

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра оптики и нанофотоники

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ ПО КУРСУ «АТОМНАЯ ФИЗИКА»
ЧАСТЬ 1**

Казань – 2022

УДК 535.3
ББК 22.3

*Принято на заседании учебно-методической комиссии Института физики КФУ
Протокол № 7 от 11 апреля 2022 года*

Рецензент:

доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент АНРТ **Л.Р. Тагиров**

Гайнутдинов Р.Х.

Методические указания к решению задач по курсу «атомная физика». Часть 1 / Р.Х. Гайнутдинов, А.А. Мутыгуллина, М.А. Хамадеев, М.Х. Салахов. – Казань: Казан. ун-т, 2022. – 37 с.

В настоящем учебно-методическом пособии подробно разобраны несколько задач по атомной физике, связанных с основными экспериментами, которые обусловили переход от классической к квантовой картине мира, а также дан краткий исторический и теоретический обзор. Оно может быть использовано при изучении дисциплин Б1.О.17. «Атомная физика» основной профессиональной образовательной программы 03.03.02 «Физика (Физика живых систем)» и 03.03.02 «Физика (Физика квантовых систем и квантовые технологии)», а также дисциплины Б1.О.14.06. «Атомная физика» основной профессиональной образовательной программы 03.05.01 «Астрономия (Астрофизика и космология)».

© Гайнутдинов Р.Х., 2022

© Казанский университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА.....	6
ДИСКРЕТНОСТЬ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ И АТОМНЫЕ МОДЕЛИ.....	17
ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ.....	29
ЛИТЕРАТУРА.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Атомная физика – это удивительный и во многом уникальный раздел физики. С ним связана крупнейшая научная революция в физике рубежа XIX–XX веков, результатом которой стали капитуляция классической парадигмы под натиском целой плеяды экспериментальных фактов и формирование квантовой механики. Впоследствии эксперименты с атомом водорода сыграли ключевую роль в нашем понимании того, как рождаются и уничтожаются элементарные частицы и что на самом деле представляет собой физический вакуум. Созданная для ответа на эти вопросы квантовая электродинамика стала отправной точкой к построению квантово-полевой модели микромира, венцом которой является Стандартная модель. Даже сегодня атомы все ещё остаются в фокусе физиков, занимающихся сверхточными измерениями энергетических переходов. Обнаруженное в 2010 году несоответствие зарядового радиуса протона, измеренного в различных экспериментах, до сих пор требует объяснения [1].

Знания, получаемые студентами-физиками о физике атомов и квантовой механике, качественно отличают их от студентов других факультетов и институтов, где также преподают общую физику, но ограничиваются лишь оптикой, формируя у них лишь классическую картину мира. Эта картина мира хорошо согласуется с интуитивным представлением об окружающей реальности, которое мы формируем посредством органов чувств. Квантовые же законы, наоборот, невозможно увидеть или услышать. Для их понимания и формирования квантовой картины мира у нас есть единственный инструмент – математика.

Мостиком между этими двумя реальностями стали знаменитые эксперименты конца XIX, начала XX века, решению задач по которым и посвящено данное пособие. Экспериментальные основы атомной и квантовой физики можно поделить на три большие группы: корпускулярные свойства

электромагнитных волн, дискретность атомных состояний и волновые свойства микрочастиц. Такое же разделение имеет и данное пособие.

Оно сконцентрировано в первую очередь на задачах и их подробном решении, нежели на теории или истории физической проблемы. Последнее, безусловно, присутствует на страницах пособия, но его целью является погружение читателя в историко-теоретический контекст задачи, поэтому оно идёт сразу после формулировки условия в краткой форме и предшествует решению. Сами задачи взяты из классических учебников И.Е. Иродова [2, 3] и частично переработаны.

КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Задача 1.1 Вычислить импульсы (в единицах эВ/ c , c – скорость света) фотонов с длинами волн 0,50 мкм, 0,25 нм и 4,0 пм

В атомной физике и физике высоких энергий импульс измеряется в единицах эВ/ c (не путать скорость света с секундой!). Преимущества такого подхода проявляются в полной мере, когда речь идёт о фотоне, поскольку, если мы знаем энергию фотона в эВ, то мы автоматически знаем его импульс благодаря формуле

$$p = \frac{E}{c}. \quad (1.1.1)$$

Таким образом, вычисление импульса в эВ/ c требует особой внимательности, поскольку это один из тех редких случаев, когда физическая константа – в данном случае скорость света – входит в состав внесистемной единицы. Это означает, что при подстановке констант в формулу скорость света в знаменателе должна быть вынесена из вычислений.

Данный факт вызывает трудности при вычислении импульса фотона при известной длине волны. Объединяя формулы $E = \hbar\omega$ и $\omega = 2\pi c/\lambda$ с формулой (1), мы получаем соотношение

$$p = \frac{\hbar \cdot 2\pi c}{c \cdot \lambda}. \quad (1.1.2)$$

Дабы вычислить импульс в эВ/ c , необходимо игнорировать скорость света в знаменателе, что удаётся сделать не всем. Чтобы избежать этого искушения, можно использовать другой подход. Вместо этого можно сначала вычислить энергию фотона в эВ, что сразу же даст нужное числовое значение. Для этого запишем энергию фотона через длину волны:

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (1.1.3)$$

Стоит, однако, иметь в виду, что прямая подстановка констант в формулу (1.1.3) даст ответ в системных единицах (Дж, эрг), но не в эВ. Для того, чтобы

получить ответ в эВ, необходимо в знаменатель добавлять размерный множитель, равный по модулю элементарному заряду. Чтобы в будущем избегать ошибок, связанных с этим, и выработать правильный алгоритм действий, авторы данного пособия рекомендуют придерживаться следующих правил:

1) Переменные, чья размерность подразумевает использование эВ, следует помечать индексом «eV», например E_{eV} . Поскольку эВ – это стандарт при использовании энергетических единиц в атомной физике, авторы задач, в которых требуется вычислять энергии, оставляют этот факт как нечто само собой разумеющееся (например, такая ситуация имеет место в задачнике Иродова [2]). Поэтому в такой ситуации при записи условия задачи письменно в поле «Найти» полезно указывать индексированные переменные. Этот же принцип работает, когда энергетические величины даются в условии задачи в эВ. В этом случае их стоит индексировать при записи «Дано».

2) Переменные в теоретических формулах стоит оставлять без индекса, такими, какими они даются в учебниках или задачниках (например, всё в том же задачнике Иродова). Зрительная разница между индексированными и не индексированными переменными послужит напоминанием необходимости провести перевод из системных единиц в эВ или наоборот.

3) Связь величин осуществляется с помощью простого соотношения

$$E_{eV} = \frac{E}{e}, \quad (1.1.4)$$

где под e понимается параметр перевода, в системе СИ равный $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж/эВ.

Решение. Вычислим энергию фотона в эВ для трёх данных длин волн. Для этого подставим (1.1.3) в (1.1.4):

$$E_{eV} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda e}. \quad (1.1.5)$$

Прямая подстановка 0,50 мкм, 0,25 нм и 4,0 пм в (1.1.5) даёт приблизительно 2,5 эВ, 5 кэВ и 0,31 МэВ соответственно. Это даёт нам возможность сразу записать ответ: $p_1 = 2,5$ эВ/с; $p_2 = 5$ кэВ/с; $p_3 = 0,31$ МэВ/с.

