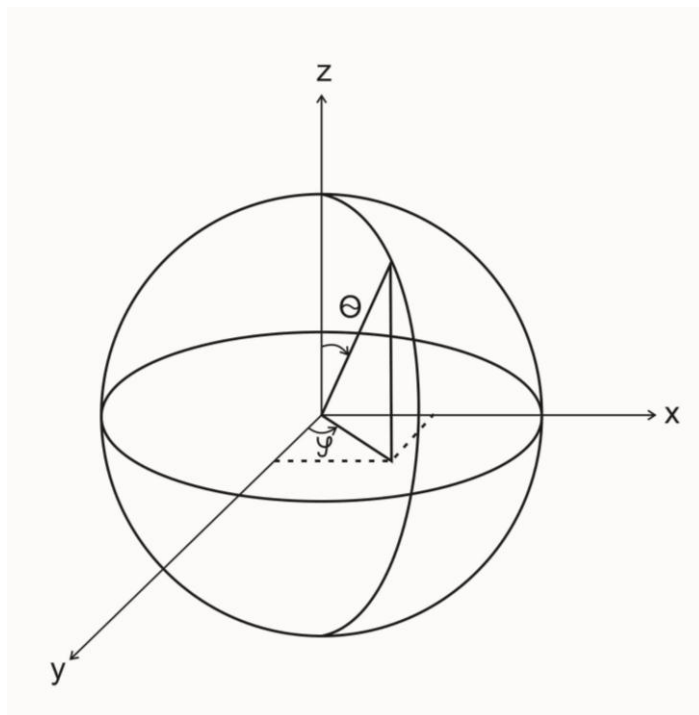


Рис 15.1

Координаты: $\alpha_1 = \theta$, $\alpha_2 = \varphi$.

Квадрат длины элемента боковой поверхности:
 $ds^2 = R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2$.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм: $A_1 = R$,
 $A_2 = R \sin \theta$.

Главные кривизны: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$

Запишем операторы $\bar{\nabla}^2(*)$ и $\nabla^2(*)$.

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial(*)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(*)}{\partial \varphi} \right] \right\}, \quad (15.1)$$

$$\nabla^2(*) = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial(*)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(*)}{\partial \varphi} \right] \right\}. \quad (15.2)$$

В этих выражениях переменные коэффициенты, что существенно усложняет уравнения (14.16). В.З.Власовым была предложена возможность их упрощения для оболочек, пологих по своей геометрии, то есть соответствующих условию (9.7). К таким оболочкам можно отнести, например, сферический купол. Если купол прямоугольный в плане (рис 15.2), а подъем его небольшой, то с достаточной степенью точности можно записать

$$ds^2 = R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \approx dx^2 + dy^2.$$

