Том 1, Выпуск 4
Стр. 35–48 (2023)

УДК 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла. II. Неограниченные идемпотенты

А.М. Бикчентаев, Махмуд Хадур

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, I – единица $\mathcal{M}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра τ-измеримых операторов и $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов, $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются идемпотентами. Если $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. В частности, если $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$. Если $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $PQ \in \mathcal{M}$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. Если $A \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $U \in \mathcal{M}$ является изометрией, то $\|UA-A\|_2^2 \leq 2\|(I-U)AA^*\|_1$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, идемпотент, трипотент, квантовый эффект Холла.

DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.35-48

Введение

Пусть P, Q – идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если $X = P-Q$ является ядерным оператором, то следы всех нечетных степеней X совпадают:

$$\operatorname{tr}(P-Q) = \operatorname{tr}((P-Q)^{2n+1}) = \dim\ker(X-I) - \dim\ker(X+I) \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Если X является компактным оператором, то правая часть (1) дает естественную "регуляризацию" для следа и показывает, что это всегда является целым числом [1, 2]. В [3, теорема 3] установлен C^*-аналог этого утверждения: пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ и трипотенты $P, Q \in \mathcal{A}$. Если $P-Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$.

Пары идемпотентов играют важную роль в квантовом эффекте Холла (the Quantum Hall Effect, [4]). Для идемпотентов P, Q, R с ядерными $P-Q$ и $Q-R$ из равенства $\operatorname{tr}(P-Q) = \operatorname{tr}(P-R) + \operatorname{tr}(R-Q)$ и (1) имеем

$$\operatorname{tr}\left((P-Q)^3\right) = \operatorname{tr}\left((P-R)^3\right) + \operatorname{tr}\left((R-Q)^3\right). \tag{2}$$

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Поступила: 11.05.2023. Принята: 28.11.2023. Опубликована: 26.12.2023.

Физическое понимание аддитивности в (2) приходит из интерпретации $\mathrm{tr}((P-Q)^3)$ как *проводимости Холла* (the Hall conductance). Аддитивность (кубического) уравнения в (2) может быть рассмотрена как вариант закона Ома (the Ohm's law) об аддитивности проводимости [5]. В [6, теорема 1] получен C^*-аналог квантового эффекта Холла и доказана вещественность следа разностей широкого класса симметрий из C^*-алгебры (см. следствия 2 и 3 в [6]).

Мы обобщаем эти результаты на неограниченные идемпотенты, трипотенты и симметрии, присоединенные к алгебре фон Неймана (примеры таких операторов см. в [7]). Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов, $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}} = \{A \in S(\mathcal{M},\tau) : \ A = A^2\}$, $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство всех τ-интегрируемых операторов. Если $P,Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ и $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 3). Если $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$ (следствие 4). Пусть $A,B \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются трипотентами. Если $A-B \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $A+B \in \mathcal{M}$, то $\tau(A-B) \in \mathbb{R}$ (следствие 5). Пусть $U,V \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются симметриями ($U^2 = I$). Если $U-V \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(U-V) \in \mathbb{R}$ (следствие 7). Пусть $P,Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ с $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $PQ \in \mathcal{M}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 10). Если $P,Q,R \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ с $P-Q, Q-R \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и операторы $PQ, QR, PR \in \mathcal{M}$, то $\tau((P-R)^{2n+1}) = \tau((P-Q)^{2n+1}) + \tau((Q-R)^{2n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (следствие 11). Если оператор $A = A^2 \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $\mathrm{Re}(A) \geq sA^*A - (s-1)AA^*$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то A является проектором (следствие 16). Если $A \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $U \in \mathcal{M}$ является изометрией, то $\|UA - A\|_2^2 \leq 2\|(I-U)AA^*\|_1$ (теорема 17).

