МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Набережночелнинский институт (филиал)
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.

Электронный образовательный ресурс
к практическим занятиям и самостоятельной работе по физике

Набережные Челны
2019 г.

I. Теоретический материал

Согласно **закону Кулона** сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов пропорциональная величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \tag{1}$$

где Q_1, Q_2 - величины зарядов;

r – расстояние между ними;

k – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц.

В системе единиц СИ, когда единицей заряда служит 1 Кулон, то $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\varPhi}{м}$ – электрическая постоянная.

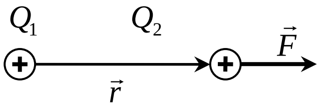
В векторной форме (1)можно представить как

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{2}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд Q_2 со стороны заряда Q_1;
$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из места расположения заряда Q_1 в место расположения заряда Q_2 (рис. 1).

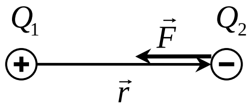
Для системы зарядов $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_N$ справедлив так называемый принцип суперпозиции сил, согласно которому сила $\vec{F}$, действующая на точечный заряд Q со стороны этих зарядов равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad , \tag{3}$$



а)

Рис.1.а) Q_1 и Q_2 – заряды одного знака; направления $\vec{F}$ и $\vec{r}$ совпадают.
$\vec{F}$ - сила отталкивания.



б)

Рис.1.б) Q_1 и Q_2 – заряды разных знаков; направления $\vec{F}$ и $\vec{r}$ противоположны.

где $\vec{F}_i$ – сила, действующая на заряд Q со стороны i-го заряда Q_i системы зарядов и рассчитываемая независимо от присутствия других зарядов в системе (рис. 2).

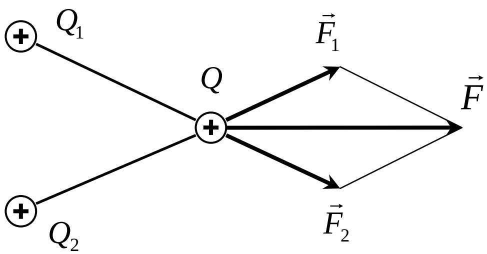


Рис.2. Суперпозиция сил, действующих со стороны поля, созданного двумя зарядами Q_1 и Q_1 на заряд Q.

<u>Напряженностью $\vec{E}$ электрического поля</u> в данной точке пространства называется векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой электрического поля и равная:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{пр}}, \tag{4}$$

где $\vec{F}$ – сила, с которой поле действует на пробный заряд величины $Q_{пр}$, помещенный в данную точку пространства. Из (2) вытекает формула для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \tag{5}$$

где $\vec{r}$ –радиус-вектор, проведенный из места расположения заряда Q в точку наблюдения. Численно напряженность поля, создаваемого зарядом Q в некоторой точке пространства, равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку пространства.

Из (3) и (4) вытекает **<u>принцип суперпозиции</u>** для напряженностей электрических полей $\vec{E}_i$ создаваемых системой зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\ , \tag{6}$$

где $\vec{E}_i$ –напряженность электрического поля, создаваемого в точке наблюдения i -тым зарядом Q_i.

Пусть точечный заряд Q создает в вакууме электрическое поле. Рассмотрим, чему равна работа, совершаемая этим полем, по перемещению точечного заряда $Q_{пр}$ из начального положения 1 в конечное положение 2 вдоль произвольной кривой 1-2:

$$A_{12} = \int_{12}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Q\cdot Q_{пр}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{12}\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r^3}. \tag{7}$$

Но $\vec{r}\cdot d\vec{r} = r\cdot dr,$ в чем легко убедиться, дифференцируя тождество $\vec{r}^{\,2} = r^2.$

Поэтому интеграл (7) сводится к виду:

$$A_{12} = \frac{Q \cdot Q_{np}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{12} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q \cdot Q_{np}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_1} - \frac{Q \cdot Q_{np}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_2}. \qquad (8)$$

Таким образом, при любом выборе начальной и конечной точек 1 и 2 работа A_{12} не зависит от формы пути, а определяется только положением этих точек. Силовые поля, удовлетворяющие такому условию, называются **потенциальными**, а силы действующие в таких полях **консервативными**. Следовательно, электрическое поле точечного заряда является потенциальным полем.

