Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Казань – 2008

Казанский государственный университет
Кафедра общей математики

Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Казань – 2008

УДК 514.12
С 28

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
Протокол № 9 от 3 апреля 2008 г.

Секаева Л.Р., Тюленева О.Н.
С 28 Аналитическая геометрия на плоскости. – Казань: Казанский государственный университет, 2008. – 56 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов естественнонаучных факультетов КГУ.

УДК 514.12

Содержание

§ 1. Направленные отрезки и их величины. Числовая прямая

1. Ось и отрезки. Прямая с выбранным на ней положительным направлением называется *осью* (рис. 1). Рассмотрим на оси две произвольные точки: A и B.

Рис. 1

Отрезок с граничными точками A и B называется направленным, если указано, какая из точек A и B считается началом, а какая – концом отрезка.

Направленный отрезок обозначается $\overrightarrow{AB}$, где A обозначает начало, а B – конец отрезка.

Величиной AB направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется вещественное число, равное $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, если направления отрезка и оси совпадают, и равное $-\left|\overrightarrow{AB}\right|$, если эти направления противоположны.

Если точки A и B направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ совпадают, то величина $\overrightarrow{AB}$ равна нулю, а направление не определено.

Основное тождество. *Для любых трех точек A, B и C на оси величина отрезка $\overrightarrow{AC}$ равна сумме величин отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, т. е. $AB+BC=AC$.*

2. Числовая прямая. *Координатной прямой* называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление (она становится осью).

Пусть M – произвольная точка координатной прямой (рис. 2). Координатой точки M называется вещественное число x, равное величине OM направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$: $x=OM$. Число x называется *координатой точки M*. Символ $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

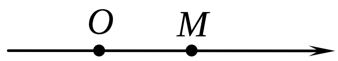


Рис. 2

Итак, вещественные числа изображаются точками координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*, а любое число – *точкой этой прямой*.

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ – две произвольные точки числовой прямой, то формула

$$M_1M_2=x_2-x_1$$

выражает величину отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, формула

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|$$

выражает его длину.

1. Построить на числовой прямой точки $A(-5)$, $B(4)$ и $C(-2)$ и найти величины AB, BC и AC отрезков $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$. Проверить, что $AB+BC=AC$.

2. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(-a)$?

3. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(2a)$?

4. Найти величину AB и длину $|AB|$ отрезка $\overrightarrow{AB}$, заданного точками: 1) $A(3)$ и $B(11)$; 2) $A(5)$ и $B(2)$; 3) $A(-1)$ и $B(3)$; 4) $A(-5)$ и $B(-3)$; 5) $A(-1)$ и $B(-3)$.

5. Вычислить координату точки A, если известны: 1) $B(3)$ и $AB=5$; 2) $B(2)$ и $AB=-3$; 3) $B(-1)$ и $BA=2$; 4) $B(-5)$ и $BA=-3$; 5) $B(0)$ и $|AB|=2$; 6) $B(2)$ и $|AB|=3$; 7) $B(-1)$ и $|AB|=5$; 8) $B(-5)$ и $|AB|=2$.

6. Построить на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: 1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|2x-3|=2x-3$; 4) $|1-x|=2$; 5) $|2+x|=2$.

Указания. 1) Уравнение $|x|=2$ равносильно двум уравнениям: $x=2$ и $x=-2$; 3) Так как $|2x-3|=2x-3$ при $2x-3\geq 0$, то $x\geq 3/2$. В остальных случаях решения аналогичны.

7. Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

1) $x>2$; 2) $x-3\leq 0$; 3) $2x-3\leq 0$;
4) $1<x\leq 3$; 5) $x^2-9<0$; 6) $x^2-5x+6<0$;
7) $12-x<0$; 8) $3x-5>0$; 9) $-2\leq x\leq 3$;
10) $x^2-8x+15\leq 0$; 11) $x^2-8x+15>0$; 12) $x^2-25<0$;
13) $16-x^2\leq 0$. К каждому случаю сделать рисунок.

Указания. 5) Неравенство равносильно неравенству $x^2<9$. Так как $\sqrt{x^2}=|x|$, $|x|<3$ или $-3<x<3$; 6) Представив корни трехчлена в виде $(x-2)(x-3)<0$, получим две системы: либо $\begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x-2>0, \\ x-3<0 \end{cases}$. Первая система не имеет решения, решения второй: $2<x<3$. В остальных случаях решения аналогичны.

8. Охарактеризовать расположение на числовой прямой множеств точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leq 2$; 4) $|x-2|<3$;
5) $|x-1|\geq 2$; 6) $|x^2-5x+6|>x^2-5x+6$; 7) $|x|<x+1$.

§ 2. Прямоугольная (декартова) система координат

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба (рис. 3), образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.

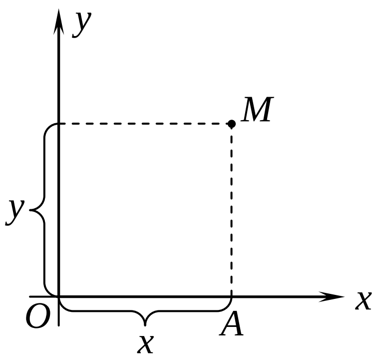


Рис. 3

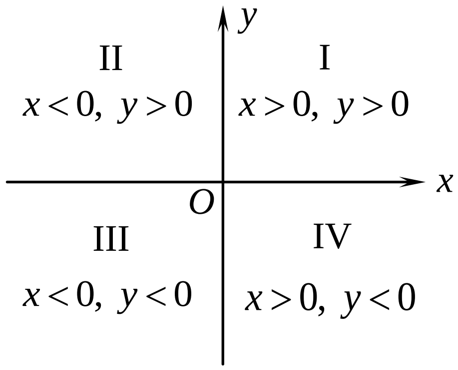


Рис. 4

Ось Ox называется осью *абсцисс*, ось Oy – *осью ординат*, точка O – *началом координат*. Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* и обозначается Oxy.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Прямоугольными координатами x и y точки M называются величины OA и OB направленных отрезков $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$: $x = OA,\ y = OB$.

Координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Символ $M(x;y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y. Начало координат имеет координаты $(0;0)$.

Таким образом, каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $(x;y)$ – ее прямоугольные координаты.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями, квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV так, как показано на рис. 4, на том же рисунке указаны также знаки координат точек в зависимости от их расположения в той или иной четверти.

9. Постройте точки $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(-1;7)$, $D(-2;-3)$, $E(0;2)$, $F(4;0)$.

10. Не строя точку $A(1;-3)$, выяснить, в какой четверти она расположена.

11. В каких четвертях может находиться точка, если ее абсцисса положительна?

12. На оси Ox взята точка с координатой (-5). Каковы ее координаты на плоскости?

13. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Ox точкам: 1) $A(2;3)$; 2) $B(-3;2)$; 3) $C(-1;-1)$; 4) $D(a;b)$.

14. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Oy точкам: 1) $A(-1;2)$; 2) $B(3;-1)$; 3) $C(-2;-2)$; 4) $D(a;b)$.

15. Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам: 1) $A(3;3)$; 2) $B(2;-4)$; 3) $C(-2;1)$; 4) $D(a;b)$.

16. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла точкам: 1) $A(2;3)$; 2) $B(5;-2)$; 3) $C(-3;4)$.

17. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы второго координатного угла точкам: 1) $A(3;5)$; 2) $B(-4;3)$; 3) $C(7;-2)$.

18. Дана точка $M(3;-1)$. Написать координаты точек, симметричных относительно оси Ox, оси Oy, начала координат и биссектрисы координатного угла.

19. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x,y)$, если: 1) $xy>0$; 2) $xy<0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$; 5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние d между двумя точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ на плоскости:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

2. Площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$:

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]\right|$$

или

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Признаком того, что три точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ лежат на одной прямой, может служить равенство нулю площади соответствующего треугольника, т. е.

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$,…, $F(x_n;y_n)$ равна

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right].$$

4. Деление отрезка в данном отношении. Даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Координаты точки $M(x;y)$, делящей отрезок AB в отношении $\frac{AM}{MB}=\lambda$, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda=1:1=1$,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

20. а) Какая точка дальше от оси Ox: $A(2;-5)$ или $B(3;4)$? б) Какая из этих точек дальше от оси Oy? в) Чему равны расстояния от точки $A(a;b)$ до осей Ox и Oy соответственно?

21. Даны точки $A(0;0)$, $B(3;-4)$, $C(-3;4)$, $D(-2;2)$, $E(10;-3)$. Определить расстояние между точками: 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

22. Даны вершины треугольника: $A(3;2)$, $B(-1;-1)$ и $C(11;-6)$. Определить длину его сторон.

23. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(3;1)$ и $C(1;7)$ прямоугольный.

24. На оси Ox найти точку, равноудаленную от начала координат и от точки $A(9;-3)$.

25. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(4;-6)$ на расстоянии 5 единиц.

26. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек: $A(2;2)$, $B(-5;1)$ и $C(3;-5)$.

27. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2;-3)$, $B(3;2)$ и $C(-2;5)$;
2) $M_1(-3;2)$, $M_2(5;-2)$ и $M_3(1;3)$;
3) $M(3;-4)$, $N(-2;3)$ и $P(4;5)$.

28. Отрезок между точками $A(3;2)$ и $B(15;6)$ разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.

Указание. Делим отрезок AB в четырех разных отношениях: $\lambda_1 = 1/4$, $\lambda_2 = 2/3$, $\lambda_3 = 3/2$, $\lambda_4 = 4/1$.

29. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;3)$ и $C(-2;1)$.

30. В треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(8;0)$ и $B(0;6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

31. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ и $D(5;-2)$.

32. Вычислить периметр и площадь треугольника по координатам его вершин: $(-2;1)$, $(2;-2)$ и $(8;6)$.

33. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки: $A(-2;0)$, $B(0;-1)$, $C(2;0)$, $D(3;2)$ и $E(-1;3)$.

34. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки:
1) $(0;5)$, $(2;1)$, $(-1;7)$; 2) $(3;1)$, $(-2;-9)$, $(8;11)$; 3) $(0;2)$, $(-1;5)$, $(3;4)$.

35. Вершины треугольника – точки $A(3;6)$, $B(-1;3)$ и $C(2;-1)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

36. Построить точки $A(-2;1)$, $B(3;6)$ и найти точку $M(x;y)$, делящую AB в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{3}{2}$.

37. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(1;-1)$, $B(6;4)$ и $C(2;6)$.

Указание. Центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан.

38. Отрезок, ограниченный точками $A(1;-3)$ и $B(4;3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

39. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

40. Прямая проходит через точки $A(7;-3)$ и $B(23;-6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

41. Три вершины параллелограмма – точки $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

42. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин: $A(3;-2)$, $B(5;2)$ и $C(-1;4)$.

43. Дан треугольник $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла A с противолежащей стороной BC.

Указание. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

44. Определить точку, в которой прямая, соединяющая точки $A(4;1)$ и $B(-2;4)$, пересекает ось абсцисс.

Указание. Искомая точка лежит на оси абсцисс; следовательно, она имеет ординату, равную нулю. Зная ординату искомой точки и ординаты двух точек A и B, лежащих с нею на одной прямой, определяем отношение, в котором эта точка делит отрезок AB, а, зная это отношение, вычисляем неизвестную абсциссу искомой точки.

45. На прямой, соединяющей точки $(-3;5)$ и $(-1;2)$, найти точку, имеющую абсциссу $x=5$.

Указание: смотри задачу **44**.

46. Найти точку пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника: $A(3;-2)$, $B(3;5)$, $C(0;4)$, $D(-1;-1)$.

Указание. Обозначим через λ отношение, в котором искомая точка $M(x;y)$ делит диагональ AC. Это отношение может быть выражено или через абсциссы трех точек A, C и M, или через их ординаты. Приравнивая между собой эти два выражения для одного и того же отношения λ, мы получим уравнение, связывающее координаты x и y искомой точки. Второе уравнение между этими неизвестными получим, приравняв два выражения для отношения λ_1, в котором та же точка M делит диагональ BD.

47. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$ и $C(1;-4)$ определить длину биссектрисы AE.

48. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_3)$.

49. Найти центр масс четырехугольной однородной доски с вершинами $A(-2;1)$, $B(3;6)$, $C(5;2)$ и $D(0;6)$.

Указание. По формулам, полученным в задаче **48**, найти центры масс треугольников ABC и ADC и разделить расстояние между ними в отношении, обратном отношению площадей треугольников.

§ 4. Полярные координаты

Полярная система координат определятся заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из нее луча OE, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние точки M от точки O, а через φ – угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом OM (рис. 5).

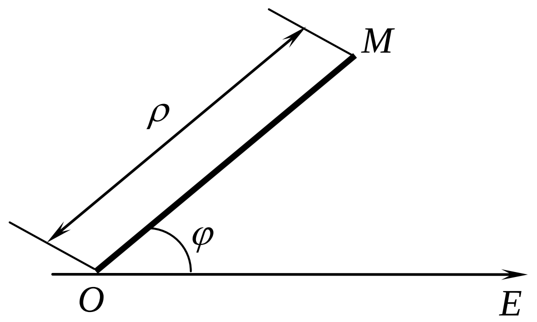


Рис. 5

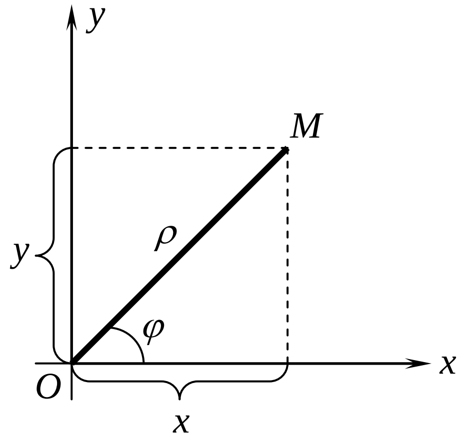


Рис. 6

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ. Число ρ называют *полярным радиусом*, а φ – *полярным углом*. Символ $M(\rho;\varphi)$ обозначает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ.

Обычно считают, что ρ и φ изменяются в пределах: $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев рассматриваются углы, большие 2π, а также отрицательные, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Пусть начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью и пусть точка M имеет прямоугольные координаты x и y и полярные координаты ρ и φ (рис. 6). Тогда переход от полярных координат точки M к прямоугольным осуществляется по формулам:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

а выражение полярных координат через прямоугольные следует из этих формул:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

50. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(2;\pi/2)$, $B(3;\pi/4)$, $C(3;3\pi/4)$, $D(4;0)$, $F(2;3\pi/2)$ и $P(3;\pi)$.

51. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A(3;\pi/3)$, $B(4;-\pi/4)$.

52. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $A(1;\pi/4)$, $B(5;-\pi/3)$.

53. Даны точки в полярной системе координат $A(2;\pi/4)$, $B(4;\pi/2)$. Найти их прямоугольные координаты.

Указание. Использовать формулы $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

54. Даны точки в прямоугольной системе координат $M_1(0;5)$, $M_2(-3;0)$, $M_3(\sqrt{3};1)$. Найти их полярные координаты.

55. Даны точки в полярной системе координат $A(8;-2\pi/3)$ и $B(6;\pi/3)$. Найти полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.

56. Даны точки в полярной системе координат $A(3;\pi/6)$ и $B(5;2\pi/3)$. Найти расстояние d между ними.

57. Даны точки в полярной системе координат $A(\rho_1;\varphi_1)$ и $B(\rho_2;\varphi_2)$. Найти расстояние d между ними.

58. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, две другие – точки $A(5;\pi/4)$ и $B(4;\pi/12)$. Найти площадь этого треугольника.

59. Найти площадь треугольника, вершины которого – точки $A(3;\pi/8)$, $B(8;7\pi/24)$ и $C(6;5\pi/8)$.

60. Дана точка в полярной системе координат $(10;\pi/6)$. Найти ее прямоугольные координаты, если известно, что полюс полярной системы находится в точке $(2;3)$, а полярная ось параллельна оси абсцисс.

§ 5. Уравнение линии как множество точек плоскости

Равенство вида

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

называется *уравнением с двумя переменными* x, y, если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y. Примеры уравнений: $2x+3y=0$, $x^2+y^2-25=0$, $\sin x+\sin y-1=0$.

Если (1) справедливо для всех пар чисел x и y, то оно называется *тождеством*.

Примеры тождеств: $(x+y)^2-x^2-2xy-y^2=0$, $(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$.

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие *уравнения линии*. Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и некоторая линия L (рис. 7).

Уравнение (1) называется уравнением линии L *(в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты* x *и* y *любой точки, лежащей на линии* L, *и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.*

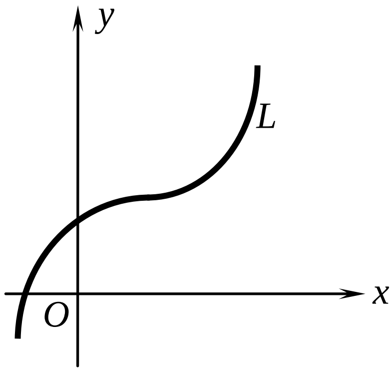


Рис. 7

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех точек плоскости $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Если (1) является уравнением линии L, то говорят, что уравнение (1) определяет (задает) линию L.

Линия L может определяться и уравнением вида:

$$F(\rho;\varphi) = 0,$$

где $(\rho;\varphi)$ – полярные координаты точки.

61. Даны точки $M_1(2;-2)$, $M_2(2;2)$, $M_3(2;-1)$, $M_4(3;-3)$, $M_5(5;-5)$, $M_6(3;-2)$. Установить, какие из данных точек лежат на линии, определенной уравнением $x+y=0$, и какие не лежат на ней.

62. Установить, какие линии определяются уравнениями (построить их):

1) $x-y=0$; 2) $x^2-y^2=0$; 3) $x^2+y^2=0$; 4) $x^2+y^2+1=0$;

5) а) $y=|x|$; б) $x=|y|$; в) $|y|=|x|$; г) $x+|x|=y+|y|$;

6) а) $|x|+|y|=1$; б) $|x|-|y|=1$.

63. Даны точки $M_1(1;\pi/3)$, $M_2(2;0)$, $M_3(2;\pi/4)$, $M_4(\sqrt{3};\pi/6)$ и $M_5(1;2\pi/3)$. Установить, какие из данных точек лежат на линии, определенной уравнением в полярных координатах $\rho = 2\cos\varphi$, и какие не лежат на ней.

64. Вывести уравнение множества точек, каждая из которых отстоит от точки $C(\alpha;\beta)$ на расстоянии R. Иными словами, вывести уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(\alpha;\beta)$.

65. Показать, что уравнение $x^2+2x+y^2=0$ задает на плоскости некоторую окружность.

66. На плоскости даны точки A и B. Найти множество точек M, удаленных от A вдвое дальше, чем от B.

67. Установить: а) лежит ли точка $N(4{,}1;1{,}9)$ на окружности с центром $C(1;-2)$ и радиусом 5; б) лежит ли точка $K(0;2\sqrt{6}-2)$ на этой же окружности; в) лежит ли точка $A(160;-1)$ на окружности с центром $(147;-6)$ и радиусом 13.

68. Написать уравнение окружности с центром $C(-2;3)$ и радиусом, равным 5. Известно, что точка $A(a;-1)$ лежит на этой окружности. Найти a.

69. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, равноудаленная от точек $A(0;2)$ и $B(4;-2)$.

70. Написать уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;1)$, чем к точке $B(-4;4)$.

71. Написать уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1(2;0)$ и $F_2(-2;0)$ равна $2\sqrt{5}$.

72. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от точки $F(2;2)$ и от оси Ox.

73. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

74. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4;0)$.

75. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;2)$.

76. Написать уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0;-1)$, чем к точке $B(0;4)$.

§ 6. Линии первого порядка

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox $(k = \mathrm{tg}\,\alpha)$ и называется *угловым коэффициентом*, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 8).

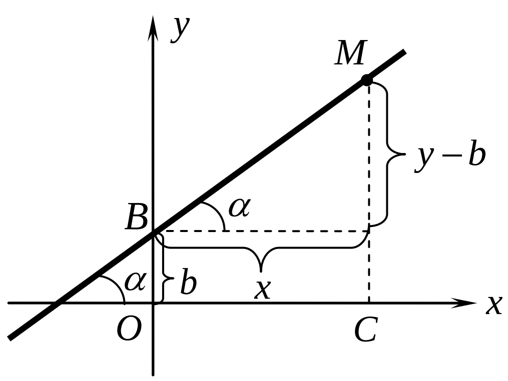


Рис. 8

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1;y_1)$ с данным угловым коэффициентом:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{2}$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{3}$$

4. Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0, \tag{4}$$

где A, B, C – произвольные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

Если в уравнении (4) какой-то из коэффициентов равен нулю, то:

1) при $C=0$ $y=-\frac{A}{B}x$ – прямая проходит через начало координат;

2) при $B=0$ $(A\neq 0)$ $x=-\frac{C}{A}=a$ – прямая параллельна оси Oy;

3) при $A=0$ $(B\neq 0)$ $y=-\frac{C}{B}=b$ – прямая параллельна оси Ox;

4) при $B=C=0$ $Ax=0$, $x=0$ – ось Oy;

5) при $A=C=0$ $By=0$, $y=0$ – ось Ox.

Если ни один из коэффициентов уравнения (4) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{5}$$

где $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$ – величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Уравнение (5) называется уравнением прямой «в отрезках».

77. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$ и образующей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 135°. Построить эти прямые.

78. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 135°.

79. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $(-2;3)$, и построить ее.

80. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

1) $2x-3y=6$; 2) $2x+3y=0$; 3) $y=-3$; 4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

81. Построить прямые:
1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$.

82. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и составляющей с осью Ox угол 45°. Составить уравнение этой прямой.

83. Уравнения прямых: 1) $2x-3y=6$; 2) $3x-2y+4=0$ привести к виду «в отрезках» на осях.

84. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв. ед.

85. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 6 кв. ед.

86. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;3)$ и $B(4;-2)$.

87. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 0°, – и построить ее.

88. Написать уравнения прямых заданными параметрами:
1) $b=-2,\ \alpha=60^\circ$; 2) $b=-2,\ \alpha=120^\circ$, – и построить их.

89. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с осями координат и построить эту прямую.

90. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

91. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

92. Написать уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(4;5)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox, другая параллельна оси Oy.

93. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный: 1) 4; 2) -5 и 3) 0.

94. Написать уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный: 1) 6; 2) -2; 3) 0.

5. Угол между двумя прямыми. Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой L_1: $y=k_1x+b_1$ до прямой L_2: $y=k_2x+b_2$ (рис. 9), определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (6)$$

Второй угол равен $\pi-\varphi$.

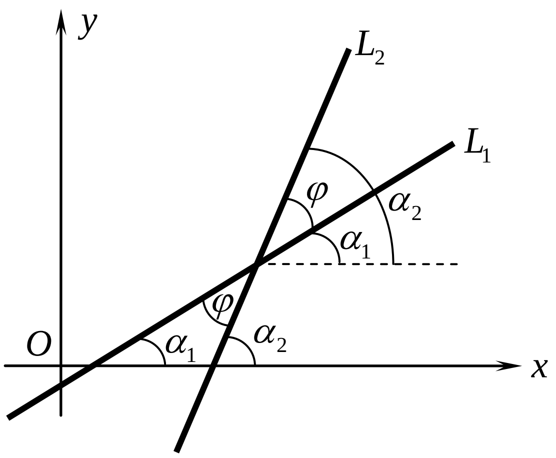


Рис. 9

Для прямых, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, формула (6) примет вид

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Условие параллельности двух прямых: $k_1=k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ или $A_1A_2+B_1B_2=0$.

95. Определить угол между прямыми:

1) $y=2x-3$ и $y=\dfrac{1}{2}x+1$; 2) $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$;

3) $2x+y=0$ и $y=3x-4$; 4) $3x-4y=6$ и $8x+6y=11$.