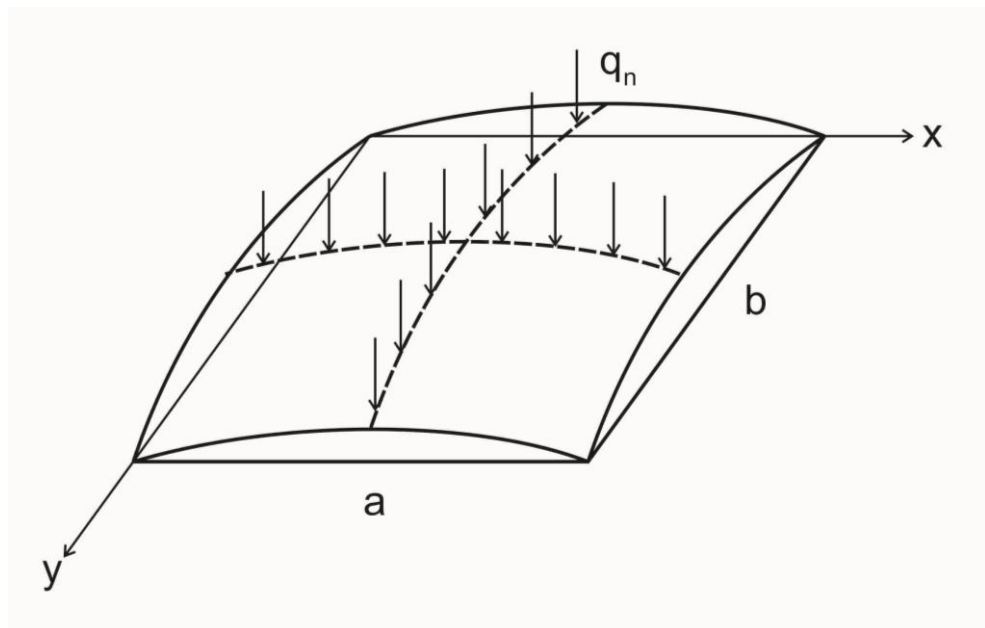


Рис 15.2

В этом случае операторы (14.17) и (14.18) упрощаются, и уравнения (14.16) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{Eh}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &= q_n. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Если купол круговой в плане, то задачу необходимо решать в полярных координатах. Разрешающая система уравнений запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + \\ + \frac{Eh}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) &= 0, \\ D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \\ - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) &= q_n. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Рассмотрим частный случай симметричной деформации кругового купола с основанием радиуса a . В этом случае $w = w(r)$, $\Phi = \Phi(r)$, и система разрешающих уравнений (15.4) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{Eh}{R} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) &= 0, \\ D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) &= q_n. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Интегрируя первое уравнение (15.5), получаем:

$$\left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{Eh}{R} w = f(r), \quad (15.16)$$

где функция $f(r)$ определяется уравнением

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = 0.$$

Вводим (15.16) в (15.5). В результате получаем уравнение относительно прогиба w

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = q_n + \frac{f(r)}{R}. \quad (15.17)$$

Интегрируя уравнение (15.17), и, выполняя граничные условия, получаем функцию прогиба.

Некоторые динамические задачи теории пластин и оболочек.

Исследования свободных колебаний конструкции.

Решение этой задачи предполагает определение частот и формы собственных колебаний конструкции, то есть нахождение ее «паспортных характеристик». Для этого необходимо применить принцип Даламбера, в соответствии с которым ко всем, действующим на конструкцию внешним и внутренним силам добавляются силы инерции. Применительно к круговой цилиндрической оболочке уравнения равновесия в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= q_1(x, y, t), \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= q_2(x, y, t), \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + \frac{T_2}{R} + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q_n(x, y, t). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Здесь q_1, q_2 - проекции поверхностной нагрузки на направления касательных к срединной поверхности оболочки. Они легко могут быть удалены из уравнений выбором частного решения. Тангенциальные силы инерции $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ существенно осложняют процесс решения задачи, однако, численно они малы по сравнению с нормальной компонентой $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Это дает основание отбросить их без большого ущерба для точности решения. Таким образом, первые два уравнения (15.1) принимают обычный вид (9.2) и могут быть тождественно удовлетворены с помощью функции усилий (5.15). Повторяя известную процедуру решения соответствующей статической задачи (лекция 9), получаем следующую систему разрешающих уравнений:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} + Eh(w''_{xx} w''_{yy} - w''_{xy}{}^2) = 0,$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} - F''_{xx} w''_{yy} - F''_{yy} w''_{xx} + 2F''_{xy} w''_{xy} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n(x, y, t). \quad (15.2)$$

При решении полученной системы уравнений наряду с граничными условиями, налагаемыми на прогиб w и функцию усилий F , необходимо выполнить и начальные условия, которые определяют начальный прогиб w и начальную скорость $\frac{\partial w}{\partial t}$ в начальный момент времени $t = t_0$. Несмотря на все упрощения, задача представляется достаточно сложной. Это связано как с нелинейностью уравнений (15.2), так и с наличием особенностей не характерных для статики. В частности, необходимо исследовать процесс распространения волн в оболочке.

Решение задачи существенно упростится в предположении ограниченности прогибов. Если $\frac{w}{h} \ll 1$, то нелинейные слагаемые в уравнениях (15.2) могут быть отброшены и разрешающие уравнения примут вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} w''_{xx} = 0,$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{F''_{xx}}{R} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n(x, y, t). \quad (15.3)$$

Рассмотрим задачу определения частот собственных колебаний шарнирно закрепленной прямоугольной пластины в отсутствие внешней нагрузки. Колебательный процесс в этом случае можно инициировать, например, внешним акустическим воздействием. После прекращения такого воздействия пластина будет колебаться по инерции. Теоретически колебания могут продолжаться до бесконечности. Однако, в реальных условиях, при наличии сопротивления среды и внутреннего трения процесс будет затухающим.