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I – единица $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Оператор $U \in \mathcal{M}$ называется *изометрией*, если $U^*U = I$; *унитарным*, если $U^*U = UU^* = I$.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0,+\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X,Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : \ Y \in \mathcal{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$ (см. [8, гл. V, §2]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(I - P) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [9, гл. IX]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\le$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *идемпотентом*, если $A^2 = A$; *трипотентом*, если $A^3 = A$; *симметрией*, если $A^2 = I$. Пусть $[A, B] = AB - BA$ – коммутатор операторов $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : \ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \ \text{ и } \ \tau(I - P) \le t\}, \quad t > 0.$$

Если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$, то $\mu(t; A) \in \{0\} \cup [1, +\infty)$ для всех $t > 0$ [10, теорема 3.3].

Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега $(0 < p < \infty)$, ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено в виде

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \ \mu(\cdot; X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \le p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(\cdot; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ. Линеал $\mathcal{E} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *идеальным пространством* на $(\mathcal{M}, \tau)$, если

1) из $X \in \mathcal{E}$ следует $X^* \in \mathcal{E}$;
2) из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $|Y| \le |X|$ следует $Y \in \mathcal{E}$.

Таковы, например, алгебра $\mathcal{M}$, совокупность элементарных операторов $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $0 < p < \infty$. Для каждого идеального пространства $\mathcal{E}$ на $(\mathcal{M}, \tau)$ имеем $\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ [11, лемма 5]. Идеальное пространство $\mathcal{E}$ на $(\mathcal{M}, \tau)$, снабженное F-нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, называется *F-нормированным идеальным пространством* на $(\mathcal{M}, \tau)$, если

1) $\|X\|_{\mathcal{E}} = \|X^*\|_{\mathcal{E}}$ для всех $X \in \mathcal{E}$;
2) из $X, Y \in \mathcal{E}$ и $|Y| \le |X|$ следует $\|Y\|_{\mathcal{E}} \le \|X\|_{\mathcal{E}}$ (см. [12, 13]).

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с *-идеалом $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ Шаттена–фон Неймана компактных (=вполне непрерывных) операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел оператора X; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\tau(f) = \int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu$, где (Ω, Σ, μ) – локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, μ), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [14].

2. Разности неограниченных идемпотентов и след

Лемма 1. *Если $A \in \mathcal{M}$ и $B \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $AB, BA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$.*

Лемма 2 ([15])**.** *Если $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $AB, BA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(AB) = \tau(BA)$.*

Теорема 3. *Если $P, Q \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ и $P - Q \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(P - Q) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для каждого $P = P^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ существует единственное разложение $P = \tilde{P} + Z$, где $\tilde{P} \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $S(\mathcal{M}, \tau)$ с $Z^2 = 0$, причем

$$Z\tilde{P} = 0, \quad \tilde{P}Z = Z$$

[16, теорема 2.23]. Пусть $Q = \tilde{Q} + T$ – описанное выше разложение для $Q = Q^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 1 имеем

$$\tilde{P} - \tilde{Q}\tilde{P} = (P - Q)\tilde{P} - \tilde{Q}(P - Q)\tilde{P} \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Аналогично проверяется, что $\tilde{Q} - \tilde{P}\tilde{Q} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тем самым

$$\tilde{P} - \tilde{Q} = \tilde{P} - \tilde{Q}\tilde{P} - (\tilde{Q} - \tilde{P}\tilde{Q})^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$$

и $Z - T = P - Q - (\tilde{P} - \tilde{Q}) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Согласно лемме 1 операторы

$$T\tilde{P} = (T - Z)\tilde{P}, \; Z\tilde{Q} = (Z - T)\tilde{Q}, \; Z - \tilde{P}T = \tilde{P}(Z - T), \; \tilde{Q}Z - T = \tilde{Q}(Z - T)$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, поэтому $\tilde{Q}Z - \tilde{P}T = Z - \tilde{P}T + (\tilde{Q}Z - T) - (Z - T) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно,

$$\tilde{P}T - T = \tilde{Q}Z - T - (\tilde{Q}Z - \tilde{P}T) \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

В силу лемм 1 и 2 имеем $0 = \tau([Z - T, \tilde{Q}]) = \tau(Z\tilde{Q} - \tilde{Q}Z + T)$. Поскольку операторы

$$(\tilde{P} - \tilde{Q})T = \tilde{P}T - T, \;\; T(\tilde{P} - \tilde{Q}) = T\tilde{P}$$

