И.Б.Бадриев, В.Л.Гнеденкова

Метод разделения переменных решения краевых задач для гиперболических уравнений

Учебное пособие

Издательство
Казанского федерального университета
2018

УДК 517.95

Печатается по рекомендации
ученого совета Института вычислительной
математики и информационных технологий
(протокол №9 от 12 апреля 2018 г.)
зседание кафедры вычислительной математики
(протокол №7 от 22 февраля 2018)

Научный редактор
доктор физико-математических наук Е. М. Федоров
Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент Л. Л. Глазырина
доктор физико-математических наук, профессор В. С. Желтухин

Бадриев И. Б., Гнеденкова В. Л.
Метод разделения переменных решения краевых задач для гиперболических уравнений: учебное пособие. — Казань: Казанский университет, 2018 — 35 с.

Излагаются основные принципы метода разделения переменных решение краевых задач для уравнений в частных производных. Приведены примеры решения и примеры для самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Уравнения математической физики».

УДК 517.95

Содержание

Предисловие

Пособие написано на основе опыта, накопленного в течении ряда лет ведения лабораторных заданий по уравнениям математической физики в институте ВМиИТ Казанского федерального университета.

В пособии подробно рассматривается метод разделения переменных решения различных краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных, содержатся примеры решения основных задач, приводятся примеры для самостоятельного решения.

Предполагается, что читатель знаком со стандартными курсами математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений.

Многие вопросы, затронутые в пособии, обсуждались с сотрудниками кафедры вычислительной математики Казанского федерального университета. Авторы выражают им свою искреннюю благодарность. Авторы признательны Некрасовой Ю. А., оказавшей большую помощь при подготовке пособия к печати.

1. Общая схема метода разделения переменных для уравнений гиперболического типа

Метод разделения переменных используется при построении решений смешанных задач для широкого класса уравнений с частными производными.

Рассмотрим смешанную задачу для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha u(0,t) + \beta\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \gamma u(j,t) + \delta\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $\rho(x), p(x), q(x)$ — заданные функции и $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geqslant 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, $\phi(x), \psi(x)$ — заданные функции.

Найдем нетривиальные частные решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2). Эти решения будем искать в виде

$$u(x,t) = T(t)\cdot X(x). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$\rho(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}X(x) = T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right] - q(x)T(t)X(x).$$

После деления этого равенства на $\rho(x)T(t)X(x)$ получим

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right]-q(x)X}{\rho(x)X}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно, то есть для всех $0<x<l, t>0$.

Правая часть равенства является функцией аргумента t, а левая — аргумента x, равенство выполняется при любых значениях x и t, это означает, что правая и левая части равны одной и той же константе

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right]-q(x)X}{\rho(x)X}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T}=-\lambda, \tag{1.5}$$

где λ — постоянная.

Из соотношения (1.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $X(t)$ и $T(t)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\lambda T=0. \tag{1.7}$$

Подставим (1.4) в граничные условия (1.2)

$$\alpha X(0)\,T(t)+\beta X'(0)\,T(t)=0,$$

$$\gamma X(l)\,T(t)+\delta X'(l)\,T(t)=0.$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, сокращая $T(t)$, получим

$$\begin{cases}\alpha X(0)+\beta X'(0)=0\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0.\end{cases} \tag{1.8}$$

Таким образом, для определения $X(x)$ получаем граничную задачу (1.6), (1.8).

В задаче (1.6), (1.8) необходимо определить числа λ, при которых существуют нетривиальные решения $X(x)$ и найти эти решения. То есть пришли к задаче на собственные значения:

Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.6) с условиями (1.8), а также найти эти решения.

Значения параметра λ называют *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями.*

Сформулируем основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (1.6), (1.8).

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x),\ X_2(x), \ldots X_n(x), \ldots$
2. При $q(x) \geqslant 0$ все собственные значения λ_n положительны.
3. Собственные функции на отрезке $[0, l]$ образуют ортогональную систему с весом $\rho(x)$, то есть

$$\int\limits_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,\ m \neq n$$

4. **Теорема разложимости.** Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям (1.8) и имеющая непрерывную первую призводную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_k(x)$.

То-есть,

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \\ f_k = \dfrac{1}{\|X_k\|^2} \int\limits_0^l \rho(x) f(x) X_k(x) dx, \\ \|X_k\|^2 = \int\limits_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx. \end{cases} \tag{1.9}$$

Решение задач на собственные значения рассмотрим далее на примерах.

