

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И НЕФТЕГАЗОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

*Кафедра геологии нефти и газа имени академика
А.А. Трофимука*

Н.Г. НУРГАЛИЕВА

**ОСНОВЫ АНАЛИЗА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Казань - 2024

УДК 551.7.032
ББК 26.3

*Принято на заседании учебно-методической комиссии
Института геологии и нефтегазовых технологий
Протокол №3 от 14 ноября 2024 г.*

Рецензенты

доктор геолого-минералогических наук,
зав. кафедрой геологии нефти и газа **Б.В. Успенский**;
доктор геолого-минералогических наук,
зав. кафедрой геологии палеонтологии и стратиграфии **В.В. Силантьев**

Нургалиева Н.Г.

Основы анализа Фурье для решения геологических задач /
Н.Г. Нургалиева. – Казань: Казанский федеральный университет,
2024. – 45 с.

Учебно-методическое пособие составлено для студентов магистратуры направления 05.04.01 «Геология» для освоения концепции цикличности осадочных толщ на основе анализа Фурье, применяющегося для обработки различных геолого-геофизических данных и построения секвенс-стратиграфических реконструкций. Пособие может служить основой для выполнения магистерских диссертаций по сходной тематике.

© Нургалиева Н.Г., 2024
© Казанский университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. ВВОДНАЯ	5
1.1. Волны простые и сложные	5
1.2. Об открытии Жана Батиста Фурье	7
1.3. Знания, необходимые для осознанного использования анализа Фурье	8
2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	8
2.1. Основные тригонометрические функции, используемые в преобразовании Фурье	8
2.2. Параметрическое выражение уравнения окружности	9
2.3. Тригонометрические функции и величины, изменяющиеся во времени	10
3. ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ	11
3.1. Интегралы	11
3.2. Производные	12
3.3. Дифференцирование тригонометрических функций	13
3.4. Арифметические действия над функциями	15
3.5. Формирование волны сложением тригонометрических функций	17
4. АНАЛИЗ ФУРЬЕ	23
4.1. Ряды Фурье	23
4.2. Анализ Фурье	24
4.3. Коэффициенты Фурье	25
5. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ И АНАЛИЗ ФУРЬЕ	28
5.1. Терминология и классификация	28
5.2. Анализ Фурье (спектральный анализ) стратиграфической записи	33
5.3. Детальный анализ Фурье геологических данных на примере данных скважинной диаграммы ПС	36
5.4. Выполнение практической работы	43
5.5. Вопросы для самоконтроля	44
ЛИТЕРАТУРА	45

Предисловие

Цель данного учебно-методического пособия – дать студентам общее представление о преобразовании и анализе Фурье. Анализ Фурье широко применяется в науке и технике, в том числе, в геологии. В основе анализа Фурье лежит математическая идея, определяемая как преобразование Фурье. В данном пособии рассмотрены основы преобразования Фурье и его использование при обработке геолого-геофизических данных. В пособии охарактеризована методика анализа Фурье геологических данных на примере данных седиментологических кривых геофизических исследований скважин.

Освоение анализа Фурье имеет важное значение для понимания и прогнозирования стратиграфических последовательностей при секвенс-стратиграфическом анализе.

1. ВВОДНАЯ

1.1. Волны простые и сложные

Базовыми знаниями для преобразования Фурье являются производная, интеграл и тригонометрические функции.

Преобразование Фурье или гармонический анализ используют при изучении волновых процессов разной природы.

На рис. 1.1 показана простая волна (график синуса).

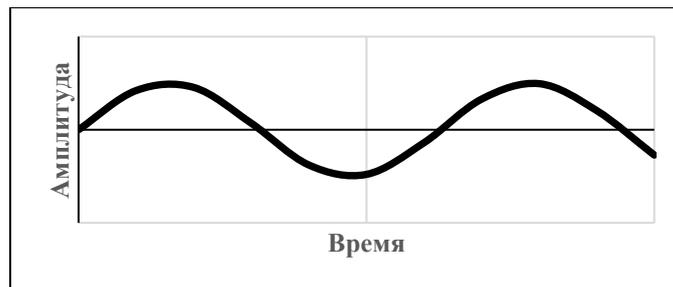


Рис. 1.1. График синуса – график простой волны

Сложные волны – это результат смешения простых волн.

Простые волны, образующие сложную волну (рис. 1.2), называются частотными составляющими. А график, показывающий положение каждой составляющей сложной волны, называется частотным спектром.

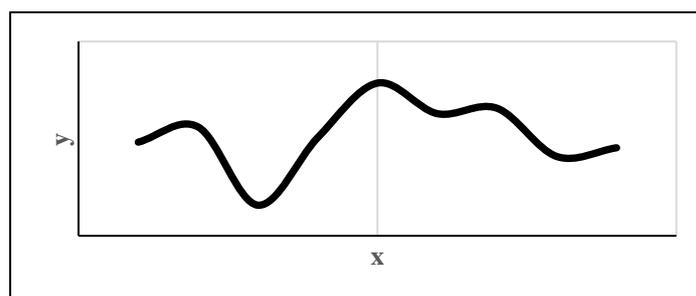


Рис. 1.2. Сложная волна. График функции $y = 2 \sin(x + \cos x) + \sin(x + 2 \sin x) + 2$

Знание спектра дает нам информацию о составе волны. Преобразование Фурье или анализ Фурье – это метод нахождения спектра по форме волны. Это математический метод определения, из каких простых волн (какой частоты и интенсивности) состоит волна сложной

формы. А обратное преобразование – это нахождение формы волны на основе частотного спектра.

Частотный спектр представляет частоту и амплитуду простых волн, из которых состоит сложная волна. Частота – это количество периодов в одной секунде. Амплитуда отсчитывается от нуля до максимума или минимума. Например, на рис. 1.3 изображен сигнал с частотой 3 Гц. Амплитуда соответствует интенсивности сигнала.

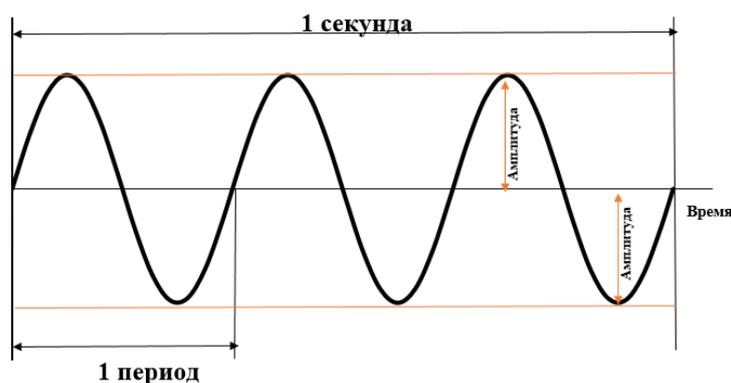


Рис. 1.3. Период и амплитуда сигнала с частотой 3 Гц

В сложной волне смешаны самые различные частоты, из которых нужно выделить так называемую «основную частоту». Ей соответствует самая большая амплитуда. Допустим, что мы разбили сложный сигнал на отрезки в 1 секунду. Выделяем на отрезке период самой большой волны – «основной период». Например, на рис. 1.4 он равен 0.5 с, то есть основная частота равна 2 Гц. Разбив сложную волну на отрезки определенной длины, мы будем по одной извлекать из них простые волны, или частотные составляющие.

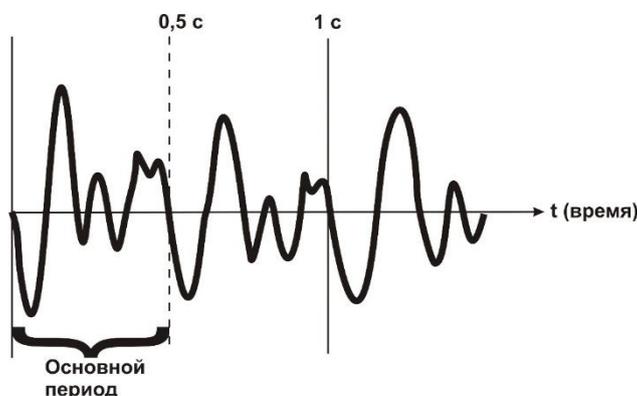


Рис. 1.4. Основной период сложной волны

Определяем величину каждой частотной составляющей и позиционируем их на графике (спектре) в порядке увеличения частот (рис. 1.5).

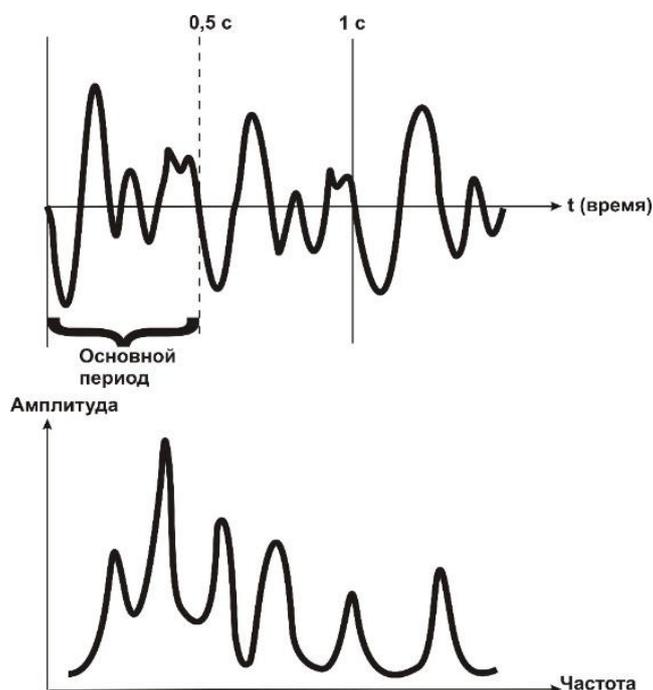


Рис. 1.5. Преобразование сложной волны в частотный спектр

1.2. Об открытии Жана Батиста Фурье

Преобразование Фурье родилось в 1812 году, когда французский математик Жан Батист Фурье нашел решение задачи, касающейся явления теплопередачи. Теплопередача – это распространение тепла внутри вещества, на которое влияет много факторов. Фурье открыл, что даже сложное явление можно рассматривать как комбинацию простых явлений.

В дальнейшем открытие Фурье получило распространение в качестве математического подхода к свойствам волн.

Расчет волн сложной формы, которыми заполнен мир – это непростая задача. К счастью, в 1965 году был изобретен метод под названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Метод основан на комбинации свойств тригонометрических функций, что и позволяет проводить преобразование Фурье эффективно.

1.2. Знания, необходимые для осознанного использования преобразования Фурье

Для понимания преобразования Фурье необходимо знать следующие математические функции и понятия:

- тригонометрические функции: \sin и \cos ;
- касательная к графику функции (наклон);
- интеграл (первообразная функции);
- интеграл определенный (площадь или объем) и интеграл неопределенный;
- произведение функций и его определенный интеграл;
- ортогональность функций;
- функциональный синтез с помощью ортогональных функций (\sin/\cos);
- ряд Фурье.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1. Основные тригонометрические функции, используемые в преобразовании Фурье

В преобразовании Фурье используют \sin и \cos . \sin – это координата y , а \cos – координата x точки единичной окружности с центром $(0; 0)$ (рис. 2.1). Если отложить на окружности дугу длиной равной радиусу единичной окружности, то полученный угол определяется как 1 радиан (рис.6).

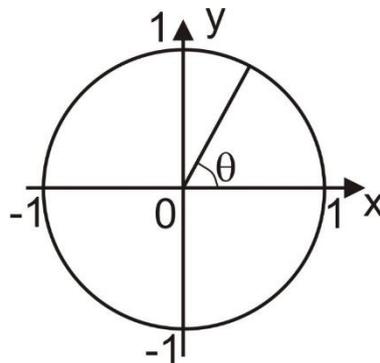


Рис. 2.1. Определение радиана как единицы угла

Длина единичной окружности равна 2π , значит угол 360° равен 2π радиан.

В таблице 2.1 приведено соответствие между угловыми градусами и радианами.

Таблица 2.1

Угловые радиусы и радианы

Радианы	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
Градусы	30	45	60	90	180	360

Функция $\cos\theta$ сдвинута по сравнению с функцией $\sin\theta$ на $\pi/2$ (рис. 2.2). Различие между ними состоит в том, что синус соответствует проекции точки единичной окружности, на которой вращается точка, на ось y , а косинус – на ось x .

