$\mathcal{N}(0, u-t)$ распределения и нормального $\mathcal{N}(x, t-s)$ распределения. Хорошо известно, что эта свёртка есть плотность нормального $\mathcal{N}(x, u-t+t-s)$ распределения, что и требовалось.

Винеровский процесс выходит из нуля, т.е. его начальное распределение сосредоточено в нуле — $\Psi_0(\{0\}) = 1$. С учётом этого обстоятельства и вида переходной плотности, выражение (49) полностью совпадает с плотностью конечномерного распределения винеровского процесса (21), стр. 55. ◎

## V. Мартингалы

Для того чтобы проиллюстрировать идею мартингальной теории, рассмотрим снова вводный к этой главе пример, т.е. будем считать, что имеется последовательность независимых сл.в. $\{\xi_k\}_1^\infty$, принимающих значения $\pm 1$. Игрок A в каждой из игр меняет свою ставку в зависимости от результатов предыдущих игр. Другими словами, его ставки $\{R_k\}_1^\infty$ суть последовательность сл.в., при этом $k$-ая ставка зависит от реализаций $(k-1)$ предыдущих игр: $R_k = R_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$. Самый простой способ формализации этой зависимости состоит в описании сл.в. $R_k$ как функции на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$, измеримой относительно $\sigma$-алгебры, порождённой вектором сл.в. $(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$; обозначим эту $\sigma$-алгебру через $\mathscr{F}_{k-1}$. Доход игрока A после $k$ проведённых игр

$$\eta_k = \textstyle\sum_1^k R_j \xi_j = \eta_{k-1} + R_k \xi_k.$$

Принимая решение о будущей ставке, игрок должен ориентироваться на величину усл.м.о. будущего дохода при фиксированных результатах предыдущих игр. В данном случае — на величину

$$\mathbf{E}\big[\,\eta_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\big] = \eta_{k-1} + R_k\, \mathbf{E}\,\xi_k,$$

где равенство справедливо в силу измеримости $\eta_{k-1}$ и $R_k$ относительно $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_{k-1}$ (т.е. зависимости этих величин только от $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$) и независимости $\xi_k$ от $\mathscr{F}_{k-1}$. Если игра безобидная, т.е. $\mathbf{E}\xi_k = 0$, то мы имеем равенство $\mathbf{E}\big[\eta_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}\big] = \eta_{k-1}$, что характеризует последовательность $\eta_k$ как мартингал. Если же $\mathbf{E}\xi_k > 0$ (или $< 0$), то $\{\eta_k\}_1^\infty$ образует субмартингал (супермартингал). Заметим, что определение этой последовательности тесно связано с последовательностью $\sigma$-алгебр, т.е. с последовательностью наблюдаемых сл.в., на которых формируются значения изучаемых мартингалов.

**Определения.** Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство.

a) Возрастающая последовательность $\sigma$-алгебр $\mathscr{F}_1 \subset \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{F}$ называется *потоком $\sigma$-алгебр* или *фильтрацией*.

b) Последовательность сл.в. $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k\}_0^\infty$ образует *мартингал* относительно потока $\sigma$-алгебр $\mathcal{F} = \{\mathscr{F}_k\}_0^\infty$, если

i) $\boldsymbol{\xi}$ согласована с фильтрацией $\mathcal{F}$, т.е. при $\forall\, k \geqslant 0$ сл.в. $\xi_k$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_k$ (обозначим $\xi_k \Subset \mathscr{F}_k$),

ii) математическое ожидание $\mathbf{E}|\xi_k| < \infty$, $\forall\, k \geqslant 0$,

iii) при $\forall\, k \geqslant 0$ усл.м.о.

$$\mathbf{E}\big[\xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k\big] = \xi_k \quad \text{(п.н.)}\,.$$

Если $\mathbf{E}\big[\xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k\big] \geqslant \xi_k$, $k \geqslant 0$, то $\boldsymbol{\xi}$ называется *субмартингалом*; при обратном неравенстве — *супермартингалом*.

c) *Естественной фильтрацией* (для последовательности сл.в. $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}_0^\infty$) называется поток $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\eta}}$, в котором $\mathscr{F}_k = \sigma\big(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k\big)$. Последовательность $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k\}_0^\infty$ образует мартингал относительно этой фильтрации, если $\mathbf{E}\big[\xi_{k+1} \,|\, \eta_0, \ldots, \eta_k\big] = \xi_k$, с соответствующими изменениями для суб- и супермартингалов.

