КАЗАН (ИДЕЛ БУЕ) ФЕДЕРАЛЬ УНИВЕРСИТЕТЫ
Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институты
Исәпләү математикасы һәм мәгълүмати технологияләр институты

Е.В. СТРЕБКОВ, И.Б. ГАРИПОВ, Р.М. МАВЛЯВИЕВ

ИХТИМАЛЛЫКЛАР ТЕОРИЯСЕ ҺӘМ КОМБИНАТОРИКА НИГЕЗЛӘРЕ

Уку әсбабы

Казан — 2019

УДК 519.21
ББК 22.1
Г-20

Исәпләү математикасы һәм мәгълүмати технологияләр институтының математик статистика кафедрасы утырышы нигезендә (12.04.2019, Протокол № 7) һәм укыту-методик комитеты (УМК ИВМиИТ) карары (14.04.2019, Протокол № 7) белән басыла

Рецензентлар:

физика–математика фәннәре кандидаты,
Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институтының
Югары математика һәм математик модельләштерү кафедрасы доценты
Ф.Ш. Зарипов;
физика–математика фәннәре кандидаты
Исәпләү математикасы һәм мәгълүмати технологияләр институтының
Мәгълүмати системалар кафедрасы доценты
Ә.Ф. Галимянов

Стребков Е.В., Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М.

Ихтималлыклар теориясе һәм комбинаторика нигезләре: уку әсбабы / Е.В. Стребков, И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев. – Казан: Казан. ун-т, 2019. — 81 бит.

Әлеге кулланмада ихтималлык теориясенең очраклы вакыйгалар һәм комбинаторика бүлекләрен теоретик мәгълүматлар бирелә һәм бу теориягә караган мисалларның чишү үрнәкләре китерелә. Һәр параграф азагында мөстәкыйль чишү өчен биремнәр бар. Кулланма таблицалар белән тулыландырылган.

Бу уку әсбабы югары уку йортларында татар телендә белем алучы студентлар өчен тәкъдим ителә. Аннан мәктәп укытучылары һәм укучылары да файдалана ала.

Эчтәлек

Кереш

Ихтималлык теориясе элементлары югары уку йортларында күп юнәлешләрдә һәм махсус урта белем бирү оешмаларында өйрәнелә. Шул исәптән бу фәнне өйрәнү мәктәп программасында да каралган.

Ихтималлылыклы ысулларны өйрәнгәндә укучылар каршында төрле авырлыклар туа. Бу авырлыкларның объектив сәбәпләре түбәндәгечә:

1) шактый күп сандагы яңа, һәм өстәвенә гадәти булмаган төшенчәләр һәм ысулларны өйрәнүдәге катлаулылыклар;

2) күптөрле эчтәлекле һәм практик биремнәрне чишү мохтаҗлыгы.

Ихтималлык мисалларын чишкәндә комбинаторик формулаларны аңлап куллану кирәк.

Татар телендә математик белем бирүне оештырыр өчен комбинаторика һәм ихтималлык теориясе атамаларын (төшенчәләрен) тәртипкә салу, татарлаштыру һәм камилләштерү зарур.

Әлеге уку әсбабы ике төп өлештән тора: комбинаторика һәм вакыйгаларның ихтималлыкларын бәяләү буенча төп ысуллар. Тегe яки бу ысулны куллану теоретик яктан нигезләнә һәм чишелешләре белән китерелгән 63 *мисалда сурәтләнә. Шулай ук, бу уку ярдәмлегендә мөстәкыйль чишү өчен* 59 *бирем (күнегү) китерелгән.*

11*-нче параграфта интернет челтәрендә ирекле кулланылышта булган мисаллар карап узыла. Мондый мисаллар белән күбрәк танышырга теләгән укучыларга* **https://oge.sdamgia.ru** *адресы буенча мөрәҗәгать итәргә киңәш бирәбез. Әлбәттә хәзерге көндә дә бу мисалларны камилләштерү, аларның күплеген тулыландыру бара. Кызганычка каршы мисал шартларында күзгә күренеп торган хаталар да бар. Мәсәлән төрле мисалларда ешлык һәм чагыштырмача ешлык бер үк мәгънәдә кулланыла. Билгеле булган-*

*ча, 11 – нче сыйныф ахрында БДИ бирү хәзерге көндә ике төрле башкарыла. Мәктәп укучысы җиңелрәк исәпләнгән „***БАЗА***“ яки катлаулырак „***ПРОФИЛЬ***“ өлешен сайлый ала. Ихтималлык теориясе биремнәре „БАЗА“ –да* 9 *– нчы номер астында, „ПРОФИЛЬ“ – да* 4 *– нче булып бара. Мисал үрнәкләрендә җәя эчендә аларның интернет челтәрендәге оригиналь номерлары сакланды. Шул номрелардан күренгәнчә бер үк биремнәр „БАЗА“ – да да „ПРОФИЛЬ“ – да да кулланыла, кабатлана. Ягъни „БАЗА“ мисаллары „ПРОФИЛЬ“ – га карый җиңелрәк дип һич кенә дә әйтеп булмый. Шушы сәбәп аркасында бу параграфта мисаллар ике төргә аерылмады.*