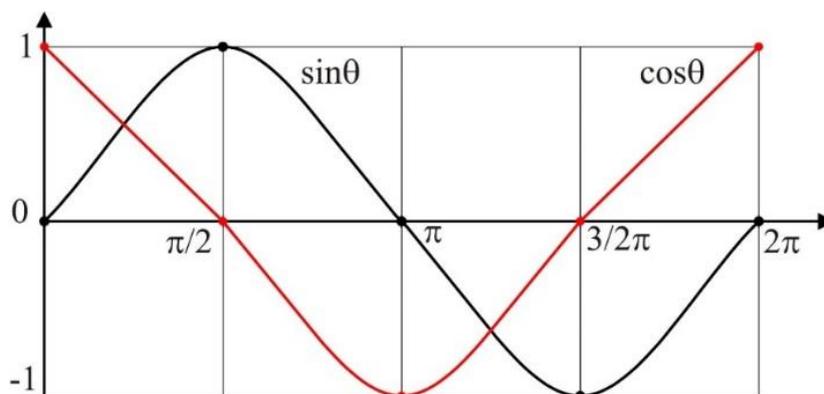


Рис. 2.2. Функции $\sin\theta$ и $\cos\theta$

2.2. Параметрическое выражение уравнения окружности

Когда точка на единичной окружности движется, и угол при основании равен θ , то для любой точки окружности:

$$x = \cos\theta; y = \sin\theta$$

Эта форма записи называется параметрическим выражением через переменную θ . Она играет большую роль при использовании тригонометрических функций.

Параметрическое выражение основано на использовании двух формул, и обе содержат θ .

Уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Уравнение единичной окружности:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$$

С другой стороны, это выражение теоремы Пифагора с помощью тригонометрических функций. При этом, радиус $r=1$ единичной окружности можно считать гипотенузой, $\sin\theta$ – высотой, а $\cos\theta$ – основанием прямоугольного треугольника.

2.3. Тригонометрические функции и величины, изменяющиеся во времени

Область применения преобразования Фурье – динамические явления, когда физическая величина с течением времени изменяет свое численное значение. Поэтому переменную θ записывают так, чтобы она приобретала смысл единиц физических величин, например число радиан в секунду (рад/с): угловая скорость ω . По аналогии с обычной частотой, выражающей число повторений в секунду, ω называют угловой частотой.

Таким образом произведение ωt имеет физический смысл и размерность угла, поэтому его можно использовать в качестве переменной тригонометрических функций.

Если ω константа, то $\sin\omega t$ – это функция t . Форма ее графика такая же, как у обычной функции синуса, изменяющейся с постоянной угловой скоростью (рис. 2.3А).

Если построить график, где по горизонтальной оси откладывать только ω , то получим вертикальный отрезок (рис. 2.3Б). Это не что иное как частотный спектр.

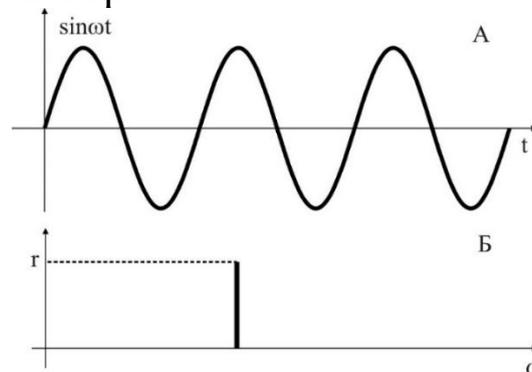


Рис. 2.3. А – график функции $\sin\omega t$; Б – частотный спектр, где ω – угловая частота, r – радиус вращения точки

Для набора функций с разными константами ω , например, 2ω , 3ω , 4ω и радиусами r , $2r$, $3r$ соответственно, получаем определенный частотный спектр (рис. 2.4).

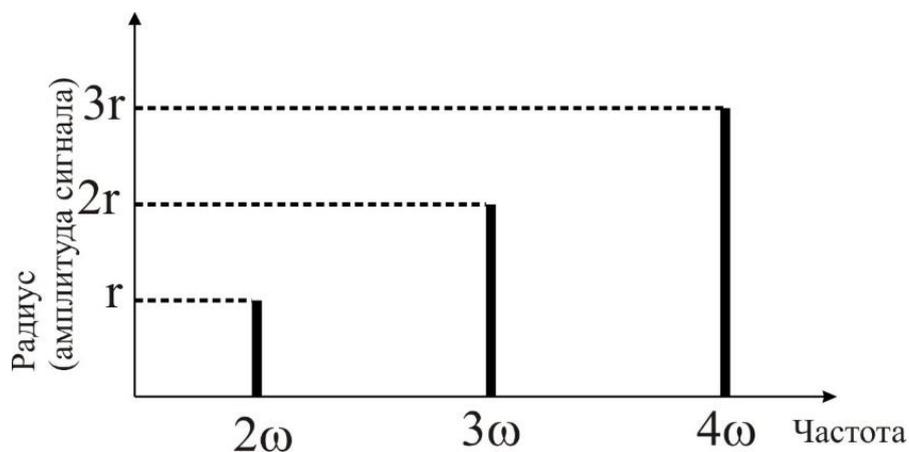


Рис. 2.4. Схематический частотный спектр для трех типов вращений с разными угловыми частотами и радиусами вращения

Таким образом, связываются графики функций времени и спектр частот, а формы волн переводятся в частотный спектр.

Для преобразования Фурье есть одно условие: период колебаний должен быть постоянен. Однако в природе существует много явлений, для которых это условие не выполняется. В таких случаях проводят деление на короткие интервалы времени, в пределах которых явление можно считать периодически повторяющимся, и вычисляют спектр.

Для преобразования Фурье нужно находить произведение тригонометрических функций и интегрировать полученное произведение.

3. ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

3.1. Интегралы

Интеграл – это нахождение площади с помощью заданной функции на заданном интервале.

Например:

$$\int_0^3 1dx = 3$$

Это площадь прямоугольника, ограниченного функцией $y=1$ сверху и частью оси x снизу между точками $x=0$ и $x=3$.

Определенный интеграл для функции $y = a$ на интервале от $x = 0$ до $x = b$ есть площадь ab :

$$\int_0^b a dx = ab$$

Буква d в dx указывает на малость, поэтому dx означает очень маленький отрезок на оси x . Идея интеграла – нахождение всей площади сложением малых частей.

Интеграл от $y = x$ с неопределенной правой границей x равен $x^2/2$. Поэтому эта функция и называется неопределенным интегралом.

Неопределенный интеграл от функции вида $y = x^n$ выглядит следующим образом:

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

3.2. Производные

Нахождение производной (дифференцирование) – это операция, обратная к неопределенному интегрированию.

Основное для производной понятие – это касательная к графику функции.

Касательная к графику функции – это прямая, которая имеет лишь одну общую точку с кривой, отображающей функцию, не пересекая ее. Важно рассмотреть наклон этой прямой. Наклон прямой равен отношению ее вертикального изменения к горизонтальному. Дифференцирование – это нахождение наклона касательной.

Производная квадратичной функции – это линейная функция. Производная кубической функции – это квадратичная функция. Для общего случая $y = x^n$ производная будет выглядеть так: nx^{n-1} .

Производная функции $y = f(x)$ записывается как $\frac{d}{dx} f(x)$, но часто используют запись $()'$.

Так как нахождение интеграла и производной – обратные операции, можно легко найти интеграл для функции $f(x)$, если известно, что она является производной от другой функции $F(x)$. Эта исходная

функция $F(x)$, для которой $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$, называется первообразной. Вычислить неопределенный интеграл – это, по сути, найти первообразную.

3.3. Дифференцирование тригонометрических функций

Найдем производную от функции $y = \sin x$. Рассмотрим график функции $y = \sin x$. В точке $x = 0$ наклон касательной равен $+1$. По мере возрастания x наклон касательной уменьшается. То есть при увеличении x значение производной уменьшается (рис. 3.1).

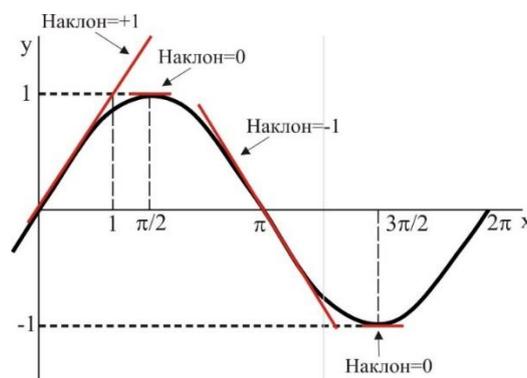


Рис. 3.1. Наклон касательной к кривой $y = \sin x$ в разных точках

В точке $x = \pi/2$ наклон кривой равен 0 , затем по мере увеличения x касательная все большей наклоняется вправо и вниз, наклон уменьшается (то есть становится отрицательным). В точке $x = \pi$ наклон наименьший (-1), а затем он начинает увеличиваться и в точке $x = 3\pi/2$ он вновь равен 0 . Наконец наклон опять становится положительным и в точке $x = 2\pi$ возвращается к 1 . Затем все повторяется. График изменений наклона будет таким, как на рис. 3.2. Это график функции $\cos x$.

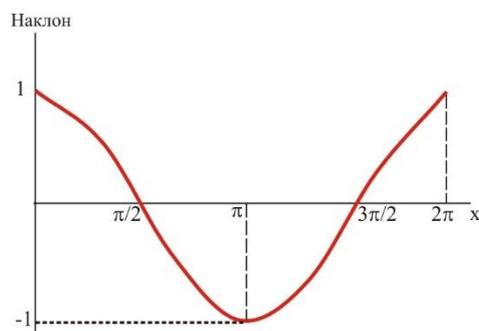


Рис. 3.2. Изменение наклона касательной к кривой $y = \sin x$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$. Это же означает, что первообразная косинуса равна синусу.

Аналогично, можно прийти к заключению, что $(\cos x)' = -\sin x$. Неопределенные интегралы запишутся следующим образом:

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

Определенные интегралы вычисляются, например, так:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi - \cos 0) = -(1 - 1) = 0;$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi} = (\sin \pi - \sin 0) = 0.$$

3.4. Арифметические действия над функциями

На рис. 3.3 показано сложение, вычитание и умножение функций A и B . Например при $x = 0$ сумма, разность и произведение функций A и B составит $y=2+3=5$, $y=2-3=-1$ и $y=2*3=6$ соответственно.

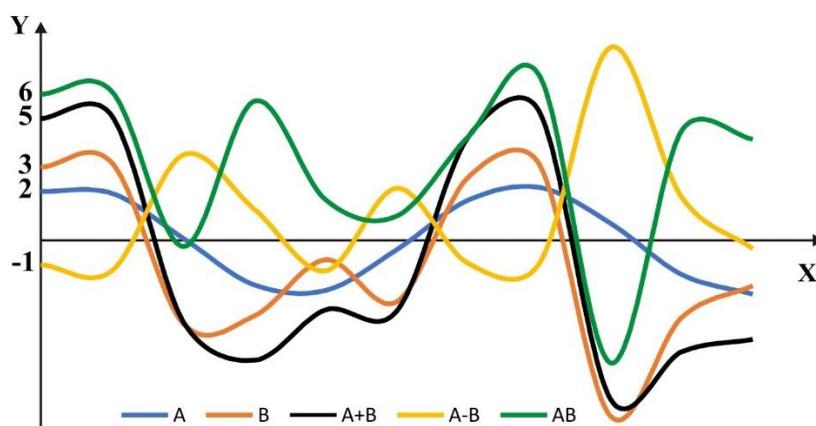


Рис. 3.3. Сложение, вычитание и умножение функций A и B

Теперь рассмотрим график произведения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ (рис.3.4).

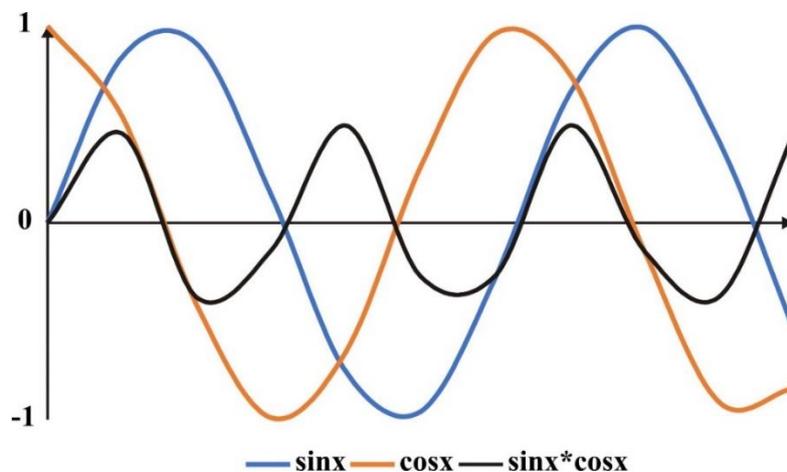


Рис. 3.4. Произведение функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Из графиков видно, что по сравнению с исходными функциями число периодов возросло в два раза, амплитуда уменьшилась в два раза, вертикального смещения нет, то есть средняя линия амплитуды проходит через 0. Таким образом получим $\frac{1}{2} \sin(2x)$, где число перед синусом $\frac{1}{2}$ – высота (амплитуда) волны, а число после синуса 2 – период волны.