Существует, однако, два способа сократить вычислительную работу в этой задаче. Первый основан на том, что энергия обратно пропорциональна длине волны, а всё остальное – это табличные константы. Это позволяет вычислить вторую энергию через первую:

$$E_{2,eV} = \frac{E_{1,eV} \lambda_1}{\lambda_2},$$

и точно так же вычислить третью. Такой способ быстрее, поскольку длины волн в условии отличаются всего на три порядка, в отличие от высоких степеней у физических констант, но он даст ошибку, если первая энергия вычислена неверно.

Другой способ основан на использовании мнемонической константы $L = 2\pi\hbar c/e$, равной 1242 нм·эВ. Её использование позволяет в уме очень быстро переводить нм в эВ. Например, энергия фотона с длиной волны 1 мкм = 1000 нм равна $1242/1000 \approx 1,2$ эВ. Или длина волны фотона с энергией 2 эВ равна $1242/2 = 621$ нм (промышленные красные светодиоды).

Задача 1.2 Найти работу выхода A с поверхности некоторого металла, если при поочередном освещении его электромагнитным излучением с длинами волн $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм максимальная скорость фотоэлектронов отличается в $\eta = 2,0$ раза.

В 1900 году Планк получил формулу для спектральной плотности теплового излучения, хорошо согласующуюся с экспериментальными данными. Он предположил, что энергия осциллятора может принимать не любые, а только вполне определенные дискретные значения, пропорциональные некоторой элементарной порции – кванту энергии. В связи с этим испускание и поглощение электромагнитного излучения осциллятором (веществом) осуществляется не непрерывно, а дискретно в виде отдельных квантов, величина которых пропорциональна частоте: $E = \hbar\omega$.

Квантовая гипотеза Планка была оценена по достоинству и получила дальнейшее развитие прежде всего в работах Эйнштейна. Он первый указал на

то, что кроме теплового излучения существуют и другие явления, которые можно объяснить на основе квантовой гипотезы. Так, гипотеза о корпускулярных свойствах света позволила объяснить результаты экспериментов по фотоэффекту, совершенно непонятные с позиций классической электромагнитной теории. В частности, классическая теория не могла объяснить наличие красной границы фотоэффекта – длины волны, при превышении которой фотоэффект исчезает – и линейной зависимости кинетической энергии от частоты.

Все трудности отпадают, если фотоэффект рассматривать на основе гипотезы Эйнштейна о световых квантах. В соответствии с ней падающее монохроматическое излучение рассматривается как поток фотонов. Полученная электроном энергия $\hbar\omega$ частично затрачивается на освобождение из металла, а оставшаяся часть переходит в кинетическую энергию вылетевшего из металла фотоэлектрона. Минимальную энергию, необходимую для освобождения электрона из металла, т. е. для преодоления потенциального барьера, называют работой выхода A . Следовательно, для фотоэлектронов с максимальной кинетической энергией K_{\max} закон сохранения энергии в элементарном акте поглощения фотона можно записать так:

$$\hbar\omega = A + K_{\max}. \quad (1.2.1)$$

Эта формула впервые была получена Эйнштейном и ныне носит его имя.

Решение. Запишем уравнение (1.2.1) для обеих длин волн света, которыми был облучён металл в задаче:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 &= A + \frac{mv_1^2}{2} \\ \hbar\omega_2 &= A + \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

где v_1 и v_2 — максимальные скорости фотоэлектронов, причем $v_1 > v_2$, поскольку в данном случае $\omega_1 > \omega_2$. Из уравнений (1.2.2) составим отношение

$$\frac{\hbar\omega_1 - A}{\hbar\omega_2 - A} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \eta^2. \quad (1.2.3)$$

Из этого соотношения, учитывая, что $\omega = 2\pi c/\lambda$, а также рекомендации, данные в предыдущей задаче, находим:

$$A_{ev} = \frac{2\pi\hbar c}{e\lambda_2} \frac{\eta^2 - \lambda_2/\lambda_1}{\eta^2 - 1} = 1,9 \text{ эВ}.$$

Задача 1.3 После увеличения напряжения на рентгеновской трубке в $\eta = 2,0$ раза первоначальная длина волны λ_0 коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda = 50$ пм. Найти λ_0 .

Рентгеновская трубка представляет собой вакуумный баллон, в котором находится нагреваемый током катод – источник термоэлектронов, и расположенный напротив анод, часто называемый антикатодом (см рис. 1.1). Ускорение электронов осуществляется высоким напряжением V , создаваемым между катодом и антикатодом.

Под действием напряжения V электроны разгоняются до энергии $e \cdot V$. Попав в металлический антикатод, электроны резко тормозятся, вследствие чего и возникает так называемое тормозное рентгеновское излучение. Спектр этого излучения при разложении по длинам волн оказывается сплошным, как и спектр видимого белого света. На рис. 1.1 показаны экспериментальные кривые распределения интенсивности I_λ (т. е. $dI/d\lambda$) по длинам волн λ , полученные для разных значений ускоряющего напряжения V .

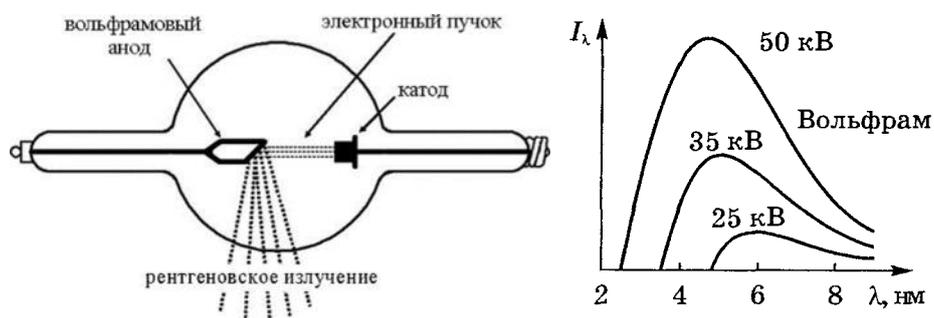


Рис. 1.1. Устройство рентгеновской трубки и типичный спектр испускаемого ею излучения

И здесь мы обнаруживаем наличие коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра. В целом процесс излучения при торможении электрона в металле антикатада весьма сложен, но существование коротковолновой границы с корпускулярной точки зрения имеет очень простое объяснение. Действительно, если излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении, то величина кванта $\hbar\omega$ не может быть больше энергии электрона eV . Отсюда следует, что частота ω_{max} излучения не может превышать значения eV/\hbar . Значит, длина волны излучения не может быть меньше, чем

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{eV}. \quad (1.3.1)$$

Существование такой границы является одним из наиболее ярких проявлений квантовых свойств рентгеновского излучения. С позиции классической электромагнитной теории коротковолновой границы вообще не должно быть.