Так как кривизна поверхности отсутствует ($R = \infty$), то уравнения (15.3) становятся еще более простыми

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0,$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (15.4)$$

Первое уравнение не связано со вторым, поэтому разрешающим уравнением для данной задачи становится второе уравнение системы (15.4). Решение уравнения ищем в виде:

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega_{m,n} t . \quad (15.5)$$

Здесь: a и b - длины сторон пластины (рис 6.4); m и n - волновые числа; ω_{mn} - круговая частота колебаний. Каждое слагаемое в правой части выражения (15.5) удовлетворяет разрешающему уравнению (15.4) и граничным условиям шарнирного закрепления пластины. Подставляя решение (15.5) во второе уравнение (15.4), получаем:

$$D(m_1^2 + n_1^2)^2 - \rho h \omega_{m,n}^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (m_1^2 + n_1^2), \quad (15.6)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad n_1 = \frac{n\pi}{b} .$$

Различные значения m и n позволяют охватить весь спектр частот собственных колебаний пластины. Например, при $m=1, n=1$ получаем значение частоты колебаний основного тона:

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right). \quad (15.7)$$

При $m=1, n=2$:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right).$$

Если рассматривать пластину, жестко закрепленную по контуру, то решение существенно усложняется. Это объясняется сложностью выбора функции прогиба.

Исследование вынужденных колебаний пластины.

По аналогии с задачей исследования собственных колебаний пластины основное разрешающее уравнение запишем в виде:

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \cos 2\pi N t . \quad (15.8)$$

Здесь f и N - амплитуда и частота (в герцах) внешнего воздействия. Решение задачи представляется достаточно сложным,

если f не зависит от координат x, y . Предположим, что такая зависимость существует и функция f имеет вид:

$$f = f_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Функцию прогиба представим в форме правой части уравнения (15.8)

$$w = w_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos 2\pi Nt. \quad (15.9)$$

Подставляя (15.9) в (15.8), при $t=0$ получаем начальный прогиб:

$$w_0 = \frac{f}{\left[D(m_1^2 + n_1^2)^2 - \rho h (2\pi N)^2 \right]}. \quad (15.10)$$

Соответственно может быть записано и выражение прогиба (15.9) для любого момента времени. Из последнего соотношения видно, что при совпадении частоты внешнего воздействия N и

частоты собственных колебаний $\frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (m_1^2 + n_1^2)$ прогиб

неограниченно возрастает и наступает резонанс. Наиболее опасным он является, когда частота внешнего воздействия соответствует собственной частоте основного тона $\omega_{1,1}$.

Лекция 16.

Устойчивость пластин и оболочек за пределами упругости.

Известно, что при сжатии стержня упругая потеря устойчивости реализуется лишь в том случае, когда гибкость стержня λ превышает некоторое минимальное значение, называемое критической гибкостью $\lambda_{кр}$. Ее величина определяется формулой

$\lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{мц}}}$, где E и $\sigma_{мц}$ - соответственно модуль упругости и

предел пропорциональности материала стержня. Критическая сжимающая сила при упругой потере устойчивости определяется

известной формулой Эйлера $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$.

Решение задачи устойчивости стержня за пределами упругости принадлежит Энгессеру и Карману, а для определения критической силы успешно используется эмпирическая формула Ясинского $P_{кр} = F(a - b\lambda - c\lambda^2)$, где a, b, c - табличные коэффициенты.

Процесс потери устойчивости за пределом упругости обладает рядом особенностей. До момента потери устойчивости в условиях действия сжимающей нагрузки продольные волокна стержня испытывают деформацию сжатия. Эта деформация активна, так как интенсивность деформации e_i возрастает. К моменту потери устойчивости все волокна находятся в пластическом состоянии. При изгибе стержня в момент потери устойчивости волокна на выпуклой стороне растягиваются. В этой области происходит разгрузка, интенсивность деформации убывает, а материал может вновь перейти в упругое состояние. В вогнутой части стержня возникают дополнительные сжимающие усилия и происходит дальнейший рост интенсивности деформаций.

Таким образом, сечение стержня делится на две области: область разгрузки, где деформация пассивная и материал подчиняется линейному закону Гука, и область нагрузки, в которой реализуется активная деформация и материал находится в пластическом состоянии. Поверхность раздела этих двух областей не известна.