96. Среди прямых $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ указать параллельные и перпендикулярные.

97. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;6)$ и $C(4;2)$ проведены высота BD и медиана BE. Написать уравнение стороны AC, медианы BE и высоты BD.

98. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y=4-2x$.

99. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

100. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6;2)$ на прямую $x-4y-7=0$.

101. Написать уравнение прямой, если точка $A(2;3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

102. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;-4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x+2y-3=0$.

103. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3)$ и параллельной другой прямой $x+2y+3=0$.

104. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$ и $3x-y-2=0$ перпендикулярно прямой $y=x+1$.

105. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

106. Даны вершины треугольника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$ и $C(4;7)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

107. Даны вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(-3;3)$ и $C(-1;-2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

108. Даны вершины треугольника $A(-1;-1)$, $B(3;5)$ и $C(-4;1)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.

109. Даны вершины треугольника $A(3;-5)$, $B(1;-3)$ и $C(2;-2)$. Определить длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B.

6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Пусть на плоскости Oxy дана некоторая прямая L. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную данной, и назовем ее *нормалью* к прямой L. Обозначим через N точку пересечения нормали с прямой L. На нормали введем направление от точки O к точке N. Обозначим через α угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до совмещения ее с нормалью, через p – длину отрезка ON (рис. 10). Тогда уравнение данной прямой может быть записано в виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{7}$$

которое называется *нормальным уравнением* прямой L.

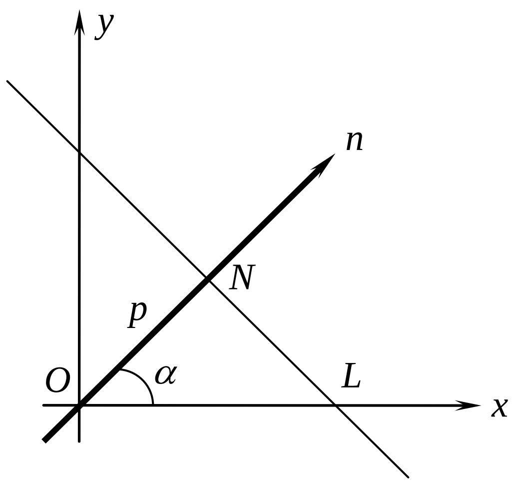


Рис. 10

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{8}$$

взятый со знаком, противоположным знаку C. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя можно брать произвольно.

Пусть L – прямая, заданная нормальным уравнением (7), и пусть $M_0(x_0;y_0)$ – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда расстояние d от точки M_0 до прямой L может быть вычислено по формуле:

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right| \tag{9}$$

или

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{9'}$$

7. Уравнения биссектрис углов между прямыми $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

110. Привести к нормальному виду общие уравнения прямых:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$; 4) $x+2=0$.

111. Найти расстояния точек $A(4;3)$, $B(2;1)$, $C(1;0)$ и $O(0;0)$ от прямой $3x+4y-10=0$. Построить точки и прямую.

112. Показать, что прямые $2x-3y-6=0$ и $4x-6y-25=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Указание. На одной из прямых взять произвольную точку и найти расстояние от нее до другой прямой.

113. Найти k из условия, что прямая $y=kx+5$ удалена от начала координат на расстояние $d=\sqrt{5}$.

114. Написать уравнение множества точек, удаленных от прямой $4x-3y=0$ на 4 единицы.

115. Написать уравнение прямой, удаленной от точки $A(4;-2)$ на 4 единицы и параллельной прямой $8x-15y=0$.

116. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3;0)$, $B(2;5)$ и $C(3;2)$.

117. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d=2$.

118. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек $A(2;2)$ и $B(4;0)$. Найти это расстояние.

§ 7. Смешанные задачи на прямую

119. Составьте уравнения, которые описывают следующие множества точек: 1) прямую, параллельную оси Ox, проходящую через точку $(1;0)$; 2) прямую, параллельную прямой $y=x$ и проходящую через точку $(-3;7)$; 3) множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси Oy.

120. Придумать соотношения между x и y, которые задают на координатной плоскости: 1) пару прямых $y=3x$ и $y=x-3$; 2) прямую $y=x$ и точку $(-1;2)$; 3) всю часть плоскости выше прямой $y=x$ (включая эту прямую); 4) часть плоскости между прямыми $y=0$ и $y=1$ (без этих прямых); 5) внутренность квадрата с вершинами в точках $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$, $(1;0)$.

121. На плоскости даны три точки: $A(3;-6)$, $B(-200;400)$, $C(1000;-2000)$. Доказать, что они лежат на одной прямой.

122. Найти, какие три из точек $A(1;3)$, $B(-2;1)$, $C(-1;7)$, $D(3;1)$ лежат на одной прямой.

123. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе I координатного угла и проходящей через точку $(0;-5)$.

124. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x+1$ и проходящей через точку $(0;2)$.

125. Даны прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты AD треугольника AOB, найти ее длину и площадь треугольника AOB.

126. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;1)$ так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

127. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

128. Найти множество точек M, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна данной величине a. При каких значениях a задача имеет решение?

Указание. Ввести прямоугольную систему координат с центром в середине отрезка AB и осью абсцисс, направленной от точки A к точке B.

129. Найти уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$, проходящей через точку $(1;2)$.

130. Найти уравнения общих касательных к окружностям $x^2+y^2=6x$ и $x^2+y^2=6y$.

131. Даны точки $A(-4;0)$ и $B(0;6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy.

132. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x+y=a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника.

133. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x+y=0$ и $x-3y=0$ и точка $(5;0)$ на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

134. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны AB $3x+2y=12$; 2) уравнение высоты BM $x+2y=4$; 3) уравнение высоты AM $4x+6y=6$, где M – точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AB, BC и высоты CM.

135. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $5y=x+6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

136. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0;2)$, и уравнения высот BM $x+y=4$ и CM $y=2x$, где M – точка пересечения высот.

137. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+9=0$ и параллельной прямой $x+3y=0$.

138. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+y-7=0$ и перпендикулярной к прямой $y=2x$.

§ 8. Линии второго порядка

1. Окружность. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой ее *центром*.

Пусть $C(a;b)$ – координаты центра и R – радиус окружности, т. е. расстояние любой ее точки от центра (рис. 11). Тогда уравнение окружности примет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. если $a=0$, $b=0$, то уравнение (1) примет вид:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2}$$

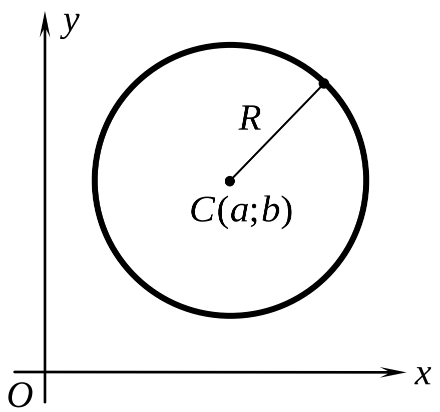


Рис. 11

Если в уравнении (1) раскрыть скобки, то оно примет вид:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0. \qquad (3)$$

Чтобы от уравнения (3) снова перейти к уравнению вида (1), нужно в левой части уравнения (3) выделить полные квадраты:

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \qquad (4)$$

139. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 3$;

2) центр окружности совпадает с точкой $C(2;-3)$ и ее радиус $R = 7$;

3) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6;-8)$;

4) окружность проходит через точку $A(2;6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1;2)$;

5) точки $A(3;2)$ и $B(-1;6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

6) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;

7) центр окружности совпадает с точкой $C(1;-1)$ и прямая $5x - 12y + 9 = 0$ является касательной к окружности;

8) окружность проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;

9) окружность проходит через три точки $A(1;1)$, $B(1;-1)$ и $C(2;0)$;

10) окружность проходит через три точки: $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$ и $M_3(5;5)$.

140. Построить окружности:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

141. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси Ox в начале координат и пересекает ось Oy в точке $A(0;4)$.

Указание. Так как окружность касается оси абсцисс в начале координат, то диаметр ее будет лежать на оси ординат.

142. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси Oy в точке $A(0;-3)$ и имеет радиус $R = 2$.

143. Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку $A(2;9)$. Найти ее уравнение.

Указание. Если окружность касается обеих осей координат, то центр ее лежит на биссектрисе координатного угла, и мы имеем $a=b$, кроме того, радиус окружности равен расстоянию центра от касательной, т. е. от оси Ox или от оси Oy; следовательно, $r=a=b$, и в данном случае уравнение окружности примет вид: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$. Таким образом, искомое уравнение содержит только один неизвестный параметр a, который мы определим из условия, что окружность проходит через точку $A(2;9)$.

144. Написать уравнение окружности, которая касается оси Ox в точке $(5;0)$ и отсекает на оси Oy хорду длиной в 10 единиц.

Указание. Если окружность касается оси Ox, то абсцисса центра равна абсциссе точки прикосновения, а ордината центра по абсолютной своей величине равна радиусу; поэтому уравнение искомой окружности имеет вид: $(x-5)^2+(y\pm R)^2=R^2$. Точки пересечения этой окружности с осью ординат $(x=0)$ мы получим из уравнения: $y^2\pm 2Ry+25=0$. По условию задачи разность корней этого квадратного уравнения равна 10, т. е. $y_1-y_2=10$ или $2\sqrt{R^2-25}=10$; отсюда определяем единственный неизвестный параметр R уравнения.

145. Найти центр окружности, радиус которой $R=50$, зная, что окружность отсекает на оси Ox хорду длиной в 28 единиц и проходит через точку $A(0;8)$.

146. Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке $(6;7)$ и касающейся прямой $5x-12y-24=0$.

Указание. Радиус окружности равен расстоянию ее центра от касательной.

147. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ с прямыми: 1) $x-y-4=0$; 2) $3x-4y+36=0$; 3) $x-y-5=0$.

148. Как расположены прямые: 1) $x-2y+5=0$; 2) $5x-12y+26=0$; 3) $3x-4y+30=0$; 4) $x+y-17=0$ относительно окружности $x^2+y^2=36$?

Указание. О расположении прямых относительно окружности мы судим по расстоянию этих прямых от центра. В зависимости от того, будет ли это расстояние меньше, равно или больше радиуса – прямая пересекает, касается или проходит вне окружности.

149. Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $(1;-2)$.

150. Дана окружность: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Составить уравнение ее касательной в точке $(5;5)$.

151. В точке $(0;3)$ провести касательную к окружности $x^2+y^2-2x-3y=0$.

Указание. Можно привести данное уравнение окружности к нормальному виду и воспользоваться общим уравнением касательной.

152. Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(y-5)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x+2)^2+y^2=64$;

3) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$; 4) $x^2+(y-5)^2=5$;

5) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 6) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$; 8) $x^2+y^2+x=0$;

9) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$; 10) $x^2+y^2+y=0$.

153. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

154. Вычислить кратчайшее расстояние от точки до окружности в каждом из следующих случаев:

а) $A(6;-8)$, $x^2+y^2=9$;

б) $B(3;9)$, $x^2+y^2-26x+30y+313=0$;

в) $C(-7;2)$, $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

155. Составить уравнение хорды окружности $(x-3)^2+(y-7)^2=169$, делящейся в точке $M(8,5;3,5)$ пополам.

2. Эллипс. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемая фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

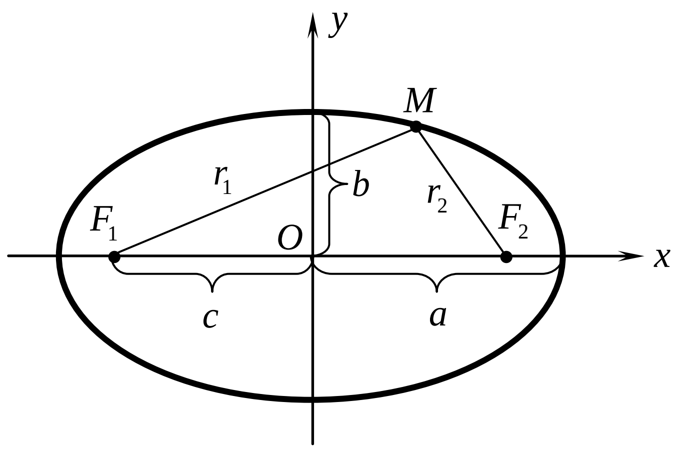


Рис. 12

Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2 (рис. 12), расстояние между ними $|F_1F_2|$ – через $2c$.