Из учебников хорошо известны формулы, которые необходимо знать (для двух углов α и β):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}; \\ \sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}; \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}; \\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Важно помнить, что функции $\sin x$ и $\cos x$ являются ортогональными. Условием ортогональности функций является равенство определенного интеграла произведения ортогональных функций нулю:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4} [1 - 1] = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Для пары функций $\sin(mx)$; $\sin(nx)$ и пары функций $\cos(mx)$; $\cos(nx)$ определенный интеграл имеет отличное от 0 значение только для равных m и n , а в остальных случаях равен 0. То есть функции $\cos(mx)$ и $\cos(nx)$ тоже ортогональны при условии различных m и n .

Теперь вычислим определенный интеграл от $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \sin x \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\cos(0) - \cos(2x)\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{1 - \cos(2x)\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \cos 2x dx \right) = \frac{1}{2} [x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (2\pi - 0) = \pi \end{aligned}$$

3.5. Формирование волны сложением тригонометрических функций

Рассмотрим сумму функций $y = a\cos(mx)$ и $y = b\sin(mx)$ с одинаковыми периодами. Для простоты примем $m=1$ и рассмотрим график $y = a\cos x + b\sin x$. Пусть a и b равны 1. Мы получим следующую сумму: $\cos x + \sin x$ (рис. 3.5).

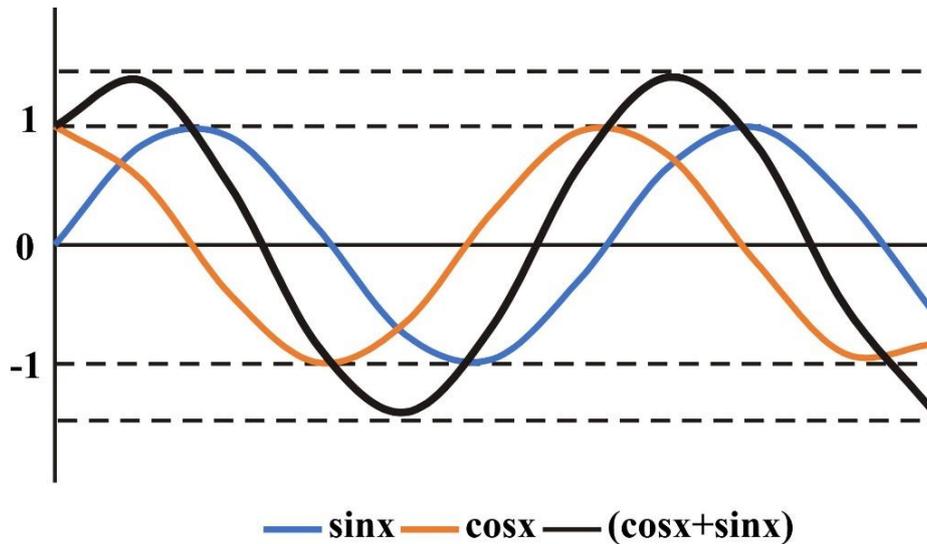


Рис. 3.5. Функции $\sin x$, $\cos x$ и $(\cos x + \sin x)$

Рассмотрим график функции $-\cos x + \sin x$ (рис. 3.6)

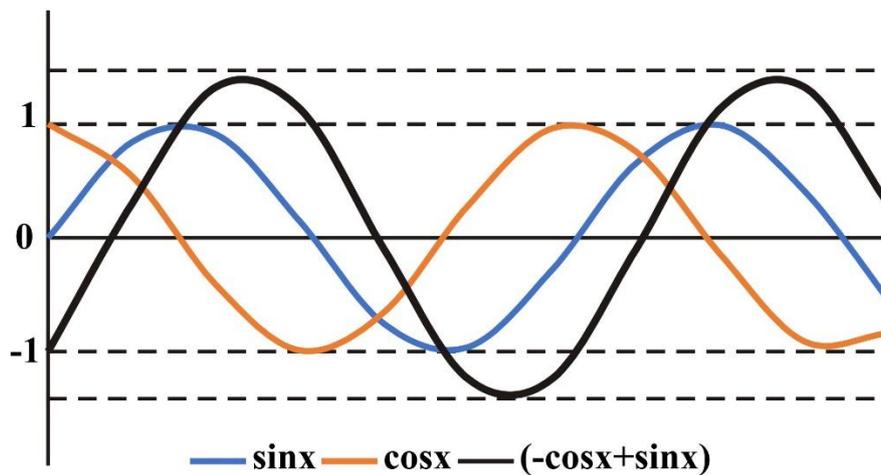


Рис. 3.6. Функции $\sin x$, $\cos x$ и $(-\cos x + \sin x)$

Амплитуда суммы функций оказалась больше 1, как и на рис. 3.5, то есть больше амплитуды любой из слагаемых функций. А точка

смены знака функции, как и график функции переместились вправо (рис. 3.6).

Разница начальных точек называется разностью фаз или просто фазой. Таким образом, при сложении $a\cos x$ и $b\sin x$ меняется фаза.

«Сдвинуть» фазу можно, не используя операцию сложения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Например, фазу $\sin x$ можно выразить, используя запись $\sin(x + \theta)$, и изменять θ . Однако, в этом случае нужно подготовить большое количество вариаций θ , что очень трудоемко как с точки зрения синтеза, так и анализа формы волн. Поэтому каждую функцию приходится представлять не в ее первоначальном виде, а в виде комбинации ортогональных функций. На самом деле, с помощью всего двух функций, $y = \sin x$ и $y = \cos x$, можно выражать различные фазы функции $y = \sin(x + \theta)$. Рассмотрим два конкретных примера: для $a = \frac{1}{2}$ и $b=1$ и для $a = 1$ и $b=\frac{1}{2}$ (рис. 3.7).

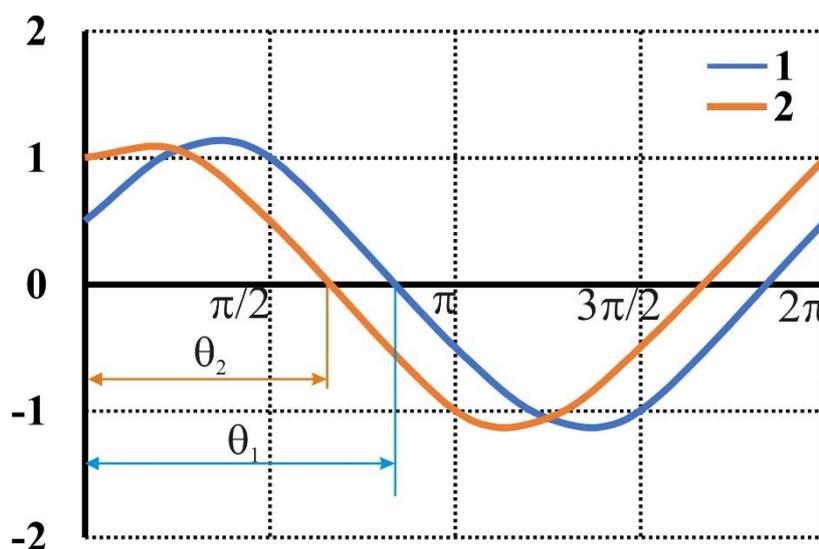


Рис. 3.7. Фазы волн функций: 1 - $y = \frac{1}{2}\cos x + \sin x$;
2 - $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin x$

Возможность выражения только через эти две функции указывает на их ортогональность. Ортогональность означает невозможность выразить одно через другое (простой пример: ортогональность осей x и y). В случае тригонометрических функций нельзя, например, функцию $y = \cos x$ выразить изменением b в функции $y = b\sin x$. Это верно и для функции $y = \sin x$. Ее нельзя выразить через $a\cos x$, как не изменяя a . Кроме того, функцию $y = \sin(3x)$ тоже нельзя выразить через $\sin x$,

так как функции $y = \sin(3x)$ и $y = \sin x$ – ортогональны. Функции косинуса с отличающимися периодами: $\cos x, \cos(2x), \cos(3x)$ и так далее, тоже взаимно ортогональны. Ортогональны и функции $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, даже если их периоды одинаковы.

Все взаимно ортогональные тригонометрические функции, которые нельзя выразить через другие тригонометрические функции, важны, так как из них формируются различные волны.

В зависимости от амплитуд функций $y = b \sin x$ и $y = a \cos x$ амплитуда синтезированной волны будет отличаться. Это видно, если представить комбинацию функций $y = b \sin x$ и $y = a \cos x$ в виде векторов, вращающихся по окружности.

Вектор – это физическая величина, которая характеризуется числовым значением и направлением.

На рис. 3.8 показаны векторы, их синтез и применение теоремы Пифагора к синтезу векторов.

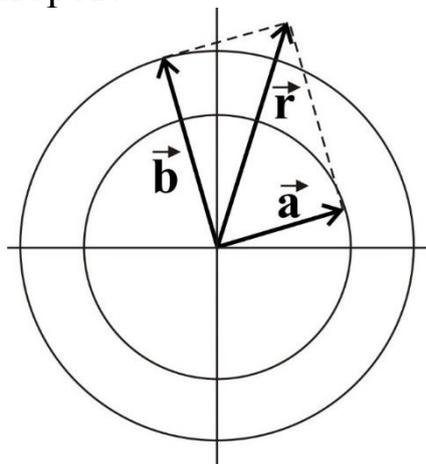


Рис. 3.8. Векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$. Вектор \vec{a} вращается по закону $a \cos x$. Вектор \vec{b} вращается по закону $b \sin x$. Синтезированный вектор $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ соответствует окружности радиуса r . По теореме Пифагора $r^2 = a^2 + b^2$

Согласно рис. 3.8 амплитуда волны $y = a \cos x + b \sin x$ равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Например, для волны с коэффициентами $a = 2$ и $b = 2$ получим $r = \sqrt{8} = 2,82842712\dots$

Комбинируя a и b , изменить период невозможно, но можно легко формировать амплитуду и фазу.

При комбинации функций $y = \sin(nx)$ и $y = \cos(nx)$ меняется фаза, но не меняется период. При комбинации попарно

$\sin x$ и $\cos x$, $\sin(2x)$ и $\cos(2x)$, $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ получаются волны с периодом 1, 2, n соответственно. Этот период n взаимосвязан с ω (угловой частотой). Если скомбинировать его с амплитудой r , то получится спектр (рис. 3.9).

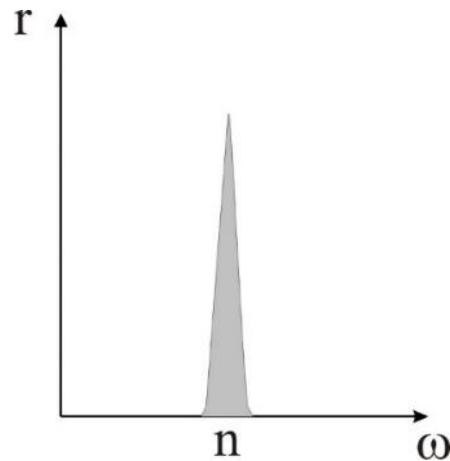


Рис. 3.9. Спектр волны $\sin(nx) + \cos(nx)$. На самом деле, график – это отрезок, не обладающий шириной, но здесь для наглядности показана ширина

Теперь рассмотрим сложение тригонометрических функций с разными периодами: $y = \sin x + \sin(2x)$ (рис. 3.10); $y = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$ (рис. 3.11); $y = \sin x + 0,5\cos(2x)$ (рис. 3.12); $y = \sin x + 0,5\cos(3x) + 0,5\sin(3x)$ (рис. 3.13).