Рассматривая равновесие пластин и оболочек при упруго-пластических деформациях, будем основываться на гипотезах Кирхгофа-Лява, в соответствии с которыми напряжения $X_z = Y_z = Z_z = 0$. Поскольку до момента потери устойчивости материал деформируется упруго, зависимость между напряжениями и деформациями может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} S_x &= X_x - \frac{1}{2} Y_y = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} e_{xx}, \\ S_y &= Y_y - \frac{1}{2} X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{yy}, \end{aligned} \tag{16.1}$$

$$S_{xy} = X_y = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy}.$$

Здесь:

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2} \text{ - интенсивность напряжений;}$$

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx} e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4} e_{xy}^2} \text{ - интенсивность деформаций.}$$

Материал считается несжимаемым, то есть коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{2}$. Интенсивности деформаций и напряжений связаны между собой зависимостью

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = Ee_i [1 - \omega(e_i)]. \quad (16.2)$$

В упругой области эта зависимость соответствует линейному закону Гука при простом растяжении – сжатии и имеет вид:

$$\sigma_i = Ee_i \quad (16.3)$$

В рамках постановки задачи устойчивости будем считать докритическое состояние безмоментным. Процесс потери устойчивости характеризуется тем, что при некотором значении внешней нагрузки наряду с невозмущенным (безмоментным) состоянием возможно и другое, деформированное состояние. Это, бесконечно близкое к невозмущенному, состояние характеризуется приращениями (вариациями) компонент тензора деформаций $\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{xy}$ и напряжений $\delta X_x, \delta Y_y, \delta X_y$. Как и в случае стержня, в толщ оболочке или пластины при потере устойчивости возникает область нагрузки и область разгрузки. За счет вариаций $\delta e_{xx}, \dots, \delta X_x, \dots$ в этих областях происходит соответственно возрастание и убывание интенсивности деформаций и напряжений, а на границе раздела областей

$$\delta e_i = \delta \sigma_i = 0. \quad (16.4)$$

В области нагрузки вариации напряжений могут быть получены варьированием соотношений (5.1)

$$\begin{aligned} \delta S_x &= \delta X_x - \frac{1}{2} \delta Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{xx} + e_{xx} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \\ \delta S_y &= \delta Y_y - \frac{1}{2} \delta X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{yy} + e_{yy} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \\ \delta S_{xy} &= \delta X_y = \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{xy} + \frac{1}{3} e_{xy} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) \delta e_i, \end{aligned} \quad (16.5)$$

причем, поскольку зависимость между σ_i и e_i имеет вид (16.2), то

$$\frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) = -\frac{1}{e_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right). \quad (16.6)$$

С учетом (16.6) соотношения (16.5) переписутся в виде:

$$\delta S_x = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{xx} - \frac{S_x}{\sigma_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \delta e_i,$$

$$\delta S_y = \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{yy} - \frac{S_y}{\sigma_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \delta e_i, \quad (16.7)$$

$$\delta S_{xy} = \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{xy} - \frac{S_{xy}}{\sigma_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \delta e_i.$$

В области разгрузки, с учетом (15.3), эти соотношения записываются в форме закона Гука

$$\delta S_x = E \delta e_{xx}, \quad \delta S_y = E \delta e_{yy}, \quad \delta S_{xy} = \frac{E}{3} \delta e_{xy}. \quad (16.8)$$

Ведем в рассмотрение вариацию внутренней энергии деформации для единичного объема

$$\sigma_i \delta e_i = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + X_y \delta e_{xy}. \quad (16.9)$$

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява будем предполагать, что вариации деформаций в произвольном слое оболочки с координатой z линейно выражаются через вариации деформаций и искривлений ее срединной поверхности:

$$\delta e_{xx} = \varepsilon_1 - z\chi_1, \quad \delta e_{yy} = \varepsilon_2 - z\chi_2, \quad \delta e_{xy} = 2(\varepsilon_3 - z\chi_3). \quad (16.10)$$

Здесь: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_3$ - вариации деформаций срединной поверхности; $\chi_1, \chi_2, \chi_3 = \tau$ - вариации ее кривизн и кручения. Для удобства дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$\frac{X_x}{\sigma_i} = \overline{X}_x, \quad \frac{Y_y}{\sigma_i} = \overline{Y}_y, \quad \frac{X_y}{\sigma_i} = \overline{X}_y, \quad \frac{S_x}{\sigma_i} = \overline{S}_x, \quad \frac{S_y}{\sigma_i} = \overline{S}_y. \quad (16.11)$$