Пусть M – произвольная точка эллипса. Сумму расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$.

Так как, по определению, $|F_1M|+|F_2M|>|F_1F_2|$, то $2a>2c$ и $a>c$.

Через r_1 и r_2 обозначают расстояние от точки M до фокусов ($r_1=|F_1M|, r_2=|F_2M|$). Числа r_1, r_2 называются *фокальными радиусами* точки M.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $a>b$. Числа a и b называются *полуосями эллипса*. Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ называется *эксцентриситетом эллипса*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$.

156. Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

157. Построить эллипс $3x^2+16y^2=192$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

158. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$;
2) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=0,5$;
3) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon=3/5$;
4) расстояние между фокусами равно 6, а $a+b=9$;
5) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a-b=1$.

159. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки: 1) $M_1(2;3)$ и $M_2(1;3\sqrt{5}/2)$; 2) $M_1(4;9/5)$ и $M_2(5\sqrt{5}/3;2)$; 3) $M_1(2;0)$ и $M_2(1;2)$.

160. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, если известно, что эллипс проходит через точки $M_1(4;4\sqrt{5}/5)$ и $M_2(0;6)$.

161. Эллипс проходит через точки $M_1(2;\sqrt{3})$ и $M_2(0;2)$. Написать его уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

162. Эллипс проходит через точку $M(-4;\sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=3/4$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки M.

163. Найти длину хорды эллипса $x^2+2y^2=18$, делящей угол между осями пополам.

164. На эллипсе $9x^2+25y^2=225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

165. Ординаты всех точек окружности $x^2+y^2=36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

166. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1;0)$, чем к прямой $x=-4$.

167. Отрезок AB постоянной длины $a+b$ движется так, что его конец A скользит по оси Ox, а конец B – по оси Oy. Определить траекторию движения точки M отрезка, делящей его части $BM=a$ и $MA=b$ (эллиптический циркуль Леонардо да Винчи).

168. Найти общие точки эллипса $x^2+4y^2=4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его «верхней» вершине.

169. Определить, пересекает ли заданная прямая L данный эллипс $\varGamma$, касается его или проходит вне его:

1) $L:\ 2x-y-3=0,\ \varGamma:\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;$

2) $L:\ 2x+y-10=0,\ \varGamma:\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1;$

3) $L:\ 3x+2y-20=0,\ \varGamma:\ \dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{10}=1.$

3. Гипербола. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояний между фокусами.

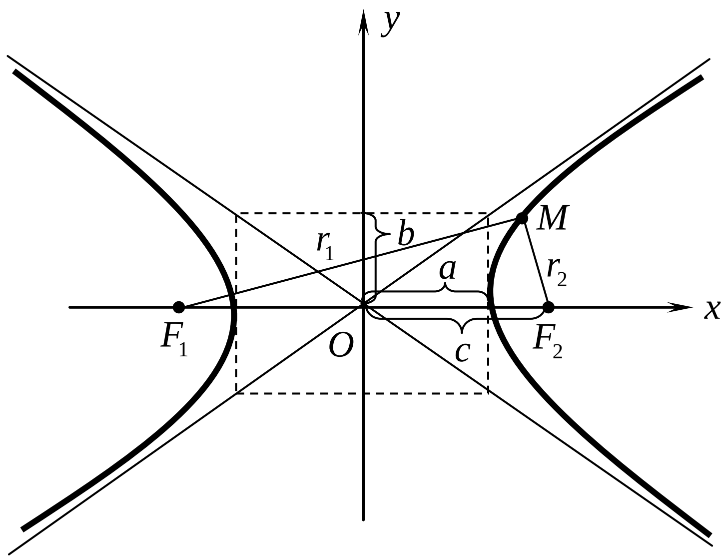


Рис. 13

Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 (рис. 13), расстояние между ними $|F_1F_2|$ – через $2c$.

Пусть M – произвольная точка гиперболы. Модуль разности расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$.

Так как, по определению, $\big||F_1M|-|F_2M|\big|<|F_1F_2|$, то $2a<2c$ или $a<c$. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называют *фокальными радиусами* точки M и обозначают через r_1 и r_2.

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Число a называется *действительной*, а число b – *мнимой* полуосями гиперболы. Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=|\varepsilon x+a|$, $r_2=|\varepsilon x-a|$. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ называются *сопряженными*.

170. Построить гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

171. Построить гиперболу $3x^2-4y^2=12$. Найти: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

172. Написать каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) расстояние между фокусами $2c=10$, а между вершинами $2a=8$;

2) действительная полуось $a=2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$;

3) расстояние между фокусами $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=3/2$;

4) расстояние между фокусами $2c=20$, а уравнение асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$;

5) мнимая полуось $b=4$, а расстояние между фокусами $2c=10$.

173. На гиперболе $x^2-4y^2=16$ взята точка M с ординатой, равной 1. Найти расстояние ее от фокусов.

174. Гипербола проходит через точку $M(6;-2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b=2$. Написать ее уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

175. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

176. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2-4y^2=16$, проведенных из точки $A(0;-2)$.

177. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

178. Определить траекторию точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x=1$, чем к точке $F(4;0)$.

179. Определить траекторию точки M, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8;0)$, чем от прямой $x=-2$.

180. Найти множество точек, для которых произведение расстояний до двух данных пересекающихся прямых равно $C=\text{const}$.

181. Написать уравнение гиперболы, имеющий эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$, проходящей через точку $(2a;a\sqrt{3})$ и симметричной относительно осей координат.

4. Парабола. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

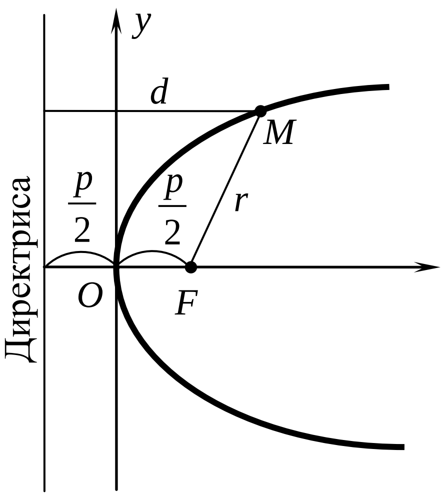


Рис. 14

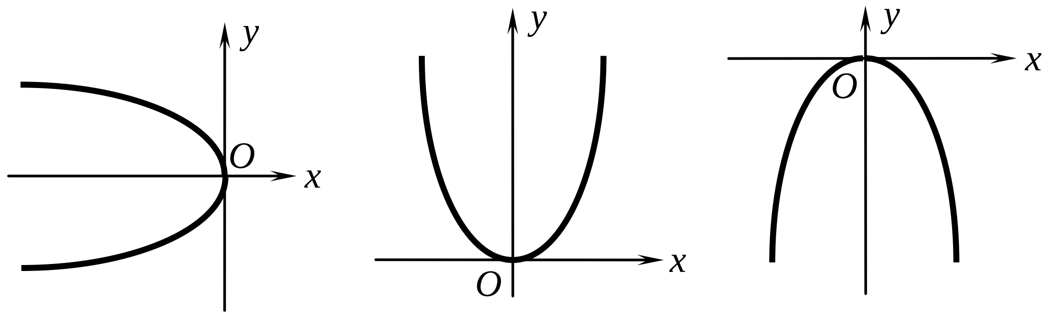
Пусть M – произвольная точка параболы. Фокус параболы обозначают буквой F, а через r – расстояние от точки M до фокуса $(r=|FM|)$, через d – расстояние от точки M до директрисы, а через p – расстояние от фокуса до директрисы (рис. 14). Величину p называют *параметром параболы*.

Каноническое (простейшее) уравнение параболы:

$$y^2=2px.$$

Парабола имеет фокус $F(p/2;0)$ и директрису $x=-\frac{p}{2}$; фокальный радиус $r=x+\frac{p}{2}$. Симметрична относительно оси Ox. Вершина параболы находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2=-2px$, $p>0$, расположена слева от оси ординат (рис. 15, а). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox.



а) б) в)

Рис. 15

Уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$, является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy (рис. 15, б). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение $x^2 = -2py$, $p > 0$, определяет параболу, лежащую ниже оси Ox, с вершиной в начале координат (рис. 15, в).

182. Построить параболу $y^2 = 6x$. Найти: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

183. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;-3)$ и симметричной относительно оси Ox; 2) проходящей через точки $(0;0)$ и $(2;-4)$ и симметричной относительно оси Oy.

184. Построить параболы, заданные уравнениями: 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$, а также их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

185. Найти уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 2px$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

186. Написать уравнение параболы и уравнение директрисы, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y = 2$ лежит на параболе.

187. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy. Построить окружность, прямую и параболу.

188. На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, фокальный радиус которой равен $4{,}5$.

189. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

190. Из вершины параболы $y^2 = 2px$ проведены всевозможные хорды. Написать уравнение множества середин этих хорд.

191. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от точки $F(0;2)$ и от прямой $y = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

192. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = -4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

193. Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку A и касающихся данной прямой L.

§ 9. Директрисы, диаметры и касательные к кривым второго порядка

1. Директрисы эллипса и гиперболы. *Директрисами* эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (при $a > b$) и гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются прямые, параллельные оси Oy и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$, где ε – эксцентриситет кривой.

Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Свойство директрис: *отношение расстояний от точки кривой до фокуса и до соответствующей директрисы равно эксцентриситету кривой*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \tag{2}$$

2. Диаметр кривой второго порядка. *Диаметром кривой второго порядка* называется геометрическое место середин параллельных хорд. Диаметрами эллипса и гиперболы оказываются отрезки и лучи прямых, проходящих через центр, а диаметрами параболы – лучи, параллельные ее оси.

Уравнение диаметра, делящего пополам хорды с наклоном $\operatorname{tg}\alpha = k$, будет для кривых $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 k} x; \tag{3}$$

для параболы $y^2 = 2px$:

$$y = \frac{p}{k}. \tag{4}$$

Два диаметра эллипса и гиперболы, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются *взаимно сопряженными.* Их угловые коэффициенты k и k_1 связаны зависимостью $kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ (у эллипса) и $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$ (у гиперболы).

3. Уравнение касательной: к эллипсу, к гиперболе, к параболе.

Уравнение касательной:

к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

к параболе $y^2 = 2px$: $yy_0 = p(x + x_0)$, где $(x_0; y_0)$ – точка касания.

194. Построить эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, его директрисы и найти расстояния от точки эллипса с абсциссой $x = -3$ до правого фокуса и правой директрисы.

195. Построить гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ее директрисы и найти расстояния от точки гиперболы с абсциссой $x = 5$ до левого фокуса и левой директрисы.

196. Написать каноническое уравнение эллипса, директрисами которого служат прямые $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ и большая полуось которого равна 2.

197. Написать уравнение гиперболы, асимптоты которой $y = \pm x$, а директрисы $x = \pm\sqrt{6}$.

198. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, диаметр $y = \frac{x}{2}$ и сопряженный ему диаметр и найти длины a_1 и b_1 построенных полудиаметров.

199. Построить гиперболу $x^2-4y^2=4$, диаметр $y=-x$ и сопряженный ему диаметр и найти угол между диаметрами.

200. Найти длину того диаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, который равен своему сопряженному диаметру.

201. Асимптота гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ составляет с осью Ox угол 60°. Написать уравнение диаметра, сопряженного с диаметром $y=2x$. Выбрав произвольно отрезок a, построить кривую, диаметры и хорды, параллельные данному диаметру.

202. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2=4x$, составляющих с Ox угол 45°.