лежат $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, ввиду леммы 2 с $A = \tilde{P} - \tilde{Q}$, $B = T$ получаем

$$\tau(\tilde{P}T - T) = \tau(T\tilde{P}). \tag{3}$$

Поскольку $0 = \tau([Z - T, \tilde{P}]) = \tau(-T\tilde{P} - Z + \tilde{P}T)$, из (3) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(-T + \tilde{P}T - T\tilde{P}) = \tau(Z - T + (-Z + \tilde{P}T - T\tilde{P})) \\ &= \tau(Z - T) + \tau(-Z + \tilde{P}T - T\tilde{P}) = \tau(Z - T). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tau(P - Q) = \tau(\tilde{P} - \tilde{Q}) + \tau(Z - T) = \tau(\tilde{P} - \tilde{Q}) \in \mathbb{R}$, так как оператор $\tilde{P} - \tilde{Q}$ является самосопряженным. □

Следствие 4. *Если $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Каждый трипотент ($A = A^3$) из произвольной алгебры является разностью двух идемпотентов из этой алгебры [17, предложение 1]. □

Отметим, что следствие 4 одновременно усиливает следствие 2.31 из [16] (здесь мы избавились от лишнего условия $A - A^2 \in \mathcal{M}$) и следствие 3.13 из [7] (здесь мы избавились от лишнего условия $A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$).

Следствие 5. *Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ являются трипотентами. Если $A - B \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A + B \in \mathcal{M}$, то $\tau(A - B) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $A = P_1 - Q_1$, $B = P_2 - Q_2$ – представления из [17, предложение 1], т. е. $P_k, Q_k \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ и $P_kQ_k = Q_kP_k = 0$ для $k = 1, 2$. Легко видеть, что операторы $A^2 = P_1 + Q_1$ и $B^2 = P_2 + Q_2$ лежат в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$. Поскольку оператор $A - B = P_1 - Q_1 - P_2 + Q_2$ лежит в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, в силу леммы 1 оператор

$$A^2 - B^2 = \frac{1}{2}((A + B)(A - B) + (A - B)(A + B)) = P_1 + Q_1 - P_2 - Q_2$$

также лежит в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда операторы

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}(A - B + A^2 - B^2), \quad Q_2 - Q_1 = \frac{1}{2}(A - B - (A^2 - B^2))$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau(P_1 - P_2), \tau(Q_2 - Q_1) \in \mathbb{R}$ согласно теореме 3. Таким образом,

$$\tau(A - B) = \tau(P_1 - Q_1 - P_2 + Q_2) = \tau(P_1 - P_2) + \tau(Q_2 - Q_1) \in \mathbb{R}$$

и утверждение доказано. □

Следствие 6. *Пусть $P \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ и $P = \tilde{P} + Z$ – описанное выше разложение. Имеем эквивалентность*

$$P \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow \tilde{P}, Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau),$$

и при этом $\tau(P) = \tau(\tilde{P}) = \tau(\sqrt{|P|}|P^*|\sqrt{|P|}) = \tau(P^*) \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Если $P \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $P\tilde{P} = \tilde{P} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ в силу леммы 1 и оператор $Z = P - \tilde{P}$ лежит в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Из теоремы 3 при $Q = 0$ получаем $\tau(P) = \tau(\tilde{P})$; поэтому

$\tau(Z) = \tau(P - \tilde{P}) = 0$. Имеем $P = |P^*|\,|P|$ [7, теорема 3.3] и $\tau(P) = \tau(\sqrt{|P|}|P^*|\sqrt{|P|})$ [7, следствие 3.4]. В частности, $\tau(P^*) = \overline{\tau(P)} = \tau(\tilde{P}) = \tau(P) \in \mathbb{R}^+$. □

Следствие 7. *Пусть $U, V \in S(\mathcal{M}, \tau)$ являются симметриями. Если $U - V \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(U - V) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Формула $U = 2P - I$ ($P \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$) устанавливает биекцию между $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ и множеством всех симметрий из $S(\mathcal{M}, \tau)$. □

