# Вероятностные пространства

Салимов Рустем Фаридович

КФУ — ИБ

2023

Во многих областях человеческой деятельности существуют ситуации, когда определенные явления могут повторяться неограниченное число раз в одинаковых условиях. Анализируя последовательно результаты таких простейших явлений, как подбрасывание монеты, игральной кости, выброс карты из колоды и т.п., мы замечаем две особенности, присущие такого рода экспериментам.

1. не представляется возможным предсказать исход последующего эксперимента по результатам предыдущих, как бы ни было велико число проведенных испытаний.
2. относительная частота определенных исходов по мере роста числа испытаний стабилизируется, приближаясь к определенному пределу.

Обнаруженные закономерности, распространенные на испытания с произвольным числом исходов, позволяют построить простейшую математическую модель случайного эксперимента.

# Случайный эксперимент

Случайный эксперимент — математическая модель соответствующего реального эксперимента, результат которого невозможно точно предсказать. Матмодель должна удовлетворять требованиям:

1. она должна быть адекватна и адекватно описывать эксперимент;
2. должна быть определена совокупность множества наблюдаемых результатов в рамках рассматриваемой математической модели при строго определенных фиксированных начальных данных;
3. должна существовать принципиальная возможность осуществления эксперимента со случайным исходом сколь угодное количество раз при неизменных входных данных;
4. должно быть доказано требование или изначально принята гипотеза о стохастической устойчивости относительной частоты ,для любого наблюдаемого результата, определённого в рамках математической модели.

# Случайный эксперимент

Ответьте на вопрос:

- Является ли выбор карты из хорошо перетасованной колоды случайным экспериментом?

# Случайный эксперимент

Ответьте на вопрос:

- Является ли выбор карты из хорошо перетасованной колоды случайным экспериментом? Да!
- Рассмотрим опыт деления 36 на 4 с помощью калькулятора. Является ли это случайным экспериментом?

# Случайный эксперимент

Ответьте на вопрос:

- Является ли выбор карты из хорошо перетасованной колоды случайным экспериментом? Да!
- Рассмотрим опыт деления 36 на 4 с помощью калькулятора. Является ли это случайным экспериментом? Нет!

# Случайный эксперимент

Ответьте на вопрос:

- Является ли выбор карты из хорошо перетасованной колоды случайным экспериментом? Да!
- Рассмотрим опыт деления 36 на 4 с помощью калькулятора. Является ли это случайным экспериментом? Нет!

Ещё примеры:

- Подбрасывание монеты трижды подряд;
- Три монеты подбрасываются одновременно;
- Выбор одного из делителей 180.

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: О=Орёл, Р=Решка

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: O=Орёл, Р=Решка
  $\omega_i = (\text{OOO}),\ n = ?$

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: O=Орёл, P=Решка
  $\omega_i = (\text{OOO}),\ n = 8$

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: О=Орёл, Р=Решка
  $\omega_i = (\text{ООО}),\ n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно:

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: O=Орёл, P=Решка
  $\omega_i = (\mathrm{OOO}),\ \ n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно: $\omega_i = (\mathrm{OPO}),\ \ n = ?$

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: О=Орёл, Р=Решка
  $\omega_i = (\text{ООО}),\ \ n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно: $\omega_i = (\text{ОРО}),\ \ n = 8$

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: О=Орёл, Р=Решка
  $\omega_i = (\text{ООО}),\ \ n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно: $\omega_i = (\text{ОРО}),\ \ n = 8$
- Выбор одного из делителей 180:

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: О=Орёл, Р=Решка
  $\omega_i = (\text{ООО}),\ \ n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно: $\omega_i = (\text{ОРО}),\ \ n = 8$
- Выбор одного из делителей 180: $\omega_i = 20,\ \ n = ?$

# Пространство элементарных исходов

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из $n$ элементов

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

**Определение**

*Множество всех исходов $\Omega$ называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ называются элементарными событиями.*

Как будут выглядеть элементарные исходы для примеров с предыдущего слайда?