Найденные λ_n используем дальше для нахождения функция $T_n(x)$ из уравнения (1.7):

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \overline{T}_n(t) + B_n \widetilde{T}_n(t), \tag{1.10}$$

где $\overline{T}_n, \widetilde{T}_n$ — любые линейно независимые частные решения уравнения (1.7), A_n, B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, зная $X_n(x)$ и $T_n(t)$, получили счетное множество частных решений уравнения (1.1)

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) = \Big(A_n\, \overline{T}_n(t) + B_n\, \widetilde{T}_n(t)\Big)\, X_n(x), \tag{1.11}$$

которые удовлетворяют граничным условиям (1.2).

Из частных решений (1.11) составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(A_n \overline{T}_n(t) + B_n \widetilde{T}_n(t)\Big)\, X_n(x). \tag{1.12}$$

Если ряд (1.12), а также ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, сходятся равномерно, то решение (1.12) будет удовлетворять уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2).

Выберем произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы решение (1.12) удовлетворяло и начальным условиям (1.3).

Если функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы разложимости, то, согласно формулам (1.9), их можно разложить в ряд по собственным функциям $X_n(x)$.

Получим

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x),$$

$$\phi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x)\phi(x)X_n(x)dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)dx.$$

Потребуем для решения (1.12) выполнения начальных условий (1.3)

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\overline{T}_n(0)+B_n\widetilde{T}_n(0)\right)X_n(x)=\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_nX_n(x), \quad (1.13)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\overline{T}'_n(0)+B_n\widetilde{T}'_n(0)\right)X_n(x)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_nX_n(x), \quad (1.14)$$

Из равенств (1.13), (1.12) в силу линейной независимости системы собственных функций $X_n(x)$ получим

$$A_n\overline{T}_n(0)+B_n\widetilde{T}_n(0)=\phi_n, \quad (1.15)$$

$$A_n\overline{T}'_n(0)+B_n\widetilde{T}'_n(0)=\psi_n. \quad (1.16)$$

Система уравнений (1.15) (1.16) имеет единственное решение, так как ее определитель, как определитель Вронского для линейно-независимых решений $\overline{T}_n(t),\widetilde{T}_n(t)$, не равен нулю.

Подставляя найденные из системы (1.15), (1.16) A_n и B_n в ряд (1.12), получаем решение исходной задачи (1.1)-(1.3).

2. Метод разделения переменных решения задач для однородных гиперболических уравнений

Рассмотрим задачу о колебаниях тонкой однородной струны с жестко закрепленными концами. Эта задача описывается однородным уравнением второго порядка

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0, \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \quad (2.2)$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). \quad (2.3)$$

Будем искать частные нетривиальные решения уравнения (2.1) в виде

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t).$$

Подставим это решение в уравнение (2.1)

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

Поделим это равенство на a^2XT, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

где λ — константа. Отсюда приходим к уравнениям для $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.4}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{2.5}$$

Подставляя $u(x,t)$ в граничные условия (2.2), получим

$$X(0)\,T(t) = 0,\ X(l)\,T(t) = 0.$$

Отсюда получаем $X(0) = 0, X(l) = 0$.
Таким образом приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю и положителен.

а) Предположим, что $\lambda < 0$. Построим общее решение уравнения (2.6). Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. При $\lambda < 0$ корни вещественны и различны, следовательно общее решение уравнения (2.6)

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Потребуем выполнение граничных условий

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} = 0, \end{cases}$$

$C_1 = -C_2$, значит $C_1(e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{\sqrt{-\lambda}\, l}) = 0$.

Здесь $C_1 \neq 0$, так как тогда имеем $X(x) \equiv 0$, а мы ищем нетривиальные решения. Следовательно $e^{\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} = 0$ или $e^{2\sqrt{-\lambda}\, l} = 1$, это возможно только при $\lambda = 0$. В нашем случае $\lambda < 0$, и мы имеем только тривиальное решение.

б) Пусть $\lambda = 0$, тогда $X''(x) = 0$ и общее решение имеет вид $X(x) = C_1 x + C_2$.

Из граничных условий получаем

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0, \\ X(l) &= C_1 l = 0, \end{aligned}$$

следовательно $C_1 = C_2 = 0$ и опять получаем тривиальное решение.

в) Пусть $\lambda > 0$, в этом случае корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ — комплексные.

