Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 55

Дифференцирование неявных функций.

Определение неявной функции в случае векторного аргумента, по существу, не отличается от случая скалярного аргумента. Для простоты рассмотрим случай двух переменных: *семейство функций* $z = f(x, y)$, *удовлетворяющих уравнению* $F(x, y; z) = 0$ *(то есть* $F(x, y; f(x, y)) \equiv 0$*) называется* **неявной функцией.**

Выбор конкретной функции из этого семейства осуществляется заданием начального условия вида $z_0 = f(x_0, y_0)$, где $p_0 = (x_0, y_0; z_0)$ – некоторая точка в R^3, в которой функция F и ее производная F' определены и, кроме того, $F'(p_0) \neq 0$.

Первые частные производные функции $z = f(x, y)$ определяются посредством решения двух уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

которые получены посредством дифференцирования по x и y уравнения $F(x, y; z) = 0$.

Три вторых производных находятся из уравнений, получаемых сначала дифференцированием уравнения (1) по x, затем по y (смешанная производная) и, наконец, дифференцированием уравнения (2) по y :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Следовательно, чтобы найти вторые производные, надо сначала вычислить производные $\partial z/\partial x$, $\partial z\,/\,\partial y$ первого порядка, подставить их в уравнения для вторых производных и решать их относительно $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\partial y$ и $\partial^2 z/\partial y^2$.

Пример 1. *Найти все производные до второго порядка включительно для заданной неявно функции* $z=z(x,y)$:

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{3}$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства (3), помня, что $z=z(x,y)$, в то время как x и y независимые переменные:

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Очевидно, что дифференцирование (3) по y даст аналогичное уравнение с заменой x на y. Из полученный уравнений находим производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}. \tag{5}$$

Для нахождения вторых производных следует дифференцировать левую часть уравнения (4) и аналогичного уравнения для y, но проще сразу находить вторые производные дифференцируя первые производные в равенствах (5):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\,\frac{1\cdot z-xz'_x}{z^2}=-\,\frac{z^2+x^2}{z^3},\quad \text{аналогично,}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\,\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

Смешанная производная

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial y} = -\,\frac{xy}{z^3}.$$

В общем случае возможно одновременное задание нескольких неявных функций с помощью определенного числа уравнений. Поясним на примере такое задание неявных функций и метод вычисления от них производных.

Пример 2. *Найти производные $d\,z/d\,x$ и $d\,y/d\,x$ для двух функций $z = z(x)$ и $y = y(x)$, заданных неявно посредством двух уравнений*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x + y + z = 0.$$

Решение. Нетрудно понять, что для этого надо продифференцировать эти уравнения по x и затем решить систему из двух линейных уравнений относительно искомых производных:

$$2z\,\frac{d\,z}{d\,x} + 2x + 2y\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0$$

$$\frac{d\,z}{d\,x} + 1 + \frac{d\,y}{d\,x} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\,z}{d\,x} = -\,\frac{y+x}{z-y}, \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{z+x}{z-y}.$$

Вычисление вторых производных осуществляется дифференцированием полученных $d\,z/d\,x$ и $d\,y/d\,x$ с последующим решением системы линейных уравнений.

Существует много способов для задания неявных функций и методов вычисления соответствующих производных. Рассмотри несколько примеров, иллюстрирующих данную проблематику.

Пример 3. *Найти $d\,z/d\,x$ и $d^2\,z/d\,x^2$, если $z = x^2 + y^2$, где $y = y(x)$ определяется из уравнения*

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Решение. По-существу, мы имеем дело с двумя функциями $z = z(x)$ и $y = y(x)$, связанных специальной системой уравнений, и поэтому, дифференцируя функцию $z = x^2 + y^2$, следует учитывать, что y есть тоже функция от x. Таким образом, искомая первая производная dz/dx находится путем дифференцирования по x двух уравнений: $z = x^2 + y^2$ и $x^2 - xy + y^2 = 1$. Дифференцируем:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\,\frac{dy}{dx},$$

$$2x - y - x\,\frac{dy}{dx} + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y},$$

и подставляя найденную производную dy/dx в первое уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y}.$$

Наконец, дифференцируя полученную первую производную по x (с учетом найденного выражения для dy/dx) после утомительных, но несложных вычислений, получаем

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^2}.$$

Пример 4. *Найти* $\partial z/\partial x$ *и* $\partial z\,/\,\partial y$, *если* $F(x - y,\, y - z,\, z - x) = 0.$

Решение. Для определения частных производный составляем два уравнения, дифференцируя $F(x - y,\, y - z,\, z - x) = 0$ по x и y :

$$F_1' - F_2'\frac{\partial z}{\partial x} + F_3'\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = 0,$$

$$-F_1' + F_2'\left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right) + F_3'\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение уравнений дает искомые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_3' - F_1'}{F_3' - F_2'}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_1' - F_2'}{F_3' - F_2'}.$$

Пример 5. *Найти* $\partial z/\partial x$ *и* $\partial z\,/\,\partial y$ *в точке* $u=v=1$, *если*

$$x=u+\ln v, \qquad y=v-\ln u \qquad z=2u+v. \tag{6}$$

Решение. Первые два уравнения (6) показывают, что u и v являются функциями от x и y, задавая тем самым связь $z=z(u,v)$ с x и y посредством $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$. В связи с этими замечаниями, дифференцирование третьего уравнения в (6) дает

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{8}$$

Теперь, частные производные от u и v в этих уравнениях можно определить дифференцируя первые два уравнения в (6) по x :

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad 0=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

и по y :

$$0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 1=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если в этих четырех уравнениях положить $u=1$ и $v=1$, то, решая полученные уравнения, найдем значения всех четырех производных от u и v в этих точках. Имеем:

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad 0=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 1=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}.$$

Подставляя эти значения в (7) и (8), получаем значения производных от z в точках $u=1$ и $v=1$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{u=1,v=1}=\frac{3}{2} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{u=1,v=1}=-\frac{1}{2}.$$

Задание 55

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3386. *Найти все производные до второго порядка включительно для заданной неявно функции* $z = z(x, y)$:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}\ \operatorname{tg}\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3391. *Найти* $d\,z$ *и* $d^2 z$, *если*

$$xyz = x + y + z.$$

3394. *Найти* $d\,u$, *если*

$$u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0.$$

3412. *Найти* $\partial u/\partial x$ *и* $\partial y\,/\,\partial y$ *если* $u = (x+z)\,/\,(y+z)$ *а* z *определяется из уравнения*

$$z\,\mathrm{e}^z = x\,\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^y.$$

3407.2*. *Найти* $\partial^2 z\,/\partial x \partial y$ *в точке* $(u = 2,\ v = 1)$, *если*

$$x = u + v^2, \qquad y = u^2 - v^2 \qquad z = 2uv.$$