203. Дан эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Через $(-2;1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

204. Дана парабола $y^2=-4x$. Через точку $(-2;-1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

205. Написать уравнения касательных к кривым:

1) $x^2+4y^2=16$; 2) $3x^2-y^2=3$; 3) $y^2=2x$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

206. Показать, что если прямая $Ax+By+C=0$ есть касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $A^2a^2+B^2b^2=C^2$.

Указание. Из пропорциональности коэффициентов уравнений $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ и $Ax+Bx+C=0$ определить x_0 и y_0 и подставить их в уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

207. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, параллельных биссектрисе первого координатного угла.

208. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2+2y^2=8$, проведенных из точки $(0;6)$.

209. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

210. Показать, что если прямая $Ax+Bx+C=0$ есть касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то $A^2a^2-B^2b^2=C^2$ (см. указание к задаче **206**).

211. Написать уравнения касательных к гиперболе $4x^2-9y^2=36$, перпендикулярных к прямой $x+2y=0$.

212. Доказать, что нормаль к эллипсу есть биссектриса угла между радиус-векторами соответствующей точки эллипса.

213. Доказать, что касательная к гиперболе есть биссектриса угла между радиус-векторами точки касания.

214. Доказать, что лучи, выходящие из фокуса параболы, отражаются от параболы по прямым, параллельным ее оси.

Указание. Нужно написать уравнение нормали MN, найти точку N пересечения ее с осью параболы и доказать, что $FM=FN$, где F – фокус параболы.

§ 10. Преобразование декартовых координат. Параболы $y=ax^2+bx+c$ и $x=ay^2+by+c$. Гипербола $xy=k$

1. Координаты $(x;y)$ в данной системе преобразуются к координатам $(X;Y)$ в новой системе по формулам:

а) *при параллельном сдвиге осей* и перенесении начала координат в точку $O_1(\alpha;\beta)$

$$x=X+\alpha,\ y=Y+\beta; \tag{1}$$

б) *при повороте осей на угол* φ

$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi,\ y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi. \tag{2}$$

2. Уравнение $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ переносом начала координат в точку $O_1(\alpha;\beta)$ приводится к виду $Y=aX^2$ и, следовательно, определяет *параболу* с вершиной $O_1(\alpha;\beta)$ и осью симметрии, параллельной Oy (рис. 16). Уравнение $y=ax^2+bx+c$ с выделением в правой части полного квадрата приводится к предыдущему и поэтому тоже определяет параболу. При $a>0$ парабола от вершины направлена «вверх», при $a<0$ – «вниз».

3. Уравнение $xy=k$ при повороте осей координат на угол $\varphi=45^\circ$ приводится к виду $X^2-Y^2=2k$ и, следовательно, определяет *равностороннюю гиперболу*, асимптотами которой служат оси координат (рис. 17). Уравнение $(x-\alpha)(y-\beta)=k$ переносом начала координат в точку $O_1(\alpha;\beta)$ приводится к виду $XY=k$ и поэтому тоже определяет равностороннюю гиперболу.

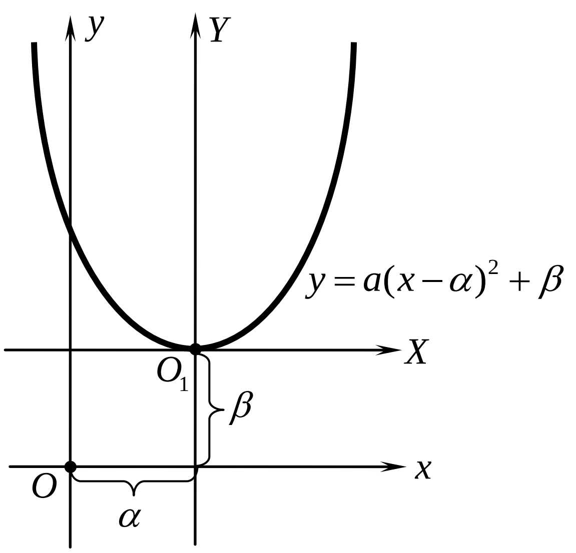


Рис. 16

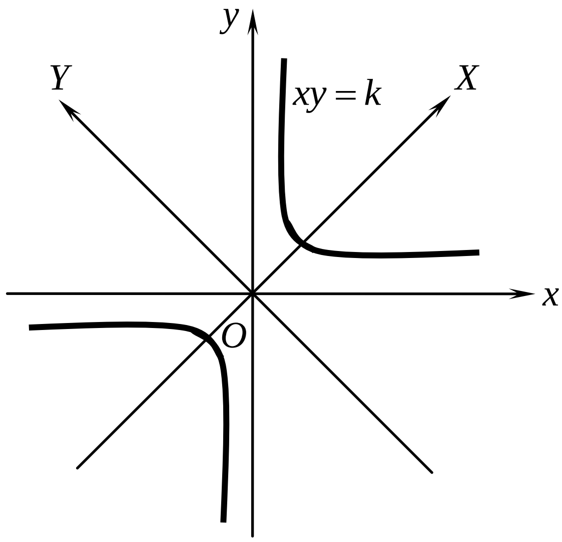


Рис. 17

215. 1) Точка $A(3;1)$ при параллельном сдвиге осей координат получила новые координаты $(2;-1)$. Построить данные и смещенные оси координат, и точку A; 2) Найти острый угол поворота осей координат, при котором точка $A(2;4)$ получит новую абсциссу 4. Построить обе системы координат и точку A.

216. Перенесением начала координат упростить уравнения:

1) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$; 2) $\dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$;

3) $(y+2)^2=4(x-3)$; 4) $2y=-(x+2)^2$;

5) $x^2+y^2-6x+8y=3$; 6) $y^2-8y=4x$;

7) $x^2-4y^2+8x-24y=24$; 8) $x^2+6x+5=2y$.

Построить старые и новые оси координат и кривые.

217. Поворотом осей координат на 45° упростить уравнения:

1) $5x^2-6xy+5y^2=32$; 2) $3x^2-10xy+3y^2+32=0$.

Построить старые и новые оси координат и кривые.

218. Построить по точкам кривую $xy=-4$ и поворотом осей на угол $\varphi=-45^\circ$ преобразовать уравнение.

219. Переносом начала координат привести к виду $xy=k$ уравнения кривых:

1) $xy-2x=6$; 2) $xy-2x-y+8=0$; 3) $xy-x+2y=6$; 4) $xy+2x=3y$.

Указание. Уравнение $xy+Ax+By+C=0$ можно написать в виде $(x+B)(y+A)=AB-C$.

220. Построить параболы:
1) $y=(x-2)^2$; 2) $y=(x-2)^2+3$; 3) $y=(x+2)^2$; 4) $y=(x+2)^2-3$.

221. Построить параболы:
1) $y=x^2-4x+5$; 2) $y=x^2+2x+3$; 3) $y=-x^2+2x-2$,
выделив в правых частях уравнений полные квадраты.

222. Построить параболы: 1) $y=4x-x^2$; 2) $2y=3+2x-x^2$, найдя их точки пересечения с осью Ox.

223. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии $0,5$ м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии $0,75$ м от точки O.

224. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на ней отрезок b, а на оси Ox – отрезки a и $-a$.

Указание. В уравнении параболы вида $y=Ax^2+Bx+C$ подставить координаты данных на параболе точек $(-a;0)$, $(a;0)$ и $(0;b)$ и затем найти A, B и C.

225. Парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки $O(0;0)$, $A(-1;-3)$ и $B(-2;-4)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ox, отсеченный параболой.

226. На какой угол нужно повернуть оси координат, чтобы исчез член, содержащий xy, в уравнениях: 1) $x^2-xy+y^2-3=0$; 2) $5x^2-4xy+2y^2-24=0$? Построить старые и новые оси координат и кривые.

227. Определить траекторию движения пули, брошенной под углом φ к горизонту с начальной скоростью v_0. Определить также дальность полета пули и наивысшую точку траектории (сопротивлением воздуха пренебречь).

228. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний от которых до точки $F(4;0)$ к расстояниям до прямой $x=-2$ равно 2.

229. Показать, что переносом начала координат в левую вершину эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ или в правую вершину гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ оба уравнения приводятся к одинаковому виду: $y^2=2px+qx^2$, где $p=\dfrac{b^2}{a}$, а $q=\varepsilon^2-1$.

230. По результатам задачи **229** определить эксцентриситет и тип кривой:
1) $y^2=x-\dfrac{1}{4}x^2$; 2) $y^2=x+\dfrac{1}{4}x^2$; 3) $y^2=x$. Построить кривые, найдя для первых двух точки пересечения их с осью Ox и параметры a и b.

§ 11. Смешанные задачи на кривые второго порядка

231. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, отсеченный осями координат.

232. Найти расстояние от центра окружности $x^2+y^2+ay=0$ до прямой $y=2(a-x)$.

233. Через центр окружности $x^2+y^2=2ax$ проведена прямая, параллельная прямой $x+2y=0$ и пересекающая окружность в точках A и B. Найти площадь треугольника AOB.

234. Показать, что геометрическое место точек M, которые удалены в m раз дальше от данной точки A, чем от другой данной точки B, есть прямая при $m=1$ и окружность при $m\neq 1$.

235. Отрезок AB разделен на части $AO=a$ и $OB=b$. Показать, что геометрическое место точек, из которых отрезки AO и OB видны под равными углами, есть прямая при $a=b$ и окружность при $a\neq b$ (аполлониева окружность).

236. Определить траекторию точки $M(x;y)$, движущейся так, что сумма квадратов расстояний от нее до прямых $y=kx$ и $y=-kx$ остается постоянной и равной a^2.

237. Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в гиперболу $x^2-y^2=a^2$.

238. Найти угол между диагоналями прямоугольника, вершины которого находятся в точках пересечения эллипса $x^2+3y^2=12l^2$ и гиперболы $x^2-3y^2=6l^2$.

239. Окружность с центром в начале координат проходит через фокусы гиперболы $x^2-y^2=a^2$. Найти точки пересечения окружности с асимптотами гиперболы.

240. Построить гиперболы $xy=-4$ и $x^2-y^2=6$ и найти площадь треугольника ABC, где A и B – вершины двух пересекающихся ветвей гипербол, а C – точка пересечения двух других ветвей гипербол.

241. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы от ее асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

242. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $y=-\dfrac{x^2}{8}$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a=b=2$.

243. Построить эллипс $x^2+4y^2=4$ и параболу $x^2=6y$ и найти площадь трапеции, основаниями которой служат большая ось эллипса и общая хорда эллипса и параболы.

244. Из фокуса параболы $y^2=2px$, как из центра, описана окружность так, что общая хорда кривых одинаково удалена от вершины и от фокуса параболы. Написать уравнение окружности.

245. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины параболы $by=x^2+2ax+a^2+b^2$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки a и b.

246. Построить по точкам пересечения с осями координат параболы $4y=12-x^2$ и $4x=12-y^2$ и найти длину их общей хорды.

247. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках пересечения параболы $y=4-x^2$ с осью Ox и с прямой $y=3x$.

248. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения параболы $y=\dfrac{x^2}{a}-2x+a$ с осями координат.

249. Дан эллипс $x^2+4y^2=16$. Из его вершины $A(4;0)$ проведены всевозможные хорды. Определить геометрическое место середин этих хорд и построить кривые.

250. Определить траекторию точки $M(x;y)$, движущейся так, что разность квадратов расстояний от нее до биссектрис координатных углов остается равной 8.

251. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точку $A(3;4)$ и касающихся оси Ox.

252. Найти геометрическое место середин фокальных радиус-векторов, проведенных из правого фокуса ко всем точкам гиперболы $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

253. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку $A(a;-a)$, если фокусы его находятся в точках $F(a;a)$ и $F_1(-a;-a)$.

Указание. Упростить уравнение поворотом осей координат на 45°.

254. Поворотом осей координат на угол $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ упростить уравнение линии $3x^2+8xy-3y^2=20$. Построить старые и новые оси координат и кривую.

255. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до прямой $3x+4y=0$ и до оси Ox остается постоянной и равной $2,4$.

256. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний от которых до точки $F\left(\dfrac{p}{\varepsilon+1};0\right)$ к расстояниям до прямой $x=-\dfrac{p}{\varepsilon(\varepsilon+1)}$ равно ε.

257. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

1) $R^2<x^2+y^2<4R^2$ и $x^2>R^2/4$; 2) $x^2-y^2>a^2$ и $x^2<4a^2$;

3) $xy>a^2$ и $|x+y|<4a$; 4) $2x<y^2+4y$ и $x^2+y^2+4x+4y<0$.

§ 12. Общее уравнение линии второго порядка

1. Линия второго порядка. *Линией второго порядка* называется линия, определяемая уравнением 2-й степени, которое в общем виде можно написать так:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{1}$$

Составим из коэффициентов уравнения (1) два определителя:

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *дискриминантом уравнения* (1), а δ – *дискриминантом старших его членов*. В зависимости от значений δ и Δ уравнение (1) определяет следующий геометрический образ:

	$\Delta\neq 0$	$\Delta=0$
$\delta>0$	Эллипс (действительный или мнимый)	Точка
$\delta<0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta=0$	Парабола	Пара параллельных прямых (действительных или мнимых)

2. Преобразование уравнения (1) к центру. Если $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$, то линия имеет центр, координаты которого находятся из уравнений:

$$\Phi'_x(x;y)=0,\ \Phi'_y(x;y)=0, \tag{2}$$

где $\Phi(x;y)$ – левая часть уравнения (1). Перенеся начало в центр $O_1(x_0;y_0)$ (рис. 18), приведем уравнение (1) к виду:

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+F_1=0, \tag{3}$$

где

$$F_1=Dx_0+Ey_0+F=\frac{\Delta}{\delta}. \tag{4}$$

3. Преобразование уравнения (3) к осям симметрии. Поворотом осей O_1x_1 и O_1y_1 на некоторый угол φ (рис. 18) уравнение (3) приводится к каноническому виду:

$$A_1X^2+C_1Y^2+F_1=0. \tag{5}$$

Коэффициенты A_1 и C_1 являются корнями уравнения:

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+\delta=0. \tag{6}$$

Угол поворота φ находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A_1-C}. \tag{7}$$

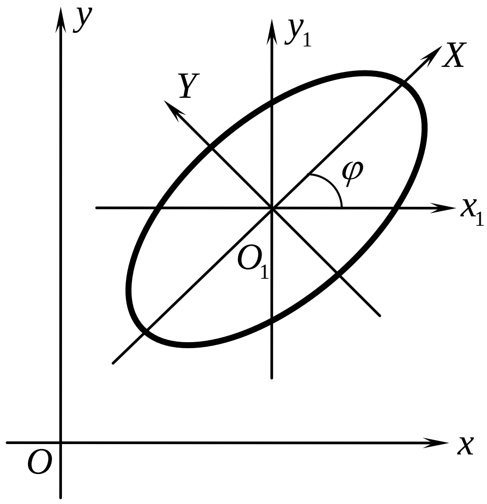


Рис. 18

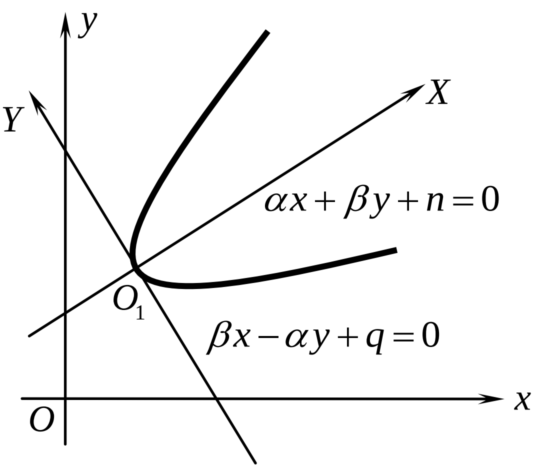


Рис. 19

4. Преобразование уравнения линии второго порядка, не имеющей центра. Если $\delta=0$, то линия не имеет центра или не имеет определенного центра. Ее уравнение можно тогда записать в виде

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{8}$$

Случай 1. D и E пропорциональны α и β: $D = m\alpha$, $E = m\beta$. Уравнение (2) примет вид $(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0$, откуда $\alpha x + \beta y = -m \pm \sqrt{m^2 - F}$ – пара прямых.

Случай 2. D и E не пропорциональны α и β. Уравнение (8) можно переписать в виде

$$(\alpha x + \beta y + n)^2 + 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0. \qquad (9)$$

Параметры m, n и q найдутся сравнением коэффициентов в уравнениях (8) и (9). Далее, приняв за ось O_1X прямую $\alpha x + \beta y + n = 0$, за ось O_1Y прямую $\beta x - \alpha y + q = 0$ (рис. 19), найдем: $Y = \dfrac{\alpha x + \beta y + n}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $X = \dfrac{\beta x - \alpha y + q}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. После этого уравнение (9) примет вид $Y^2 = 2pX$, где $p = \dfrac{|m|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Ось O_1X направляется в ту полуплоскость, в которой $\beta x - \alpha y + q$ имеет знак, противоположный знаку m, как это следует из уравнения (9).

258. Выяснить геометрический смысл уравнений:

1) $4x^2 - y^2 = 0$;

2) $4x^2 + y^2 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$;

5) $x^2 + xy = 0$;

6) $y^2 - 16 = 0$;

7) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

259. Найти центры и преобразовать к центру уравнения линий:

1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;

2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;

3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$.

260. Поворотом осей координат преобразовать уравнения к каноническому виду и построить кривые:

1) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$; 2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$.

261. Преобразовать к каноническому виду уравнения и построить кривые:

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$; 2) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

262. Преобразовать к каноническому виду уравнения линий:
1) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$; 2) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8=0$, – и построить их.

263. По дискриминантам δ и Δ определить геометрический смысл уравнений:

1) $x^2-4xy+3y^2-8x+14y+15=0$;

2) $x^2+2xy+4y^2-2x+4y+4=0$;

3) $x^2+4xy+4y^2+3x+6y+2=0$.

Решив первое и третье уравнения относительно y, построить линии, определяемые этими уравнениями.

264. Привести к каноническому виду уравнение кривой $y=\dfrac{3x^2-12x+4}{4x-8}$ и построить ее.

265. Написать уравнение кривой второго порядка, имеющей центром точку $O_1(1;2)$ и проходящей через начало координат и через точки $(0;4)$ и $(1;-1)$.

266. Показать, что уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ определяет дугу параболы, построить параболу и найти ее вершину.

Указание. Повернуть оси координат на угол $\varphi=-45^\circ$.

267. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояния от каждой из которых до точки $F(m;n)$ к расстоянию от нее до прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0$ равно ε. Обозначив коэффициенты полученного уравнения через $A,B,C,\ldots,$ определить инварианты $A+C$ и $\delta\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}$.

268. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, отношение расстояний от которых до точки $F(3;3)$ к расстояниям до прямой $x+y=0$ равно: 1) $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$; 2) $\varepsilon=2$.

269. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;y)$, одинаково удаленных от точки $F(a/2;a/2)$ и от прямой $x+y=0$, и привести его к каноническому виду.

270. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до прямой $x-2y=2$ и до оси Ox остается постоянной и равной $3,2$. Преобразовать его к каноническому виду и построить кривую.

Ответы, решения

1. $AB=9$, $BC=-6$, $AC=3$, $9-6=3$.

2. Если $a>0$, то A правее; если $a<0$, то B правее; если же $a=0$, то точки A и B совпадают.

3. Если $a>0$, то $a+a>0+a$, $2a>a$ и точка B правее точки A; если $a<0$, $2a<a$ и точка A правее точки B.

4. 1) $AB=8$, $|AB|=8$; 2) $AB=-3$, $|AB|=3$; 3) $AB=4$, $|AB|=4$; 4) $AB=2$, $|AB|=2$; 5) $AB=-2$; $|AB|=2$.

5. 1) -2; 2) 5; 3) 1; 4) -8; 5) -2 и 2; 6) -1 и 5; 7) -6 и 4; 8) -7 и -3.

6. 1) $M_1(-2)$ и $M_2(2)$; 2) $M_3(-2)$ и $M_4(4)$; 3) точки расположены справа от точки $M_5\left(3/2\right)$, включая точку M_5.

7. Точки расположены: 1) справа от точки $M_1(2)$; 2) слева от точки $M_2(3)$, включая точку M_2; 3) слева от точки $M_3\left(3/2\right)$, включая точку M_3; 4) внутри промежутка, ограниченного точками $M_4(1)$ и $M_5(3)$, включая точку M_5; 5) внутри промежутка, ограниченного точками $M_6(-3)$ и $M_7(3)$; 6) внутри промежутка, ограниченного точками $M_8(2)$ и $M_9(3)$.

8. Точки расположены: 1) внутри промежутка, ограниченного точками $M_1(-1)$ и $M_2(2)$; 2) вне промежутка, ограниченного точками $M_3(-2)$ и $M_4(2)$; 3) внутри промежутка, ограниченного точками $M_5(-2)$ и $M_6(2)$, включая точки M_5 и M_6; 4) внутри промежутка, ограниченного точками $M_7(-1)$ и $M_8(5)$; 5) вне промежутка, ограниченного точками $M_9(-1)$ и $M_{10}(3)$, включая точки M_9 и M_{10}; 6) Решение. Так как $|x|>x$ при $x<0$, то данное неравенство справедливо для тех x, при которых $x^2-5x+6<0$. Как следует из задачи **7**, случай 6), решение этого неравенства: $2<x<3$; 7) справа от точки $M_{11}\left(-1/2\right)$.

13. 1) $(2;-3)$; 2) $(-3;-2)$; 3) $(-1;1)$; 4) $(a;-b)$.

14. 1) $(1;2)$; 2) $(-3;-1)$; 3) $(2;-2)$; 4) $(-a;b)$.

15. 1) $(-3;-3)$; 2) $(-2;4)$; 3) $(2;-1)$; 4) $(-a;-b)$.

16. 1) $(3;2)$; 2) $(-2;5)$; 3) $(4;-3)$.

17. 1) $(-5;-3)$; 2) $(-3;4)$; 3) $(2;-7)$.

18. $(3;1)$, $(-3;-1)$, $(-3;1)$, $(-1;3)$.

19. 1) В первой и третьей; 2) во второй и четвертой; 3) в первой и третьей; 4) во второй и четвертой; 5) в первой, второй и четвертой; 6) во второй, третьей и четвертой; 7) в первой, третьей и четвертой; 8) в первой, второй и третьей.

20. в) $|b|$; $|a|$.

21. 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13.

22. $AB=5$, $BC=13$, $CA=8\sqrt{2}$.

23. $AB=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{50}$, $BC=\sqrt{40}$; $AC^2=AB^2+BC^2$.

24. $M(5;0)$.

25. $M_1(0;-3)$, $M_2(0;-9)$.

26. $M(-1;-2)$.

27. 1) 14 кв. ед.; 2) 12 кв. ед.; 3) 25 кв. ед.

28. $M_1(5,4;2,8)$, $M_2(7,8;3,6)$, $M_3(10,2;4,4)$, $M_4(12,6;5,2)$.

30. $OC=5$, $OD=\dfrac{24\sqrt{2}}{7}$.

31. 13 кв. ед.

32. $P=15+5\sqrt{5}$, $S=25$ кв. ед.

33. $12,5$ кв. ед.

34. (1) и (2) – лежат; (3) – не лежат.

35. 5.

36. $M(1;4)$.

37. $(3;3)$.

38. $(2;-1)$ и $(3;1)$.

39. $A(3;-1)$ и $B(0;8)$.

40. $(-9;0)$.

41. $D(-3;1)$.

42. $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$ и $\sqrt{41}$.

43. $M\left(3\tfrac{1}{3};5\tfrac{2}{3}\right)$.

44. $C(6;0)$.

45. $(5;-7)$.

46. $M(1;2)$.

47. $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

48. $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

49. $\left(\dfrac{37}{27};\dfrac{13}{27}\right)$.

50. См. рис. 1.

