3.3 Метод Фурье для неоднородных гиперболических уравнений

Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\, u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Будем искать решение задачи (3.15) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{3.16}$$

где v – решение задачи с однородным уравнением и неоднородными начальными условиями

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\, v_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ v_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l, \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Тогда w – решение задачи с неоднородным уравнением и однородными начальными условиями (убедитесь в этом самостоятельно, подставив (3.16) в (3.15))

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2\, w_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ w(x,0) = 0, & 0 < x < l, \\ w_t(x,0) = 0, & 0 < x < l, \\ w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Решение v задачи (3.17) было найдено ранее, оно имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\, X_n(x)\,, \tag{3.19}$$

где

$$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}\, x\right), \quad \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$T_n(t) = A_n \cos\left(a\sqrt{\lambda_n} t\right) + B_n \sin\left(a\sqrt{\lambda_n} t\right),$$

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\, X_n(x)\, dx,\ B_n = \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\, X_n(x)\, dx.$$

Отметия, что, во-первых, функции X_n являются решениями задач

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n\, X_n(x) = 0,\ t > 0, \\ X_n(0) = 0, \quad X_n(l) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

и, во-вторых, функции X_n являются ортогональными, т.е.

$$(X_n, X_m) = \int\limits_0^l X_n(x)\, X_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{l}{2}, & n = m. \end{cases} \tag{3.21}$$

Функцию w будем искать в виде, аналогичном (3.19):

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\, X_n(x)\,, \tag{3.22}$$

при этом в силу граничных условий в (3.20) функция w удовлетворяет граничным условиям $w(0,t) = 0$, $w(l,t) = 0$.

Пользуясь условием (3.21), разложим функцию f в ряд Фурье по системе $\{X_n\}$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\, X_n(x)\,, \text{где}\ \ f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\, X_n(x)\, dx. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.22), (3.23) в (3.18) с учетом того, что в силу (3.20) справедливы равенства $X_n''(x) = -\lambda_n\, X_n(x)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n''(t)\, X_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^2 w_n(t)\, X_n''(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\, X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-a^2\lambda_n\, w_n(t) + f_n(t)\right] X_n(x),$$

а значит, функции w_n – решения задач (почему?)

$$\begin{cases} w_n''(t) + a^2\, \lambda_n\, w_n(t) = f_n(t), \\ w_n(0) = 0, \\ w_n'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

На лекции мы доказали, что решение задачи (3.24) есть

$$w_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau,$$

где g – решение задачи

$$\begin{cases} g''(t) + a^2\,\lambda_n\, g(t) = 0, \\ g(0) = 0, \\ g'(0) = 1, \end{cases}$$

т.е.

$$g(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(a\sqrt{\lambda_n} t\right),$$

поэтому решение задачи (3.24) есть

$$w_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^t f_n(\tau)\, \sin\left(a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right)\, d\tau. \tag{3.25}$$

Таким образаом, решение u задачи (3.15) – это сумма рядов (3.22) и (3.25).

Примеры для самостоятельного решения.

Пример 1. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\, u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l, \\ u'(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Пример 2. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\, e^{-t}, t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.27}$$