В этом случае общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x.$$

Из граничных условий получим

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, \\ X(l) &= C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0. \end{aligned}$$

$C_2 \neq 0$, так как мы ищем только нетривиальные решения, следовательно, для определения λ получаем уравнениеsin $\sqrt{\lambda}\, l = 0$, откуда

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots \qquad \text{— собственные значения.}$$

Собственные функции

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где C_k — произвольные постоянные. Возьмем $C_k = 1$, тогда

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l} x, \; n = 1, 2, \ldots$$

Обратимся теперь к решению уравнения (2.5) при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm ia\sqrt{\lambda_n} = \pm\dfrac{a\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots$ В этом случае общее решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t,$$

A_n, B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, частные решения уравнения (2.1) удовлетворяющие граничным условиям (2.2), имеют вид

$$u_n(x,t) = T_n(t)\,X_n(x) = \Big(A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Общее решение задачи (2.1)-(2.3) представим в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x. \quad (2.7)$$

Представим функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в виде разложения в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где}$$

$$\phi_n = \frac{1}{\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2}\int\limits_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

$$\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

Легко вычислить $\|\sin\dfrac{\pi n}{l}x\|^2 = \dfrac{l}{2}$

Запишем начальные условия (2.3) для функции (2.7):

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Это равенство выполняется, если $A_n=\phi_n,\ n=1,2,\ldots$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a\pi n}{l}A_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+\frac{a\pi n}{l}B_n\cos\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

При $t=0$ получаем

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}B_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Это равенство выполняется при $B_n=\dfrac{l}{a\pi n}\psi_n,\ n=1,2,\ldots$

Учитывая найденные произвольные постоянные A_n и B_n, запишем решение задачи (2.1)-(2.3)

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi_n\cos\frac{a\pi n}{l}t+\frac{l}{a\pi n}\psi_n\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.8}$$

При условии абсолютной и равномерной сходимости ряда (2.8) и рядов, полученных из (2.8) почленным дифференцированием дважды по x и t в области $0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0$, формула (2.8) дает решение задачи (2.1)-(2.3).

Посмотрим, как изменится решение задачи о колебаниях струны при различных способах закрепления концов струны, то есть при различных граничных условиях.

Рассмотрим задачу о колебаниях однородной струны, левый конец которой закреплен жестко, а правый — свободен.

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \tag{2.9}$$

$$\left\{\begin{array}{l}u(0,t)=0,\\ u_x(l,t)=0\qquad\text{— граничные условия,}\end{array}\right. \tag{2.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l}u(x,0)=\phi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x)\qquad\text{— начальные условия.}\end{array}\right. \tag{2.11}$$

Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Подставим $u(x,t)$ в уравнение (2.9) и разделим переменные. Получим задачу на собственные значения и уравнение для определения $T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

$$X(0)\,T(t) = 0,$$
$$X'(l)\,T(t) = 0.$$

Задача на собственные значения приобретает вид:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решим эту задачу.

Легко убедиться, что при $\lambda \leqslant 0$ задача (2.12), (2.13) не имеет нетривиальных решений.

При $\lambda > 0$ решение уравнения (2.12) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Подставив $X(x)$ в граничные условия (2.13), получим

$$X(0) = C_1 = 0,$$
$$X'(l) = C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения $C_2 \neq 0$, следовательно $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Решая это тригонометрическое уравнение, получим

$$\sqrt{\lambda}\,l = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots$$

— собственные значения,

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

— собственные функции.

Видим, что решение задачи на собственные значения зависит от граничных условий исходной дифференциальной задачи.

Для определения $T(t)$ имеем уравнение

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения при найденных λ_n имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t,$$

тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

Потребовав от решения $u(x,t)$ выполнения начальных условий (2.11), получим

$$A_n = \phi_n,\ B_n = \frac{2l}{(2n+1)a\pi}\psi_n,$$

где ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения в ряд по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$ функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$.

Примеры. Найти методом разделения переменных решение задач.

1.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u(0,t) = u(l,t) = 0,\\
&u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 7\sin\frac{5\pi}{l}x.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{7l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{l}t\ \sin\frac{5\pi}{l}x.$$

2.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\\
&u(x,0) = 7\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t = 10\cos\frac{3\pi}{2l}x + 8\cos\frac{5\pi}{2l}x.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = 7\cos\frac{a\pi}{2l}t\cos\frac{\pi}{2l}x + \frac{20l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi a}{2l}t\cos\frac{3\pi}{2l}x + \\ + \frac{16l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}x.$$

3.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\\
&u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).
\end{aligned}$$

Замечание. В данном случае необходимо учесть, что $\lambda = 0$ будет являться собственным значением, ему соответствует собственная функция $X_0(x) = 1$. Частное решение $X_0(x) \cdot T_0(t)$ надо включить в состав общего решения отдельно.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l (\phi(x) + t\,\psi(x))dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ B_n = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

4.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\\
&u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}x\sin\frac{3\pi}{2l}x + \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8l}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

5.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\
&u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\\
&u(x,0) = \frac{4h}{l^2}x(l-x),\ u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)a\pi}{l} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

6.
$$\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = v_0. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4lv_0}{a\pi^2(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)a\pi}{l} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

7.
$$\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 1. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{l}{2} + t - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)a\pi}{l} t \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

Во всех вышеприведенных примерах рассматривается однородное уравнение колебаний без младших членов. Рассмотрим гиперболическое уравнение, содержащее младшие члены.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + R\,u,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.14}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \tag{2.15}$$

$$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0, \tag{2.16}$$

R — заданная постоянная.