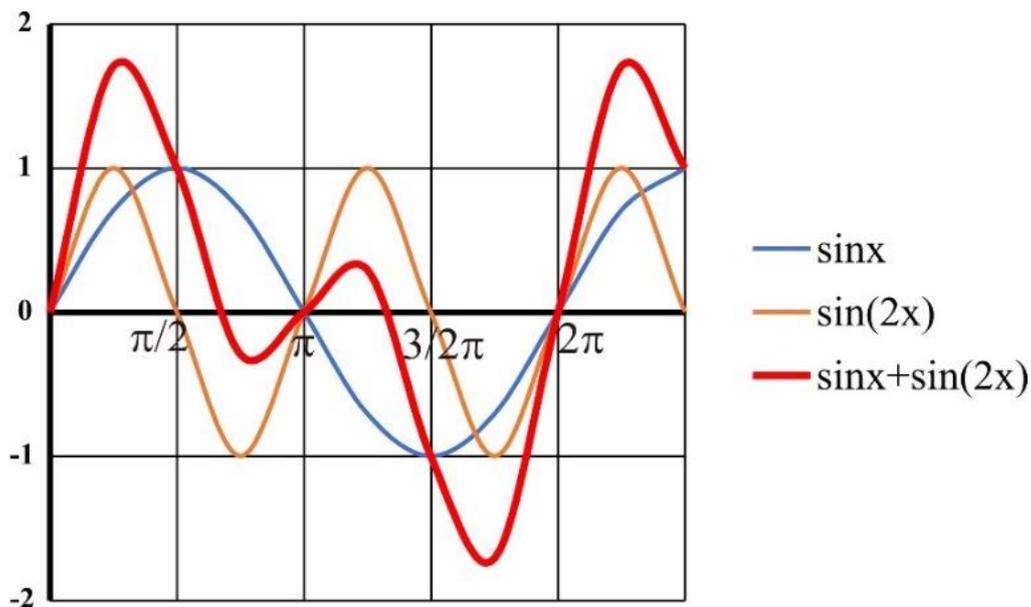


Рис. 3.10.

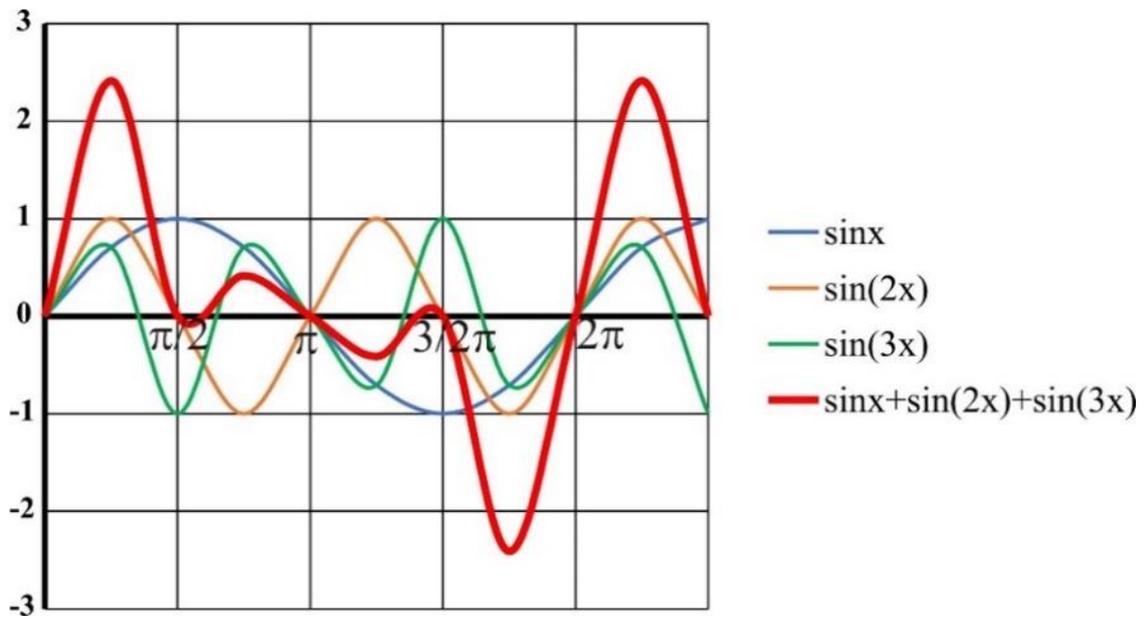


Рис. 3.11.

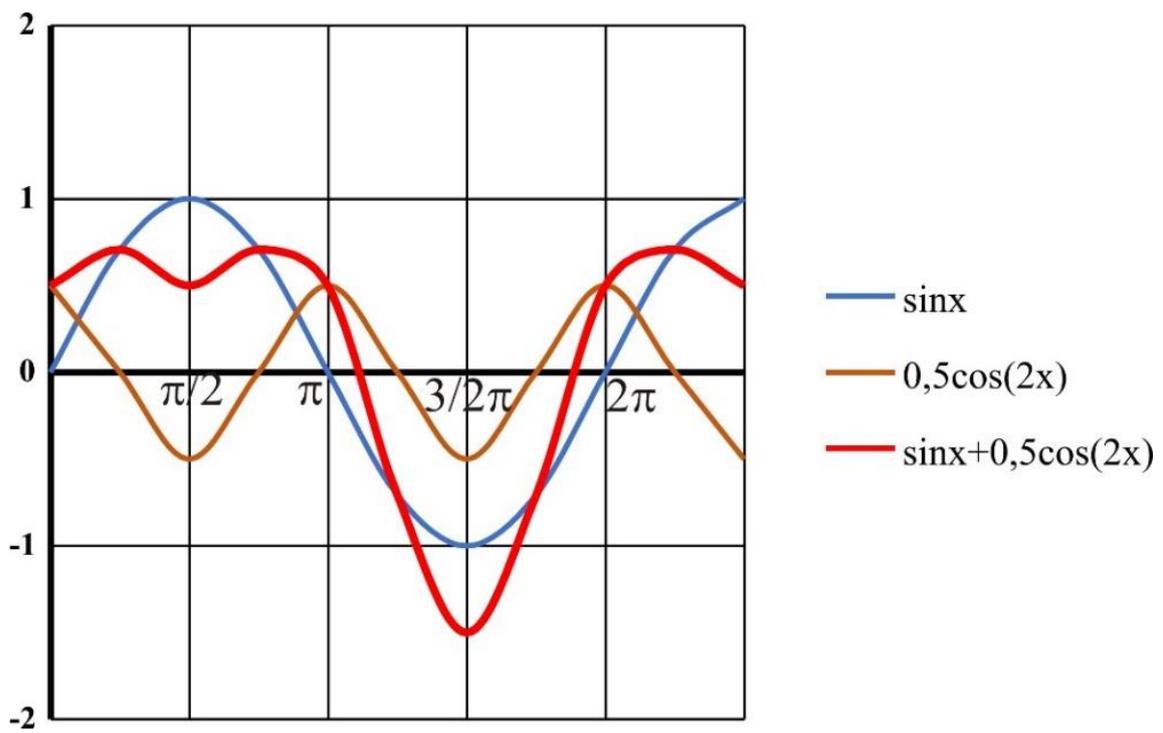


Рис. 3.12.

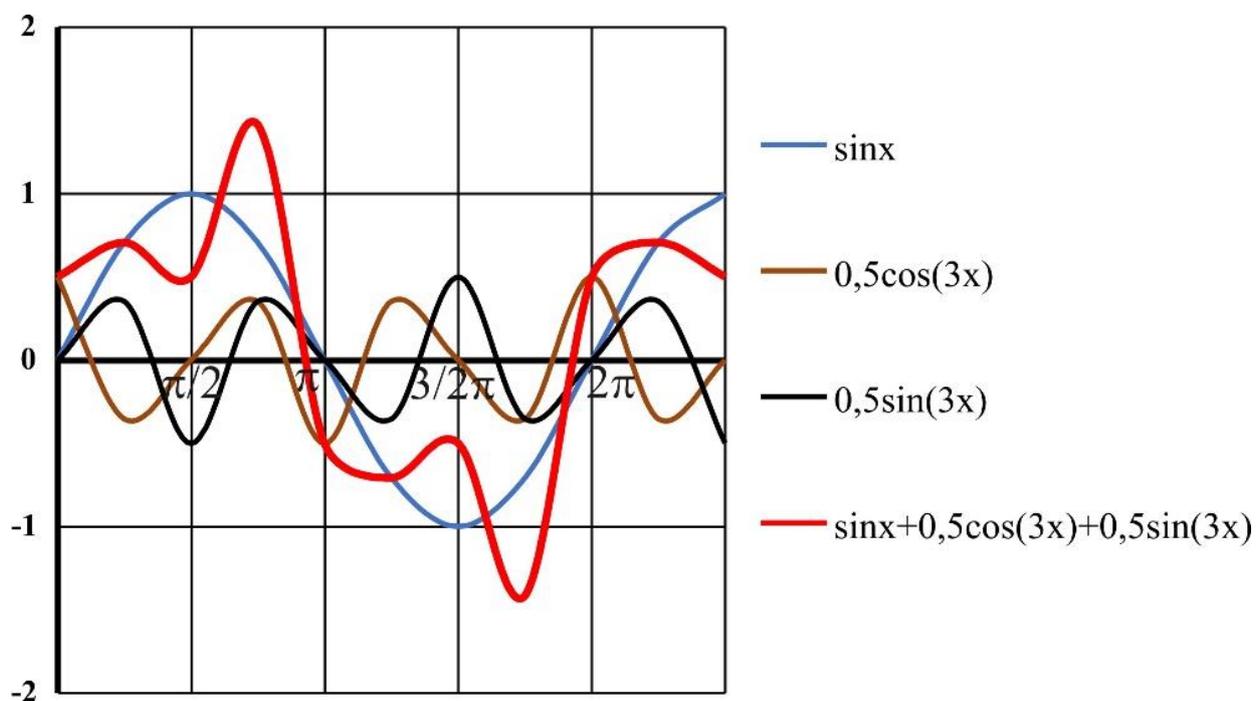


Рис. 3.13.

Можно видеть, что, комбинируя функции синусов и косинусов с различными амплитудами и периодами, можно создавать графики разнообразной формы.

Теперь перейдем к рядам Фурье.

4. АНАЛИЗ ФУРЬЕ

4.1. Ряды Фурье

Формула разложения в ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots + a_n \cos(nx) \\ &\quad + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots + b_n \sin(nx) \\ &\quad + \dots = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

Смысл этой формулы заключается в том, что функция $F(x)$ в левой части может быть составлена из функций косинусов и синусов в правой части. Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n будут зависеть от вида функции $F(x)$. В начале формулы стоит свободный член $\frac{1}{2} a_0$, который задает вертикальный сдвиг всей волны, синтезированной последующими тригонометрическими функциями.

Для разложения в ряд Фурье необходимо, чтобы синтезированная функция $F(x)$ имела определенный период, то есть была периодической. Однако можно синтезировать волну и для непериодической функции, если разбить ее на интервалы и считать, что они повторяются.

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n и $b_1, b_2, \dots, b_n \dots$ называются коэффициентами Фурье и, задав их значения, можно определить форму волны $F(x)$. Ведь n определяет как a_n и b_n (амплитуды), так и $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ (период), поэтому можно однозначно указать, какая амплитуда к какому периоду относится. Кроме того, выбором a или b можно указать, к какой функции, синусу или косинусу, относится данный коэффициент. Таким образом, значения этих коэффициентов однозначно определяют форму волны функции $F(x)$.

Преобразование Фурье – это вычисление частот и амплитуд исходных функций синуса и косинуса. Однако преобразование Фурье применимо лишь к функциям, форма волны которых каким-либо образом повторяется с постоянным периодом. Например, сложение функций $\sin(2x)$, $\sin(3x)$ и $\cos x$ дает периодическую функцию, форма волны которой повторяется с периодом основной функции, то есть $y = \sin x$ (рис. 4.1).