Поскольку определение мартингалов и субмартингалов опирается на соответствующий поток $\sigma$-алгебр, то принято в их обозначении указывать этот поток: $\{\boldsymbol{\xi}, \mathcal{F}\} = \{\xi_k, \mathscr{F}_k\}_0^\infty$. В ситуациях, когда в записи мартингала фильтрация отсутствует, подразумевается, что имеется в виду естественная для $\boldsymbol{\xi}$ фильтрация $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\xi}}$.

Ясно, что если $\xi_k$ — субмартингал, то $(-\xi_k)$ — супермартингал, и наоборот, поэтому все теоретические утверждения относительно субмартингалов легко переносятся на супермартингалы.

Поскольку сложных вопросов существования усл.м.о. с тем или иным свойством здесь не возникнет, мы будем опускать напоминание в виде записи (п.н.) о том, что все эти свойства выполняются лишь почти наверное.

Основной рабочий инструмент в теории мартингалов — телескопическое свойство усл.м.о.:

$$\mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{L}\,\big]\,|\,\mathscr{M}\,\big] \;=\; \mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{L}\,\big] \;=\; \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{M}\,\big]\,|\,\mathscr{L}\,\big]$$

для вложенных сигма-подалгебр $\mathscr{L} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{F}$. Напомним также, что i) если $\xi \Subset \mathscr{L}$, то $\mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{L}\,\big] = \xi$, и ii) $\mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{L}\,\big] = \mathbf{E}\,\xi$, если $\xi$ не зависит от $\mathscr{L}$, т.е. не зависит от индикаторов $\mathbb{1}_A$, $\forall\, A \in \mathscr{L}$.

**82|** Упр. Покажите, что для мартингала $\boldsymbol{\xi}$ справедливо а) $\mathbf{E}\,\xi_k = \mathbf{E}\,\xi_0$, б) $\mathbf{E}\big[\xi_{k+m}\,|\,\mathscr{F}_k\big] = \xi_k,\; k, m \geqslant 0$.

Кроме того, здесь часто используются классические интегральные неравенства, адаптированные к усл.м.о.

**83|** **Теорема.** [*Неравенство Йенсена.*] *Если $h$ — выпуклая книзу борелевская функция на $\mathbb{R}^1$, сл.в. $\xi$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}\,\xi$, то для $\sigma$-алгебры $\mathscr{L} \subset \mathscr{F}$*

$$\mathbf{E}\big[\,h(\xi)\,|\,\mathscr{L}\,\big] \geqslant h\big(\,\mathbf{E}\big[\xi\,|\,\mathscr{L}\,\big]\big).$$

Доказательство этого неравенства в общем случае ничем не отличается от доказательства неравенства Йенсена для интегралов (см. следующий пример).

**84|** П р и м е р. Пусть $\{\xi_k, \mathscr{F}_k\}_0^\infty$ — мартингал, тогда $\{\xi_k^2, \mathscr{F}_k\}_0^\infty$ — субмартингал. Действительно, для квадратической функции $h(x) = x^2$ при $\forall\, x, \mu \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство $h(x) \geqslant 2\mu(x-\mu) + \mu^2$ (справа здесь стоит касательная к параболе в точке $x_0 = \mu$). Возьмём $\mu = \mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big] = \xi_k$, тогда

$$\mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}^2\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;\geqslant\; \mathbf{E}\big[\,2\xi_k(\xi_{k+1}-\xi_k) + \xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;=\; \xi_k^2$$

в силу $\mathscr{F}_k$-измеримости $\xi_k$. Аналогично для $|\xi_k|$ и вообще для любой выпуклой книзу функции $h(\xi_k)$. ◎

**85|** П р и м е р ы. 1) Пусть $\mathcal{F} = \{\mathscr{F}_k\}_0^\infty$ — некоторая фильтрация на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, сл.в. $\xi$ интегрируема: $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$. Тогда последовательность $\eta_k = \mathbf{E}\big[\,\xi\,|\,\mathscr{F}_k\big]$, $k \geqslant 1$, образует мартингал (мартингал П. Леви) относительно $\mathcal{F}$. Во-первых, по неравенству Йенсена

$$\mathbf{E}\,|\eta_k| \;\leqslant\; \mathbf{E}\Big[\,\mathbf{E}\big[\,|\xi|\,|\,\mathscr{F}_k\big]\Big] \;=\; \mathbf{E}\,|\xi| \;<\; \infty.$$