- Подбрасывание монеты трижды подряд: O=Орёл, P=Решка
  $\omega_i = (\text{OOO}), \;\; n = 8$
- Три монеты подбрасываются одновременно: $\omega_i = (\text{OPO}), \;\; n = 8$
- Выбор одного из делителей 180: $\omega_i = 20, \;\; n = 18$

# Сложные события

Помимо элементарных событий нас могут интересовать сложные события, которые состоят из нескольких элементарных событий. Таким образом, событие мы понимаем как некоторое подмножество $A \subset \Omega$. Если в результате проведения случайного эксперимента наблюдается исход $\omega \in A$, то мы говорим, что в этом эксперименте мы наблюдаем событие $A$ (или произошло событие $A$).

# Сложные события

Помимо элементарных событий нас могут интересовать сложные события, которые состоят из нескольких элементарных событий. Таким образом, событие мы понимаем как некоторое подмножество $A \subset \Omega$. Если в результате проведения случайного эксперимента наблюдается исход $\omega \in A$, то мы говорим, что в этом эксперименте мы наблюдаем событие $A$ (или произошло событие $A$).

**Примеры сложных событий**

- Выпало по крайней мере два орла в трёх подбрасываниях;
- Случайно выбранный делитель 180 сам делится на 2.

# Сложные события

Помимо элементарных событий нас могут интересовать сложные события, которые состоят из нескольких элементарных событий. Таким образом, событие мы понимаем как некоторое подмножество $A \subset \Omega$. Если в результате проведения случайного эксперимента наблюдается исход $\omega \in A$, то мы говорим, что в этом эксперименте мы наблюдаем событие $A$ (или произошло событие $A$).

**Примеры сложных событий**

- Выпало по крайней мере два орла в трёх подбрасываниях;
- Случайно выбранный делитель 180 сам делится на 2.

Если $\Omega$ состоит из $n$ элементарных исходов, то можно показать, что количество различных подмножеств (в ТВ — событий) равно $2^n$. **Покажите это (?!)**

# Операции над событиями

- Выделяют два особых вида событий: само $\Omega$ — множество всех элементарных исходов (по другому — **достоверное событие**); пустое подмножество $\emptyset$, в котором нет элементов, называется **невозможным** (не может наблюдаться никогда).
- Если $A \subset B$, то будем говорить, что событие $A$ **влечет** событие $B$. Действительно, если исходом эксперимента является элемент $\omega$ и $\omega \in A$, то $\omega \in B$.
- Объединением событий $A$ и $B$ называется событие $A \cup B$, которое наблюдается тогда и только тогда, когда произошло событие $A$ или $B$ (или оба одновременно).
- Наблюдение события $A \cap B$ (пересечение событий) означает одновременное наблюдение событий $A$ и $B$. События $A$ и $B$ называются **несовместными**, если $AB = \emptyset$.
- Событие $\bar{A} = A^C = \Omega \setminus A$ называется дополнением к событию $A : \omega \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $\omega \notin \bar{A}$. Также говорят, что событие $\bar{A}$ противоположно событию $A$. Естественно они несовместны.

# Операции над событиями - примеры

Эксперимент: подбрасывание трёх монет одновременно. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{$ООО, ООР, ОРО, РОО, РРО, РОР, ОРР, РРР$\}$. Рассмотрим три события:

$$\begin{aligned} A &= \text{«на первой монете выпал орёл»}, \\ B &= \text{«выпало меньше трёх решек»}, \\ C &= \text{«выпало четное число орлов»} \end{aligned}$$

- $B \subset A$ — наступление события $B$ влечёт событие $A$.
  Далее проще будет расписать отдельные элементарные исходы, которые составляю события:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ООО, ООР, ОРО, ОРР}\}, \\ B &= \{\text{ООО, ООР, ОРО, РОО, РРО, РОР, ОРР}\}, \\ C &= \{\text{ООР, ОРО, РОО, РРР}\} \end{aligned}$$