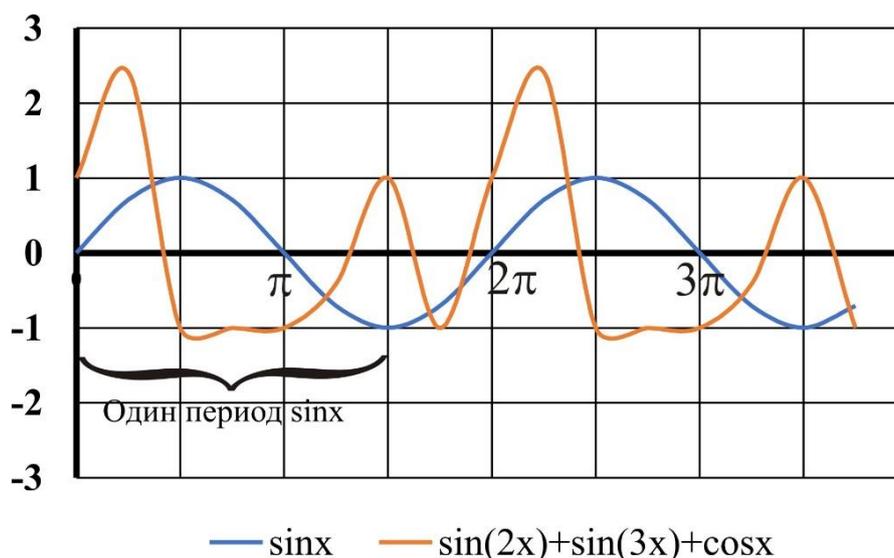


Рис. 4.1. Функция $y = \sin(2x) + \sin(3x) + \cos x$ с точки зрения одного периода $\sin x$

В природе есть много волн, не являющихся периодическими. Такие волны делят на короткие интервалы и считают их повторяющимися, что позволяет рассматривать волну как периодическое явление, которое можно исследовать с помощью преобразования Фурье.

4.2. Анализ Фурье

Анализ Фурье или преобразование Фурье заключается в получении частотного спектра. Частотный состав устанавливается при соблюдении следующего порядка.

1. Если исходная функция – непериодическая, то волна разбивается на интервалы, например, длиной 1 секунда. Эта длина принимается за максимальный период. В случае частоты, наоборот, минимальной частотой будет 1 Гц. А составляющая, которая на интервале в 1 секунду колеблется 1000 раз, будет частотой составляющей 1000 Гц.
2. Далее выбирается ингредиент (частота), который мы будем искать. Далее рассматриваются все частоты – от самой низкой до максимально высокой.

3. Путем использования особых фильтров, каждый из которых способен выделять только один определенный ингредиент (частотную составляющую), извлекаются частоты. Например, используя фильтр для a_1 , можно извлечь составляющую $\cos x$.
4. Измеряется высота (амплитуда) извлеченных частотных составляющих. Производится расстановка их в порядке возрастания частот.

4.3. Коэффициенты Фурье

В ряде Фурье, который выглядит следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots + a_n \cos(nx) + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots + b_n \sin(nx) + \dots = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

множитель n , стоящий перед x в членах $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, соответствует частотам, а коэффициенты, определяющие амплитуды синусов и косинусов – это a_n и b_n – это коэффициенты Фурье. Коэффициент a_0 – тоже коэффициент Фурье, определяющий вертикальный сдвиг волны.

Поиск по исследуемой волне $F(x)$ коэффициентов ряда Фурье a_0 , a_n и b_n называется вычислением коэффициентов Фурье. Это операция соответствует фильтрам, о которых упоминалось в разделе 4.2. Фильтр устроен так, чтобы из разнообразных частотных составляющих извлекать только одну. Для этого полезным оказывается понятие ортогональности функций (разделы 3.4, 3.5) Определенный интеграл от произведения ортогональных функций равен нулю, то есть он исчезает. Кроме того, члены $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ не ортогональны сами себе, поэтому определенный интеграл от квадрата этих членов не равен нулю. Таким образом, извлечь частотные составляющие можно, используя свойство ортогональности.

Во-первых, рассмотрим коэффициенты Фурье a_n . Чтобы остался только $a_n \cos(nx)$, надо умножить всю функцию $F(x)$ на $\cos(nx)$ и найти определенный интеграл от произведения. При этом останется только одна функция, а для всех остальных результат интегрирования

(площадь) из-за ортогональности будет равен 0, то есть они исчезнут. И единственной оставшейся функцией будет $a_n \cos(nx)$.

После рассмотрения ортогональности функций мы уже знаем, что функции косинуса, у которых одинаковый коэффициент n , не ортогональны друг другу. То же самое верно и для произведения $\sin x \times \cos x$, то есть для $\sin x^2$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \times \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2nx)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} \sin(2nx) \right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

Определенный интеграл от произведения $\cos x \times \cos x$ тоже равен числу π .

a_n в виде формулы представляется следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx$$

Для коэффициентов b_n при $\sin(nx)$ все будет точно так же:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx$$

Теперь рассмотрим a_0 . Это коэффициент при $\cos(nx)$, когда n равен 0.

Поэтому, для a_0 можно использовать общее выражение:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dx$$

На четвертом этапе (раздел 4.2) исследуют амплитуды частотных составляющих. Каждая частотная составляющая содержит одну функцию $\sin(nx)$ и одну функцию $\cos(nx)$. И соответствующие коэффициенты Фурье обозначаются как b_n и a_n .

Исследуя спектр, необходимо рассматривать не коэффициенты каждой частотной составляющей, а ее амплитуду. Графически ее можно представить так, как показано на рис. 4.2.

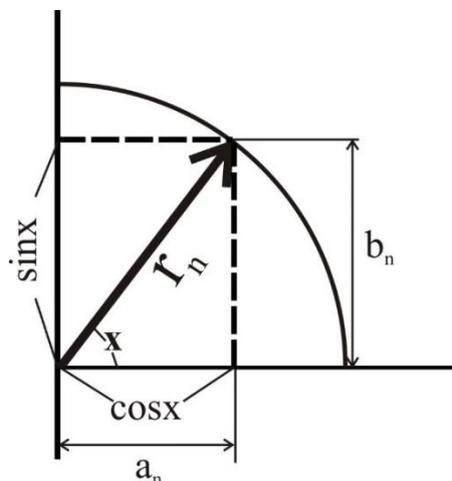


Рис. 4.2. Графическое выражение амплитуды частотной составляющей

Высота треугольника соответствует коэффициенту b_n , вычисленному из функции $\sin x$, а его основание – коэффициенту a_n , вычисленному из функции $\cos x$. А гипотенуза этого треугольника – это и есть амплитуда частотной составляющей. Согласно теореме Пифагора, она вычисляется по формуле:

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (r > 0)$$

Расположив с наименьшего n вычисленные величины r_n с соответствующими амплитудами, получим частотный спектр.

5. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ И АНАЛИЗ ФУРЬЕ

5.1. Терминология и классификация

Как видно из предыдущих глав, анализ Фурье применяется для изучения сложности циклических процессов. Циклы присущи также для геологических процессов и геологической истории.

Предпосылки идей о цикличности в геологии можно найти у Н. Стенона (1669), М. В. Ломоносова (1763), Г. Х. Фюкселя (1762), Дж. Геттона (1795), Д. И. Соколова (1839), Ж. Кювье (1812), А. Д. Орбиньи (1849-1852), Ч. Лайеля (1833-1865).

Возможно, раньше других оформилось представление о региональных циклах, сформулированное Дж. Ньюберри (1860, 1872) как осадочный цикл, а Н.А Головкинским (1868) как геологическая чечевица. В этом представлении причиной цикла являлась миграция фаций, вызванная миграцией береговой линии бассейна.

Термин «геологическая цикличность» был введен Г.К. Джильбертом в 1890 г.

Конец XIX – начало XX вв. – время развития и углубления представления о региональных и глобальных, например, геотектонических циклах Бертрана.

А. Рюто в 1883 году разработал модель цикла – чечевицы на третичных отложениях Бельгии.

Глобальные геотектонические циклы наиболее полное развитие получили в концепции фаз складчатости или орогенических фаз Г. Штилле (1924), выделившего в истории Земли многие десятки главных фаз дистрофизма («канон Штилле»), а в 40-х годах – два самых крупных периода – протогеикум и неогейкум, или проще, - протогей и неогей – с рубежом между ними 1500 млн. лет. Геотектонические концепции полностью базировались на циклической идее. В. Е. Хаин в 1973 году в неогее выделил 5 мегациклов, начиная с гренвильского (средний рифей) и кончая альпийским (вместе с киммерийским), продолжительностью от 400 до 1500 млн. лет. Построение схемы глобальных циклов было предпринято А.В. Грэбо в 1930-х годах на основе пульсационной (осцилляционной, по В. Е. Хаину, 1973) гипотезы о ходе геологического процесса. В палеозое им выделено 10 циклов, которые укладываются в границы систем. Каждый цикл состоял из нижней, трансгрессивной, и верхней, регрессивной, частей. Границы

между циклами, по Грэбо, отвечают эпохам обширных поднятий, сопоставимых с фазами складчатости. Эта схема не получила признания из-за значительной упрощенности. Однако идея о планетарных событиях не угасла, а возродилась в представлениях об эвстатических колебаниях уровня моря (эта цикличность значительно более мелкая, чем циклы Грэбо и является предметом секвентной стратиграфии) и о катастрофах и перестройках (событийная стратиграфия).

В настоящее время изучение стратиграфических записей циклов изменения среды (сигналов среды) осадконакопления относится к области, называемой циклическим анализом и циклостратиграфией. Изучение цикличности осадочных толщ тесно связано с секвентной и событийной стратиграфией.

Цикл (греч. *kuklos* – круг, колесо; лат. – *cycle* – круг) можно определить как круг явлений. По предложению Дж. Уэллера (1930 г.) причину циклически построенного тела – процесс – обозначили термином «цикл», а его производное – геологическое тело – стали называть циклотемой (*cyclothem*). В России часто пользуются термином С.Л. Афанасьева (1974) – «циклит».

Осадочный цикл определяется как круг взаимосвязанных явлений, обычно приводящих к формированию геологического тела – циклита (циклотемы). Для цикла характерна симметричность. То есть в нем, в самом простом случае, можно различать две стадии, или фазы: восходящую, прогрессивную (например, усиление волнения на море) и нисходящую, регрессивную – ослабление динамики среды. В более длительных циклах можно различать и среднюю фазу, отвечающему устойчивому в течение определенного времени режиму. Во всех случаях в цикле имеет место возврат к первичному или квазипервичному состоянию. Однако результат цикла – циклит (циклотема) – обычно асимметричен. Первая фаза цикла, сопровождающаяся усилением энергии среды или процесса, не позволяет накапливаться взмучиваемым частицам, и они осаждаются только на фазе ослабления движения, причем происходит гранулометрическая дифференциация и формируется многослой с градиционной слоистостью. Симметричность циклитов возрастает с увеличением порядка длительности циклов.

Из понятия «цикл» вытекает «цикличность» – свойство циклического. Цикличность выражает закономерную смену элементов, фаз, стадий внутри цикла или другой единичной целостности.

Классификации циклов и циклитов могут быть морфологическими и генетическими. Морфологический критерий учитывает размер и

сложность циклитов, их внутреннее строение и полноту, а также различные парагенезы. Генетический критерий связан с определением происхождения цикличности.

Циклы, в общем, вероятно, могут иметь любые продолжительности и границы.

В циклитах выделяются два или больше элементов, разнообразные литологические и связанные с ними палеонтологические, геохимические и другие свойства. Среди этих свойств выделяются существенные, например, гранулометрия. Для циклов преимущественно механической седиментации гранулометрия является действительно главным признаком. А в корях выветривания, хемолитах и бентосогенных биолитах (биорифах, торфяниках и т.п.) гранулометрический признак становится второстепенным.

Одним из распространенных подходов в проведении границ циклитов является отнесение начала циклита к подошве конгломератов или грубых песчаников, если они есть в разрезе, так как это наиболее заметная граница и к тому же несущая генетическую информацию – о максимальной энергии среды в момент отложения грубых кластоцитов. Однако не всегда такие отложения присутствуют в разрезе. Другими подходами являются предложения «начинать» циклиты с пластов угля как важного фациального репера (угли образуются в областях выравнивания рельефа и заболачивания на обширных площадях) или с известняков.

Чаще всего сама природа обозначает («квантирует») циклиты, разделяя слои границами разной резкости. Наиболее резкие границы, чаще всего подкрепленные наиболее грубозернистыми породами, в лучшем случае, горизонтами выветривания или элювирования, принимают за границы наиболее крупных циклитов, а менее резкие – за границы все более мелких циклитов. Резкие границы являются явными или скрытыми границами несогласия, определяющими относительно крупные циклиты, какими, например, являются секвенсы – результаты циклов относительных колебаний уровня моря.

Продолжительность и периодичность геологических явлений и стратиграфическая цикличность систематизируется в ~ 16 порядках величин, начиная от циклов резких смещений в турбулентных пограничных слоях (10^{-6} лет) до тектонических циклов, включающих в себя образование и распад суперконтинентов (10^9 лет).