Во-вторых, по телескопическому свойству (ввиду вложенности $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_{k+1}$)

$$\mathbf{E}\big[\,\eta_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;=\; \mathbf{E}\Big[\,\mathbf{E}\big[\,\xi\,|\,\mathscr{F}_{k+1}\big]\,|\,\mathscr{F}_k\Big] \;=\; \mathbf{E}\big[\,\xi\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;=\; \eta_k\,.$$

2) Суммы сл.в. $S_k = \sum_1^k \xi_j$ с независимыми слагаемыми и нулевыми средними $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$ образуют мартингал относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\xi}}$. Очевидно, сл.в. $\xi_{k+1}$ не зависит от $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_k$ и усл.м.о $\mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big] = \mathbf{E}\,\xi_{k+1} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}\big[\,S_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;=\; \mathbf{E}\big[\,S_k\,|\,\mathscr{F}_k\big] + \mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big] \;=\; S_k$$

в силу свойств усл.м.о. При $\mathbf{E}\,\xi_j > 0$ последовательность $S_k$ образует субмартингал.

3) Аналогично, если $\mathbf{E}\,\xi_k = 1,\ k \geqslant 1$, и сл.в. $\xi_k,\ k \geqslant 1$, независимы в совокупности, то произведения $P_n = \prod_1^n \xi_k$ образуют мартингал относительно естественной фильтрации:

$$\mathbf{E}\big[\,P_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n\big] \;=\; \mathbf{E}\Big[\,\prod_1^{n+1}\xi_k\,|\,\mathscr{F}_n\Big] \;=\; \Big(\prod_1^{n}\xi_k\Big)\mathbf{E}\,\xi_{k+1} \;=\; P_n\,.$$

4) Пусть $\eta_0 = 0$ и $\big\langle\,\eta_k\,\big\rangle_0^\infty$ — независимые одинаково распределённые сл.в., для которых при некоторых $\lambda \neq 0$ существует производящая функция $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\,e^{\lambda\eta_1} < \infty$. Тогда при $S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ последовательность

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_n = \frac{1}{\psi^n(\lambda)}\exp\{\lambda S_n\}, \quad n \geqslant 1,$$

образует мартингал (мартингал Вальда) относительно естественной фильтрации $\mathscr{F}^{\boldsymbol{\eta}}$.

Например, если $\eta_k \stackrel{d}{\backsim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, то при $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ производящая функция $\psi(\lambda) = \exp\{\lambda\mu + \frac{1}{2}\,\lambda^2\sigma^2\}$ и мартингал Вальда

$$\xi_n = \exp\{\lambda\big(S_n - n(\mu + \tfrac{1}{2}\,\lambda\sigma^2)\big)\}.$$

В частности, $\xi_k = \exp\{-2\mu S_k/\sigma^2\},\ k \geqslant 1$, — мартингал.

5) Предположим, что наблюдается последовательность сл.в. $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k\}_1^\infty$. Сигма-алгебра $\mathscr{F}_n = \sigma\big(\xi_1,\ldots,\xi_n\big)$ описывает набор информации, которой может обладать наблюдатель после $n$ проведённых экспериментов; $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$. Как известно, наилучший прогноз значения следующего $(n+1)$-ого наблюдения равен усл.м.о. $\mathbf{E}\big[\,\xi_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n\big]$. Суммарная ошибка прогнозов

$$m_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\xi_{k+1} - \mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k\big]\Big), \quad n \geqslant 1,$$

образует мартингал относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\xi}}$. Действительно, по телескопическому свойству и в силу

$\mathscr{F}_n$-измеримости сл.в. $\xi_{k+1}$ при $k < n$ имеем

$$\mathbf{E}\big[\, m_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n \big] \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Big( \mathbf{E}\big[\, \xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_n \big] - \mathbf{E}\big[\, \xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k \big] \Big) \;=$$

$$= \; \sum_{k=0}^{n-1} \Big( \xi_{k+1} - \mathbf{E}\big[\, \xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k \big] \Big) \;=\; m_n.$$

6) Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ — некоторое измеримое пространство, интерпретируемое как множество значений наблюдаемой сл.в. (например, действительная прямая с борелевской $\sigma$-алгеброй), $f_0(x), f_1(x)$ — функции плотности относительно некоторой меры $\mu$ на $\mathscr{B}$. Образуем пространство $\Omega = \mathscr{X}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, как пространство всех последовательностей из $\mathscr{X}$ с цилиндрической $\sigma$-алгеброй $\mathscr{F} = \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ и вероятностным распределением $\mathbf{P}$, определяемым конечномерными вероятностями $(B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}, n \geqslant 1)$

$$\mathbf{P}\big\{\, B_1 \times \cdots \times B_n \,\big\} = \prod_{k=1}^{n} \int_{B_k} f_0(x)\, d\mu.$$

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ формализует понятие последовательности независимых одинаково распределённых (с плотностью $f_0$) сл.в. в терминах распределений этих сл.в. Здесь в естественной фильтрации $\sigma$-алгебра $\mathscr{F}_k = \mathscr{B}^k \times \mathscr{X}^{\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,k\}}$ и представляет собой минимальный набор подмножеств, описываемых реализациями первых $k$ сл.в. $\xi_k(\boldsymbol{x}) = x_k$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \Omega$. Рассмотрим сл.в. на $(\Omega, \mathscr{F})$

$$\ell_k(\boldsymbol{x}) = \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \Omega,$$

если $f_0(x_k) \neq 0$. При $f_0(x_k) = 0$ можно положить $\ell_k(\boldsymbol{x}) = 0$, т.к. вероятность $\mathbf{P}\{\boldsymbol{x} : f_0(x_k) = 0\} = \int_{\{f_0(x_k)=0\}} f_0(x_k)\, d\mu = 0$. Очевидно, сл.в. $\ell_k$, $k \geqslant 1$, независимы в совокупности, и математическое ожидание

$$\mathbf{E}\,\ell_k = \int\limits_{\{f_0(x_k)\neq 0\}} \frac{f_1(x_k)}{f_0(x_k)} f_0(x_k)\,d\mu = \int\limits_{\{f_0(x_k)\neq 0\}} f_1(x_k)\,d\mu.$$

Если распределение, определяемое плотностью $f_1$, абсолютно-непрерывно относительно распределения с плотностью $f_0$, то последний интеграл равен единице. И этом случае (как в примере 3) в этом блоке) последовательность

$$\mathscr{L}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(\xi_k)}{f_0(\xi_k)}, \qquad n \geqslant 1,$$

образует мартингал относительно естественной фильтрации и вероятностной меры, определяемой плотностью $f_0$. В математической статистике сл.в. $\mathscr{L}_n$, называемая отношением правдоподобия, участвует в формировании оптимального критерия, предназначенного для различения двух простых гипотез $H_0 : \xi \overset{d}{\backsim} f_0$ и $H_1 : \xi \overset{d}{\backsim} f_1$ о распределении наблюдаемой сл.в. ◎

► **Разложение Дуба для субмартингалов.** Пусть $\{\xi_n\}_0^\infty$ — некоторый субмартингал относительно потока $\sigma$-алгебр $\mathcal{F} = \{\mathscr{F}_n\}_0^\infty$. Образуем мартингал (см. пример 4, 85)

$$m_n = \xi_0 + \sum\nolimits_0^{n-1} \Big(\xi_{k+1} - \mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k\,\big]\Big), \quad n \geqslant 1,$$

$m_0 = \xi_0$. Разность между субмартингалом $\xi_n$ и мартингалом $m_n$

$$A_n = \sum\nolimits_0^{n-1} \Big(\,\mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1} \,|\, \mathscr{F}_k\,\big] - \xi_k\Big)$$

будет $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримой сл.в., т.е. последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ предсказуема относительно потока $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}$. Кроме того, из определения субмартингала следует неотрицательность и монотонность $A_n: A_n \leqslant A_{n+1},\ n \geqslant 0$. Представление субмартингала $\boldsymbol{\xi}$ в виде

$$\begin{aligned}\xi_n &= m_n + A_n,\\ &\quad m_n \ \text{— мартингал},\\ &\quad 0 \leqslant A_n \leqslant A_{n+1}, \quad A_n \Subset \mathscr{F}_{n-1},\ n \geqslant 1,\ \ A_0 = 0,\end{aligned}$$

называется *разложением Дуба* для субмартингалов; последовательность $A_n,\ n \geqslant 0$, называется *компенсатором субмартингала*. Несложно показать, что подобное разложение единственно с точностью до нулевой вероятности.