Следствие 8. *Пусть $\tau(I) < +\infty$ и $P, Q \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$. Если $P + Q \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(P + Q) = \tau(\tilde{P}) + \tau\Big(\Big(\widetilde{Q^{\perp}}\Big)^{\perp}\Big) = \tau(\tilde{P}) + \tau(\tilde{Q}) \in \mathbb{R}^+$.*

Доказательство. Поскольку $P + Q - I = P - Q^{\perp} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, в силу теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned}\tau(P + Q) &= \tau(P + Q - I) + \tau(I) = \tau(P - Q^{\perp}) + \tau(I)\\ &= \tau\Big(\tilde{P} - \widetilde{Q^{\perp}}\Big) + \tau(I) = \tau(\tilde{P}) + \tau\Big(I - \widetilde{Q^{\perp}}\Big)\\ &= \tau(\tilde{P}) + \tau\Big(\Big(\widetilde{Q^{\perp}}\Big)^{\perp}\Big) \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\tilde{P} + \tilde{Q} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и поэтому $Z + T = P + Q - (\tilde{P} + \tilde{Q}) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда операторы

$$T\tilde{P} = (Z + T)\tilde{P}, \;\; Z\tilde{Q} = (Z + T)\tilde{Q}, \;\; Z + \tilde{P}T = \tilde{P}(Z + T), \;\; T + \tilde{Q}Z = \tilde{Q}(Z + T)$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно,

$$\tilde{Q}Z + \tilde{P}T = (Z + \tilde{P}T) + (\tilde{Q}Z + T) - (Z + T) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$$

и $\tilde{P}T - T = (\tilde{Q}Z + \tilde{P}T) - (\tilde{Q}Z + T) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Так как $(\tilde{P} - \tilde{Q})T = \tilde{P}T - T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $T(\tilde{P} - \tilde{Q}) = T\tilde{P} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то выполнено (3) в силу леммы 2 с $A = \tilde{P} - \tilde{Q}$, $B = T$. Значит,

$$\tau(Z + \tilde{P}T) = \tau(\tilde{P}(Z + T)) = \tau((Z + T)\tilde{P}) = \tau(T\tilde{P}) = \tau(\tilde{P}T - T)$$

согласно лемме 2 с $A = \tilde{P}$, $B = Z + T$ и $\tau(Z + \tilde{P}T - (\tilde{P}T - T)) = \tau(Z + T) = 0$. Таким образом, $\tau(P + Q) = \tau(\tilde{P}) + \tau(\tilde{Q})$ и $\tau\Big(\Big(\widetilde{Q^{\perp}}\Big)^{\perp}\Big) = \tau(\tilde{Q})$. □

Пример 9. Пусть $\tau(I) < +\infty$ и идемпотент $P \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ представлен в виде суммы $P = \tilde{P} + Z$, где $\tilde{P} \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $S(\mathcal{M}, \tau)$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\tilde{P} = 0$, $\tilde{P}Z = Z$ [16, теорема 2.23]. Поскольку $\tilde{P} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, имеем

$$P \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Примеры таких идемпотентов см. [7, пример 3.2] или [16, пример 2.4]. Пусть $Z \notin L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $Q = P^{\perp}$. Тогда $P + Q = I \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, но $\{P, Q\} \bigcap L_1(\mathcal{M}, \tau) = \emptyset$ (ср. с п. (ii) леммы 3 из [18]).

Теорема 10. *Пусть $P, Q \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{id}}$ с $P - Q \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $PQ \in \mathcal{M}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. По индукции легко проверяется, что

$$(P-Q)^{2n+1} = P - Q + \lambda_1(PQP - QPQ) + \cdots + \lambda_n(\underbrace{PQP\cdots QP}_{2n+1} - \underbrace{QPQ\cdots PQ}_{2n+1})$$