Незначительная (второстепенная) цикличность может быть замечена в геологических записях как результат сезонных изменений погоды, разливов рек и т.д., так называемая «календарная цикличность». Солнечные пятна и другие процессы на солнце выражаются в цикличности в 10^1 - 10^2 годовом масштабе цикличности (солнечные циклы). Цикличность геологического значения начинается с цикличности Миланковича масштабов 10^4 - 10^5 лет. Циклы Миланковича и более длительных продолжительностей включают в себя региональную тектонику и эвстатические колебания уровня моря. Указанные процессы связаны с изменениями в глобальном климате, магнетизме, в циркуляции воды в океанах, в углеродных и кислородных циклах и биоте.

Циклостратиграфия, в основном, рассматривает короткопериодные (высокочастотные) седиментационные циклы (циклы Миланковича) и стала в настоящее время областью большого научного интереса в связи с климатическими изменениями и содержащимися в ней возможностями по дополнению и уточнению хроностратиграфии и стратиграфической корреляции.

Климатические изменения индуцируются вариациями орбитальных параметров Земли (теория Миланковича). К этим параметрам относятся эксцентриситет E (форма земной орбиты), наклон земной оси O (отклонение оси вращения от вертикальной оси на орбитальной плоскости) и прецессия P , выражающая основное отношение между наклоном и эксцентриситетом. Эти параметры имеют следующие периоды: $E \sim 100$ тыс. лет и 400 тыс. лет (более точно $E_1 \sim 106$, и $E_2 \sim 410$ тыс. лет); $O \sim 41$ тыс. лет, и $P \sim 21$ (19-23) тыс. лет. Орбитальные сигналы накладываются друг на друга (рис. 5.1), в результате чего интенсивности отдельных сигналов изменяются со временем и широтой района исследований.

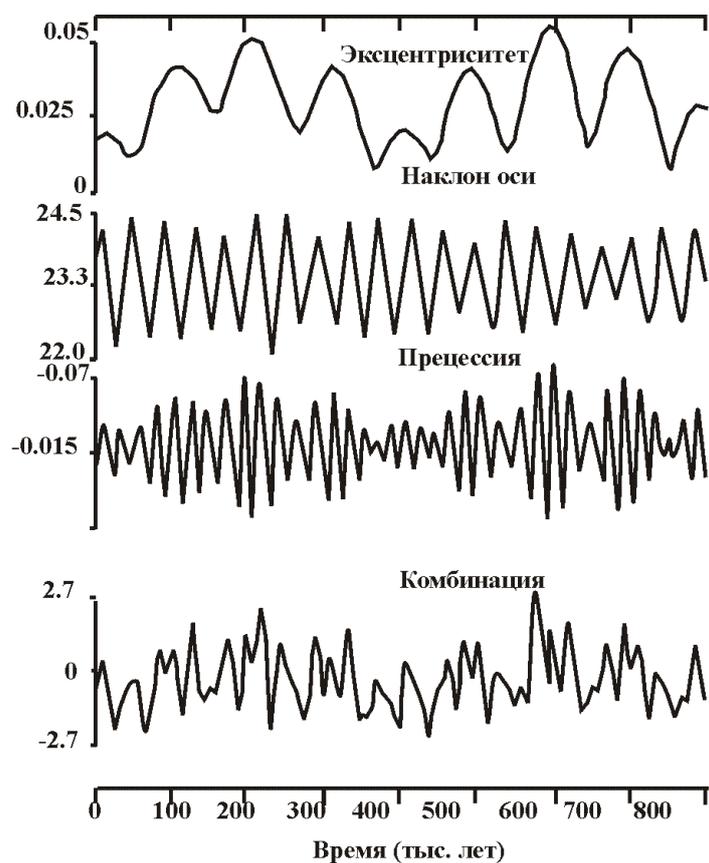


Рис. 5.1. Три основных орбитальных параметра и их совместный эффект (Imbrie, 1985)

Орбитальные сигналы продуцируют вариации в инсоляции, а значит и сезонные изменения. Каждый из указанных орбитальных компонентов способен вызвать значительные климатические изменения. Например, если ось вращения близка к нормальной к эклиптике, то больше энергии выпадает на экватор и меньше – на полюса, таким образом, повышается широтный температурный градиент и климат становится резко изменчивым. Вариации в прецессии изменяют структуру сезонного цикла из-за изменения точки перигелия вдоль орбиты. Изменения расстояний Солнце-Земля в каждый сезон, таким образом, влияют на сезонное количество солнечной энергии. Одним из достижений Миланковича явились количественные расчеты по характеру изменчивости солнечной энергии, обусловленной орбитальными силами.

Циклы Миланковича в геологических разрезах первоначально определялись по тонкослоистым образованиям (типа варв), карбонатным отложениям, тонкозернистым пелагическим и озерным осадкам. Некоторые кластические или смешанные карбонатно-кластические

последовательности, как, например, верхнепалеозойские циклотемы также интерпретировались по Миланковичу.

Основные цели циклостратиграфии связаны с изучением гляциальной эволюции, биогенной продуктивности и распределения терригенного материала в морях и океанах. Циклостратиграфия также является инструментом для изучения и более древних осадков, хотя и сопряжена с трудностями биостратиграфического или хроностратиграфического датирования.

5.2. Анализ Фурье (спектральный анализ) стратиграфической записи

Задачей спектрального анализа является разложение рядов данных, чаще всего представленных на равномерной сетке (или с равномерным шагом) на гармонике, представляющей собой сумму синуса и косинуса одинакового аргумента. Большинство стратиграфических записей состоят из примерно синусоидальных осцилляций, поэтому используется упомянутая группа функций. Этот анализ – ни что иное, как анализ Фурье. Из предыдущих глав мы видели, что любая синусоидальная кривая может быть разложена на синусоидальные и косинусоидальные кривые. Ясно, что удобно взять временной ряд, разложить его на осцилляции и узнать, сколько типов этих осцилляций содержится в данной последовательности. Простой спектр показывает относительные амплитуды (строго - амплитуды в квадрате) и длины волн или периоды всех регулярных компонент во временном ряду. Обычно по горизонтальной оси откладывается частота ($\text{частота} = 1/\text{период}$) с самыми высокими значениями (самые короткие осцилляции) в правой части. Если данные являются функцией во времени, частота измеряется в числах циклов на единицу времени, которые более сокращенно называются циклами на единицу времени (например, циклы на тысячу лет). Если используется размерная шкала (толщина или глубина залегания осадка), то вместо частоты некоторые авторы применяют волновое число (то есть $= 1/\text{длина волны в толщине}$). Хотя все же более часто употребляется термин частота, даже если единицы не содержат временную компоненту (например, циклы на метр). Спектральный анализ заключается в измерениях амплитуды, определяемых как положительные и отрицательные отклонения от нулевой линии. Однако, хотя нулевая линия иногда определяется как среднее значений данных, обычно используется более сложная процедура (случаи со сложным

трендом). Обычно строится график зависимости амплитуды от частоты, и спектр называется амплитудным. Если значения амплитуд малы, то берутся их логарифмы.

На рис. 5.2 представлены примеры результатов спектрального анализа рядов литологических данных в одном из пермских разрезов, обнажающихся на берегу р. Кама.

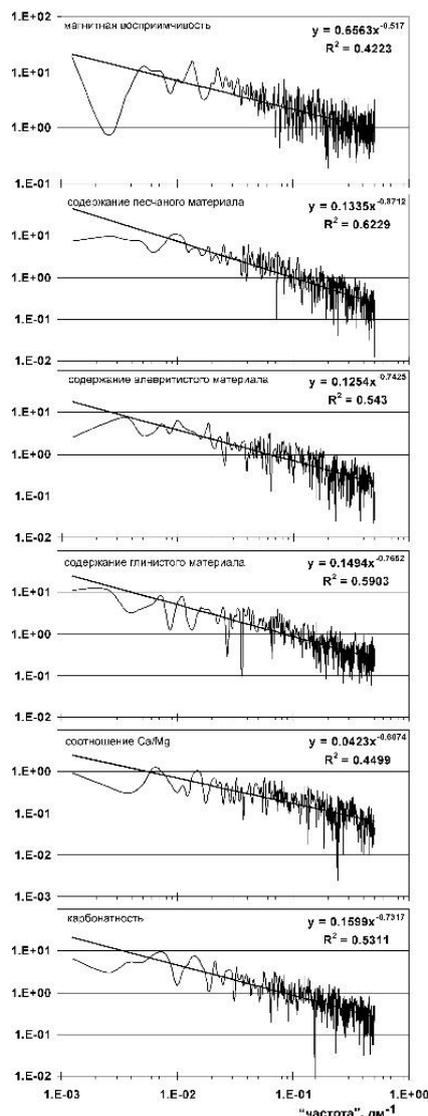


Рис. 5.2. Спектры Фурье рядов литологических параметров по пермскому разрезу (р. Кама). Спектры аппроксимированы степенными функциями

На рис. 5.3 показан пример спектра частот в результате анализа Фурье ГК-диаграммы одной из скважин, вскрывших пермские отложения в Мелекесской впадине.

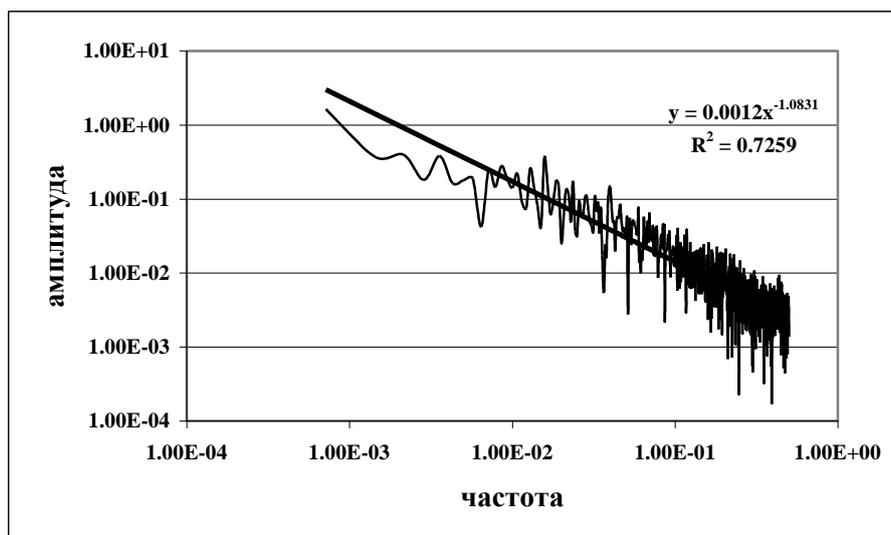


Рис. 5.3. Пример спектра Фурье по значениям ГК-диаграммы казанского яруса Мелекесской впадины. Спектр аппроксимирован степенной функцией

На рис. 5.4 показан обобщенный спектр изменения значений ГК казанского яруса (длительность казанского века составляет ~6 млн. лет) по более 40 скважинам Мелекесской впадины. При этом в порядке увеличения частот слева направо располагаются седиментационные циклы, соответствующие астрономическим циклам Миланковича: циклу эксцентриситета земной орбиты (90-47 м), циклу наклона земной оси (28-26 м) и циклу прецессии земной оси (19-12,5 м).

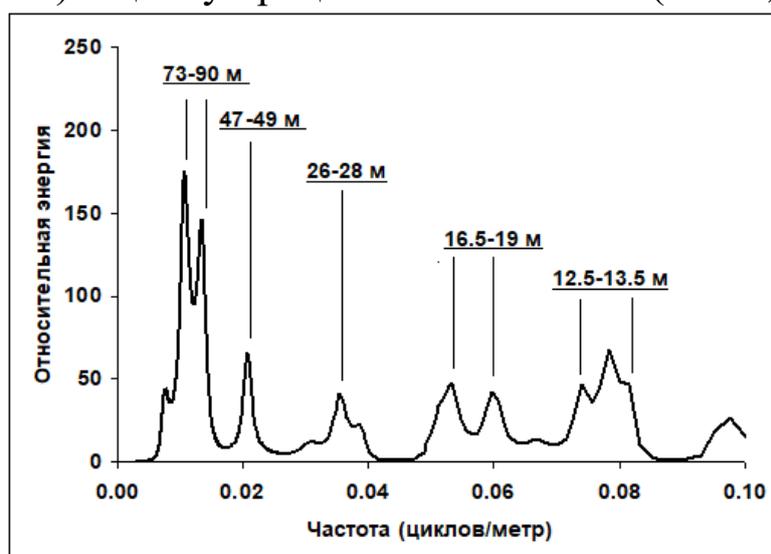


Рис. 5.4. Обобщенный спектр изменения значений ГК пород казанского яруса Мелекесской впадины

5.3. Детальный анализ Фурье геологических данных на примере данных скважинной диаграммы ПС

Рассмотрим пример детального анализа Фурье по данным скважинной диаграммы ПС, полученной для сеноманского яруса одного из нефтегазоконденсатных месторождений на севере Западно-Сибирского нефтегазоносного бассейна. Сеноманский ярус представлен переслаиванием песчаников, алевролитов и аргиллитов. Диаграмма ПС является седиментологической, отражая вариации размера зерен, слагающих терригенные породы.