Кроме того, введем безразмерные параметры вместо вариаций искривлений и координаты z :

$$\overline{\chi}_1 = \frac{h}{2} \chi_1, \quad \overline{\chi}_2 = \frac{h}{2} \chi_2, \quad \overline{\chi}_3 = \frac{h}{2} \chi_3, \quad \overline{z} = \frac{2z}{h}. \quad (16.12)$$

С учетом принятых обозначений формулу (16.9) можно переписать в виде:

$$\delta e_i = \varepsilon - z\chi = \varepsilon - \overline{z}\overline{\chi}, \quad (16.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \overline{X}_x \varepsilon_1 + \overline{Y}_y \varepsilon_2 + 2\overline{X}_y \varepsilon_3, \\ \chi &= \overline{X}_x \chi_1 + \overline{Y}_y \chi_2 + 2\overline{X}_y \chi_3, \\ \overline{\chi} &= \frac{h}{2} \chi. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Если обозначить координату границы раздела областей нагрузки и разгрузки через z_0 , то в соответствии с (16.4) и (16.13) получим:

$$z_0 = \frac{\varepsilon}{\chi}, \quad \bar{z}_0 = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\chi}}. \quad (16.15)$$

Предполагая для определенности, что область нагрузки примыкает к внешней поверхности оболочки $z = +\frac{h}{2}$, и, учитывая принятые обозначения безразмерных величин, получим, что при $z \geq z_0$ соотношения (16.7) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \delta S_x &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{S}_x \bar{\chi} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_1 - \bar{\chi}_1 \bar{z}), \\ \delta S_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{S}_y \bar{\chi} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_2 - \bar{\chi}_2 \bar{z}), \\ \delta X_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{X}_y \bar{\chi} (\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_3 - \bar{\chi}_3 \bar{z}). \end{aligned} \quad (16.16)$$

В области разгрузки $z < z_0$ соответствующие формулы (16.8) примут вид:

$$\begin{aligned} \delta S_x &= E(\varepsilon_1 - \bar{\chi}_1 \bar{z}), \\ \delta S_y &= E(\varepsilon_2 - \bar{\chi}_2 \bar{z}), \\ \delta X_y &= \frac{2}{3} E(\varepsilon_3 - \bar{\chi}_3 \bar{z}), \end{aligned} \quad (16.17)$$

Из сравнения формул (16.7) и (16.8) следует, что на границе областей нагрузки и разгрузки ($z = z_0$) вариации напряжений не являются непрерывными функциями координаты z . Их скачки определяются разностью $E - \frac{\sigma_i}{e_i}$ и исчезают, когда материал оболочки лишь немного вышел за предел упругости относительно величины интенсивности деформаций e_i . Разрывность напряжений не наблюдается также и в случае простого нагружения, в условиях которого вариации напряжений пропорциональны действующим напряжениям. При этом на границе областей нагрузки и разгрузки вариации напряжений исчезают вместе с вариацией интенсивности напряжений $\delta\sigma_i$. Скачкообразное изменение вариаций напряжений при переходе через границу $z = z_0$ является следствием непрерывности деформаций, интенсивности деформаций и интенсивности напряжений, поскольку переход материала из пластического состояния в упругое при постоянной интенсивности напряжений связан с перераспределением напряжений.

Соотношения (16.16) показывают, что вариации напряжений являются линейными функциями координаты z , причем в отличие от случая упругой потери устойчивости они зависят не только от деформаций и механических характеристик материала, но и от действующих перед потерей устойчивости напряжений. Фактически, это означает их зависимость от характера нагружения. В этом специфика потери устойчивости за пределом упругости.

Для получения уравнений устойчивости запишем на основании соотношений (16.1) выражения для вариаций сил и моментов

$$\begin{aligned} \delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta S_x dz, & \delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta S_y dz, & \delta S &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta X_y dz, \\ \delta G_1 - \frac{1}{2} \delta G_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta S_x z dz, & \delta G_2 - \frac{1}{2} \delta G_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta S_y z dz, & & \\ \delta H &= \int_{-h/2}^{+h/2} \delta X_y z dz. \end{aligned} \quad (16.18)$$

При вычислении этих интегралов оболочку по толщине необходимо разделить три зоны (рис. 16.1).