с некоторыми $\lambda_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, см. шаг 1 доказательства теоремы 1 из [6]. В силу леммы 1 операторы $PQP - QPQ = PQ(P-Q) + (P-Q)PQ$ и $PQ - QPQ = (P-Q)PQ$ лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $\tau([P-Q, PQ]) = 0$, см. лемму 2, имеем

$$\tau(PQP - QPQ) = \tau(PQP - QPQ + [P-Q, PQ]) = \tau(PQ - OPQ). \tag{4}$$

Для операторов $A = PQ$, $B = P - QP$ имеем $AB = 0 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $BA = PQ - OPQ \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $0 = \tau(0) = \tau(AB) = \tau(BA)$ в силу леммы 2. Таким образом, из (4) получаем $\tau(PQP - QPQ) = 0$. Далее воспользуемся математической индукцией. Пусть число $n \geq 2$ и оператор

$$X := \underbrace{PQP\cdots QP}_{2n-1} - \underbrace{QPQ\cdots PQ}_{2n-1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$$

с $\tau(X) = 0$. Тогда операторы

$$\underbrace{PQP\cdots QP}_{2n+1} - \underbrace{PQP\cdots PQ}_{2n} = PQ \cdot X,$$

$$Y := \underbrace{PQP\cdots QP}_{2n+1} - \underbrace{QPQ\cdots PQ}_{2n+1} = PQ \cdot X + X \cdot PQ$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ согласно лемме 1. Для операторов

$$A_1 := PQ, \quad B_1 := \underbrace{PQP\cdots QP}_{2n-1} - \underbrace{QPQ\cdots QP}_{2n}$$

имеем $A_1 B_1 = 0 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и

$$B_1 A_1 = \underbrace{PQP\cdots PQ}_{2n} - \underbrace{QPQ\cdots PQ}_{2n+1} = X \cdot PQ \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Следовательно, $\tau(B_1 A_1) = \tau(A_1 B_1) = \tau(0) = 0$ в силу леммы 2. Таким образом,

$$\tau(Y) = \tau(Y + B_1 A_1) = \tau(\underbrace{PQP\cdots QP}_{2n+1} - \underbrace{PQP\cdots PQ}_{2n}).$$

Поскольку $(PQ)^n \in \mathcal{M}$ и $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, оператор

$$Z := [(PQ)^n, P-Q] = \underbrace{PQP\cdots QP}_{2n+1} - 2\underbrace{PQP\cdots PQ}_{2n} + \underbrace{QPQ\cdots PQ}_{2n+1}$$

лежит в $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Поэтому $\tau(Z)=0$ ввиду леммы 2 с $A_2=(PQ)^n$ и $B_2=P-Q$. Так как $0=\tau(Z)=\tau(Y-B_1A_1)$ и $\tau(B_1A_1)=0$, то $\tau(Y)=0$. Теперь $\tau((P-O)^{2n+1})=\tau(P-O)\in\mathbb{R}$ в силу теоремы 3. □

Следствие 11. *Если $P,Q,R \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ с $P-Q, Q-R \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и операторы $PQ, QR, PR \in \mathcal{M}$, то $\tau\left((P-R)^{2n+1}\right)=\tau\left((P-Q)^{2n+1}\right)+\tau\left((Q-R)^{2n+1}\right)$ для всех $n\in\mathbb{N}$.*

Следствие 12. *Пусть $U,V,W \in S(\mathcal{M},\tau)$ – симметрии с $U-V, V-W \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и операторы $UV+U+V, UW+U+W, VW+V+W \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$\tau\left((U-W)^{2n+1}\right)=\tau\left((U-V)^{2n+1}\right)+\tau\left((V-W)^{2n+1}\right)$$

для всех $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $U=2P-I$, $V=2Q-I$ и $W=2R-I$ с $P,Q,R\in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$. Тогда $U-W=2(P-R)$ и согласно следствию 11 для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}\tau((U-W)^{2n+1}) &= 2^{2n+1}\tau\left((P-R)^{2n+1}\right)\\ &= 2^{2n+1}\left(\tau\left((P-Q)^{2n+1}\right)+\tau\left((Q-R)^{2n+1}\right)\right)\\ &= \tau\left((U-V)^{2n+1}\right)+\tau\left((V-W)^{2n+1}\right).\end{aligned}$$

□

Теорема 13. *Пусть оператор $P\in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$. Тогда*

(i) *$|P|=|P|P=P^*|P|$;*

(ii) *если $P^*=\tilde{P}+Z$ – описанное выше разложение, то $|P|\geq\tilde{P}$ и $|P|\geq|Z^*|$.*

Доказательство. (i) Пусть $P=U|P|$ – полярное разложение оператора P. Тогда $P^*=U^*|P^*|$ – полярное разложение оператора P^* и $U^*U|P|=|P|$. Поскольку $P=|P^*|\,|P|$ [7, теорема 3.3], умножив слева на оператор U^* обе части равенства $U|P|=|P^*|\,|P|$, имеем $|P|=P^*|P|$. Переходя к сопряженным операторам, получаем $|P|=(P^*|P|)^*=|P|P$.

