

Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского



Н. И. Лобачевский

Том 65

Министерство науки и высшего образования РФ
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Региональный научно-образовательный математический центр ПФО

Всероссийская школа-конференция ”Лобачевские чтения”

Сборник трудов

(Казань, 28 ноября – 1 декабря 2022 г.)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2022

**Институт математики и механики им.
Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского)
федерального университета
Региональный научно-образовательный
математический центр Приволжского
федерального округа
ул. Кремлевская, 35, Казань
Республика Татарстан, Российская Феде-
рация, 420008**

**Lobachevsky Institute of Mathematics
and Mechanics of Kazan (Volga region)
Federal University
Regional Scientific and Educational
Mathematical Center of the Volga
Federal District**

**35, Kremlevskaya str., Kazan, Republic of
Tatarstan, Russian Federation, 420008**

**Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного
математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-
882**

**УДК 510:512:514:517
ББК 22.1**

Редакционная коллегия: А.Н. Абызов, А.А. Попов, И.Р. Каюмов, С.Р. Насыров, Ю.Р., Е.А. Турилова,
Агачев, А.А. Агафонов, О.А. Саченков, Поташев К.А., Д.В. Бережной, Л.Р. Шакирова

**Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.65 // *Материалы
Всероссийская школа-конференция "Лобачевские чтения"* – Казань: Изд-во
КФУ, 2022. – Т.65. – 95 с.**

Сборник содержит материалы Всероссийская школа-конференция "Лобачевские чтения", организо-
ванной на базе Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжско-
го) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 28 ноября по 1 декабря
2022 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, маги-
странтов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и
ее приложений.

**УДК 510:512:514:517
ББК 22.1**

- © Региональный научно-образовательный математический центр при КФУ, 2022
- © Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, 2022
- © Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| <i>А.Н. Абызов, Б.Т. Дат.</i> Существенно инъективные модули | 6 |
| <i>А.Н. Абызов, А.Д. Маклаков.</i> Конечные топологии и их приложения в линейной алгебре. | 7 |
| <i>А.В. Аминова, М.Х. Люлинский.</i> Замечание об суперпространствах де'Ситтера и анти-де'Ситтера. | 10 |
| <i>А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов.</i> Об алгебрах Ли проективных и аффинных движений h -пространств специального типа | 11 |
| <i>О. Асман, А.А. Попов.</i> Самодействие электромагнитного заряда в кротовой норе с бесконечно короткой горловиной | 12 |
| <i>Л.А. Бикбаева.</i> Об организации онлайн-тестирования на уроках математики в высшей школе | 15 |
| <i>Р.Ч. Бобоназаров.</i> Метод разности условных вероятностей как альтернатива логистической регрессии для one-hot закодированных данных с дисбалансом классов. | 16 |
| <i>Н.В. Вавилова, Е.Р. Садыкова.</i> Диагностика эффективности обучения математике учащихся-интровертов с использованием групповых технологий взаимодействия. | 19 |
| <i>П.С. Вансков, А.Д. Иванова.</i> Моделирование тонуса мышцы на основе системы управления с обратной связью | 22 |
| <i>Р.Р. Газизов.</i> О максимальной и минимальной площадях ожерелья | 24 |
| <i>О.Р. Галлямова.</i> Космологические решения в $f(R)$ гравитации с дополнительными измерениями | 26 |
| <i>В.А. Глазатов.</i> Купмановское представление гамильтоновых потоков на бесконечномерных пространствах. | 30 |
| <i>И.И. Загиров, Д.А. Гусев, Р.Н. Сайфуллин, Ю.А. Абдуллин.</i> Прочностной расчет датчика пролета семян | 32 |
| <i>И.И. Загиров, Д.А. Гусев, Р.Н. Сайфуллин, Т.Ш. Биктимиров.</i> Исследование рабочего процесса очистки зерноуборочного комбайна | 34 |
| <i>В.А. Ишкаева, С.В. Сушков.</i> Тень кротовой норы Эллиса–Бронникова и силуэт ее горловины.. . . . | 36 |
| <i>М.М. Кокурин.</i> Разностные методы решения некорректных задач Коши с почти секториальными операторами в банаховом пространстве | 37 |
| <i>М.А. Ксенофонтов, С.В. Маклецов.</i> Формирование архитектуры нейронной сети для генерации характеристик астероидов | 39 |
| <i>А.Ф. Кужаев.</i> Представление функций из весовых подпространств рядами экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями. | 43 |
| <i>Д.С. Лисенков, А.А. Попов.</i> Поляризация вакуума квантованного скалярного поля при ненулевой температуре на фоне кротовой норы с бесконечно короткой горловиной | 46 |
| <i>Д.А. Насырова.</i> Колебания столба жидкости в открытой скважине. | 50 |