При разделении переменных младшие члены добавим в уравнение для определения $T(t)$.

Рассмотрим $u(x,t) = X(x)\,T(x)$. Подставим $u(x,t)$ в уравнение (2.14), получим

$$T''(t)\,X(x) + R\,T(t)\,X(x) = a^2 X''(x)\,T(t).$$

Поделим данное равенство на $a^2 X\,T$, получим

$$\frac{T''(t) + R\,T(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Получили задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

и уравнение для определения $T(t)$:

$$T''(t) + (a^2\lambda + R)\,T(t) = 0. \tag{2.18}$$

Как было показано выше, решение задачи (2.17) имеет вид

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x,\ n = 1, 2, \ldots$$

Найдем $T_n(t)$. Общее решение уравнения (2.18) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{a^2\lambda_n + R}\,t + B_n \sin\sqrt{a^2\lambda_n + R}\,t.$$

Введем обозначение $p_n = \sqrt{a^2\lambda_n + R}$, тогда

$$T_n(t) = A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t.$$

Общее решение исходного уравнения

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.19}$$

Потребуем для $u(x,t)$ выполнения начальных условий (2.16). Разложим функции $\phi(x) = x$ и $\psi(x) = 0$ в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, получим

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\phi_k(x) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1},\ n = 1, 2, \ldots,$$

$\psi(x) = 0$, следовательно $\psi_k(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

Тогда

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

отсюда получаем

$$A_n=\phi_n=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1},\ B_n=\frac{\psi_n}{p_n}=0.$$

Таким образом, решение исходной задачи (2.14)-(2.16) имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n\pi}(-1)^{k+1}\cos\sqrt{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2+R}\,t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Пример

$$\begin{array}{l} u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u,\ 0<x<\pi,\ t>0,\\ u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=x. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t)=8e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left((-1)^n-\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)\sin\frac{2n+1}{2}t\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

3. Решение методом разделения переменных неоднородных гиперболических уравнений

Метод разделения переменных может быть применен и для решения неоднородных гиперболических уравнений.

Рассмотрим задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,t>0, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1u(0,t)+\beta_1u_x(0,t)=0,\\ \alpha_2u(l,t)+\beta_2u_x(l,t)=0 \qquad \text{— граничные условия,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\phi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x) \qquad \text{— начальные условия.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1)-(3.3) будем искать в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{3.4}$$

где $u_1(x,t)$ — решение неоднородного уравнения (3.1) с нулевыми начальными условиями:

$$u_{1\,tt} = a^2 u_{1\,xx} + f(x,t), \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(0,t) + \beta_1 u_{1\,x}(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_1(l,t) + \beta_2 u_{1\,x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$u_1(x,0) = 0, \; u_{1\,t}(x,0) = 0. \tag{3.7}$$

$u_2(x,t)$ — решение однородного уравнения с исходными начальными условиями:

$$u_{2\,tt} = a^2 u_{2\,xx}, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_2(0,t) + \beta_1 u_{2\,x}(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_2(l,t) + \beta_2 u_{2\,x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$u_2(x,0) = \phi(x), \; u_{2\,t}(x,0) = \psi(x). \tag{3.10}$$

Решение задачи (3.8)-(3.10) построено выше и имеет вид

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \right) X_n(x),$$

где λ_n, $X_n(x)$ — решение соответствующей задачи на собственные значения,

$$A_n = \phi_n, \; B_n = \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}},$$

где ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ по собственным функциям $X_n(x)$.

Для отыскания решения задачи (3.5)-(3.7) функцию $u_1(x,t)$ будем искать в виде

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x).$$

Подставим $u_1(x,t)$ в уравнение (3.5), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 T_n(t) X_n''(x) + f(x,t). \tag{3.11}$$

Функцию $f(x,t)$ предствим в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \tag{3.12}$$

где

$$f_n(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)X_n(x)dx}{\int\limits_0^l X_n^2(x)dx}.$$

Заменяя в равенстве (3.11) $X_n''(x) = -\lambda_n X_n(x)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t)\right) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x).$$

В силу ортогональности системы собственных функций $X_n(x)$ получим уравнение для определения функций $T_n(t)$

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t),\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Воспользуемся начальным условиями (3.7):

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 0, \\ u_{1\,t}(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = 0, \end{cases}$$

откуда получим

$$T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

Таким образом, каждая функция $T_n(t)$ определяется как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (3.13) с начальными условиями (3.14).