Решение. Как видно из этой формулы, длина волны коротковолновой границы обратно пропорциональна напряжению на трубке, поэтому слова «изменилась на $\Delta\lambda$ » означают, что она уменьшилась на такую величину. Поэтому согласно (1.3.1) можно записать:

$$\lambda_0 = \frac{L}{V_1}, \quad \lambda'_0 = \lambda_0 - \Delta\lambda = \frac{L}{V_2},$$

где V_1 и V_2 — напряжения на рентгеновской трубке. Разделив второе равенство на первое, получим:

$$\frac{\lambda_0 - \Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{\eta},$$

откуда находим, что

$$\lambda_0 = \frac{\eta}{\eta - 1} \Delta\lambda = 0,10 \text{ нм}.$$

Задача 1.4 Фотон с энергией ε рассеялся под углом θ на покоившемся свободном электроне. Определить угол φ , под которым вылетел электрон отдачи относительно направления налетевшего фотона.

Комптон (1923) открыл явление, в котором можно было наблюдать, что фотону присущи энергия и импульс. Результаты этого опыта – еще одно убедительное подтверждение гипотезы Эйнштейна о квантовой природе самого электромагнитного излучения.

Комптон исследовал рассеяние жесткого рентгеновского излучения на образцах, состоящих из легких атомов, таких как графит, парафин и др. Схема его установки показана на рис. 1.2. Он обнаружил, что в рассеянном излучении, наряду с исходной длиной волны λ , появляется смещенная линия с длиной волны $\lambda' > \lambda$. Это получило название комптоновского смещения, а само явление — *эффекта Комптона*.

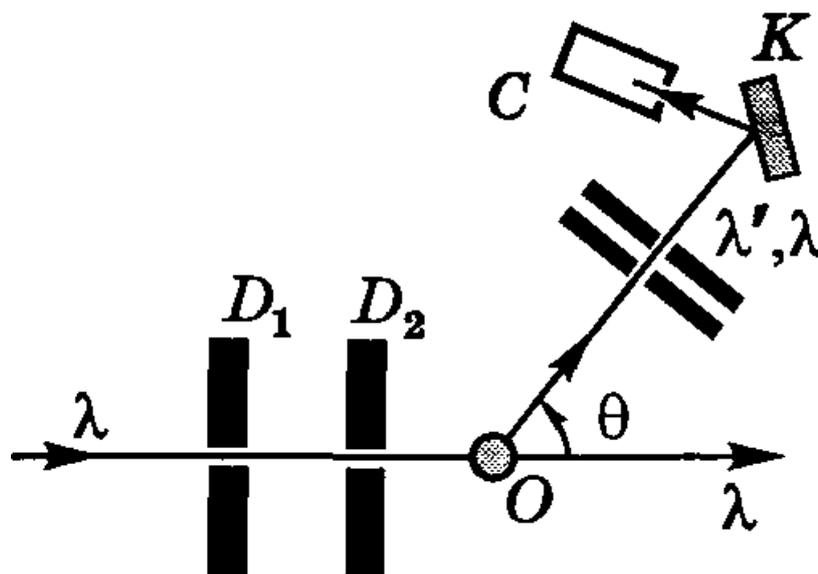


Рис. 1.2. Схема эксперимента Комптона

Источником рентгеновского излучения служила рентгеновская трубка с молибденовым антикатодом. Диафрагмы D_1 и D_2 выделяли узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения, который падал затем на

исследуемый образец O . Для исследования спектрального состава рассеянного излучения оно после прохождения ряда диафрагм попадало на кристалл K рентгеновского спектрографа, а затем в счетчик C (или на фотопластинку).

Опыт показал, что наблюдаемое комптоновское смещение $\lambda' - \lambda$ не зависит от материала рассеивающего образца и длины волны λ падающего излучения, а определяется лишь углом θ между направлениями рассеянного и падающего излучений. Комптон предположил, что рассеяние рентгеновского кванта с изменением длины волны надо рассматривать как результат одиночного акта столкновения его с электроном. В таком случае можно показать, что связь комптоновского смещения с углом определяется выражением

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta), \quad (1.4.1)$$

где λ_C – это комптоновская длина волны для частицы массы m . Эта константа связана с другими фундаментальными константами соотношением

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}, \quad (1.4.2)$$

и для электрона равна $2,43 \cdot 10^{-10}$ см.

Решение. Из треугольника импульсов (рис. 1.3), выражающего собой закон сохранения импульса, видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k' \sin \theta}{k - k' \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\lambda' / \lambda - \cos \theta}. \quad (1.4.3)$$

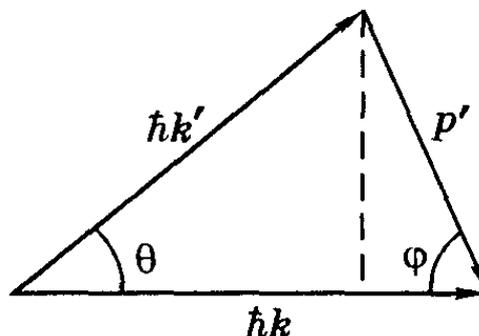


Рис. 1.3. Графическое представление закона сохранения импульса

Согласно формуле (1.4.1), определяющей комптоновское смещение,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \theta). \quad (1.4.4)$$

Подставив (1.4.3) в (1.4.4), получим после несложных преобразований:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)(1 + \lambda_c / \lambda)} = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \varepsilon / mc^2},$$

где учтено, что

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{mc\lambda} = \frac{\varepsilon}{mc^2}.$$

Задача 1.5 При какой длине волны фотона его импульс равен импульсу электрона с кинетической энергией 0,30 МэВ?

Когда речь идёт об электроне с кинетическими энергиями, близкими или больше одного МэВ, нужно учитывать релятивистские эффекты. В частности, использование формулы для кинетической энергии в виде $K = p^2/2m$ даст неправильный ответ. Вместо этого следует учесть, что в случае свободной релятивистской частицы кинетическая энергия определяется соотношением

$$K = E - mc^2, \quad (1.5.1)$$

где E – это её полная энергия. Связь полной энергии с импульсом определяется следующим соотношением:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (1.5.2)$$

Выражая полную энергию из (1.5.1) и подставляя её в (1.5.2), мы можем получить формулу для импульса

$$p = \frac{\sqrt{K(K + 2mc^2)}}{c}. \quad (1.5.3)$$

Комбинируя эту формулу с (1.1.2), получаем

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K + 2mc^2)}}. \quad (1.5.4)$$

Слепая подстановка данных из условия задачи чревата уже упомянутой выше проблемой, связанной с использованием размерности эВ. Чтобы

следовать изложенным выше рекомендациям, следует выписать данную в условиях энергию в виде $K_{ev} = 0,3 \text{ МэВ}$, а также связь $K = K_{ev} \cdot e$. Тогда выражение (1.4.4) может быть переписано в виде

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{e} \frac{1}{\sqrt{K_{ev} \left(K_{ev} + \frac{2mc^2}{e} \right)}}. \quad (1.5.5)$$

Здесь мы нарочно занесли размерный множитель e в знаменатель к удвоенной энергии покоя электрона, дабы можно было воспользоваться её табличным значением в энергетических единицах, а именно $1,02 \text{ МэВ}$. Этот приём упрощает вычисление корня в (1.5.5). Таким образом, мы получаем ответ, равный 2 пм .