| | |
|--|----|
| <i>В.А. Павленко.</i> Построение решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующей гамильтоновой системе H^{2+2+1} Кимуры | 51 |
| <i>В.В. Прунов, Е.В. Семенова, П.В. Большаков.</i> Автоматизация методов дефектоскопии по данным компьютерной томографии | 55 |
| <i>Р.Р. Рахматулин, О.В. Герасимов.</i> Оценка эффективных свойств материалов на основе метода конечных элементов | 58 |
| <i>А.Е. Салимова.</i> Рост субгармонических функций. | 60 |
| <i>А.Э. Сатторов, Ф.А. Сатторов.</i> К вопросу использования ИКТ при обучении геометрии | 62 |
| <i>А.Э. Сатторов, А.Ш. Исмоилов.</i> Вопросы арифметики в трудах средневековых персидско-таджикских ученых. | 64 |
| <i>Д.С. Сафаров, С.К. Миратов, С.С. Курбоназаров.</i> Точное решение одной нелинейной эллиптической системы уравнений третьего порядка на плоскости . . | 68 |
| <i>К.О. Спиридонова, Н.В. Харин.</i> Программное управление манипулятором с тремя степенями свободы | 70 |
| <i>Ф.М. Шамсудинов, И.О. Бобоназаров.</i> Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с одной внутренней сингулярной линией | 72 |
| <i>Ф.М. Шамсудинов, Р.С. Валиев.</i> Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями | 75 |
| <i>К. Р. Шарафутдинова, А. И. Ахметзянова, О.В. Герасимов.</i> Оценка влияния тяжести травмы спинного мозга на механические свойства костей задних конечностей | 78 |
| <i>А.Д. Ширяева.</i> Нелинейное уравнение Шрёдингера с отклонением по пространственному и временному аргументам | 80 |
| <i>Р.Р. Фаизов.</i> Задача Римана в полуплоскости для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами | 83 |
| <i>Р.А. Фатыхова.</i> Цифровая обработка сигналов в оптической системе с модулирующим растром | 86 |
| <i>Э.Н. Хасанова, Ю.С. Крусс.</i> Моделирование процесса построения конформных отображений полуплоскости на полигональные области со счетным множеством вершин. | 90 |
| <i>А.А. Яппаров, Е.Н. Дик, С.А. Арсланбекова.</i> Прикладной аспект математической теории и практики по направлению подготовки магистратуры | 92 |

compact in the plane. At the same time, in contrast to the previously obtained similar result in [1] for positive exponents of exponential monomials, in this work it was possible to weaken the conditions for the sequence of exponents from positivity to almost reality.

Keywords: almost real sequence, weight space, entire function, condensation index.

УДК 514.83

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПРИ НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ НА ФОНЕ КРОТОВОЙ НОРЫ С БЕСКОНЕЧНО КОРОТКОЙ ГОРЛОВИНОЙ

Д.С. Лисенков¹, А.А. Попов²

¹ lesman1985@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² arorov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследована поляризация вакуума квантованного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной и находится в тепловом квантовом состоянии при произвольной температуре.

Ключевые слова: поляризация вакуума, скалярное поле, температурное квантовое состояние, кротовая нора

Изучение эффектов поляризации вакуума в сильных гравитационных полях является актуальным вопросом, поскольку такие эффекты играют роль в космологических сценариях и при построении самосогласованной модели испарения черных дыр. Эти эффекты учитываются при решении уравнений полуклассической теории гравитации

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}, \quad (1)$$

где $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса квантованных полей.