Решение задачи (3.13), (3.14) имеет вид

$$T_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)g_n(t-\tau)d\tau, \tag{3.15}$$

где $g_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} g_n'' + a^2\lambda_n g_n = 0, \\ g_n(0) = 0,\ g_n'(0) = 1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.16}$$

Функцию $g_n(t)$ легко построить в явном виде. Запишем общее решение задачи (3.16)

$$g_n(t) = c_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + d_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t,$$

затем, для нахождения постоянных c_n, d_n воспользуемся начальными условиями задачи (3.16), получим

$$g_n(0) = c_n = 0,$$

$$g_n'(t) = d_n a\sqrt{\lambda_n} \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t, \qquad \text{откуда}$$

$$g_n'(0) = d_n a\sqrt{\lambda_n} = 1, \qquad \text{отсюда}$$

$$d_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \qquad \text{и}$$

$$g_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t.$$

Таким образом, получаем

$$T_n(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau) d\tau. \tag{3.17}$$

Подставим выражение (3.17) в функцию $u_1(x,t)$, получим

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right) X_n(x). \tag{3.18}$$

Чтобы убедиться, что функция $u_1(x,t)$ является решением задачи (3.5)-(3.6), достаточно подставить выражение (3.18) в уравнение (3.5) и условия (3.6), (3.7).

Рассмотрим примеры решения неоднородных уравнений.

Пример 1.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-t} \sin \frac{10\pi}{l} x,\ 0 < x < l,\ t > 0$$

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Согласно изложенной выше общей схеме решения неоднородной задачи, получаем

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$— решение задачи

$$\begin{array}{l} u_{1\,tt} = a^2 u_{1\,xx} + e^{-t}\sin\dfrac{10\pi}{l}x, \\ u_1(0,t) = 0,\ u_1(l,t) = 0, \\ u_1(x,0) = 0,\ u_{1\,t}(x,0) = 0. \end{array}$$

$u_2(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{array}{l} u_{2\,tt} = a^2 u_{2\,xx}, \\ u_2(0,t) = 0,\ u_2(l,t) = 0, \\ u_2(x,0) = 0,\ u_{2\,t}(x,0) = 0. \end{array}$$

Рассмотрим соответствующую задачу на собственные значения для функции $u_2(x,t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет нетривиальные решения $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$ при $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots$

Тогда

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t + B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

и $A_n = \phi_n = 0$, так как $\phi(x) = 0$, а $B_n = \dfrac{l}{an\pi}\psi_n = 0$, так как $\psi(x) = 0$.

Таким образом $u_2(x,t) \equiv 0$.

Найдем $u_1(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$.

Для отыскания $T_n(t)$ решим задачу

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты разложения функции $f(x,t)$ по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

$$f(x,t) = e^{-t}\sin\frac{10\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad \text{отсюда}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} e^{-t}, & n = 10 \\ 0, & n \neq 10. \end{cases}$$

Таким образом, из всех уравнений для определения $T_n(t)$ остается одно при $n = 10$:

$$\begin{cases} T_{10}''(t) + \left(\dfrac{10a\pi}{l}\right)^2 T_{10}(t) = e^{-t}, \\ T_{10}(0) = 0,\ T_{10}'(0) = 0. \end{cases}$$

Решением этой задачи является функция

$$T_{10}(t) = \int\limits_0^t e^{-\tau} g_{10}(t-\tau)\,d\tau, \qquad \text{где}$$

$$\begin{cases} g_{10}'' + \left(\dfrac{10a\pi}{l}\right)^2 g_{10} = 0, \\ g_{10}(0) = 0,\ g_{10}'(0) = 1. \end{cases}$$

Решая задачу Коши для $g_{10}(t)$, получим

$$g_{10}(t) = \frac{l}{10a\pi}\sin\frac{10a\pi}{l}t,$$

тогда

$$T_{10}(t) = \frac{l}{10a\pi}\int\limits_0^t \sin\frac{10a\pi}{l}(t-\tau)\,e^{-\tau}d\tau =$$
$$= \frac{l^2}{100a^2\pi^2 + l^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{10a\pi}{l}t + \frac{l}{10a\pi}\sin\frac{10a\pi}{l}t\right).$$