Задача 1.6 Найти скорость электрона, при которой его импульс равен импульсу фотона с $\lambda = 5,0 \text{ пм}$.

Одной из трудностей данной задачи является то, что решающий её должен обладать определённой физической интуицией, которая подсказала бы ему, что фотон, описанный в условии, является квантом гамма-излучения. Это частицы с очень высокими энергиями и импульсами, если сравнивать их с масштабами атомной физики. Это означает, что при передаче таких импульсов электронам их следует рассматривать релятивистски, в противном случае ошибка вычисления будет очень большой.

Связь импульс-скорость в релятивистской механике определяется выражением

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (1.6.1)$$

Сопоставляя его с импульсом фотона, определённым с помощью формулы (1.1.2), мы получаем уравнение на скорость:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (1.6.2)$$

Его решением является следующее выражение:

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc\lambda}{2\pi\hbar}\right)^2}} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (1.6.3)$$

Можно легко убедиться, что если в (1.6.3) положить длину волны достаточно большой, то знаменатель упростится, и получится ответ, который мог бы быть выведен, если бы вместо релятивистской формулы (1.6.1) мы подставляли в (1.6.2) более простое выражение $p = mv$.

ДИСКРЕТНОСТЬ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ И АТОМНЫЕ МОДЕЛИ

Задача 2.1 Альфа-частица с кинетической энергией 0,27 МэВ рассеялась золотой фольгой на угол 60° . Найти соответствующее значение прицельного параметра.

Первые экспериментальные свидетельства того, что практически вся масса атома сосредоточена в ядре, были даны Резерфордом в 1911 году с помощью рассеяния α -частиц (ядер атомов гелия) тонкой металлической фольгой. Было обнаружено, что подавляющее число α -частиц рассеивалось на небольшие углы (не больше $\sim 3^\circ$). Вместе с тем наблюдались также отдельные α -частицы, рассеянные на большие углы. Относительно последних Резерфорд сделал вывод, что такие частицы появляются в результате единичного акта их взаимодействия с ядром атома.

Исходя из предположений, что взаимодействие указанных α -частиц с ядром является кулоновским, а заряд и масса ядра локализованы в очень малой области атома, Резерфорд разработал количественную теорию рассеяния α -частиц и вывел формулу для распределения рассеянных α -частиц в зависимости от угла отклонения θ . В своих рассуждениях Резерфорд принимал во внимание рассеяние α -частиц только на ядрах, поскольку заметного отклонения α -частиц электронами не может быть из-за того, что масса электронов на четыре порядка меньше массы α -частиц.

Когда α -частица пролетает вблизи ядра, ее траектория представляет собой гиперболу, причем угол отклонения α -частицы – угол θ – равен углу между асимптотами гиперболы (см рис. 2.1)

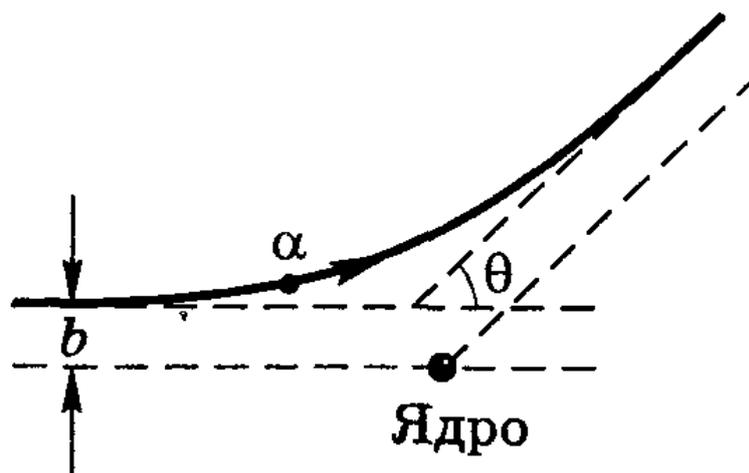


Рис. 2.1. Рассеяние α -частицы на ядре

Для угла θ было получено выражение (в системе СИ)

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = k \frac{qq_0}{2bK}, \quad (2.1.1)$$

где q и q_0 — заряды налетающей частицы и ядра, b — прицельный параметр, т. е. расстояние от ядра до первоначального направления движения налетающей частицы, когда она находится вдали от ядра (см. рис. 2.1), K — кинетическая энергия частицы вдали от ядра, $k = 1/4\pi\epsilon_0$. С подробным выводом формулы (2.1.1) вы можете ознакомиться, например, в Приложении 2 учебника [3]. Именно она требуется для решения данной задачи.

Решение. С точки зрения уравнений задача решается в одно действие, а именно выносом прицельного параметра в левую часть (2.1.1):

$$b = k \frac{qq_0}{2K \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}. \quad (2.1.2)$$

Однако только этого недостаточно. Решающий должен также уметь видеть входные данные для задачи, которые записаны словами. В частности, речь идёт об определении параметров снаряда и мишени q и q_0 , соответственно. Для этого нужно воспользоваться таблицей Менделеева, а также тем фактом,

что α -частица – это ядро атома гелия. Тогда можно положить $q = 2 \cdot e$ и $q_0 = 79 \cdot e$. Здесь e – это элементарный заряд, равный $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

С другой трудностью, которая возникает при решении данной задачи, мы уже знакомы, и она связана с тем, что в её условиях фигурирует энергия, заданная в эВ. Мы обойдём её уже привычным способом, введя кинетическую энергию из условия в проиндексированном виде $K_{ev} = 0,27$ МэВ. Внимательный читатель может заметить в этом случае некоторое противоречие, при использовании символа e и как элементарного заряда, и как параметра перевода, поскольку это подразумевает разные размерности. Впрочем, преимуществом этого является вычислительное удобство, связанное с тем, что по модулю эта величина одинакова в обеих своих ипостасях. В самом деле, подстановка $K_{ev} \cdot e$ в знаменатель в (2.1.2) приводит к выражению

$$b = k \frac{158e}{2K_{ev} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}} \quad (2.1.3)$$

и избавляет нас от необходимости вычислять квадрат элементарного заряда. Дальнейшие вычисления выражения (2.1.3) не представляют каких-либо трудностей и дают ответ, равный $b = 0,73$ пм.

Задача 2.2 Найти для водородоподобного иона радиус n -й боровской орбиты и скорость электрона на ней. Вычислить эти величины для первой боровской орбиты атома водорода и иона He^+ .

Эксперименты Резерфорда привели его к формулировке планетарной модели атома. Эта модель базировалась исключительно на законах классической механики, что выражалось в двух её недостатках. Во-первых, такие атомы были принципиально неустойчивы из-за радиационного трения, а во-вторых, спектры таких систем должны были представлять эквидистантный набор частот, чего не наблюдалось на практике. Вместо этого физики того времени наблюдали в спектрах неупорядоченный набор линий. Исключением

составляли спектры водорода и водородоподобных ионов, чьи спектральные закономерности были установлены Бальмером в 1885 году.