Основная трудность теории полуклассической гравитации состоит в том, что эффекты квантования гравитационного поля игнорируются. Популярное решение этой проблемы - это предел большого числа полей, в котором вклад гравитационного поля много меньше вклада других квантованных полей. Другая проблема такой теории заключается в том, что эффекты поляризации вакуума определяются, как правило, топологическими и геометрическими свойствами пространства-времени **в целом** и выбором квантового состояния, в котором вакуумные средние вычисляются. Это означает, что вычисление функциональной зависимости $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора, который должен быть определен из уравнений (1), представляет огромную трудность. Только в некоторых пространствах-временах с высокой степенью симметрии для конформно инвариантных полей $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ такие вычисления были проделаны, а уравнения (1) решены [1].

Численные вычисления $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ обычно чрезвычайно трудоемки [2]. В некоторых случаях $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ определяется локальными свойствами пространства-времени

и можно приблизительно вычислить функциональную зависимость $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора. Одним из наиболее широко известных примеров такой ситуации является случай весьма массивного поля. В этом случае масса поля m много больше $1/l$, где l - характерный масштаб кривизны пространства - времени

$$\frac{1}{ml} \ll 1, \quad (2)$$

и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ можно разложить по этому малому параметру [3].

Также были проведены приближенные вычисления $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ для безмассовых квантованных полей, неконформно связанных с кривизной пространства - времени. Примерами таких вычислений в статических пространствах Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$) являются приближения Пэйджа, Брауна и Оттевилла [4]. Эти результаты были обобщены на произвольные статические пространства - времена Занниасом [5]. Другой подход к получению приближенных выражений для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ для конформно связанных безмассовых полей в статических пространствах-времени был предложен Фроловым и Зельниковым [6]. Их расчеты основывались, главным образом, на геометрических аргументах и общих свойствах тензора энергии-импульса, а не на теории поля. Позднее, с использованием методов квантовой теории поля, Андерсоном, Хичкоком и Самуэлем получены выражения для $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ квантованного скалярного поля в статических сферически-симметричных асимптотически плоских пространствах-времени [2]. Они предполагали, что поле может находиться в вакуумном квантовом состоянии с нулевой или ненулевой температурой, может быть массивным или безмассовым и иметь произвольную константу связи ξ поля с кривизной. Их результат был представлен в виде суммы двух частей: численной и аналитической

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren} = \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{numeric} + \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{analytic}. \quad (3)$$

Аналитическая часть этого выражения сохраняется. Она имеет след равный следу конформной аномалии для конформно инвариантного поля. По этой причине было предложено использовать $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{analytic}$ прямо как приближение для $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$. Аналогичный результат был получен Гровсом, Андерсоном и Карлсоном [7] в случае безмассового поля со спином равным $1/2$ в статических сферически симметричных пространствах - временах.

В [8] $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ получен для массивного скалярного поля с произвольной связью с гравитационным полем точечного глобального монополя. В этой работе использовалось приближение Швингера-Девитта, до второго порядка малости по параметру (2). Подчеркнем, что единственным параметром размерности длины в задаче (1) является планковская длина l_p . Это означает, что характерный масштаб l кривизны пространства-времени (который соответствует решению уравнений (1)) может отличаться от l_p только при наличии большого безразмерного параметра. В качестве примера такого параметра можно рассмотреть число полей, поляризация которых является источником искривления пространства-времени¹. В случае массивного поля существование дополнительного параметра $1/m$ размерности длины не

¹ здесь и ниже предполагается, конечно, что характерный масштаб изменения фонового гравитационного поля много больше l_p , так что само понятие классического пространства-времени все еще имеет смысл.

увеличивает характерный масштаб кривизны пространства-времени l , который соответствует решению уравнений (1)². Для безмассовых квантованных полей таким параметром могут быть константы связи поля с кривизной пространства-времени [9]. Другой возможностью введения дополнительного параметра в задачу (1) является рассмотрение ненулевой температуры квантового состояния для квантованного поля. Известно (см., например, [10]), что в высокотемпературном пределе (когда $T \gg 1/l$, T -температура теплового квантового состояния) $\langle T_V^\mu \rangle$ для такого теплового состояния пропорциональна четвертой степени температуры T .

В этой работе получено выражение и проведены численные расчеты квадрата вакуумных флуктуаций $\langle \phi^2 \rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной в предположении о том, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной и находится в тепловом квантовом состоянии с произвольной температурой.