Компенсатор субмартингала $\xi_n^2$, образованного из квадратично-интегрируемого мартингала $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_n\}_0^\infty$, называется *квадратической характеристикой* мартингала $\boldsymbol{\xi}$ и обозначается $\langle\boldsymbol{\xi}\rangle$. Таким образом, для квадратично-интегрируемого мартингала $\boldsymbol{\xi}$ справедливо представление $\boldsymbol{\xi}^2 = \boldsymbol{m} + \langle\boldsymbol{\xi}\rangle$.

**86|** Пример. Пусть $\{\xi_1, \xi_2 \ldots\}$ — последовательность независимых сл.в. с нулевыми математическими ожиданиями $\mathbf{E}\,\xi_k = 0,\ k \geqslant 1$, и конечными дисперсиями $\sigma_k^2 = \mathbf{E}\,\xi_k^2 < \infty$. Как было показано ранее, последовательность сумм $S_n = \sum_1^n \xi_k$ образует мартингал относительно естественной фильтрации $\mathscr{F}_n = \sigma\big(\xi_1, \ldots, \xi_n\big)$. Заметим, что т.к. $\mathbf{E}\big[\,S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n\big] = S_n$, то

$$\mathbf{E}\big[\,S_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n\big] - S_n^2 \ = \ \mathbf{E}\big[\,(S_{n+1} - S_n)^2 \,|\, \mathscr{F}_n\big]$$

(ср. с двумя способами вычисления дисперсии). Поэтому квадратическая характеристика этого мартингала равна

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle_n \ = \ \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \Big(\mathbf{E}\big[\,S_{k+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_k\big] - S_k^2\Big) \ = \ \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \big(\mathbf{E}\big[\,\xi_{k+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_k\big]\big) \ = \\ = \ \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \sigma_{k+1}^2 \ = \ \sum\nolimits_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \ = \ \mathbf{D}\,S_n$$

ввиду независимости $\xi_{k+1}$ от $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_k$. ◎

**87** **Следствие.** *Пусть* $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_k,\ k \geqslant 1\}$ *— последовательность независимых одинаково распределённых сл.в. с* $\mathbf{E}\xi_1 = 0,\ \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 < \infty$. *Положим* $S_n = \sum_1^n \xi_k$, *тогда последовательность* $\{S_n^2 - n\sigma^2,\ n \geqslant 1\}$ *образует мартингал относительно естественной фильтрации* $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\xi}}$.

При больших $n$ поведение квадратично-интегрируемого мартингала в значительной степени определяется поведением его квадратической характеристики. Точнее, справедлива

**88** **Теорема.** *Пусть* $(\xi_n, \mathscr{F}_n)$ *— квадратично-интегрируемый мартингал,* $(\langle \xi \rangle_n, \mathscr{F}_n)$ *— его квадратическая характеристика. Если* $\mathbf{P}\{\lim_n \langle \xi \rangle_n = \infty\} = 1$, *то почти наверное*

$$\lim_n \frac{\xi_n}{\langle \xi \rangle_n} = 0.$$

► Случайная замена времени. При наблюдениях за сл.проц. часто возникает вопрос о моменте прекращения наблюдений. Естественно, решение о прекращении наблюдений в какой-то момент не может зависеть от последующих наблюдений. При рассмотрении мартингалов естественно считать, что момент остановки (прекращения наблюдений) согласован с фильтрацией, определяющей этот мартингал. Таким образом, значение сл.процесса $\xi_n,\ n \geqslant 0$, в момент остановки $\tau$ равно

$$\xi_\tau = \sum_0^\infty \xi_n \mathbb{1}(\tau = n).$$

Очевидно (?!), $\xi_\tau$ — случайная величина.

Представляют интерес вопросы о сохранении свойств мартингалами (субмартингалами) при случайной остановке. В частности, имеет ли место равенство $\mathbf{E}\xi_\tau = \mathbf{E}\xi_0$? Этот факт, называемый часто теоремой о свободной остановке (optional