Примечательно, что выведенная им формула долгое время не находила своего применения ни у физиков, ни у астрономов, до тех пор, пока в феврале 1903 года с ней не познакомился Нильс Бор, который к тому моменту пытался построить количественную атомную модель, которая бы удовлетворительно объясняла эксперименты Резерфорда. Бору даже приписывают фразу: «Как только я увидел формулу Бальмера, весь вопрос стал мне немедленно ясен» [4].

В результате Бором была сформулирована атомарная модель, носящая сегодня его имя, которая сыграла важнейшую роль в переходе от классических представлений к квантовым. Она базируется на двух постулатах, первый из которых утверждает, что атом без излучения может длительное время находиться только в определенных, так называемых стационарных состояниях, которые характеризуются дискретными значениями энергии.

Чтобы получить согласие с результатами наблюдений, Бор предположил, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых его момент импульса равен натуральному числу в единицах постоянной Планка:

$$L = n\hbar, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2.1)$$

Решение. Поскольку атом Бора всё ещё остаётся системой, подчиняющейся законам классической механики, то к электрону, вращающемуся вокруг очень тяжёлого ядра с зарядом Ze по круговой орбите, можно применить 2-й закон Ньютона: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Его можно переписать в скалярном виде, если сразу проговорить, что кулоновская сила $F = k \cdot Ze^2/r^2$, как и центростремительное ускорение, всегда направлена к центру:

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (2.2.2)$$

Здесь r и v – это искомые неизвестные в задаче. Чтобы их найти, нам нужно второе уравнение, где они могли бы быть связаны между собой, и таким уравнением станет предположение Бора (2.2.1). В силу сугубо плоского и

кругового движения электрона проигнорируем векторную природу как самого орбитального момента, так и скорости, и радиуса, и сразу запишем второе уравнение в скалярном виде:

$$rmv = n\hbar. \quad (2.2.3)$$

Стоит обязательно отметить, что мы воспользовались нерелятивистским соотношением для скорости и импульса $p = mv$. Это справедливо в случае легких атомов, однако, как мы увидим позже, в случае тяжёлых атомов нужно использовать более общую формулу. Из (2.2.3) мы можем выразить скорость

$$v = \frac{n\hbar}{rm} \quad (2.2.4)$$

и подставить её в (2.2.2). Получившееся выражение позволит нам записать формулу для радиуса n -й боровской орбиты произвольного водородоподобного иона:

$$r = \frac{\hbar^2}{kme^2} \frac{n^2}{Z}. \quad (2.2.5)$$

Подставляя в (2.2.5) значения $n = 1$ и $Z = 1, 2$, мы получаем $0,53 \cdot 10^{-10}$ м и $0,26 \cdot 10^{-10}$ м, соответственно. Первое значение называется радиусом первой боровской орбиты или просто *боровским радиусом*. Эта константа играет важную роль и вновь появляется уже в квантовой механике атома водорода, несмотря на то, что боровские постулаты при этом не используются. Если принять за размер атома диаметр боровской орбиты, то мы получим число, примерно равное 0,1 нм. Этому значению равна внесистемная единица, которая называется «ангстрем» и обозначается Å. В ангстремах удобно измерять размеры атомов и молекул, а также межатомные расстояния в кристаллографии.

Для вычисления скорости подставим (2.2.5) в (2.2.4). Прямое вычисление полученного выражения даст правильный ответ к задаче. Однако нам хотелось бы проиллюстрировать с его помощью несколько фактов. Для это запишем выражение для величины v/c :

$$\frac{v}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} \frac{Z}{n}. \quad (2.2.6)$$

Появившаяся в выражении дробь $ke^2/\hbar c$ представляет собой довольно важную для теоретической физики константу – *постоянную тонкой структуры* α . Её замечательной особенностью является то, что она безразмерна и примерно равна $1/137$ в любой системе единиц. Постоянная тонкой структуры является фундаментальной константой связи, характеризующей электромагнитное взаимодействие, и входит в состав двух десятков констант Стандартной модели [5]. Обратите внимание, что туда не входят привычные нам скорость света и постоянная Планка, поскольку мы всегда можем выбрать такую систему единиц, в которой они равны единице (такая система распространена, например, в квантовой электродинамике).

Помимо сугубо фундаментальных аспектов, формула для скорости, выраженная через постоянную Планка, ускоряет вычисления искомых скоростей, поскольку число 137 довольно компактное по меркам остальных констант. Подставляя в (2.2.6) значения $n = 1$ и $Z = 1, 2$, мы получаем примерно $2,2 \cdot 10^6$ м/с и $4,4 \cdot 10^6$ м/с, соответственно.

Формула (2.2.6) помимо прочего позволяет нам проанализировать применимость нерелятивистского приближения, поскольку параметр $\beta = v/c$ является определяющим в специальной теории относительности. В самом деле, если для водорода для первой орбиты параметр β равен $1/137 \ll 1$, то для водородоподобного урана на той же орбите параметр β составляет уже $0,67$, что свидетельствует о сильных релятивистских эффектах. Это согласуется с современной квантовой механикой, из которой следует, что электроны на внутренних оболочках тяжёлых ядер действительно существенно релятивистские.

Задача 2.3 У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 59,3$ нм?

Второй постулат Бора гласит следующее:

При переходе атома из стационарного состояния с большей энергией E_2 в стационарное состояние с меньшей энергией E_1 происходит излучение кванта света (фотона) с энергией $\hbar\omega$:

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega. \quad (2.3.1)$$

Такое же соотношение выполняется и в случае поглощения, когда падающий фотон переводит атом с низшего энергетического уровня E_1 на более высокий E_2 , а сам исчезает. Чтобы связать спектральные свойства борковского атома с его внутренними характеристиками, нам необходимо связать их с полной энергией электрона на n -й орбите. Для этого мы воспользуемся нерелятивистской формулой

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} - k \frac{Ze^2}{r}. \quad (2.3.2)$$

Формула (2.3.2) не содержит члена, содержащего массу покоя электрона. Его там не будет, даже если переписать (2.3.2) в релятивистской форме, поскольку в контексте излучения мы, согласно (2.3.1), должны проводить вычитание энергий разных уровней, и коль скоро массовый член постоянен, он выпадает из вычислений.

Дальше мы можем подставить (2.2.5) и (2.2.6) в (2.3.2) и получить выражение

$$E_n = -k^2 \frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}. \quad (2.3.3)$$

Эта формула описывает уровни энергии стационарных состояний электрона в водородоподобной системе. Для атома водорода схема энергетических уровней, соответствующих (2.3.3), показана на рис. 2.2. При $n \rightarrow \infty$ уровни энергии сгущаются к своему предельному значению $E_\infty = 0$.

Состояние атома с наименьшей энергией ($n = 1$) называют основным. Для атома водорода основному состоянию соответствует энергия $E_1 = -13,53$ эВ. Эта энергия (по модулю) является энергией связи электрона в основном состоянии: $E_{св} = E_1$. Именно такую энергию надо сообщить электрону в

основном состоянии, чтобы удалить его из атома водорода. По этой причине ее называют еще и *энергией ионизации*: $E_{\text{ион}} = E_{\text{св}} = 13,6 \text{ эВ}$.