Работу, совершаемую потенциальным полем, можно представить в виде:

$$A_{12} = W(r_1) - W(r_2), \qquad (9)$$

где функция координат $W(r)$ получила название потенциальной энергии.

В частности, для электрического поля из (8) и (9) следует:

$$W(r) = \frac{Q \cdot Q_{np}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (10)$$

Пусть теперь в электростатическом поле заряд Q_{np} перемещается из т.1 в т.2 сначала по пути 1-3-2, а затем обратно в т.1, но по пути 2-4-1. В этом случае работы по этим двум путям различаются лишь знаком $A_{132} = -A_{241}$ (рис. 3). Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути (как и в нашем случае, по пути 1-3-2-4-1) работа в электростатическом поле равна нулю, то есть:

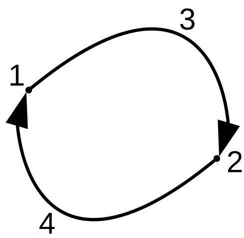


Рис.3. Работа по перемещению пробного заряда $Q_{пр}$ в электростатическом поле $A_{132} = -A_{241}$. Работа по замкнутому контуру: $A_{13241} = A_{132} + A_{241} = 0$.

$$A_{13241} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \qquad (11)$$

Если разделить теперь выражение (11) на $Q_{пр}$, то придем к:

$$\oint \frac{\vec{F}}{Q_{пр}} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \qquad (12)$$

Интеграл $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ называется **<u>циркуляцией вектора</u>** $\vec{E}$ по соответствующему замкнутому кругу.

Таким образом, мы пришли еще и к одному определению потенциальности поля: векторное поле $\vec{E}$ называется потенциальным, если циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна нулю: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.

Поле электрических зарядов, кроме напряженности $\vec{E}$, можно охарактеризовать еще одной величиной – потенциалом поля φ.

<u>Потенциал поля</u> φ это энергетическая характеристика поля, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля:

$$\varphi = \frac{W}{Q_{np}}. \quad (13)$$

Для электростатического поля, созданного точечным зарядом Q, потенциал поля в точке, отстоящей от Q на расстоянии r , равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \quad (14)$$

Для поля можно ввести также понятие разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$.

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути из точки 1 в точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (15)$$

Поставив в (15) выражение для $\vec{E}$ из (5), получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_2}. \quad (16)$$

Если единичный положительный заряд из точки r_1 с потенциалом φ_1 удаляется на бесконечность ($r_1 = \infty$), где потенциал $\varphi_2 = \varphi_\infty = 0$, то работа сил поля будет равна:

$$\varphi = A_\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \quad (17)$$

И можно дать еще одно определение потенциала.

Потенциал φ численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность.

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (18)$$

Выражение (18) обычно используется для расчета потенциала в данной точке пространства, описываемой радиус- вектором $\vec{r}$. Таким образом, мы определили две характеристики электростатического поля: Напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

Найдем их связь между собой.

Пусть 1 и 2 – бесконечно близкие точки, расположенные на оси x так, что $x_1 - x_2 = dx$. Работа при перемещении единицы заряда из точки 1 в точку 2 будет равна $E_x \cdot dx$, где E_x – проекция на ось x вектора $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z$. Эта же работа, с другой стороны, согласно (15) равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -(\varphi_2 - \varphi_1) = -d\varphi.$$

Приравнивая эти два выражения, получим $d\varphi = -E_x \cdot dx$.

Аналогичное рассуждение применимо для осей y и z. В результате получаем три соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; -E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; -E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (19)$$

Их можно объединить в одну векторную формулу:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z\right). \quad (20)$$

Так как $\vec{E}$ – вектор, то и выражение в скобках также есть вектор. Он называется градиентом скаляра (потенциала φ) и обозначается как $\nabla\varphi$ или $grad\varphi$. Его можно рассматривать как произведение символического векторного оператора ∇ (греч. буква набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{e}_z \qquad (21)$$

на скалярную величину φ.

