4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана

Отметим, прежде всего, что так как $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то изучение пределов комплекснозначных функций комплексного переменного и их непрерывности сводится, по существу, к соответствующим понятиям для функций двух действительных переменных.

Как и в действительном анализе, дифференцирование функций комплексного переменного сводится к пределу

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z},$$

Если такой предел существует, то его называют *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначают $f'(z)$; функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z.

Заметим, что $\triangle z \to 0 \iff |\triangle z| = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \to 0$, где $\triangle z = \triangle x + i \triangle y$.

Разберём два простейших примера.

Пример 1. Пусть $f(z) = z$. Тогда

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{z + \triangle z - z}{\triangle z} = 1.$$

Таким образом, функция $f(z) = z$ всюду на $\mathbb{C}$ дифференцируема и $f'(z) = z' = 1$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Тогда

$$\frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} = \frac{\overline{z + \triangle z} - \overline{z}}{\triangle z} = \frac{\triangle x - i \triangle y}{\triangle x + i \triangle y}.$$

Устремляем $\triangle z = \triangle x + i \triangle y$ к нулю по двум различным направлениям:

а) $\triangle x \to 0,\ \triangle y = 0 \implies \dfrac{\triangle x - i \triangle y}{\triangle x + i \triangle y} = 1 \to 1;$

б) $\triangle x = 0,\ \triangle y \to 0 \implies \dfrac{\triangle x - i \triangle y}{\triangle x + i \triangle y} = -1 \to -1.$

Пределы $\frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ при стремлении $\triangle z$ к нулю по двум различным направлениям не совпадают, следовательно, не существует предела $\frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ при $\triangle z \to 0$. Заключаем, что функция $f(z) = \overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости.

Условия Коши–Римана. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, и будем предполагать у функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ наличие частных производных.

$$\frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} = \frac{u(x + \triangle x, y + \triangle y) + iv(x + \triangle x, y + \triangle y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\triangle x + i \triangle y}. \quad (1)$$

Как и в примере 2 рассматриваем пределы выражения (1) при стремлении $\triangle z$ к нулю по двум различным направлениям:

а) если $\triangle x \to 0$, $\triangle y = 0$, то выражение (1) стремится к $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$;

б) если $\triangle x = 0$, $\triangle y \to 0$, то выражение (1) стремится к $-i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$.

Получаем, что если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z = x+iy$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, то есть для неё выполняются так называемые *условия Коши–Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{2}$$

Обратное утверждение справедливо в следующей форме: если для функции $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z = x+iy$ выполняются условия Коши–Римана (2) и функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y) как функции двух действительных переменных, то функция $f(z)$ дифференцируема в этой точке. Её производная может быть найдена по формуле

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

(и трем другим аналогичным формулам, получающимся из условия Коши–Римана (2)).

В примере 1 $u(x,y) = x$, $v(x,y) = y$ и условия Коши–Римана, очевидно, всегда выполняются.

В примере 2 $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Второе условие в (2) всегда выполняется (0=0), а первое — не выполняется нигде ($1 \neq -1$).

Пример 3. Рассмотрим $f(z) = e^z$. Имеем: $u(x,y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $v(x,y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, всюду выполняются условия Коши–Римана, функция e^z всюду дифференцируема и $f'(z) = (e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

Функция $f(z)$ называется *аналитической* в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Функция называется *аналитической в точке*, если она аналитическая в некоторой окрестности рассматриваемой точки.

Аналитическую в области функцию можно восстановить с точностью до константы по известной её вещественной ($u(x,y)$) или мнимой ($v(x,y)$) части.

Пример 4. Пусть мнимая часть функции $f(z)$ есть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$. Используя первое условие в (2),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4y \implies u = -4xy + \varphi(y), \tag{3}$$

где $\varphi(y)$ — некоторая, пока неизвестная, функция.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Из второго условия в (2): } \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -4x - 1. \\ \text{Из (3): } \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + c.$$

Таким образом, $u = -4xy - y + c$ ($c \in \mathbb{R}$), следовательно, $f(z) = u + iv = 2iz^2 + iz + c$.