Рис. 2.2. Энергетическая структура атома водорода и спектральные серии

Теперь мы можем объединить формулы (2.3.3) и (2.3.1), чтобы получить выражение для частоты фотона

$$\omega = \frac{me^4 Z^2}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (2.3.4)$$

Это выражение с некоторой точностью соответствует обобщенной формуле Бальмера, которая была получена эмпирически:

$$\omega = R_{\infty} Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (2.3.5)$$

Здесь R_{∞} – это константа, которая носит название *постоянной Ридберга*. Теория Бора позволила связать её с другими известными на тот момент константами. Индекс « ∞ » означает, что эта величина получена в предположении, что масса ядра весьма велика, и ядро при движении электрона неподвижно.

Приведенная на рис. 2.2 система энергетических уровней помогает наглядно представить спектральные серии Лаймана, Бальмера и др. как группы переходов между соответствующими уровнями. Эти переходы изображены на рисунке вертикальными стрелками. Головной линией серии называется линия, соответствующая наименьшей частоте.

Решение. В данной задаче основная часть входных параметров описывается словами. Фамилии Лайман и Бальмер указывают нам на то, что n_1 в формуле (2.3.5) для каждой из линий равны 1 и 2, соответственно, а тот факт, что линия головная, – что n_2 отличается от n_1 на единицу, то есть $n_2 = 2$ и 3. Это позволяет записать частоты для обоих переходов:

$$\begin{aligned}\omega_{Л} &= \frac{3}{4} R_{\infty} Z^2 \\ \omega_{Б} &= \frac{5}{36} R_{\infty} Z^2\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Неизвестным в задаче является заряд иона Z . Чтобы его найти, мы должны воспользоваться значением для разности длин волн. Для этого перепишем (2.3.6) через длины волн:

$$\begin{aligned}\lambda_{Л} &= \frac{8\pi c}{3R_{\infty} Z^2} \\ \lambda_{Б} &= \frac{72\pi c}{5R_{\infty} Z^2}\end{aligned}$$

а затем возьмем их разность

$$\Delta\lambda = \lambda_{Б} - \lambda_{Л} = \frac{176\pi c}{15R_{\infty} Z^2}.$$

Отсюда заряд иона находится как

$$Z = \sqrt{\frac{176\pi c}{15R_{\infty} \Delta\lambda}} \approx 3,$$

что соответствует литию.

Задача 2.4 У некоторого водородоподобного иона первый потенциал возбуждения $\varphi_1 = 40,8$ В. Найти энергию фотона, соответствующего головной линии серии Бальмера этих ионов.

Понятие первого потенциала возбуждения отсылает нас к опытам Франка и Герца, в которых было получено прямое доказательство дискретности атомных состояний. Это было сделано с помощью схемы, представленной на рис. 2.3а. В баллоне с парами ртути под давлением порядка 1 мм рт.ст. (около 130 Па) имелись три электрода: К – катод, С – сетка и А – анод. Электроны, испускаемые горячим катодом вследствие термоэлектронной эмиссии, ускорялись разностью потенциалов V между катодом и сеткой. Величину V можно было плавно менять. Между сеткой и анодом создавалось слабое тормозящее поле с разностью потенциалов около 0,5 В. Таким образом, если какой-то электрон проходит сквозь сетку с энергией, меньшей 0,5 эВ, то он не долетит до анода. Только те электроны, энергия которых при прохождении сетки больше 0,5 эВ, попадут на анод, образуя анодный ток I , доступный измерению.

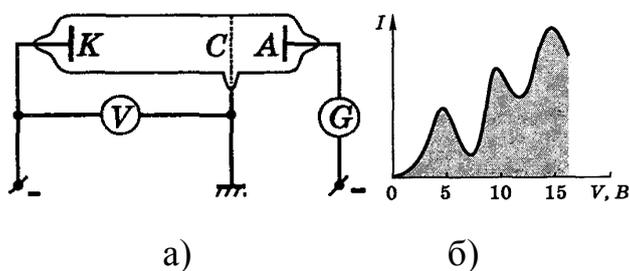


Рис. 2.3. а) Схема опыта Франка-Герца; б) зависимость анодного тока I от ускоряющего напряжения V

В опытах исследовалась зависимость анодного тока I (измеренного гальванометром G) от ускоряющего напряжения V (измеренного вольтметром V). Полученные результаты представлены на рис. 2.3б. Максимумы соответствуют значениям энергии $\Delta E_1 = 4,9$ эВ, $\Delta E_2 = 2\Delta E_1$, $\Delta E_3 = 3\Delta E_1$ и т. д.

Такой вид кривой объясняется тем, что атомы действительно могут поглощать лишь дискретные порции энергии, равные 4,9 эВ.

Аналогичные опыты были проведены в дальнейшем с атомами других газов. И для них были получены характерные разности потенциалов, их называют *резонансными потенциалами* или *первыми потенциалами возбуждения*. Резонансный потенциал соответствует переходу атома с основного состояния в ближайшее возбужденное. Таким образом, связь между первым потенциалом возбуждения и энергией, необходимой для такого перехода, определяется выражением:

$$\Delta E_1 = e\varphi_1. \quad (2.4.1)$$

Решение. Согласно схеме, приведенной на рис. 2.2, и определению, данному в подводке к предыдущей задаче, головная линия серии Бальмера соответствует переходу с уровня с $n_1 = 3$ на уровень $n_2 = 2$. Энергия такого фотона может быть получена с помощью формулы (2.3.5):

$$E_{32} = \hbar\omega_{32} = \hbar R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} \hbar R_\infty Z^2. \quad (2.4.2)$$

Другой путь к этому выражению лежит через использование формулы (2.3.3) применительно к разнице энергетических уровней

$$E_{32} = E_3 - E_2. \quad (2.4.3)$$

Получить окончательный ответ к задаче нам мешает отсутствие знания о том, про какой именно ион идёт речь (в условии это незнание отражено словом «некоторый»). Чтобы это выяснить, необходимо установить связь заряда иона с его первым потенциалом возбуждения. Для этого заметим, что поскольку этот потенциал отвечает переходу с самое первое возбужденное состояние из основного, то энергия (2.4.1) в точности равна энергии фотона головной линии серии Лаймана ($n_1 = 1, n_2 = 2$). Другими словами,

$$\Delta E_1 = E_{21} = \frac{3}{4} \hbar R_\infty Z^2 = e\varphi_1. \quad (2.4.4)$$

Из этого выражения мы можем выразить заряд иона:

$$Z = \sqrt{\frac{4e\varphi_1}{3\hbar R_\infty}} \approx 3. \quad (2.4.5)$$

Это означает, что в задаче речь идёт о дважды ионизированном атоме лития Li^{++} . Впрочем, полученный результат является промежуточным и не обязательным к вычислению. Нашей главной целью является вычисление энергии (2.4.1). Подставим для этого туда выражение для заряда (2.4.5):

$$E_{32} = \frac{5}{27} e\varphi_1.$$

Прямая подстановка данных задачи в эту формулу выдаст ответ в джоулях, что не совсем подходит под стандарты атомной физики. Здесь мы опять же можем применить данные выше рекомендации и искать ответ в виде

$$E_{32eV} = \frac{E_{32}}{e} = \frac{5}{27} \varphi_1.$$

После того, как численные значения для элементарного заряда сокращаются, вычисления становятся существенно проще, и искомая энергия оказывается равна 7,6 эВ.