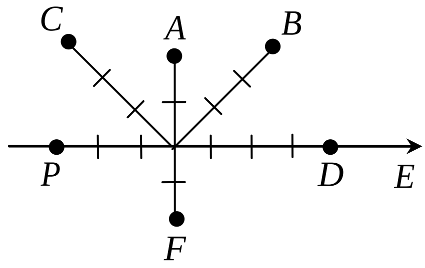


Рис. 1

51. $A_1\left(3;\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $B_1\left(4;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

52. $A_1\left(1;-\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $B_1\left(5;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

53. $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $B(0;4)$.

54. $M_1\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\pi)$, $M_3\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

55. $\left(1;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

56. $\sqrt{34}$.

57. $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

58. 5 кв. ед.

59. $3(4\sqrt{3}-1)$ кв. ед.

60. $(2+5\sqrt{3};8)$.

61. Точки M_1, M_4 и M_5 лежат на линии; точки M_2, M_3 и M_6 не лежат на ней.

62. 1) Биссектрисы I и III координатных углов; 2) две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов; 3) одна точка $(0;0)$ уравнения определяет вырожденную линию; 4) так как при любых x и y числа x^2 и y^2 неотрицательны, то $x^2+y^2+1>0$. Следовательно, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению. Оно определяет «пустое» множество точек; 5) см. рис. 2-4; 6) см. рис. 5-6.

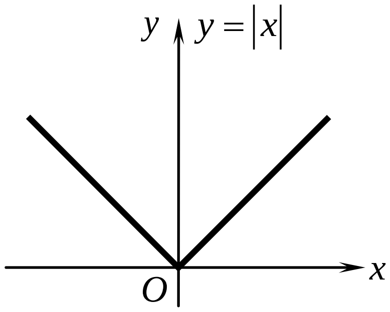


Рис. 2

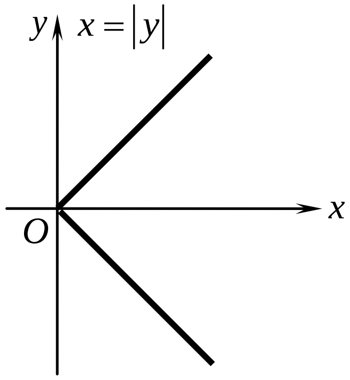


Рис. 3

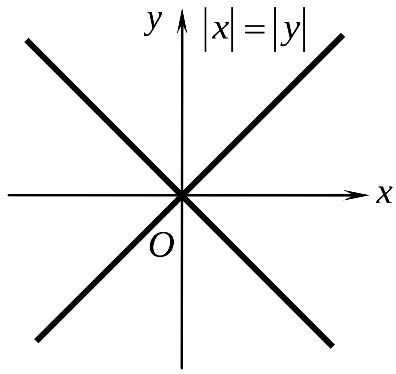


Рис. 4

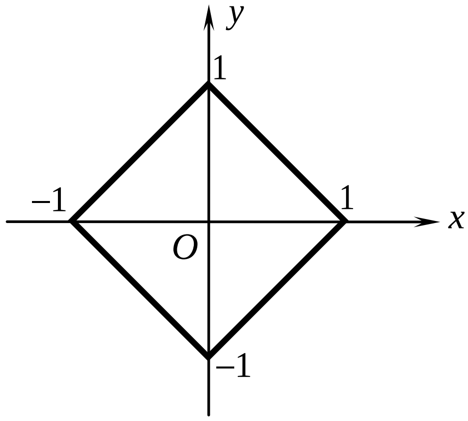


Рис. 5

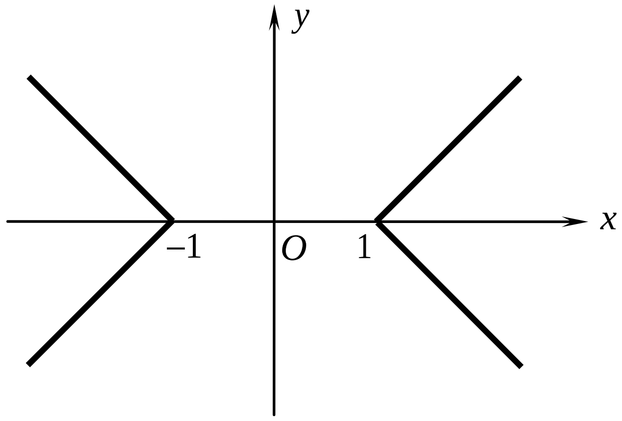


Рис. 6

63. Точки M_1, M_2 и M_4 лежат на данной линии; точки M_3 и M_5 не лежат на ней. Уравнение определяет окружность с диаметром OM_2.

64. Решение. Расстояние от произвольной точки $M(x;y)$ до точки C вычисляется по формуле $|MC| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Если точка M лежит на окружности, то $|MC| = R$ или $MC^2 = R^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Если же точка $M(x;y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq R^2$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению. Полагая $\alpha = 0$, $\beta = 0$, получим уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

65. Решение. Представим данное уравнение в виде $(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1$ или $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $C(-1;0)$ и радиусом 1.

66. Искомое множество точек является окружностью (или ее частью).

Решение. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы начало координат попало в точку A, а положительная полуось абсцисс пошла от A к B. За единицу масштаба возьмем длину отрезка AB. Тогда точка a имеет координаты $(0;0)$, точка B – координаты $(1;0)$, точка M – координаты $(x;y)$. Условие $|AM|=2|BM|$ запишем в виде $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Получено уравнение искомого множества точек. Возводя обе части в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение $3x^2-8x+4+3y^2=0$ или $x^2-\frac{8}{3x}+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9}$ или в виде $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, т. е. уравнение окружности в точке $(4/3;0)$ и радиусом $2/3$.

67. а) Точка N не лежит на данной окружности.

Решение. Запишем уравнение данной окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Подставим в него координат точки. Имеем $(4{,}1-1)^2+(1{,}9+2)^2=25$. Раскрывая скобки, получаем неверное равенство $24{,}82=25$.

68. $a=1$ или $a=-5$.

69. $x-y-2=0$.

70. $x^2+y^2=8$.

71. $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

72. $y=\frac{x^2}{4}-x+2$.

73. $y=\pm2$.

74. $y^2=8(x-2)$.

75. $2x-y+5=0$.

76. $x^2+y^2=4$.

77. $y=x+3$, $y=-x+3$.

79. $y=-1{,}5x$.

80. 1) $k=\frac{2}{3}$, $b=-2$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-3$; 4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$.

82. $k=1$, $b=1$, $y=x+1$.

83. 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; 2) $\frac{x}{-4/3}+\frac{y}{2}=1$.

84. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ или $-\frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=1$.

85. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ и $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$.

88. 1) $y=x\sqrt{3}-2$; 2) $y=-x\sqrt{3}-2$.

89. $(6;0)$, $(0;-4)$.

90. $(3;-5)$.

91. $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$.

92. $y=5$, $x=4$.

93. 1) $x=4$; 2) $x=-5$; 3) $x=0$.

94. 1) $y=6$; 2) $y=-2$; 3) $y=0$.

95. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$; 2) 45°; 3) 45°; 4) 90°.

97. $x-3y+2=0$, $5x-y=4$, $3x+y=12$.

98. $y=3x$ и $y=-\dfrac{1}{3}x$.

99. $x-5y+6=0$ и $5x+y+4=0$.

100. $y+4x-26=0$.

101. $2x+3y-13=0$.

102. $2y+5x-17=0$.

103. $x+2y-2=0$.

104. $7x+7y-6=0$.

105. AE: $2x-5y+4=0$, AD: $x-2y+2=0$; $\sqrt{29}$.

106. $(5/2;-2)$.

107. $14\sqrt{2}/3$.

108. $(-11;-3)$.

109. 4.

110. 1) $\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y-2=0$; 2) $-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-10=0$; 3) $-\dfrac{12}{13}x+\dfrac{5}{13}y-1=0$; 4) $-x-2=0$.

111. $2{,}8$; 0; $1{,}4$; 2.

112. $13/2$.

113. $k=\pm 2$.

114. Две прямые, параллельные данной: $4x-3y\pm 20=0$.

115. $8x-15y+6=0$; $8x-15y-130=0$.

116. $\sqrt{10}$.

117. $3x-4y+10=0$; $x=2$.

118. Прямые: $x+y=0$ и $x-3y=0$; расстояния: $d_1=2\sqrt{2}$, $d_2=0{,}4\sqrt{10}$.

119. 1) $y=0$; 2) $y=x+10$; 3) $|x|=2$.

120. 1) $(y-3x)(y-x+3)=0$; 2) $(y-x)[(x+1)^2+(y-2)^2]=0$; 3) $y \geq x$; 4) $0<y<1$; 5) $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<y<1. \end{cases}$

123. $y=x-5$.

124. $y=2x+2$.

125. Уравнение высоты AD: $y=2x+6$; длина высоты AD: $12/\sqrt{5}$; $S_{AOB}=12$ кв. ед.

126. $2x+7y-5=0$.

127. $x-7y+6=0$ и $7x+y+4=0$.

128. При любых a. Множество точек M есть прямая $2xd=a$, где $d=|AB|$.

129. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

130. $x+y-3-3\sqrt{2}=0$ и $x+y-3+3\sqrt{2}=0$.

131. $x+2y-4=0$.

132. $S=a^2/5$ кв. ед.

133. $4\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$; 20.

134. $2x-y+6=0$; $x-4y-4=0$; $2x-3y+2=0$.

135. $y=x+2$; $x-5y=6$; $y=-x$; $2y=x$.

136. $y-x=2$; $x+2y=4$; $2x+y=8$.

137. $x+3y-2=0$.

138. $11x+22y-74=0$.

139. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 3) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$; 4) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; 5) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; 6) $x^2+y^2=16$; 7) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; 8) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; 9) $(x-1)^2+y^2=1$; 10) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

141. $x^2+(y-2)^2=4$.

142. $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ и $(x+2)^2+(y+3)^2=4$.

143. $(x-17)^2+(y-17)^2=17^2$ и $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

144. $(x-5)^2+(y\pm 5\sqrt{2})^2=50$.

145. $a=30$; $b=48$ или $a=-30$; $b=48$.

146. $(x-6)^2+(y-7)^2=36$.

147. 1) $(3;-1)$ и $(2;-2)$; 2) прямая касается окружности в точке $(-4;6)$; 3) действительных точек пересечения нет.

148. Прямые 1) и 2) пересекают окружность; прямая 3) касается и 4) проходит вне окружности.

149. $x-2y-5=0$.

150. $4x+3y-35=0$.

151. $2x-3y+9=0$.

152. Уравнения 1), 2), 4), 5), 8) и 10) определяют окружности; 1) $C(5;-2)$, $R=5$; 2) $C(-2;0)$, $R=8$; 3) уравнение определяет единственную точку $(5;-2)$; 4) $C(0;5)$, $R=\sqrt{5}$; 5) $C(1;-2)$, $R=5$; 6) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 7) уравнение определяет единственную точку $(-2;1)$; 8) $C(-1/2;0)$, $R=1/2$; 9) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 10) $C(0;-1/2)$, $R=1/2$.

153. $2x-5y+19=0$.

154. а) 7; б) 17; в) 2.

155. $11x-7y-69=0$.

156. 1) $a=5$, $b=3$; 2) $F_1(-4;0)$, $F_4(4;0)$; 3) $\varepsilon=4/5$.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. 1) Полуоси эллипса $a=5$, $b=3$; 2) координаты фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, т. е. $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, так как $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$; 3) эксцентриситет $\varepsilon=c/a$, т. е. $\varepsilon=4/5$.

157. 1) $a=8$, $b=2\sqrt{3}$; 2) $F_1\left(2\sqrt{13};0\right)$, $F_2\left(-2\sqrt{13};0\right)$; 3) $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

158. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=1$.

159. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1$.

160. $a=6$; $b=4$; $F_1\left(2\sqrt{5};0\right)$; $F_2\left(-2\sqrt{5};0\right)$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

161. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_1=4-\sqrt{3}$; $r_2=4+\sqrt{3}$.

162. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$; $r_1=5$; $r_2=11$.

163. $4\sqrt{3}$.