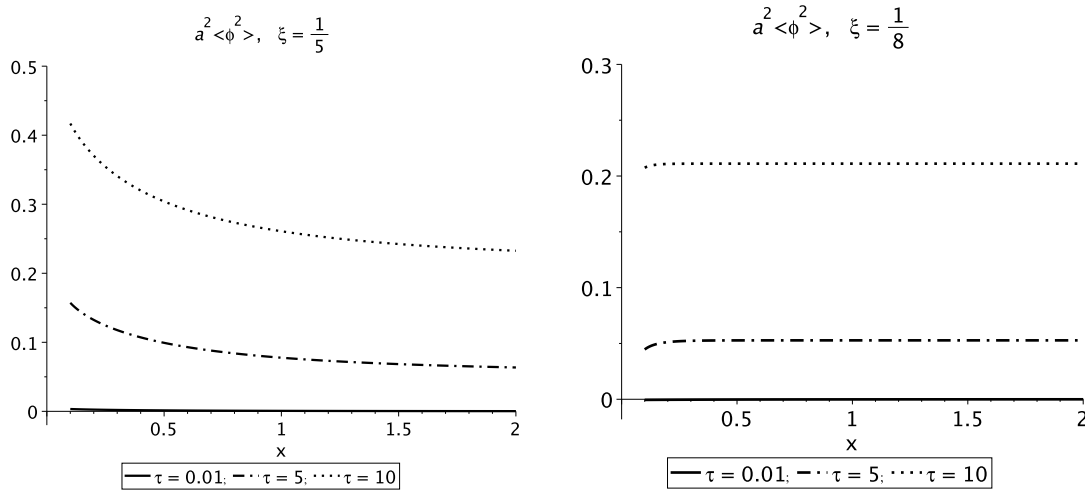


Рис. 1. Графики функции (4) для $\xi = 1/5, 1/8$ и $\tau = 2\pi Ta = 0.01, 5, 10$ от $x = \rho/a$.

$$\begin{aligned}
 a^2 \langle \phi^2 \rangle_{ren} &= \frac{\tau^2}{48\pi^2} - \frac{\tau}{16\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-8\xi)}{(l-4\xi+1)(x+1)^{2l+2}} - \frac{\tau}{2\pi^2(x+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) \\
 &\times \frac{(8\xi-1)I_V(\tau n)K_V(\tau n) + \tau n \left(I_V'(\tau n)K_V(\tau n) + I_V(\tau n)K_V'(\tau n) \right)}{(8\xi-1)K_V^2(\tau n) + 2\tau n K_V'(\tau n)K_V(\tau n)} \left[K_V(\tau n(x+1)) \right]^2, \\
 x &= \rho/a, \quad \tau = 2\pi Ta.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Литература

1. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 91. P. 99-102.

² характерный масштаб компонент G_V^μ в левой части уравнений (1) равен $1/l^2$, в правой части - $l_{Pl}^2/(m^2 l^6)$

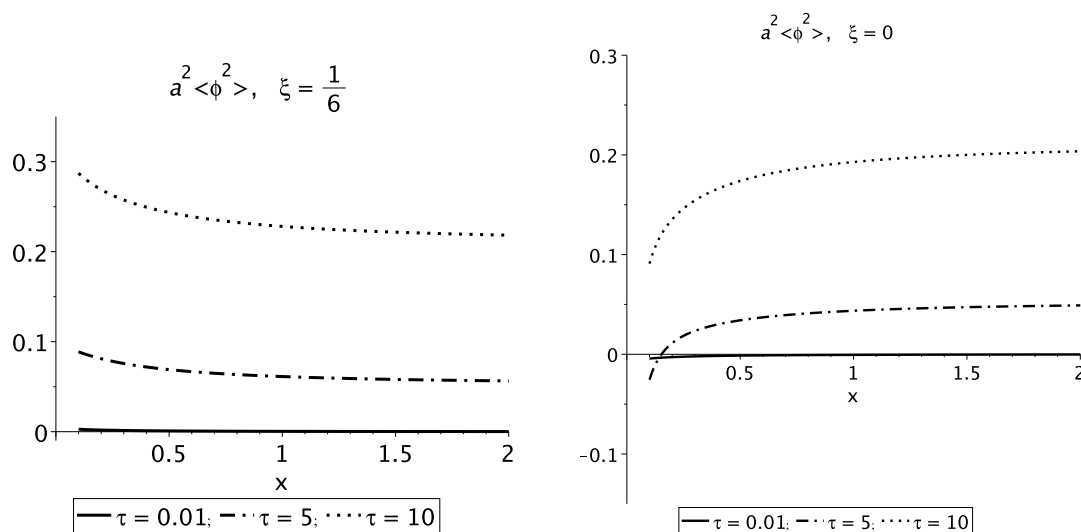


Рис. 2. Графики функции (4) для $\xi = 1/6, 0$ и $\tau = 2\pi Ta = 0.01, 5, 10$ от $x = \rho/a$.