Теперь выражение (20) можно записать короче

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \qquad (22)$$

Читается: $\vec{E}$ равно со знаком минус градиенту потенциала φ.

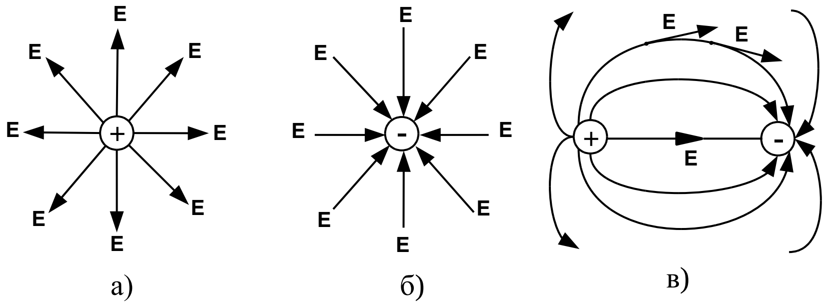


Рис.4. Силовые линии:

а), б) для положительного и отрицательного точечных зарядов; в каждой точке поля направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силовых линий;

в) для системы из двух разноименно заряженных точечных тел (диполя) направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением касательной к силовой линии в каждой точке поля.

Часто для наглядности при рассмотрении электростатического поля вводят так называемые силовые линии электрического поля или, что то же самое, линии напряженности $\vec{E}$ электрического поля. Их проводят таким образом, чтобы касательная к силовой линии в любой точке пространства указывала направление вектора $\vec{E}$ с учетом того, что силовые линии начинаются на положительных электрических зарядах, а оканчиваются на отрицательных (рис. 4).

Кроме того, число силовых линий, проходящих через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно силовым линиям, равно модулю вектора $\vec{E}$.

Если $\vec{E}$ – это число силовых линий, проходящих через площадку единичной площади, то число силовых линий, проходящих через площадку бесконечно малой площади dS, будет равно $E \cdot dS$ или точнее с учетом произвольной ориентации площадки в электрическом поле: $E \cdot dS \cdot \cos\alpha$, где α – угол между направление между вектором $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке dS.

Величина $E \cdot dS \cdot \cos\alpha$ получила название потока $d\Phi$, вектора $\vec{E}$ через бесконечно малую площадку dS. В более общем виде, вводя понятие вектора площади $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ можно записать

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS = \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right), \qquad (23)$$

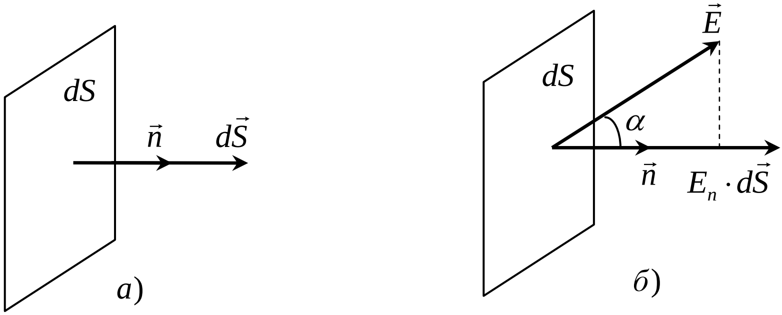


Рис.5. а) Вектор площади $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$; б) Поток вектора $\vec{E}$ через $d\vec{S}$:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$$

где $E_n = E \cdot \cos\alpha$ проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке dS (см. рис. 5).

Потоком вектора $\vec{E}$ через конечную поверхность S называется величина:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (24)$$

Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S может быть определен согласно **теореме Гаусса**:

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенной внутри этой поверхности зарядов деленной на ε_0.

Математическая запись теоремы Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Q_i}{\varepsilon_0}. \qquad (25)$$

II. Контрольные вопросы

(Цифры в скобках указывают страницы в учебнике, где можно найти ответы на вопросы: Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2[2])

1. Что понимается под точечным электрическим зарядом (12)?

2. Запишите закон Кулона в векторной форме и изобразите на рисунке направления сил при взаимодействии одноименно и разноименно заряженных точечных тел.