На рис. 5.5 показана кривая $\alpha_{ПС}$ в интервале сеноманского яруса толщиной ~ 190 м.

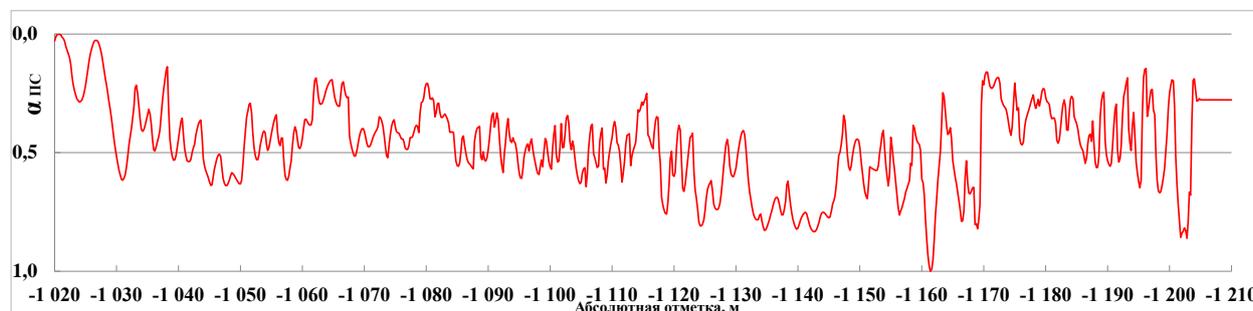


Рис. 5.5. Вариации значений $\alpha_{ПС}$ в скважине (фрагмент покурской свиты). $\alpha_{ПС}$ – это величина отклонения от нулевой линии глин

Кривая $\alpha_{ПС}$ отражает вариации размера зерен (гидродинамического уровня), связанные с влиянием седиментационных циклов. Попробуем выявить, сколько циклов разных порядков обусловили данную кривую ПС.

Сделаем это в программе STATISTICA 6.0 путем выбора следующих опций: Statistics – Advanced Models Time Series/Forecasting – Spectral (Fourier) analysis.

На рис. 5.6 показан вид исходного ряда в выбранной программе.

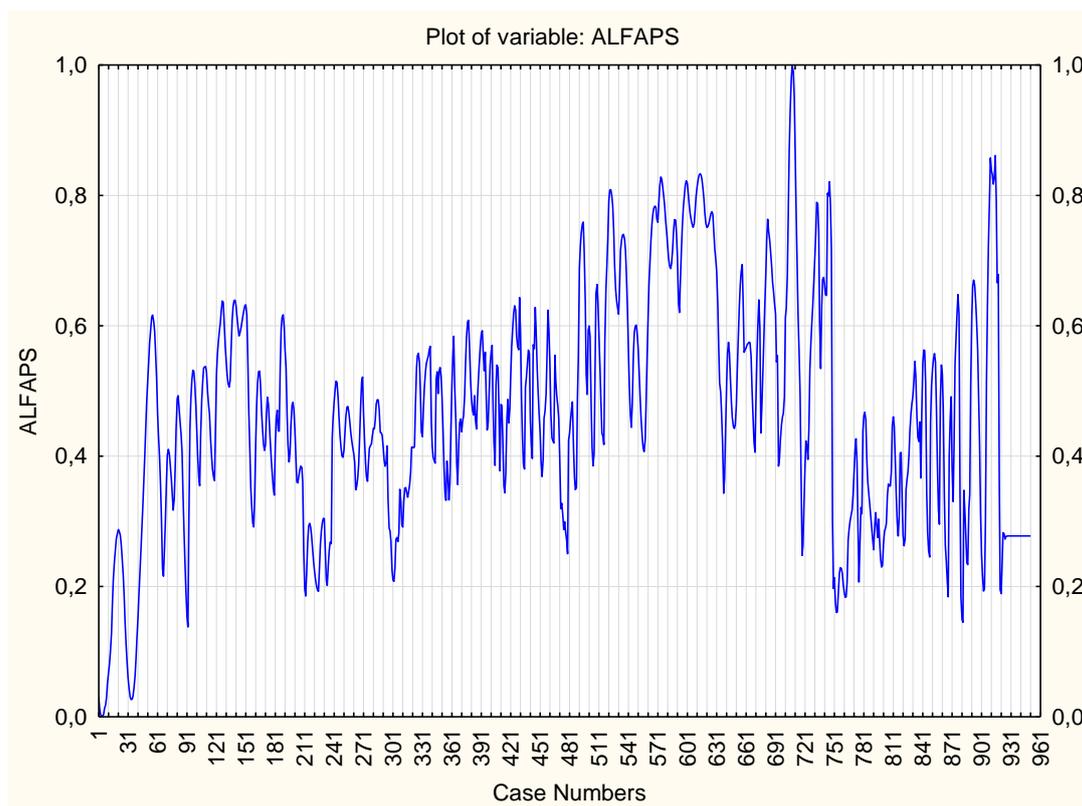


Рис. 5.6. Исходный ряд $\alpha_{\text{ПС}}$

Полученный график имеет циклический характер. Вследствие этого необходимо в окне *Transformation of input series (Преобразование входного ряда)*, которое появляется при закладке *Advanced (Расширенная)*, указать метку *Detrend (Отсутствие тренда)*. Среднее значение ряда больше нуля, поэтому необходимо указать метку *Subtract mean (Вычитание среднего)*. В противном случае на графике периодограммы может появиться большой выброс на нулевой частоте.

Теперь все готово для начала анализа. Необходимо щелкнуть ОК по кнопке *Single series Fourier analysis (Анализ Фурье единственного ряда)*, и на мониторе отобразится окно диалога *Single Series Fourier (Spectral) Analysis Results (Результаты спектрального анализа временного ряда)*.

В верхней части окна выводятся некоторые суммарные статистики для анализируемого ряда и, кроме того, 5 наибольших пиков периодограммы по частоте (рис. 5.7). Первые 3 пика имеют место при частотах: 0,0011; 0,0021 и 0,0042. Эта информация полезна при анализе очень длинных рядов (например, содержащих порядка 100000 наблюдений), которые не могут быть отображены на одном графике. Однако в нашем случае может быть легко получена периодограмма, при построении которой используется вся информация.

Variable: ALFAPS

Number of observations: 951 First case: 1 Last case: 951

N. of obs. after padding: 950

Transformations: Mean=,46603 subtracted; Detrended

Five largest periodogram peaks (Value:Frequency):

*(1)5,753: ,0011 (2)4,300: ,0021 (3)1,839: ,0042 (4)1,200: ,0063 (5),
9933: ,0105*

Рис. 5.7. Информация о периодограмме

Периодограмма появляется после инициирования кнопки Periodogram при открытой опции Quick (Быстрая) (рис. 5.8).

На периодограмме наблюдаются выраженные пики на низких частотах в интервале 0-0,10, наибольший из которых находится на частоте, равной 0,001053 (рис. 5.9). Для просмотра значений всей периодограммы необходимо перейти в опцию Advanced (Расширенная) и нажать кнопку Summary (Суммарный). Результаты представлены в форме таблицы (см. табл. 5.1). Параметр Frequency (частота) представляет собой число циклов в единицу толщины (где каждое наблюдение рассматривается как занимающее единицу толщины 0,2 м).

Таким образом, частота, равная 0,001053 соответствует параметру Period (период, т. е. количеству единиц толщины, необходимых для завершения одного полного цикла), равному ~190 м, что соответствует в нашем случае толщине всего исследуемого разреза. Таким образом, находится первый цикл в иерархии циклов, он самый длительный, в течение которого накапливалась вся рассматриваемая толща и соответствует длительности сеноманского века (~6,6 млн. лет). Далее выявляются следующие наиболее значимые по пикам циклы, соответствующие толщинам 95 м, 47 м, 32 м, 19 м (рис. 5.9Б).

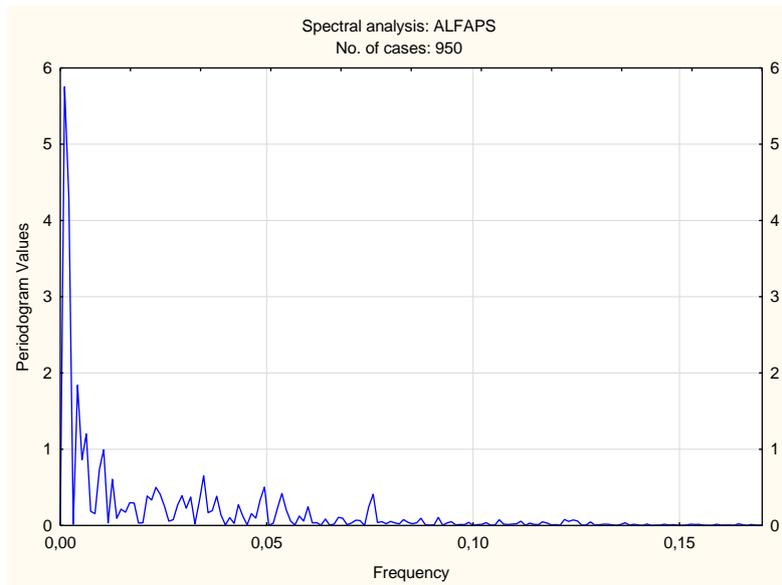
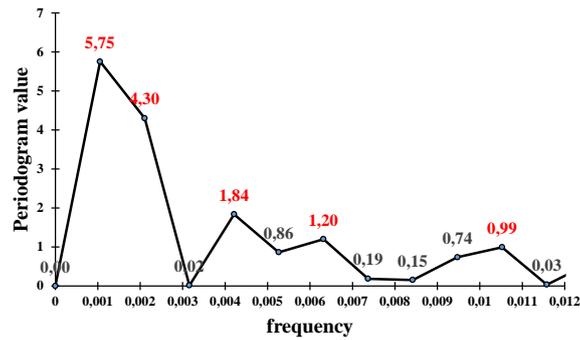


Рис. 5.8. Периодограмма ряда

А



Б

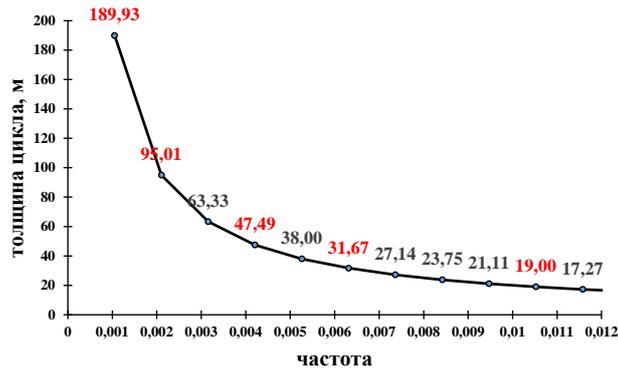


Рис. 5.9. А - Периодограмма ряда для интервала частот (0-0,011) с самыми большими пиками (значения выделены красным шрифтом), соответствующими на Б: 190 м, 95 м, 47 м, 32 м, 19 м

Результаты анализа Фурье

Spectral analysis: ALFAPS (2020red) No. of cases: 950								Толщина цикла, м
Frequency	Period	Cosine coeffs	Sine coeffs	Periodogram	Density	Hamming weights		
0	0,000000		0,000529	0,000000	0,000133	3,081053	0,035714	
1	0,001053	950,0000	-0,106791	-0,026602	5,753199	3,811003	0,241071	189,9335
2	0,002105	475,0000	-0,018759	0,093276	4,299819	3,375856	0,446429	95,01188
3	0,003158	316,6667	0,000871	0,005591	0,015209	1,723095	0,241071	63,33122
4	0,004211	237,5000	-0,054488	-0,030057	1,839345	1,229516	0,035714	47,49466
5	0,005263	190,0000	-0,013130	-0,040578	0,863998	1,125637		38,00114
6	0,006316	158,3333	-0,042713	-0,026500	1,200166	0,860118		31,66561
7	0,007368	135,7143	-0,007591	0,018272	0,185962	0,466804		27,14441
8	0,008421	118,7500	0,010081	0,014966	0,154662	0,369857		23,75015
9	0,009474	105,5556	-0,021670	-0,032890	0,736893	0,613594		21,11041
10	0,010526	95,0000	-0,043670	-0,013567	0,993281	0,656651		19,00057
11	0,011579	86,3636	0,005807	-0,006302	0,034883	0,430757		17,27265
...
475	0,500000	2,0000	-0,001011	0,000000	0,000486	0,000365		0,4

Для получения оценок спектральной плотности используется сглаживание периодограммы, при котором также происходит исключение случайных флуктуаций. Вид взвешенного скользящего среднего и ширина окна сглаживания выбирается в окне Data windows for spectral density estimates (Окна (частотные) для оценок спектральной плотности), которое появляется при включении расширенной (Advanced) опции.