2. Anderson P.R., Hiscock W.A. and Samuel D.A. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes // Physical review D. 1995. Vol. 51. P. 4337-4358.
3. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Vacuum polarization of massive fields near rotating black holes // Physical Review D. 1984. Vol. 29. P. 1057-1066.
4. Brown M.R., Ottewill A.C. and Page D.N. Conformally invariant quantum field theory in static Einstein space-times // Physical Review D. 1986. Vol. 33. P. 2840-2850.
5. Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times // Physical Review D. 1984. Vol. 30. P. 1161-1167.
6. Frolov V.P. and Zel'nikov A.I. Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times // Physical Review D. 1987. Vol. 35. P. 3031-3044.
7. Groves P.B., Anderson P.R. and Carlson E.D. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin 1/2 field in a general static spherically symmetric spacetime // Physical Review D. 2002. Vol. 66. P. 124017-124037 (2002).
8. Owen Pavel Fernández Piedra. Vacuum polarization of the quantized massive scalar field in the global monopole spacetime II: the renormalized quantum stress energy tensor// Phys. Rev. D. 2019. Vol. 99.
9. Popov A. Long throat of a wormhole created from vacuum fluctuations // Class. Quantum Grav. 2005. Vol. 22. № 24. P. 5223-5230.
10. Nakazawa N. and Fukuyama T. On the energy-momentum tensor at finite temperature in curved space-time // Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 252. P. 621-634.

VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN THE THERMAL STATE ON THE
SHORT-THROAT FLAT-SPACE WORMHOLE BACKGROUND

D.S Lisenkov, A.A Popov

Vacuum polarization of scalar fields on the short-throat flat-space wormhole background is investigated. The field is assumed massless, with arbitrary coupling to the scalar curvature, and in a thermal state at an arbitrary temperature.

Keywords: vacuum polarization, scalar field, thermal state, wormhole

УДК 535.5

КОЛЕБАНИЯ СТОЛБА ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОЙ СКВАЖИНЕ

Д.А. Насырова¹

¹ *dinasyrova@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Кафедра алгебры и математической логики.

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в нефтяной скважине, возникающие при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроударе). Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважины и свойствами образованных трещин ГРП).

Ключевые слова: собственные колебания, собственные частоты, гидроудар, скважина, фильтрация жидкости, затухающие колебания, гидроразрыв пласта.

В работе рассматриваются собственные колебания столба жидкости в скважине, находящейся на оси симметричной вертикальной трещины, полученной гидроразрывом пласта. Предполагается, что трещина закреплена пропантом. Амплитуда колебаний достаточно слабая, поэтому процессы, возникающие в системе «скважина – пласт», не влияют на фильтрационные характеристики в призабойной зоне. Сравнение и анализ теоретических результатов работы с опытными данными показывают удивительно хорошее их совпадение в плане определения частот колебаний давления, а также коэффициентов затухания этих колебаний.

Симметричная, скважина, имеющая радиус a , через перфорированный участок длины l_p сообщается с трещиной и пористым проницаемым пластом, окружающим трещину и скважину. При этом учитывается радиальное течение между скважиной и пластом, течение по трещине, а также линейное течение между трещиной и пластом. Примем, что в исходном состоянии жидкость, находящаяся в системе «скважина – пласт» находится в покое, т.е. течение в вертикальной скважине и горизонтальном пласте отсутствует. Кроме того, протяженность l столба жидкости в закрытом участке скважины значительно превышает открытый ее участок протяженностью l_p ($l \gg l_p$). [1] Ось Oz направим вертикально вниз, начало координат поместим на верхнюю границу столба жидкости.

**ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО.**

Т.65

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
”Лобачевские чтения 2022”**

**Материалы школы-конференции
(Казань, 28 ноября – 1 декабря 2022 г.)**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - *А.А. Агафонов*
Техническая редакция, набор и верстка: *А.А. Агафонов, Д.Р. Хакимов,*
А.А. Попов