3. Дайте определение единицы заряда в системе СИ (15).

4. Сформулируйте принцип суперпозиции кулоновских сил.

5. Что называется напряженностью электрического поля? Потенциалом электрического поля?

6. Что такое силовые линии электростатического поля? Приведите примеры изображения полей с помощью силовых линий:

а) точечного заряда;

б) заряженной плоскости;

в) заряженного цилиндра;

г) заряженного шара (55-59).

7. Как определяется поток вектора через поверхность S ?

8. Запишите выражения, связывающие полный заряд тела с плотностями заряда: а) линейной (55); б) поверхностной (55); в) объемной(54).

9. Сформулируйте теорему Гаусса (53).

10. Разберите применение теоремы Гаусса к расчету электрических полей: а) точечного заряда (53); б) заряженной плоскости (55); в) двух заряженных плоскостей (57); г) бесконечно заряженного цилиндра (57-58); д) заряженной сферической поверхности (59); е) заряженного шара (59).

Задачи для самостоятельного решения

Задача №1

Два одинаковых положительных заряда $Q_1 = Q_2 = 5 мкКл$ находятся на расстоянии $\ell = 10 см$ друг от друга. Определить точку на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего эти заряды, в которой напряженность поля максимальна.

Указания к решению задачи:

I. Изобразите на рисунке векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, соответствующие напряженности полей, создаваемых зарядами Q_1 и Q_2. Воспользуйтесь принципом суперпозиции и для расчета результирующего поля.

II. Найдите величину результирующего поля $E_p(y)$, как функцию расстояния y вдоль перпендикуляра.

III. Учтите, что в точке, отвечающей максимальному полю, производная $\dfrac{dE_p}{dy}$ обращается в нуль.

Ответ: $y = \pm 3{,}5 см$.

Задача №2

Две бесконечные параллельные плоскости равномерно заряжены: одна с плотностью $\sigma_1 = 17{,}70 \cdot 10^{-10} \dfrac{Кл}{м^2}$, другая с плотностью $\sigma_2 = -8{,}85 \cdot 10^{-10} \dfrac{Кл}{м^2}$.

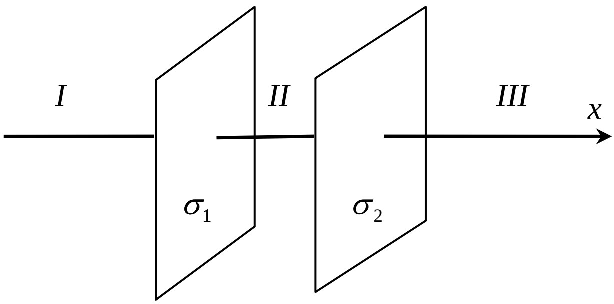


Рис.6.

Найти проекцию напряженности поля E_x в каждой из образованных плоскостями областей пространства.

Ответ: $E_I = -50 \dfrac{В}{м}$; $E_{II} = 150 \dfrac{В}{м}$; $E_{III} = 50 \dfrac{В}{м}$.

Задача №3

Две концентрические сферы с радиусами r_1 и r_2 равномерно заряжены с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2. Получить зависимость напряженности поля E от расстояния, отсчитанного от центра сфер и представить ее графически.

Указания к решению задачи:

I. Наличие сферической симметрии позволяет применить теорему Гаусса. При этом надо выделить три области пространства: 1) внутри первой сферы ($r \le r_1$), 2) между сферами ($r_1 \le r \le r_2$), 3) вне сфер ($r \ge r_2$).

II. Применить теорему Гаусса для каждой из выделенных областей, взяв в качестве вспомогательной поверхности сферу соответствующего радиуса.

III. Из полученных уравнений найдите $E(r)$ в каждой из трех выделенных областей.

Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{r_1^2 \cdot \sigma_1}{\varepsilon_0 \cdot r^2}$; $E_3 = \dfrac{r_1^2 \cdot \sigma_1 + r_2^2 \cdot \sigma_2}{\varepsilon_0 \cdot r^2}$.

Задача №4

По сфере радиуса R равномерно распределен заряд Q. Определить потенциал в центре сферы.