164. $M\left(-\frac{15}{4};\pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$.

165. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Решение. Обозначим через x' и y' переменные для искомой кривой. Тогда $x=x'$ и $y=3y'$. Подставляя x и y в уравнение окружности $x^2+y^2=36$, получим ответ.

166. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

167. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

168. $\left(\pm 4\sqrt{2}/3;1/3\right)$ и $(0;-1)$.

169. 1) Пересекает.

Решение. Решим систему $\begin{cases} 2x-y-3=0, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} y=2x-3, \\ x(73x-192)=0 \end{cases}$. Получаем $x=0$, $y=-3$ и $x=192/73$, $y=165/73$, т. е. прямая пересекает эллипс в двух точках: $M_1(0;-3)$ и $M_2(192/73;165/73)$.

170. 1) $a=3$, $b=4$; 2) $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$; 3) $\varepsilon=\dfrac{5}{3}$; 4) $y=\dfrac{4}{3}x$ и $y=-\dfrac{4}{3}x$.

Решение. Приведем уравнения гиперболы к каноническому виду $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$. 1) Полуоси гиперболы: $a=3$, $b=4$; 2) Координаты фокусов: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, так как $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$; 3) Эксцентриситет: $\varepsilon=c/a$, т. е. $\varepsilon=5/3$; 4) Уравнения асимптот $y=\dfrac{b}{a}x$ и $y=-\dfrac{b}{a}x$, т. е. $y=\dfrac{4}{3}x$ и $y=-\dfrac{4}{3}x$.

171. 1) $a=2$, $b=\sqrt{3}$; 2) $F_1\left(\sqrt{7};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$; 3) $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$; 4) $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

172. 1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{4}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$; 5) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

173. $r_1=9$, $r_2=1$.

174. $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$; $r_1=6\sqrt{3}$, $r_2=2\sqrt{3}$.

175. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

176. $y+2=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

177. $d=b$; $\varphi = 2\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$.

178. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

179. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1$.

180. Если $c<0$ – пустое множество, если $c=0$ – пара данных прямых, если $c>0$ – две сопряженные гиперболы.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox являлась биссектрисой одной из пар вертикальных углов, образуемых данными прямыми, а начало координат совпало с точкой их пересечения. Тогда уравнения прямых L_1 и L_2 имеют соответственно вид $y=kx$ и $y=-kx$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомого множества, тогда, согласно формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (d – расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой L), имеем $d_1=\dfrac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}$, $d_2=\dfrac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}$, где d_1 и d_2 – расстояния от $M(x;y)$ до прямых L_1 и L_2 соответственно, а условие задачи можно переписать в виде $\dfrac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\dfrac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}=C$ (const) или $|(kx-y)(kx+y)|=C_1$, где $C_1=(k^2+1)C$. Если $C_1<0$, то искомое множество точек пусто. Если $C_1=0$, то множество точек – две данные прямые $y=\pm kx$. Если $C_1>0$, то множество точек – две гиперболы $k^2x^2-y^2=C_1$ и $y^2-k^2x^2=C_1$.

181. $x^2-y^2=a^2$.

182. 1) $F(3/2;0)$; 2) $x=-3/2$.

Решение. 1) Координаты фокуса $F(3/2;0)$, так как $p=3$, а координаты фокуса $(p/2;0)$. 2) Уравнение директрисы $x=-p/2$, т. е. $x=-3/2$.

183. 1) $y^2=9x$; 2) $x^2=-y$.

185. $(x-p/2)^2+y^2=p^2$; $(p/2;\pm p)$.

186. $y^2=x$; $x=-1/4$.

187. $y=-\dfrac{x^2}{2}$; $y=1/2$.

188. $\left(3;\pm 3\sqrt{2}\right)$.

189. 40 см.

190. $y^2 = px$.

191. $y = 3 - x^2/4$.

192. $y^2 = 8(x+2)$.

193. Парабола.

Решение. Так как для любой точки искомого множества расстояния от нее до точки A и до прямой L равны (радиусу окружности), то по определению, множество всех таких точек является параболой с фокусом в точке A и директрисой L.

194. $r = 7{,}4$, $d = 9{,}25$.

195. Директриса $x = \pm 3{,}2$, $\varepsilon = 1{,}25$, $r = 10{,}25$, $d = 8{,}2$.

196. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

197. $x^2 - y^2 = 12$.

198. Сопряженный диаметр $y = -\dfrac{x}{2}$, $a_1 = b_1 = \sqrt{10}$.

199. Сопряженный диаметр $4y + x = 0$; 81°.

200. Уравнение диаметра $y = \dfrac{b}{a}x$, его длина $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

201. $y = 1{,}5x$.

202. $y = 2$.

203. $8x - 9y + 25 = 0$.

204. $y = 2x + 3$.

205. 1) $x \pm 2\sqrt{3}y = 8$; 2) $2x \pm y = 1$; 3) $x \pm 2y = -2$.

207. $x - y = \pm 5$.

208. $y = \pm 2x + 6$.

209. $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$.

211. $y = 2y \pm 4\sqrt{2}$.

212. Уравнение нормали MN: $a^2 y_0 x - b^2 x_0 y = c^2 x_0 y_0$.

Решение. Положим $y = 0$, найдем абсциссу точки N пересечения нормали MN с осью Ox: $x_1 = \varepsilon^2 x_0$. Тогда $FN = c - \varepsilon^2 x_0 = \varepsilon r$, $F_1N = c + \varepsilon^2 x_0 = \varepsilon r_1$, т. е. нормаль MN делит FF_1 в отношении $r : r_1$ и поэтому есть биссектриса.

214. Решение. Нормаль к параболе $y^2 = 2px$ имеет уравнение $y_0 x + py = y_0(p + x_0)$. Положив $y = 0$, найдем $x_1 = p + x_0$, $FM = x_1 - \dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{2} + x_0 = FM$, т. е. $\angle FMN = \angle FNM$.

215. 1) $O_1(1;2)$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{3}{4}$.

216. 5) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 6) $Y^2 = 4X$; 7) $X^2 - 4Y^2 = 4$; 8) $Y = X^2/2$.

217. 1) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 2) $X^2 - 4Y^2 = 16$.

218. $X^2 - Y^2 = 8$.

219. 1) $XY = 6$; 2) $XY = -6$; 3) $XY = 4$; 4) $XY = -6$.

223. Уравнение струи: $y = 16(x - x^2)$; $y = 3$ м при $x = 0,75$ м.

224. $y = b\left(y - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

225. $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

226. 1) 45°; 2) $\operatorname{arctg}2$.

227. $y = x\operatorname{tg}\varphi - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos\varphi}$.

228. $y^2 = 24x + 3x^2$ (гипербола).

230. 1) Эллипс; 2) гипербола.

231. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$.

232. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

233. Основание $AB = 2a$, высота $OD = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$, площадь $\dfrac{a^2}{\sqrt{5}}$.

234. Решение. За начало примем точку O, делящую AB в отношении $AO : OB = m$, а за ось Ox – прямую OB; пусть $OB = a$, тогда координаты точек A и B будут: $A(-ma;0)$, $B(a;0)$. Уравнение искомой линии: $(m-1)x^2 + (m-1)y^2 = 2max$; при $m \neq 1$ окружность $x^2 + y^2 = \dfrac{2ma}{m-1}x$; при $m = 1$ прямая: $x = 0$.

235. Решение. Точку O примем за начало, а OB – за ось Ox. Уравнение искомой линии: $(a-b)(x^2 + y^2) = 2abx$; при $a \neq b$ окружность: $x^2 + y^2 = \dfrac{2ab}{a-b}x$; при $a = b$ прямая: $x = 0$.

236. $2(k^2x^2 + y^2) = a^2(k^2 + 1)$; эллипс при $k \neq 1$, окружность $x^2 + y^2 = a^2$ при $k = 1$.

237. $3a^2\sqrt{3}$.

238. $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} \approx 36^\circ 52'$.

239. $(\pm a; \pm a)$.

240. $A(\sqrt{6};0)$, $B(2;-2)$, $C(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$; $S_{\vartriangle}ABC = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

242. $2\sqrt{2}$; $y = x-2$.

243. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

244. $\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9p^2}{16}$.

245. $ax-by+a^2+b^2=0$; $d=\dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

246. Решение. Вычитая уравнения почленно, получим $4(y-x)=(y+x)(y-x)$, отсюда: 1) $y=x$; 2) $x+y=4$; следовательно, точки пресечения парабол лежат на прямой $y=x$ или на прямой $x+y=4$; найдем $x_1=2$, $x_2=-6$; длина хорды $8\sqrt{2}$.

247. 30.

248. $x^2+y^2=a(x+y)$.

249. $\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$ (эллипс с центром $(2;0)$).

250. $xy=4$.

251. $y=\dfrac{x^2-6x+25}{8}$.

252. $\dfrac{(x-2,5)^2}{2,25}-\dfrac{y^2}{4}=1$ (гипербола с центром $(2,5;0)$).

253. Решение. Пусть $M(x;y)$ – точка эллипса. Тогда $FM+F_1M=AF+AF_1$ или $\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=4a$; $3x^2-2xy+3y^2=8a^2$; после поворота осей на 45°: $X^2+2Y^2=4a^2$.

254. $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; новое уравнение $X^2-Y^2=4$.

255. $3x^2+8xy-3y^2=20$; поворотом осей на угол $\varphi=\mathrm{arctg}(1/2)$ приводится к виду $X^2-Y^2=4$ (см. **254**).

256. $y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2$.

258. 1) Пара прямых $y=\pm 2x$; 2) точка $(0;0)$; 3) мнимая окружность; 4) точка $(3;4)$; 5) пара прямых $x=0$, $y=-x$; 6) пара прямых $y=\pm 4$; 7) пара прямых $y=x$ и $y=\dfrac{x}{2}$.

259. 1) $(1;-1)$, $\dfrac{X^2}{6}+\dfrac{Y^2}{4}=1$; 2) $(2;1)$, $X^2-Y^2=9$; 3) $2X^2+5XY+2Y^2=8$.

260. 1) $\dfrac{X^2}{24}+\dfrac{Y^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{6}=1$.

261. 1) $\dfrac{X^2}{8}+\dfrac{Y^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{X^2}{8}-\dfrac{Y^2}{4}=1$.

262. 1) $Y^2=2\sqrt{5}X$; 2) пара прямых $x-2y=3\pm1$.

263. 1) $3y=2x-7\pm(x-2)$; 2) точка $(2;-1)$; 3) $4y=-2x-3\pm1$.

264. $4X^2-Y^2=8$, центр $(2;0)$; $\operatorname{tg}\varphi=-1/2$.

265. $5(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

266. Решение. Повернув оси на -45°, получим $Y=\dfrac{X^2}{a\sqrt{2}}+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. Уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ определяет дугу AB этой параболы (рис. 7), на которой $x\le a$ и $y\le a$.

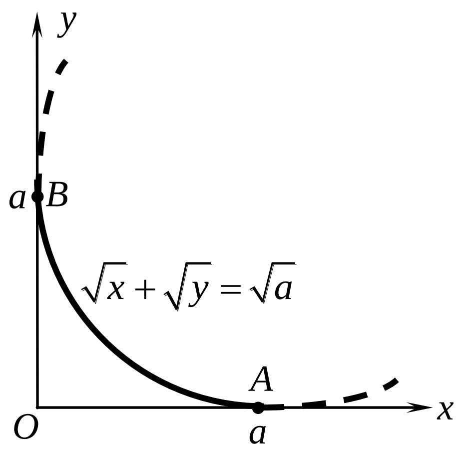


Рис. 7

267. $(x-m)^2+(y-n)^2-\varepsilon^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha+q)^2=0$; $A+C=2-\varepsilon^2$; $\delta=1-\varepsilon^2$.

268. 1) $7x^2-2xy+7y^2-48x-48y+144=0$; 2) $x^2+4xy+y^2+6x+6y-18=0$.

269. $(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0$; $Y^2=a\sqrt{2X}$.

270. $x^2-4xy-y^2-4x+8y-12=0$; $X^2-Y^2=3{,}2\sqrt{5}$.