Данный пример явно показывает удобство использования эВ как энергетической единицы по сравнению с остальными единицами, когда речь идёт об экспериментах в атомной физике и других областях, где присутствует разгон заряженных частиц электрическими полями.

ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ

Задача 3.1 Вычислить дебройлевские длины волн электрона, протона и атома урана с кинетической энергией 100 эВ.

Луи де-Бройль (1923) высказал и развил идею о том, что материальные частицы должны обладать и волновыми свойствами. К тому времени уже сложилась парадоксальная, но подтвержденная опытом, ситуация: в одних явлениях (интерференция, дифракция и др.) свет проявляет себя как волна, в других явлениях с не меньшей убедительностью – как поток частиц. Это и побудило де-Бройля распространить подобный корпускулярно-волновой дуализм на частицы с массой покоя, отличной от нуля.

Де-Бройль высказал гипотезу, что соотношение (1.1.2), относящееся к фотонам, имеет универсальный характер. Иными словами, всем частицам может быть сопоставлена некая волна, которая распространяется в направлении импульса \mathbf{p} частицы, и длина волны которой подчиняется выражению:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (3.1.1)$$

Эта формула получила название формулы де-Бройля, а λ – *дебройлевской длины волны* частицы с импульсом p .

Гипотеза де-Бройля представлялась современникам настолько нереальной, что довольно долго не подвергалась экспериментальной проверке. Эйнштейн, который был одним из немногих физиков, кто поддержал де-Бройля, рекомендовал немецкому физику Максу Борну его диссертацию в таких выражениях: «Прочтите её! Хотя и кажется, что её писал сумасшедший, написана она солидно» [6]. Тем не менее, Дэвиссон и Джермер в серии своих опытов (1927) обнаружили дифракцию пучка электронов на монокристалле никеля, причём длина волны электронов, которая соответствовала дифракционным максимумам, с большой точностью описывалась формулой (3.1.1).

Решение. Чтобы вычислить дебройлевскую длину волны частицы, у которой нам известна кинетическая энергия, нам требуется также знание связи этой энергии с импульсом. Данная связь зависит от того, находится ли частица в релятивистском режиме или нет. Мы уже упоминали критерии этого при решении задачи 1.5. Согласно им для всех трёх частиц из условия можно использовать простую связь $K = p^2/2m$. В этом случае формула (3.1.1) преобразуется к виду

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK}}. \quad (3.1.2)$$

При вычислении (3.1.2) нужно обязательно учесть, что кинетическая энергия задаётся в эВ. Так, дебройлевская длина волны электрона при 100 эВ будет равна 0,123 нм, или 1,23 Å, что сопоставимо с межатомным расстоянием в молекулах и кристаллах, и этот факт как раз и был подтверждён в опытах Дэвиссона и Джермера.

Вычисление дебройлевской длины волны протона можно провести аналогично, используя формулу (3.1.2). Однако можно облегчить вычисления, воспользовавшись приёмом, который мы описали в решении задачи 1.1. Можно заметить, что при равной кинетической энергии

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

Отношение масс протона и электрона является хорошо известной безразмерной константой, равной примерно 1836. Тогда дебройлевская длина волны может быть получена из более простой формулы $\lambda_p = \lambda_e / \sqrt{1836}$ и, соответственно, равна 2,86 пм.

Мы используем этот приём и для вычисления длины волны ядра урана (самого тяжёлого стабильного ядра). Для этого нам нужно знать его массу. Её можно посмотреть в таблице Менделеева, и она составляет примерно 238 а.е.м. А.е.м., или *атомная единица массы* – это внесистемная единица массы, применяемая для масс молекул, атомов, атомных ядер и элементарных частиц. Атомная единица массы определяется как 1/12 массы свободного покоящегося

атома углерода ^{12}C , находящегося в основном состоянии. Её значение составляет примерно $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Для нас, однако, важно, что эта величина с большой точностью совпадает с массой протона. Это означает, что в расчётах мы можем положить отношение массы ядра урана к массе протона, равным 238.

Отсюда $\lambda_U = \lambda_p / \sqrt{238} = 0,186$ пм.

Задача 3.2 Частица движется слева в одномерном потенциальном поле, показанном на рис. 3.1. Левее барьера, высота которого $U = 15$ эВ, кинетическая энергия частицы $K = 20$ эВ. Как и во сколько раз изменится дебройлевская длина волны частицы при переходе через барьер?

Формула (3.1.2) наглядно демонстрирует нам, что уменьшение кинетической энергии приводит к увеличению дебройлевской длины волны. Поскольку кинетические энергии одних и тех же частиц могут меняться в очень широком диапазоне, то и диапазон изменения длин волн также может быть весьма большим. В этом плане массивные частицы, например, электроны, отличаются от фотонов, чья длина волны может быть уменьшена только в то число раз, чему равен показатель преломления среды, который не может быть слишком большим. Этот факт используется для преодоления дифракционного предела в электронном микроскопе, что позволяет получить атомарное разрешение изображений.

Решение. В рассматриваемой нами задаче кинетическая энергия частицы уменьшается после того, как она влетает в барьер. Это означает, что дебройлевская длина волны частицы увеличится. Обозначая индексом 2 переменные правее барьера, а 1 – левее, мы можем записать: $\lambda_2 / \lambda_1 > 1$. Таким образом, мы отвечаем на вопрос, как изменится длина волны.

Чтобы ответить на вопрос, во сколько раз, нам нужно вычислить величину λ_2 / λ_1 . Мы воспользуемся формулой (3.1.1) и запишем

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (3.2.1)$$

Поскольку кинетические энергии в обоих случаях не превышают десятков эВ, мы можем спокойно использовать нерелятивистское приближение и привести (3.2.1) к виду

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \quad (3.2.2)$$

где $K_1 = K$. Для вычисления K_1 мы можем подробнее разобрать процесс налета на барьер, если нанесём на рисунок с барьером оси координат, см. рис. 3.1. Ось абсцисс соответствует координата. В этом случае барьерная функция $b(x)$ – это зависимость потенциальной энергии от координаты. Она равна нулю левее барьера и U правее. Иными словами, $U_1 = 0$, $U_2 = U$.