(ii) Имеем $0=Z\tilde{P}=(Z\tilde{P})^*=\tilde{P}Z^*$ и $|P|=\sqrt{(\tilde{P}+Z)(\tilde{P}+Z)^*}=\sqrt{\tilde{P}+ZZ^*}$. Поскольку $\tilde{P}, ZZ^*\in S(\mathcal{M},\tau)^+$, в силу операторной монотонности функции $f(t)=\sqrt{t}$ $(t\geq 0)$ [19, гл. 1, предложение 4.4] получаем

$$\sqrt{\tilde{P}+ZZ^*}\geq\sqrt{\tilde{P}}=\tilde{P} \quad \text{и} \quad \sqrt{\tilde{P}+ZZ^*}\geq\sqrt{ZZ^*}=|Z^*|.$$

□

Следствие 14. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ – F-нормированное идеальное пространство на $(\mathcal{M},\tau)$ и $P=P^2\in\mathcal{E}$, $P=\tilde{P}+Z$ – описанное выше разложение. Тогда $\tilde{P}, Z\in\mathcal{E}$ и*

$$\|\tilde{P}\|_{\mathcal{E}}+\|Z\|_{\mathcal{E}}\ge\|P\|_{\mathcal{E}}=\|P^*\|_{\mathcal{E}}\ge\max\{\|\tilde{P}\|_{\mathcal{E}},\ \|Z\|_{\mathcal{E}}\}.$$

Доказательство. Пусть $P^*=\tilde{P}+Z$ – описанное выше разложение. В силу п. (ii) теоремы 13 имеем $\tilde{P}, Z\in\mathcal{E}$. В силу свойств F-нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ получаем $\|P^*\|_{\mathcal{E}}=\|P\|_{\mathcal{E}}=\||P|\|_{\mathcal{E}}\ge\|\tilde{P}\|_{\mathcal{E}}$ и $\|P^*\|_{\mathcal{E}}=\|P\|_{\mathcal{E}}=\||P|\|_{\mathcal{E}}\ge\||Z^*|\|_{\mathcal{E}}=\|Z^*\|_{\mathcal{E}}=\|Z\|_{\mathcal{E}}$. Остальное очевидно. □

Теорема 15. *Пусть оператор $A\in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $A^2+A^{2*}\ge tA^*A-(t-2)AA^*$ для некоторого $t\in\mathbb{R}$. Тогда $A=A^*$.*

Доказательство. Имеем $\tau(A^*A-AA^*)=\|A\|_2^2-\|A^*\|_2^2=0$ и

$$\begin{aligned}0\le\|A-A^*\|_2^2&=\tau((A^*-A)(A-A^*))=\tau\left(A^*A-A^{*2}-A^2+AA^*\right)\\&\le(1-t)\tau(A^*A-AA^*)=0.\end{aligned}$$

Поэтому $A=A^*$ в силу точности нормы $\|\cdot\|_2$. □

Следствие 16. *Если оператор $A=A^2\in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $\mathrm{Re}(A)\ge sA^*A-(s-1)AA^*$ для некоторого $s\in\mathbb{R}$, то $A\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Теорема 17. *Пусть оператор $A\in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и $U\in\mathcal{M}$ является изометрией. Тогда $\|UA-A\|_2^2\le 2\|(I-U)AA^*\|_1$. В частности, если $A=A^*$, то $\|UA-A\|_2^2\le 2\|UA^2-A^2\|_1$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\|UA-A\|_2^2&=\tau((UA-A)^*(UA-A))=\tau(A^*A-A^*U^*A-A^*UA+A^*A)\\&=\tau(A^*(I-U^*)A+A^*(I-U)A)=2\tau(\mathrm{Re}(A^*(I-U)A))\\&=2\tau(A^*(I-\mathrm{Re}(U))A)\\&\le 2|\tau(A^*(I-\mathrm{Re}(U))A)-i\tau(A^*(\mathrm{Im}(U))A)|\\&=2|\tau(A^*(I-U)A)|=2|\tau((I-U)AA^*)|\\&\le 2\tau(|(I-U)AA^*|)=2\|(I-U)AA^*\|_1\end{aligned}$$