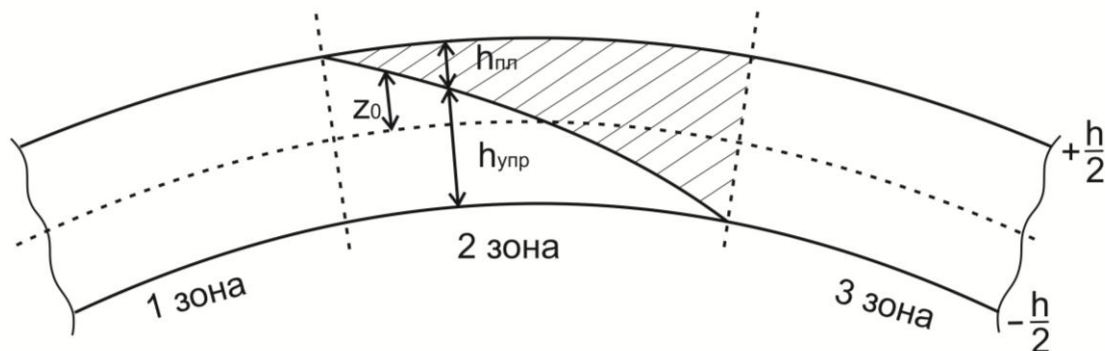


Рис 16.1

В первой предполагается упругое состояние, поэтому в соответствии с (16.17) для этой зоны получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} (\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2) &= \varepsilon_1, & \frac{1}{Eh} (\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1) &= \varepsilon_2, & \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3, \\ \frac{4}{3D} (\delta G_1 - \frac{1}{2} \delta G_2) &= -\chi_1, & \frac{4}{3D} (\delta G_2 - \frac{1}{2} \delta G_1) &= -\chi_2, & & \end{aligned} \quad (16.19)$$

$$\frac{4}{3D} \delta H = -\frac{2}{3} \chi_3.$$

Во второй зоне до потери устойчивости материал деформирован пластически, а после потери устойчивости часть его, попадая в область разгрузки, переходит в упругое состояние. Другая часть находится в области нагрузки и в ней продолжается рост пластических деформаций. Каждый из интегралов (16.18) необходимо разбивать на два с пределами интегрирования от $z = -\frac{h}{2}$ до $z = z_0$ и от $z = z_0$ до $z = +\frac{h}{2}$. Первый интеграл вычисляется согласно формулам (16.17), а второй – согласно (16.16). В результате получим серию интегралов вида:

$$\begin{aligned} \delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 &= \frac{hE}{2} \int_{-1}^{\bar{z}_0} (\varepsilon_1 - \bar{\chi}_1 \bar{z}) d\bar{z} + \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \bar{S}_x \bar{\chi} \int_{\bar{z}_0}^1 (\bar{z} - \bar{z}_0) d\bar{z} + \\ &+ \frac{h}{2} \frac{\sigma_i}{e_i} \int_{\bar{z}_0}^1 (\varepsilon_1 - \bar{\chi}_1 \bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned}$$

которые, после ввода обозначений

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_i}{e_i}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{de_i}, \quad (16.20)$$

образуют две группы интегралов для рассматриваемой зоны.

Первая группа для вариаций обобщенных усилий:

$$\begin{aligned} \frac{4}{Eh} (\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2) &= 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_1 + \omega(1 - \bar{z}_0^2) \bar{\chi}_1 + (\lambda - \omega) \bar{S}_x (1 - \bar{z}_0)^2 \bar{\chi}, \\ \frac{4}{Eh} (\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1) &= 2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_2 + \omega(1 - \bar{z}_0^2) \bar{\chi}_2 + \\ &+ (\lambda - \omega) \bar{S}_y (1 - \bar{z}_0)^2 \bar{\chi}, \end{aligned} \quad (16.21)$$

$$\frac{12}{Eh} \delta S = 4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0) \varepsilon_3 + 2\omega(1 - \bar{z}_0^2) \bar{\chi}_3 + 3(\lambda - \omega) \bar{X}_y (1 - \bar{z}_0) \bar{\chi}$$

Вторая группа для вариаций обобщенных моментов:

$$\begin{aligned} \frac{16}{3D} (\delta G_1 - \frac{1}{2} \delta G_2) &= -2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \chi_1 + \\ &+ (\lambda - \omega)(1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{S}_x \bar{\chi} - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_1, \\ \frac{16}{3D} (\delta G_2 - \frac{1}{2} \delta G_1) &= -2(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^3) \chi_2 + \\ &+ (\lambda - \omega)(1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{S}_y \bar{\chi} - \frac{6\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^2) \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (16.22)$$

$$\frac{16}{D} \delta H = -4(2 - \omega + \omega \bar{z}_0^{-3}) \chi_3 + 3(\lambda - \omega)(1 - \bar{z}_0)^2 (2 + \bar{z}_0) \bar{X}_y \chi - \frac{12\omega}{h} (1 - \bar{z}_0^{-2}) \varepsilon_3.$$