Указания к решению задачи:

I. Применяя теорему Гаусса, определить напряженности полей E_1 и E_2 внутри сферы и вне сферы.

II. Для определения потенциала использовать формулу (13).

III.Учесть, что согласно первому пункту потенциал φ определяется как сумма двух интегралов по двум областям пространства.

Ответ: $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R}$

Задача №5

Потенциал электрического поля определяется выражением $\varphi = \sin x + y^3 + \ln z$. Определить напряженность $\vec{E}$ этого поля.

Указание к решению задачи:

I.Использовать формулу (20).

$$\text{Ответ: } \vec{E} = -\left(\cos x \cdot \vec{e}_x + 3y^{2} \cdot \vec{e}_y + \frac{1}{z}\vec{e}_z\right)$$

Задача №6

Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho_V = a \cdot r$, где $a -$ константа. Найти зависимость напряженности поля E от расстояния, отсчитанного от центра шара.

Указания к решению задачи:

I.Разбить все пространство на две области:

$$I(r \le R) \text{ и } I(r \ge R).$$

II.Применить теорему Гаусса к каждой из областей.

III.Учесть, что заряд связан с объемной плотностью соотношением:

$$Q = \int\limits_V \rho_V dV .$$

IV.Для расчета необходимо выделить элемент объема (исходя из соображений симметрии) и записать его правильный вид.

Ответ: $E_I = \dfrac{a \cdot r^2}{4 \cdot \varepsilon_0}; E_{II} = \dfrac{a \cdot R^4}{4 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}.$

Контрольные задания по теме.

1. Чему равно отношение потоков Φ_{E2} к Φ_{E1} через две одинаковые площадки, если первую пронизывает электрическое поле напряженностью 20 В/м, направленное перпендикулярно площадке, а через вторую проходит поле напряженностью 45 В/м, направленное под углом 250^0 к ее плоскости?

2. Чему равно число потерянных капелькой масла электронов, если при распылении она приобрела заряд Q=3.2·10^{-19} Кл?

3. Два точечных заряда $+4Q$ и $+2Q$, находятся на расстоянии ℓ =20 см друг от друга. Чему равно расстояние (в см) от первого заряда до точки, где напряженность поля равна нулю?

4. Чему равна сила F(в Н), действующая на электрический заряд Q= 1,4Кл, помещенный в электрическое поле с напряженностью E= 6,8В/м?

5. Какую скорость (в км/с) приобретет протон при движении без начальной скорости между двумя точками электрического поля с разностью потенциалов $\Delta\varphi$= 350В?

6. Чему равен потенциал φ электрического поля равен (в В) в центре кольца радиусом R=8см, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ = 2,2 нКл/м?

7. Чему равен градиент потенциала $\nabla\varphi = grad\varphi$ некоторого поля с потенциалом $\varphi=2x^2 \cdot y^{1/2} \cdot z^3$?

8. Чему равна работа (в нДж), совершаемая однородным электрическим полем напряженностью E=100 В/м, направленным под углом 300 к оси x, при перемещении заряда Q=+3 нКл из точки x_1=20 см в точку x_2=40 см?

9. Протон находится при расстоянии $2r$ от положительно заряженной нити и на него действует сила F. Чему будет равна сила, действующая на протон, если его поместить на расстоянии $r/2$ от нити?

Список литературы:

1. Трофимова Т.И. Курс физики. Изд.6, М., Высшая школа, 2000. §141, стр. 216, 217.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Изд.10, М., Физматлит, 2008 , § 43 стр.123, § 79, стр.233.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. Учебное пособие для втузов.-7-е изд. Физматлит, 2001-.640с.
4. Пинский А. А. Физика [Электронный ресурс]: учебник / А. А. Пинский, Г. Ю. Граковский; под общ. ред. проф., д.э.н. Ю. И. Дика, Н. С. Пурышевой. – 3-е изд., испр. – Москва: Издательство"ФОРУМ",2013.– http://znanium.com/go.php?id=375867.
5. Ильюшонок А. В. Физика [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. В. Ильюшонок, П. В. Астахов, И. А. Гончаренко. – Москва: ИНФРА-М, 2013.– http://znanium.com/go.php?id=397226