согласно лемме 2 с операторами A^* и $(I-U)A$ и неравенству $|\tau(X)|\le\tau(|X|)$ для всех $X\in L_1(\mathcal{M},\tau)$, см. [20, с. 1463]. □

Для алгебры $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженной следом $\tau=\mathrm{tr}$, оператора $A\ge 0$ и унитарного U теорема 17 была установлена в [21, лемма 1].

Список литературы

[1] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal. **120** (1), 220–237 (1994).

DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1031

[2] N.J. Kalton, *A note on pairs of projections*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **3** (2), 309–311 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18796-9_8

[3] А.М. Бикчентаев, *Разности идемпотентов в C^*-алгебрах*, Сиб. матем. журн. **58** (2), 243–250 (2017).
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.201

[4] J. Bellissard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics*, J. Math. Phys. **35** (10), 5373–5451 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.530758

[5] F. Gesztesy (coordinating Editor), *From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden*, II, Notices Amer. Math. Soc. **63** (8), 878–889 (2016).
DOI: http://doi.org/10.1090/noti1412

[6] А.М. Бикчентаев, *Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла*, ТМФ **195** (1), 75–80 (2018).
DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9351

[7] А.М. Бикчентаев, *К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **98** (3), 337–348 (2015).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10638

[8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia Math. Sci. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6188-9

[9] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia Math. Sci. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4

[10] A.M. Bikchentaev, *The algebra of thin measurable operators is directly finite*, Constr. Math. Anal. **6** (1), 1–5 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33205/cma.1181495

[11] А.М. Бикчентаев, *Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Сиб. матем. журн. **59** (2), 309–320 (2018).
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.206

[12] А.М. Бикчентаев, *Об одном свойстве L_p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана*, Матем. заметки, **64** (2), 185–190 (1998).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1384

[13] А.М. Бикчентаев, *Перенормировки идеальных пространств измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Уфимск. матем. журн. **11** (3), 3–9 (2019).

URL: https://www.mathnet.ru/rus/ufa476

[14] С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[15] L.G. Brown, H. Kosaki, *Jensen's inequality in semifinite von Neumann algebra*, J. Operator Theory **23** (1), 3–19 (1990).
URL: https://www.theta.ro/jot/archive/1990-023-001/1990-023-001-001.html

[16] А.М. Бикчентаев, *Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **100** (4), 492–503 (2016).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11033

[17] A.M. Bikchentaev, R.S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

[18] А.М. Бикчентаев, Х. Фауаз, *Разности и коммутаторы идемпотентов в C^*-алгебрах*, Изв. вузов. Матем. (8), 16–26 (2021).
DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-8-16-26

[19] А.Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.

[20] G. Pisier, Q. Xu, *Non-commutative L_p-spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces V. 2., P. 1459–1517. North-Holland, Amsterdam, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1016/S1874-5849(03)80041-4

[21] M. Choda, *Characterization of approximately inner automorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (2), 231–234 (1982).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0637174-2

Айрат Мидхатович Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Махмуд Хадур
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: mahmoud.khadour.991@gmail.com

Volume 1, Issue 4
pp. 35–48 (2023)

UDC 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

Differences of idempotents in C^*-algebras and the quantum Hall effect. II. Unbounded idempotents

A.M. Bikchentaev, Mahmoud Khadour

Abstract. Let a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ of operators act on a Hilbert space $\mathcal{H}$, I be the unit of $\mathcal{M}$, τ be a faithful semifinite normal trace on $\mathcal{M}$. Let $S(\mathcal{M},\tau)$ be the *-algebra of all τ-measurable operators and $L_1(\mathcal{M},\tau)$ be the Banach space of all τ-integrable operators, $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)$ be idempotents. If $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ then $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. In particular, if $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, then $\tau(A) \in \mathbb{R}$. If $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ and $PQ \in \mathcal{M}$, then for all $n \in \mathbb{N}$ we have $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ and $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. If $A \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ and $U \in \mathcal{M}$ is an isometry, then $\|UA-A\|_2^2 \le 2\|(I-U)AA^*\|_1$.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, idempotent, tripotent, quantum Hall effect.