Тогда

$$u(x,t) = T_{10}(t)\sin\frac{10\pi x}{l} =$$
$$= \frac{l^2}{100a^2\pi^2 + l^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{10a\pi}{l}t + \frac{l}{10a\pi}\sin\frac{10a\pi}{l}t\right)\sin\frac{10\pi}{l}x.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\\
&u(x,0) = \sin 2x,\\
&u_t(x,0) = 0,
\end{aligned}$$

Построим соответствующую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет решение

$$\lambda_n = n^2,\ X_n(x) = \sin nx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Решение исходной задачи представим в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&u_{1\,tt} = u_{1\,xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u_1(0,t) = 0,\ u_1(\pi,t) = 0,\\
&u_1(x,0) = 0,\ u_{1\,t}(x,0) = 0,
\end{aligned}$$

а $u_2(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&u_{2\,tt} = u_{2\,xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u_2(0,t) = 0,\ u_2(\pi,t) = 0,\\
&u_2(x,0) = 0,\\
&u_{2\,t}(x,0) = \sin 2x,
\end{aligned}$$

Согласно изложенному выше,

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx,$$

где $A_n = \phi_n, B_n = \dfrac{\psi_n}{n}$.

Получим ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ по $\sin nx$.

В нашем примере $\phi(x) = \sin 2x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin nx$.

Отсюда получаем

$$\phi_n = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

$$\psi(x) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin nx, \qquad \text{отсюда}$$

$$\psi_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, $u_2(x,t) = \cos 2t \sin 2x$.

Найдем $u_1(x,t)$. Для этого разложим функцию $f(x,t) = x$ в ряд по собственным функциям $\sin nx$:

$$f(x,t) = x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx, \qquad \text{где}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $u_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$, где $T_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} T_n''(t) + nT_n(t) = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}, \\ T_n(0) = 0, \ T_n'(0) = 0, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Согласно формуле (3.15)

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^t (-1)^{n+1} g_n(t-\tau) d\tau,$$

где $g_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} g_n'' + k^2 g_n = 0, \\ g_n(0) = 0, \ g_n'(0) = 1, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Общее решение этой задачи

$$\begin{aligned} &g_n(t) = c_n \cos nt + d_n \sin nt, \\ &g_n(0) = c_n = 0, \ g_n'(0) = d_n n = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $g_n(t) = \dfrac{1}{n} \sin nt$.

Тогда

$$T_n(t) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2}\int\limits_0^t \sin n(t-\tau)d\tau =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt),\ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt)\sin nx.$$

Окончательно

$$u(x,t) = \cos 2t \sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt)\sin nx.$$

4. Метод разделения переменных решения смешанных задач для гиперболических уравнений

Метод разделения переменных позволяет строить решения задач и в случаях, когда неоднородными являются уравнение и граничные условия.

Рассмотрим такую задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = p(t), \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = r(t), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \tag{4.3}$$

Решение задачи (4.1)-(4.3) представим в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \tag{4.4}$$

Функцию $w(x,t)$ выберем так, чтобы для нее выполнялись граничные условия (4.2). В общем случае $w(x,t)$ будем искать в виде

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\, p(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\, r(t), \tag{4.5}$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ — постоянные.

Приведем примеры нахождения функции $w(x,t)$. Рассмотрим граничные условия первого рода:

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= p(t),\\
u(l,t) &= r(t).
\end{aligned}
$$

В этом случае $w(x,t)$ можно искать в виде $w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\,p(t) + (\delta_1 x + \delta_2)\,r(t)$.

$$w(0,t) = \gamma_2 p(t) + \delta_2 r(t) = p(t),$$

отсюда ясно, что $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0$.

Из граничного условия при $x = l$ получаем

$$w(l,t) = (\gamma_1 l + 1)\,p(t) + \delta_1 l\, r(t) = r(t),$$

отсюда $\gamma_1 l + 1 = 0$, то есть $\gamma_1 = -\dfrac{1}{l},\ \delta_1 l = 1$, то есть $\delta_1 = \dfrac{1}{l}$.

Окончательно получим

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) p(t) + \frac{x}{l} r(t).$$

В следующием примере рассмотрим граничные условия второго рода:

$$u_x(0,t) = p(t),\ u_x(l,t) = r(t).$$

В этом случае $w(x,t)$ будем искать в виде

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x)\,p(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x)\,r(t).$$

Найдем $w_x(x,t)$:

$$w_x(x,t) = (2\gamma_1 x + \gamma_2)\,p(t) + (2\delta_1 x + \delta_2)\,r(t).$$

Потребуем выполнения граничных условий, то есть

$$
\begin{aligned}
w_x(0,t) &= \gamma_2 p(t) + \delta_2 r(t) = p(t),\\
w_x(l,t) &= (2\gamma_1 x + \gamma_2)\,p(t) + (2\delta_1 x + \delta_2)\,r(t) = r(t).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0,\ \gamma_1 = -\dfrac{1}{2l},\ \delta_1 = \dfrac{1}{2l}$.