Частотные окна позволяют найти область частот, которые дают наибольший вклад в периодическое поведение ряда. Это может быть выполнено путем сглаживания периодограммы посредством взвешенного скользящего среднего (СС).

Положим, что окно СС имеет ширину m , которая обычно принимается нечетной. Кроме того, между шириной окна и параметром p , определяющим часть данных, которые «сужают» обрабатываемые данные в начале и конце ряда за счет конечной ширины, существует соотношение: $p = (m-1)/2$.

В программе STATISTICA используются наиболее распространенные в спектральном анализе окна: окно Даниэля, окно Тьюки, окно Хэмминга, окно Парзена, окно Бартлета.

За исключением окна Даниэля все весовые функции будут присваивать большие значения весов наблюдениям, находящимся в центре

окна, и по мере удаления от центра веса становятся меньше. Во многих случаях различные окна будут приводить примерно к одинаковым результатам, как и в случае исследуемого нами ряда.

Для рассматриваемого примера установим 5-точечные окна для всех методов. Полученные графики показаны на рис. 5.10-5.14.

Выбирается Spectral density (Спектральная плотность) при включенной опции Review&plot (Просмотр и график). Можно просмотреть также значения периодов, выделенных в этом временном ряду. Укажем при включенной опции Review&plot (Просмотр и график) метку Period (Период) в окне Plot by (График), определяющую горизонтальную ось графика, и нажмем кнопку Spectral density (Спектральная плотность) (рис. 5.10 - 5.14).

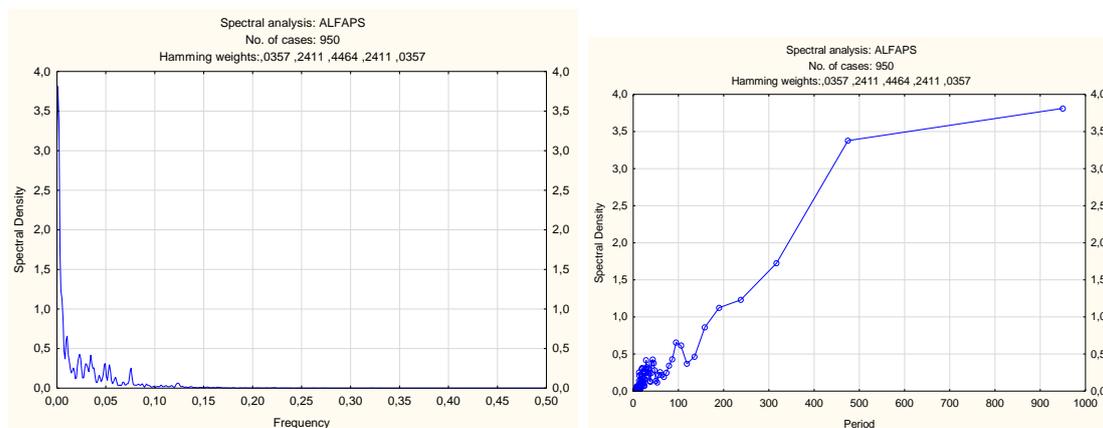


Рис. 5.10. Зависимость спектральной плотности от частоты и периода (окно Хамминга)

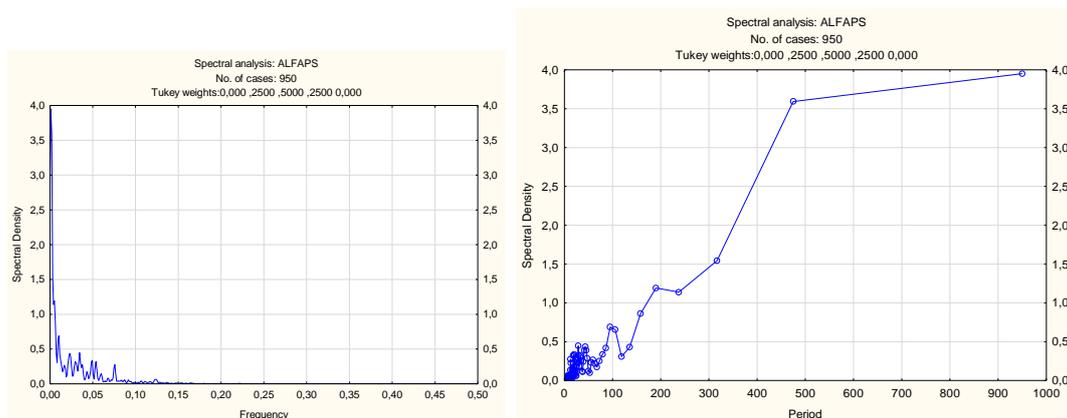


Рис. 5.11. Зависимость спектральной плотности от частоты и периода (окно Тьюки)

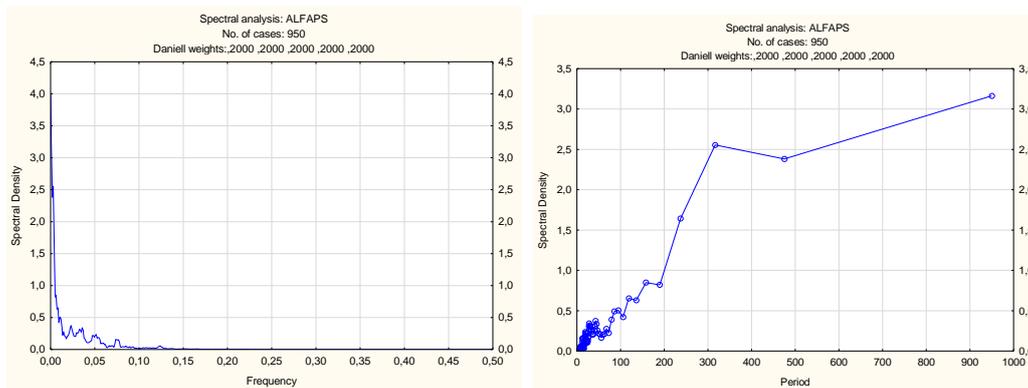


Рис. 5.12. Зависимость спектральной плотности от частоты и периода (окно Даниэля)

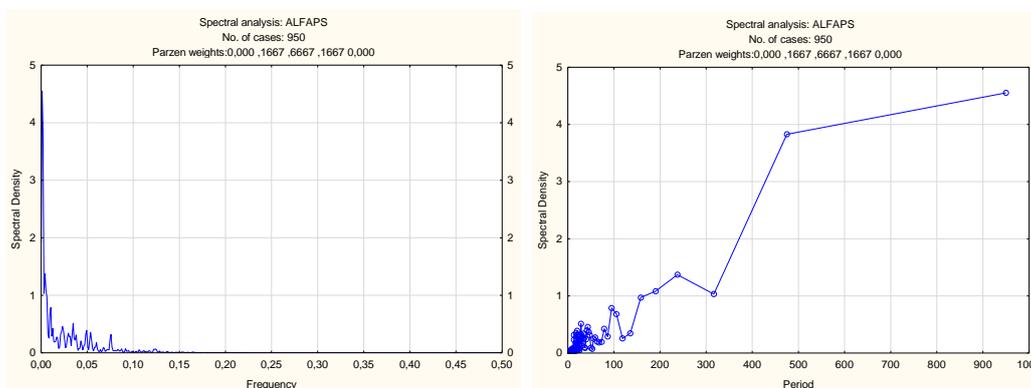


Рис. 5.13. Зависимость спектральной плотности от частоты и периода (окно Парзена)

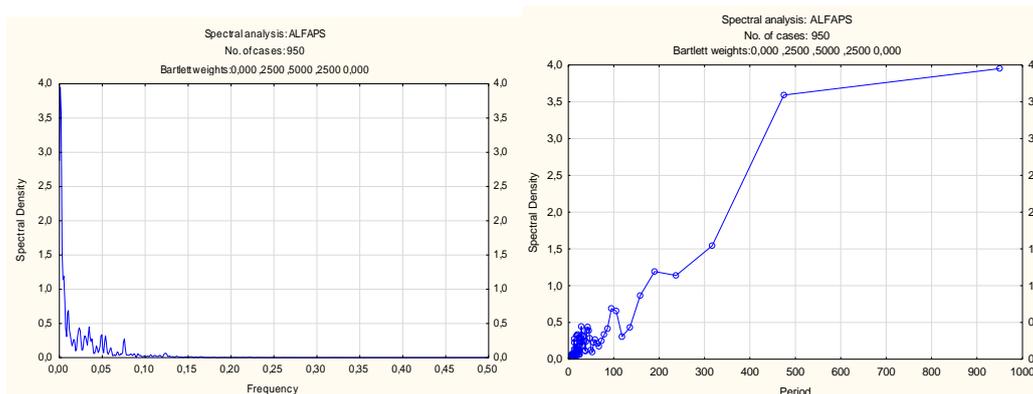


Рис. 5.14. Зависимость спектральной плотности от частоты и периода (окно Бартлетта)

Графики (рис. 5.10 - 5.14) показывают зависимость спектральной плотности от периода, откуда видны выделенные ранее циклы, соответствующие значениям периода: 950; 475; 237,5; 158,3; 95 (таблица

5.1). Полученные толщины циклов хорошо вписываются в цикличность Миланковича (таблица 5.2) по аналогии с казанским ярусом (раздел 5.2), формирование которого происходило примерно в течение времени, сопоставимого с сеноманским веком.

Таблица 5.2

Характеристика цикличности сеноманской последовательности

Период, у.е.	Толщина, м	Циклы Миланковича
950	189,94	
475	95,01	<i>Эксцентриситет земной орбиты</i>
317	63,33	
238	47,50	<i>Эксцентриситет земной орбиты</i>
190	38,00	
158	31,67	<i>Цикл наклона земной оси</i>
119	23,75	
106	21,11	
95	19,00	<i>Цикл прецессии земной оси</i>

5.4. Выполнение практической работы

Исходные данные: данные по ГК и/или ПС скважины, вскрывшей терригенный разрез из определенного стратиграфического интервала, оформленные в таблицу 5.3.

Таблица 5.3

Форма исходных данных

Абсолютная отметка, м	Значения ГК и/или αПС

Ход работы:

1. Загрузить данные в программу STATISTICA 6.0;
2. Выбрать: Statistics – Advanced Models –Time Series/Forecasting – Spectral (Fourier) analysis;
3. Построить кривую исходных данных по аналогии с рис. 5.5, 5.6;
4. Получить таблицу аналогично таблице 5.1;
5. Построить графики аналогично графикам на рис. 5.10-5.14;
6. Выявить наиболее значимые геологические циклы.

5.5. Вопросы для самоконтроля

1. Какие математические понятия и функции используются для анализа Фурье?
2. Охарактеризуйте порядок анализа Фурье.
3. Порядок проведения анализа Фурье в программе STATISTICA 6.0
4. Как анализ Фурье позволяет распознать особенности геологической цикличности?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Imbrie J. A.* Theoretical framework for the Pleistocene ice ages / J. Imbrie // *J. Geol. Soc.* – 1985.– 142. – P. 417–432.
2. *Канасевич Э.Р.* Анализ временных последовательностей в геофизике / Э.Р. Канасевич. – М.: Недра, 1985. – 400 с.
3. *Weedon G. P.* Time-Series Analysis and Cyclostratigraphy / G. P. Weedon. – Cambridge University Press, 2003. – 259 p.
4. *Нурғалиева Н.* Пермские осадочные разрезы востока Русской плиты. Цикличность и фрактальные образы / Н. Нурғалиева. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. – 210 с.