DOI: 10.26907/2949-3919.2023.4.35-48

References

[1] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal. **120** (1), 220–237 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1031

[2] N.J. Kalton, *A note on pairs of projections*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **3** (2), 309–311 (1997).
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18796-9_8

[3] A.M. Bikchentaev, *Differences of idempotents in C^*-algebras*, Siberian Math. J. **58** (2), 183–189 (2017).
DOI: https://link.springer.com/article/10.1134/S003744661702001X

[4] J. Bellissard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics*, J. Math. Phys. **35** (10), 5373–5451 (1994).
DOI: https://doi.org/10.1063/1.530758

[5] F. Gesztesy (coordinating Editor), *From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden*, II, Notices Amer. Math. Soc. **63** (8), 878–889 (2016).
DOI: http://doi.org/10.1090/noti1412

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 11 May 2023. Accepted: 28 November 2023. Published: 26 December 2023.

[6] A.M. Bikchentaev, *Differences of idempotents in C^*-algebras and the quantum Hall effect*, Theoret. and Math. Phys. **195** (1), 557–562 (2018).
DOI: https://link.springer.com/article/10.1134/S0040577918040074

[7] A.M. Bikchentaev, *Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Math. Notes **98** (3), 382–391 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434615090035

[8] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia Math. Sci. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6188-9

[9] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia Math. Sci. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4

[10] A.M. Bikchentaev, *The algebra of thin measurable operators is directly finite*, Constr. Math. Anal. **6** (1), 1–5 (2023).
DOI: https://doi.org/10.33205/cma.1181495

[11] A.M. Bikchentaev, *Ideal spaces of measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Siberian Math. J. **59** (2), 243–251 (2018).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446618020064

[12] A.M. Bikchentaev, *On a property of L_p spaces on semifinite von Neumann algebras*, Math. Notes **64** (2), 159–163 (1998).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF02310299

[13] A.M. Bikchentaev, *Renormalizations of measurable operator ideal spaces affiliated to semifinite von Neumann algebra*, Ufa Math. J. **11** (3), 3–10 (2019).
DOI: https://doi.org/10.13108/2019-11-3-3

[14] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs **54**, AMS, Providence R.I., 1982.

[15] L.G. Brown, H. Kosaki, *Jensen's inequality in semifinite von Neumann algebra*, J. Operator Theory **23** (1), 3–19 (1990).
URL: https://www.theta.ro/jot/archive/1990-023-001/1990-023-001-001.html

[16] A.M. Bikchentaev, *On idempotent τ-measurable operators affiliated to a von Neumann algebra*, Math. Notes **100** (3-4), 515–525 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434616090224

[17] A.M. Bikchentaev, R.S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

[18] A.M. Bikchentaev, Kh. Fawwaz, *Differences and commutators of idempotents in C^*-algebras*, Russian Math. (Iz. VUZ) **65** (8), 13–22 (2021).

DOI: https://link.springer.com/article/10.3103/S1066369X21080028

[19] A.N. Sherstnev, *Methods of bilinear forms in non-commutative measure and integral theory*, Fizmatlit, Moskva, 2008 [in Russian].

[20] G. Pisier, Q. Xu, *Non-commutative L_p-spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces V. 2., P. 1459–1517. North-Holland, Amsterdam, 2003.
DOI: https://doi.org/10.1016/S1874-5849(03)80041-4

[21] M. Choda, *Characterization of approximately inner automorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (2), 231–234 (1982).
DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0637174-2

Airat Midkhatovich Bikchentaev
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Mahmoud Khadour
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: mahmoud.khadour.991@gmail.com