Окончательно

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) p(t) + \left(\frac{x^2}{2l} + \frac{x}{2l}\right) r(t).$$

В случае, когда задают граничные условия третьего рода, $w(x,t)$ ищется в общем виде и для определения констант $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ составляется и решается система уравнений.

Получим задачу для определения функции $v(x,t)$. Для этого подставим функцию (4.4) в уравнение (4.1), граничные условия (4.2) и начальные условия (4.3).

$$v_{tt} + w_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(x,t).$$

Так как функция $w(x,t)$ найдена, то w_{tt} и w_{xx} — известны.

Из граничных условий (4.2) получим

$$\alpha_1 v(0,t) + \beta_1 v_x(0,t) = p(t) - \alpha_1 w(0,t) - \beta_1 w_x(0,t) = 0,$$

так как $\alpha_1 w(0,t) + \beta_1 w_x(0,t) = p(t)$.

Аналогично

$$\alpha_2 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = r(t) - \alpha_2 w(l,t) - \beta_2 w_x(l,t) = 0,$$

так как $\alpha_2 w(l,t) + \beta_2 w_x(l,t) = r(t)$.

Получим начальные условия для функции $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \phi(x) - w(x,0), \\ v_t(x,0) &= \psi(x) - w_t(x,0). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,t) &= f(x,t) + a^2 w_{xx} - w_{tt}, \\ \tilde{\phi}(x,t) &= \phi(x) - w(x,0), \\ \tilde{\psi}(x,t) &= \psi(x) - w_t(x,0). \end{aligned}$$

Тогда $v(x,t)$ определяется как решение задачи

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t), \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 v(0,t) + \beta_1 v_x(0,t) = 0, \\ \alpha_2 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$v(x,0) = \tilde{\phi}(x),\ v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x). \tag{4.8}$$

Нахождение задачи (4.6)-(4.8) приведено в п. 3.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим задачу

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$\begin{cases} u(0,t) = t, \\ u_x(\pi,t) = 1 \text{ — граничные условия,} \end{cases}$$

$$u(x,0) = \sin\frac{x}{2},\ u_t(x,0) = 1 \text{ — начальные условия.}$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

$w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\,t + (\delta_1 x + \delta_2)\cdot 1$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям. $w(0,t) = \gamma_2 x + \delta_2 = t$, откуда получаем $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0$, то есть $w(x,t) = (\gamma_1 x + 1)\,t + \delta_1 x$.

Потребуем выполнения второго граничного условия. Найдем $w_x(x,t) = \gamma_1 t + \delta_1,\ w_x(\pi,t) = \gamma_1 t + \delta_1 = 1$, откуда $\gamma_1 = 0,\ \delta_1 = 1$.

Окончательно $w(x,t) = x + t$.

Построим задачу для нахождения функции $v(x,t)$:

$$v_{tt} = v_{xx} - w_{tt} + w_{xx}.$$

Так как $w_{xx} = w_{tt} = 0$, то уравнение для $v(x,t)$

$$v_{tt} = v_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0.$$

В силу выбора функции $w(x,t)$ граничные условия для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} &v(0,t) = 0,\\ &v_x(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Получили начальные условия для $v(x,t)$.

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \sin\frac{x}{2} - w(x,0) = \sin\frac{x}{2} - x,\\ &v_t(x,0) = 1 - w_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Найдем $v(x,t) = X(x)\,T(t)$. При разделении пременных получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\\ X(0) = 0,\ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи $\lambda_n = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2,\ X_n(x) = \sin\dfrac{2n+1}{2}x,\ n = 0, 1, \ldots$

Для функции $T(t)$ получаем

$$\begin{aligned} &T_n(t) + \lambda_n T(t) = 0, \\ &T_n(0) = \phi_n, \\ &T_n'(0) = \psi_n, \end{aligned}$$

где $\phi(x) = \sin\dfrac{x}{2} - x = \phi_1(x) + \phi_2(x),\ \psi(x) = 0.$

Разложим функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{2n+1}{2}x$, получим

$$\phi_{1\,n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$\phi_{2\,n} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x \sin\frac{2n+1}{2}x\,dx = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2}.$$

$\psi(x) = 0$, следовательно $\psi_n = 0,\ n = 0, 1, \ldots$

Тогда

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{2n+1}{2}t + B_n \sin\frac{2n+1}{2}t,$$

где

$$A_{1\,n} = \phi_n,\ A_{2\,n} = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2},\ n = 0, 1, \ldots$$