# Операции над событиями - примеры

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{OOO, OOP, OPO, OPP}\},\\
B &= \{\text{OOO, OOP, OPO, POO, PPO, POP, OPP}\},\\
C &= \{\text{OOP, OPO, POO, PPP}\}
\end{aligned}
$$

- $B \cup C$ — либо выпало меньше трёх решек, либо выпало чётное число орлов, либо это произошло одновременно. Соответствующие элементарные исходы $\{\text{OOO, OOP, OPO, POO, PPO, POP, OPP, PPP}\} = \Omega$. Т.о. $B \cup C$ является достоверным событием.
- $A \cap C$ — одновременно должно произойти и то, что на первой монете выпал орёл и что выпало четное число орлов. Соответствующие элементарные исходы $\{\text{OOP, OPO}\}$.
- $\bar{B}$ — дополнением к событию $B$ будет событие, что в точности выпало три решки, т.е. оно состоит только лишь из одного элементарного исхода PPP.

# Правило де Моргана

Все известные свойства операций объединения и пересечения множеств оказываются необходимыми в теории вероятностей. В частности, полезной является следующая формула:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

**Доказательство:** Пусть $\omega \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Это означает, что $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$., т.е. $\omega \notin A_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Но тогда $\omega \in \overline{A_i}$ при всех $i = 1, \ldots, n$, и значит $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{A_i})$. Таким образом, мы показали, что $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Аналогичным образом доказывается, что $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Следовательно, соотношение верно.

Поскольку операции объединения и пересечения в основных свойствах похожи на операции сложения и умножения чисел, то совокупность всех событий называют **алгеброй событий**.

# Вероятность

Пусть каждому элементарному исходу $\omega$ поставлено в соответствие некоторое число $p(\omega) \geqslant 0$, причем выполнено условие:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1. \tag{1}$$

Число $p(\omega)$ называется **вероятностью** элементарного события $\omega$.

## Определение

*Вероятностью события $A$ назовем число*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega). \tag{2}$$

Если считать число $p(\omega)$ весом элементарного события $\omega$, то вероятность $\mathbb{P}(A)$ можно интерпретировать как вес события $A$. Из (2) следует, что

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1. \tag{3}$$

и

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \tag{4}$$

если $AB = \emptyset$.
Так как в пустом множестве нет ни одного элементарного события, то $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

# Свойства вероятностей

Из определения вероятности следуют следующие очевидные свойства вероятностей:

1. Для любого события $A$
$$\mathbb{P}(A) \leq 1 \tag{5}$$
2. $$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \tag{6}$$
3. Если $A \subset B$, то
$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \tag{7}$$
4. Для любых событий $A$ и $B$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \tag{8}$$

Формула (8) имеет следующее полезное обобщение, которое называется формулой включения-исключения:
Для любых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \dots A_n). \tag{9}$$

Доказательство этой формулы легко **(?!)** получить с помощью метода математической индукции.

# Вероятностное пространство

Пусть $\Omega$ — пространство элементарных исходов, $|\Omega| = n$. Обозначим буквой $\mathcal{A}$ множество всех подмножеств множества $\Omega$ (алгебру событий) и символом $\mathbb{P}$ — функцию вероятности на алгебре $\mathcal{A}$ : для любого $A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A)$ определяется как вероятность события $A$ по формуле (2).

**Определение**

*Набор из 3-х связанных друг с другом объектов $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ называется* ***вероятностным пространством****.*

# Классическая схема

Существует очень важный пример вероятностного пространства, который носит название **классической схемы**. Если $|\Omega| = n$ и все элементарные исходы имеют одну и ту же вероятность $p(\omega) = c$, то из условия $\sum_( \omega \in \Omega)p(\omega) = 1$ следует, что константа $c = \frac{1}{n}$. Тогда вероятность любого события $A$ подсчитывается как

$$\sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{|A|}{n}. \tag{10}$$

Задача вычисления вероятности события $A$ сводится к задаче вычисления количества исходов в $A$. Такие задачи в математике относятся к разделу комбинаторики.