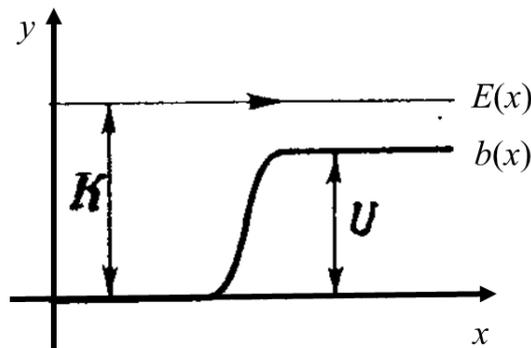


Рис. 3.1 Частица налетает на одномерный потенциальный барьер

Ось ординат соответствует энергетическим величинам. Помимо уже упомянутой функции потенциальной энергии на рис. 3.1 можно найти другую функцию $E(x) = \text{const}$. Можно также заметить, что эта вторая функция – это зависимость полной энергии от координаты, а её константный характер является отражением закона сохранения энергии. Это можно использовать, чтобы записать баланс энергий до и после барьера:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \quad (3.2.3)$$

Подставляя в (3.2.3) известные значения, мы получаем, что $K_2 = K - U$, и (3.2.2) может быть переписано в виде

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{K}{K-U}} = 2.$$

Задача 3.3 При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

Решение. Сравнение формулы (3.1.1) с формулой (1.3.2) приводит к следующему выражению

$$\frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (3.3.1)$$

При беглом взгляде на (3.3.1) может показаться, что условие, указанное в задаче, достигается при скорости электрона, равной c , что сразу же указывает на абсурдность такого ответа. Причина ошибки в том, что здесь нужно учитывать релятивистский контекст движения частицы. В частности, связь импульса электрона с его кинетической энергией описывается формулой (1.5.3), и подстановка её в (3.3.1) дает:

$$K^2 + 2mc^2K - m^2c^4 = 0. \quad (3.3.2)$$

Решение этого уравнения имеет два корня, один из которых отрицательный, и потому нами не рассматривается. Итоговый ответ:

$$K = (\sqrt{2} - 1)mc^2 = 0,21 \text{ МэВ}.$$

Задача 3.4 Интерпретировать квантовые условия Бора на основе волновых представлений: показать, что электрон в атоме водорода может двигаться только по тем круговым орбитам, на которых укладывается целое число дебройлевских волн.

Несмотря на изящно написанную формулировку задачи, не содержащей ни одной цифры или переменной, её решение требует вполне конкретных математических выкладок. Чтобы прийти к ним, необходимо понять, как наличие волновых свойств может привести к дискретизации.

Такое может происходить, когда волна интерферирует сама с собой в резонаторе. В простейшем случае резонатор представляет собой две параллельные стенки, от которых отражается волна и накладывается сама на себя, см. рис. 3.2. В случае если на длине резонатора укладывается целое число полудлин волн, групповая скорость суммы падающей и отраженной волн равна нулю во всем объеме резонатора, а сама волна носит название *стоячей*. Для стоячих волн характерно большое время затухания по сравнению с волнами, для которых не выполняется условие целочисленности полудлин волн.

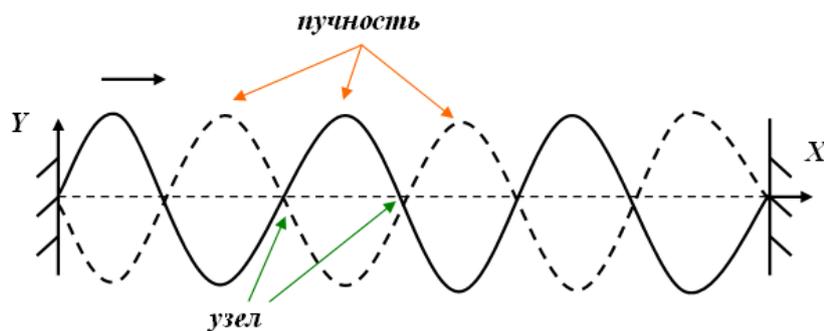


Рис. 3.2 Резонатор, образованный плоскими параллельными стенками

Такие, либо более сложные резонаторы встречаются практически во всех разделах физики и техники, где идёт речь о каких-либо волнах, будь то механические, акустические или оптические. Так, струны музыкальных инструментов, например гитары, являются резонаторами для механических волн, бегущих в них от одного конца к другому. Весь набор возможных стоячих волн создает основной тон и обертоны у звука струны, что формирует уникальный тембр инструмента.

Отдельно выделяют кольцевые резонаторы, в которых волна распространяется по замкнутой траектории. В акустике такие резонаторы известны как «шепчущие галереи» в честь галереи Собора Святого Павла в Лондоне, движение звука в которой изучал Рэлей [7]. В них при наложении волны на саму себя формируется характерная стоячая волна, для которой выполняется условия равенства длины резонатора целому числу длин волн.

Резонатор при этом может и не иметь форму кольца, главное условие – замкнутость.

Поскольку, согласно гипотезе де-Бройля электрон – это волна, для него должны быть характерны волновые явления, среди которых возникновение стоячих волн в резонаторах. Так, если электрон в рамках планетарной модели участвует в круговом движении вокруг ядра, то при равенстве периметра окружности целому числу длин волн должна возникать электронная стоячая волна. Для стоячей волны характерна постоянная нулевая групповая скорость. Это можно интерпретировать как отсутствие ускорения и, следовательно, радиационного трения. Иными словами, в атоме существуют только некоторые выделенные орбиты, на которых электрон может существовать без излучения. Этот тезис полностью пересекается с первым боровским постулатом.

Решение. Можно составить соотношение, связывающее дебройлевскую длину волны частицы λ с радиусом орбиты r :

$$2\pi r = n\lambda, \quad (3.4.1)$$

где n – это натуральное число. Подставляя в (3.4.1) формулу (3.1.1) и проводя сокращения, получаем:

$$pr = n\hbar.$$

Можно заметить, что произведение модуля импульса на модуль радиус вектора равно модулю орбитального момента электрона, совершающего круговое движение (см формулу (2.2.3)). Таким образом, мы воспроизвели боровский постулат о квантовании орбитального момента.

Подход к планетарной модели с позиции гипотезы де-Бройля кажется более фундаментальным, нежели её боровские улучшения. Во-первых, мы использовали всего одну гипотезу, которая позволила вывести сразу два условия из постулатов Бора. Во-вторых, боровская модель применима только к водородоподобному атому, в то время как гипотеза де-Бройля носит более универсальный характер и описывает, в том числе, свободные частицы.

Однако споры о том, какой подход лучше, прекратило создание квантовой механики, в которой поведение частиц описывается не

математической точкой и не частицей-волной, какими их видел де-Бройль, а волновой функцией, которая связана с вероятностью встретить частицу в пространстве. В её рамках атомная физика полностью отходит от классических и полуклассических моделей вроде планетарной или боровской и заменяет их решением стационарного уравнения Шрёдингера. Использование уравнения Шрёдингера и волновых функций, однако, знаменует собой уже квантово-механический подход к решению задач об атомах и выходит за рамки данного пособия.

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://nplus1.ru/material/2017/07/28/protonpuzzle>

2. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике : учебное пособие для вузов / И. Е. Иродов. — 18-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 420 с. — ISBN 978-5-8114-6779-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152437>

3. Иродов, И. Е. Квантовая физика. Основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов ; художник Н. А. Лозинская, Н. А. Новак. — 8-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2021. — 261 с. — ISBN 978-5-93208-517-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/172249>

4. Ельяшевич, М.А. Развитие Нильсом Бором квантовой теории атома и принципа соответствия (Работы Н. Бора 1912 — 1923 гг. по атомной физике и их значение) [Текст] / М.А. Ельяшевич // Успехи физических наук. — 1985. — Т. 147. — с. 253 — 301.

5. <https://elementy.ru/LHC/HEP/SM>

6. Louis de Broglie: Physicien et Penseur / A. George. — Paris: Albin Michel, 1953. — 497 p..

7. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/430289