Общее решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = x + t + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)t}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ &u_x(0,t) = t,\ u(l,t) = t^2, \\ &u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = x. \end{aligned}$$

Найдем $w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\,t + (\delta_1 x + \delta_2)\,t^2,\ w_x(x,t) = \gamma_1 t + \delta_1 t^2.$

Из граничных условий получим $w_x(0,t) = \gamma_1 t + \delta_1 t^2 = t$, отсюда $\gamma_1 = 1,\ \delta_1 = 0$, тогда $w(x,t) = (x+\gamma_2)t + \delta_2 t^2,\ w(l,t) = (\gamma_2 + l)\,t + \delta_2 t^2 = t^2$, отсюда $\delta_2 = 1, \gamma_2 = -l$.

Окончательно $w(x,t) = (x-l)\,t + t^2.$

Перестроим задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = v_{xx} + w_{xx} - w_{tt} = v_{xx} - 2,\\
&v_x(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\\
&v(x,0) = x - w_t(x,0) = x,\\
&v_t(x,0) = x - w_t(x,0) = l.
\end{aligned}$$

Найдем $v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t)$.

$v_1(x,t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned}
&v_{1\,tt} = v_{1\,xx} - 2,\\
&v_{1\,x}(0,t) = 0,\ v_1(l,t) = 0,\\
&v_1(x,0) = 0,\ v_{1\,t}(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

$v_2(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned}
&v_{2\,tt} = v_{2\,xx},\\
&v_{2\,x}(0,t) = 0,\ v_2(l,t) = 0,\\
&v_2(x,0) = x,\ v_{2\,t}(x,0) = l.
\end{aligned}$$

Для нахождения построим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\\ X'(0) = 0,\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Решением этой задачи являются

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,\ \text{и}\ X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,\ n = 0, 1, \ldots$$

Общее решение

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$$

где

$$A_n = \phi_n, B_n = \frac{2l}{(2n+1)\pi}\,\psi_n.$$

Найдем ϕ_n и ψ_n.

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx = 2\left((-1)^n - \frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}\right),\ n = 0, 1, \ldots$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l l\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx = \frac{4l}{(2n+1)\pi}(-1)^n,\ n = 0, 1, \ldots$$

Функцию $v_1(x,t)$ ищем в виде

$$v_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

$T_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T_n'' + \frac{(2n+1)\pi}{2l}T_n = f_n(t),\ n = 0, 1, \ldots$$

и начальным условиям

$$T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0.$$

Найдем $f_n(t)$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (-2)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx = \frac{8}{(2n+1)\pi}(-1)^{n+1}.$$

Тогда

$$T_n(t) = \int\limits_0^t g_n(t-\tau)\frac{8}{(2n+1)\pi}(-1)^{n+1}\tau\,d\tau.$$

Здесь $g_n(t) = \dfrac{2l}{(2n+1)\pi}\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}t.$

$$T_n(t) = \frac{16l}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\int\limits_0^t \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}(t-\tau)d\tau =$$
$$= \frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3}(-1)^{n+1}\left(1 - \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right).$$

Таким образом, решение исходной задачи принимает вид

$$u(x,t) = (x-l)\,t + t^2 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3}\left(1-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(2(-1)^n - \frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\ + \right. \\ \left. + \frac{8l^2}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

Пример 3.

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0, \\ u(0,t) = t^2,\ u(\pi,t) = t^3, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\,t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin x\cos x + \\ + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left((-1)^n 3t - 1 + \cos nt - \frac{(-1)^n 3}{n}\sin nt\right)\sin nx.$$

Пример 4.

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0, \\ u_x(0,t) = e^{-t},\ u(\pi,t) = t, \\ u(x,0) = \sin x\cos x,\ u_t(x,0) = 1. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\,e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 2t\sin 2x - \\ - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2)}\left(e^{-t} + n^2\cos nt - \left(2n+\frac{1}{n}\right)\sin nt\right)\sin nx.$$

Пример 5.

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0, \\ u(0,t) = t+1,\ u(1,t) = t^3+2, \\ u(x,0) = x+1,\ u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

Ответ:

$$u(x,t) = t + 1 + x(t^3 - t + 1) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\frac{6(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} - 1\right)\sin\pi nt + \frac{(-1)^n 12t}{\pi^3 n^3}\right)\sin\pi nx.$$

Литература

1. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М.: Физматмет, 2008.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — М.: Дрофа, 2003. — Т. 1—3.
3. Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики: Учебное пособие. — 2-е изд. испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2016.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
6. Владимиров В. С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 2001.
7. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975.
8. Бицарзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1977.