В третьей зоне после потери устойчивости деформации остаются пластическими, поэтому выражения вариаций обобщенных усилий и моментов получаются из (16.18) согласно (16.16). Первая группа соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} (\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2) &= (1 - \omega) \varepsilon_1 - (\lambda - \omega) \bar{S}_x \varepsilon, \\ \frac{1}{Eh} (\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1) &= (1 - \omega) \varepsilon_2 - (\lambda - \omega) \bar{S}_y \varepsilon, \\ \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} (1 - \omega) \varepsilon_3 - (\lambda - \omega) \bar{X}_y \varepsilon. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Вторая группа соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3D} (\delta G_1 - \frac{1}{2} \delta G_2) &= -(1 - \omega) \chi_1 - (\lambda - \omega) \bar{S}_x \chi, \\ \frac{4}{3D} (\delta G_2 - \frac{1}{2} \delta G_1) &= -(1 - \omega) \chi_2 - (\lambda - \omega) \bar{S}_y \chi, \\ \frac{4}{3D} \delta H &= -\frac{2}{3} (1 - \omega) \chi_3 - (\lambda - \omega) \bar{X}_y \chi. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Соотношения (16.19), (16.23) и (16.24) для первой и третьей зон являются однородными зависимостями между вариациями сил и моментов с одной стороны и деформациями и искривлениями срединной поверхности с другой. В зоне упруго-пластических деформаций соответствующие зависимости (16.21) и (16.22) не являются линейными. Нелинейность проистекает от \bar{z}_0 , которая в силу (16.15) является дробно-линейной функцией:

$$\bar{z}_0 = \frac{\bar{X}_x \varepsilon_1 + \bar{Y}_y \varepsilon_2 + 2\bar{X}_y \varepsilon_3}{\bar{X}_x \chi_1 + \bar{Y}_y \chi_2 + 2\bar{X}_y \chi_3}. \quad (16.25)$$

В этом выражении можно исключить деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, выразив их через вариации усилий $\delta T_1, \delta T_2, \delta S$. Для этого, умножая первое уравнение системы (16.21) на \bar{X}_x , второе - на \bar{Y}_y , третье - на \bar{X}_y и складывая, получаем:

$$\lambda(1 - \bar{z}_0)^2 + 4\bar{z}_0 - 4 \frac{\bar{S}_x \delta T_1 + \bar{S}_y \delta T_2 + 3\bar{X}_y \delta S}{Eh\chi} = 0. \quad (16.26)$$

Вводя обозначение:

$$\varphi = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{\overline{S}_x \delta T_1 + \overline{S}_y \delta T_2 + 3\overline{X}_y \delta S}{Eh\overline{\chi}}, \quad (16.27)$$

и решая квадратное уравнение (16.26), находим

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{(1-\lambda)(1+\varphi)}}{\lambda}, \quad (16.28)$$

причем $\zeta = \frac{1 - z_0}{2} = \frac{h_{nl}}{h}$ - отношение толщины области, в которой возникли пластические деформации, к толщине оболочки или пластины.

Полученные соотношения (16.19) – (16.24) используются при составлении дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки произвольной формы. Сами по себе дифференциальные уравнения равновесия ничем не отличаются от уравнений, принятых в теории упругой устойчивости. Интерес представляют случаи, когда нелинейные соотношения (16.21), (16.22) могут быть упрощены. В частности, это можно сделать, если перед потерей устойчивости пластическая деформация мала по сравнению с упругой. Это означает, что $\frac{\sigma_i}{e_i} \approx E$, а $\frac{d\sigma_i}{de_i} \rightarrow 0$. Тогда, в силу (16.30), $\omega \rightarrow 0$, $\lambda \approx 1$. Отбрасывая в уравнениях (16.21) и (16.22) малые порядка ω по сравнению с единицей, получаем их в следующем виде:

Для вариаций усилий:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh}(\delta T_1 - \frac{1}{2}\delta T_2) &= \varepsilon_1 + \frac{\lambda h}{2} \overline{S}_x \chi \zeta^2, \\ \frac{1}{Eh}(\delta T_2 - \frac{1}{2}\delta T_1) &= \varepsilon_2 + \frac{\lambda h}{2} \overline{S}_y \chi \zeta^2, \\ \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3 + \frac{\lambda h}{2} \overline{X}_y \chi \zeta^2. \end{aligned} \quad (16.29)$$

Для вариаций моментов:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3D}(\delta G_1 - \frac{1}{2}\delta G_2) &= -\chi_1 + \lambda \overline{S}_x \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi, \\ \frac{4}{3D}(\delta G_2 - \frac{1}{2}\delta G_1) &= -\chi_2 + \lambda \overline{S}_y \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi, \\ \frac{4}{3D} \delta H &= -\frac{2}{3} \chi_3 + \lambda \overline{X}_y \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Эти соотношения по-прежнему остаются нелинейными. Нелинейность проистекает от множителя ζ^2 . Избавиться от

нелинейности можно лишь в частных случаях, например, в случае плоской пластины. При малых прогибах пластина работает без деформации растяжения-сжатия срединной поверхности. Это означает, что мембранные усилия T_1, T_2, S , а, следовательно, и их вариации $\delta T_1, \delta T_2, \delta S$ обращаются в ноль. При этом, в силу (16.27),

$\varphi = 0$ и $\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda} = const$, то есть не зависит от искомых функций,

а уравнения (16.29) и (16.30), естественно, становятся линейными. Данные рассуждения для оболочек совершенно не пригодны, так как деформация оболочки с самого начала сопровождается возникновением мембранных усилий в срединной плоскости.

Примем допущение об отсутствии мембранных усилий и их вариаций, не предполагая при этом, что к моменту потери устойчивости пластическая деформация мала по сравнению с упругой. Очевидно, что это возможно в некоторых задачах упруго-пластической потери устойчивости пластины. Тогда из уравнений (16.21) можно выразить деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ через искривления χ_1, χ_2, χ_3 и подставить их в уравнения (16.22). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_1}{D} &= -(1 - \psi)\left(\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_2\right) + \frac{3}{4}(1 - \psi - k)\overline{X}_x\chi, \\ \frac{\delta G_2}{D} &= -(1 - \psi)\left(\chi_2 + \frac{1}{2}\chi_1\right) + \frac{3}{4}(1 - \psi - k)\overline{Y}_y\chi, \\ \frac{\delta H}{D} &= -\frac{1}{2}(1 - \psi)\chi_3 + \frac{3}{4}(1 - \psi - k)\overline{X}_y\chi, \text{ где} \end{aligned} \quad (16.31)$$

$$\psi = \omega\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2 + \frac{3}{4} \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right)\omega} \right].$$

$$k = \frac{4(1 - \lambda)}{(1 + \sqrt{1 - \lambda})^2} = \frac{4 \frac{d\sigma_i}{de_i}}{(\sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma_i}{de_i}})^2} - \text{обобщенный относительный}$$

модуль Кармана.

Соотношения (16.31) линейные. Они напоминают соответствующие соотношения упругости для анизотропных пластин.

Рекомендуемая литература

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 635 с.
2. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: «Наука», 1982. – 567 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: «Наука», 1976. – 512 с.
4. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Изд-во «Наукова думка», 1972. – 507 с.
5. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С. Гибкие пластины и панели. – М.: Наука, 1968. – 260 с.
6. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – Санкт-Петербург: Изд-во БХВ-Петербург, 2007. – 298 с.
7. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. – М.: Издательство МГУ, 1969. – 695 с.
8. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: «Судпромгиз», 1951. – 344 с.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. – Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 376 с.

Содержание.

<i>Введение</i>	3
<i>Лекция 1</i>	5
<i>Лекция 2</i>	11
<i>Лекция 3</i>	18
<i>Лекция 4</i>	23
<i>Лекция 5</i>	31
<i>Лекция 6</i>	37
<i>Лекция 7</i>	45
<i>Лекция 8</i>	53
<i>Лекция 9</i>	60
<i>Лекция 10</i>	71
<i>Лекция 11</i>	81
<i>Лекция 12</i>	90
<i>Лекция 13</i>	100
<i>Лекция 14</i>	109
<i>Лекция 15</i>	117
<i>Лекция 16</i>	123
<i>Литература</i>	133
<i>Содержание</i>	134