9 *-нче сыйныф ахрында мәктәп укучылары ТДИ бирәләр. Ихтималлык теориясе биремнәре* 9 *– нче номер астында бара. ТДИ мисаллары БДИ мисалларына караганда җиңелрәк дип шулай ук әйтеп булмый. Бу аңлашыла да, чөнки инде* 9 *– нчы сыйныфта мәктәп укучылары ихтималлык теориясеннән күп күнегүләрне чишә беләләр. Шулай да, игътибар белән анализ ясаганда аермалар да күзгә ташлана. ТДИ биремнәрендә мисал төзүчеләр балаларның күбрәк логик фикер йөртүенә, төшенчәләрне аңлавына игътибар бирә. Шактый биремнәрне формулалар кулланмыйча, санап чыгу юлы белән дә чишеп була.*

Бу китапта шулай ук төшенчәләр – әйтемнәр сүзлеге бар. Бу сүзлекнең максаты — укучылар тарафыннан өйрәнелә торган төшенчәләрнең мәгънәсен тулырак үзләштерү.

Әсбап күп еллар дәвамында югары уку йортларында студентларга һәм мәктәпләрдә укучыларга укытып сынау узган методларга таяна.

Бу китап югары уку йортларында һәм урта белем бирү оешмаларында белем бирүчеләр һәм студентлар өчен, укытучылар һәм укучылар өчен каралган.

1-нче бүлек. Комбинаторика нигезләре

§1. Тоташтырмалар

Математиканың төрле объектларның комбинацияләрен һәм җыелмаларын өйрәнүче тармагы *комбинаторика* дип атала. Комбинаторик алымнар математиканың күп кенә өлкәләрендә кулланыла. Ихтималлык теориясенең мәсьәләләрен чишкәндә дә комбинаториканың төп төшенчәләрен һәм ул төшенчәләрнең үзенчәлекләрен белү зарур.

Элементлар саны $n_i,\ \ i = \overline{1, k}$ булган X_i күплекләрен карыйк.

Билгеләмә. Озынлыгы k булган *тоташтырма* (соединение) дип, k элементтан торган $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)$, $x_i \in X_i$ җыелмасы атала. Озынлыгы k булган тоташтырмалар күплеге $X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$ – $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_k$ күплекләренең декартча тапкырчыгышы дип атала. Кайбер очракта тоташтырманы *кортеж* дип тә атыйлар.

Күп кенә комбинаторик мәсьәләләр төп ике кагыйдәгә нигезләнеп чишелә. Алар сумма һәм тапкырчыгыш кагыйдәләре исемен йөртәләр.

Сумма кагыйдәсе. Әгәр $X_i,\ i = 1,\ 2$ күплегеннән x_i элементын n_i төрле юл белән сайлап булса, өстәвенә X_1 һәм X_2 күплекләре кисешмәсә, $X_1 \cup X_2$ күплегеннән «x_1 яки x_2» дигән бер элементны $n_1 + n_2$ төрле юл белән сайлап була.

Тапкырчыгыш кагыйдәсе. Әгәр X_i, күплекләреннән x_i элементларын n_i төрле юл белән сайлап булса, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тоташтырмасын $n_1 \cdot n_2 \cdot\ \ldots\ \cdot n_k$ төрле юл белән сайлап була. Икенче төрле әйткәндә, $X_1 \times X_2 \times\ \ldots\ \times X_n$ декартча тапкырчыгышына k озынлыктагы төрле $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ тоташтырма керә, монда $i = 1, 2, \ldots, k$. Тапкырчыгыш кагыйдәсен математик индукция ысулы белән исбатларга мөмкин.

Мисал 1. Кибеттә 4 төрдәге шоколад конфет һәм 6 төрдәге карамель бар.

а) Бер генә төрдәге конфет булган ничә төрле сатып алу башкарырга мөмкин?

б) Бер төрдәге шоколад конфет һәм бер төрдәге карамель булган ничә төрле сатып алу башкарырга мөмкин?

Чишү: X_1 һәм X_2 күплекләре тиңдәшле рәвештә шоколад конфет һәм карамель төрләреннән торсын. X_1 күплегенең $n_1 = 4$, ә X_2 күплегенең $n_2 = 6$ элементы бар.

Бер төрдәге конфет сатып алу, $X_1 \cup X_2$ күплегенең бер элементын сайлау дигән сүз. Шуның өстенә X_1 һәм X_2 күплекләре кисешмиләр. Сумма кагыйдәсе нигезендә, мондый элементны сайлау $n_1 + n_2 = 4 + 6 = 10$ ысул башкарып була.

Бер төрдәге шоколад конфет һәм бер төрдәге карамель булган сатып алу, $(x_1,\ x_2)$ тоташтырмасын сайлау дигән сүз. Монда $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Тапкырчыгыш кагыйдәсе нигезендә, мондый тоташтырманы сайлау $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 6 = 24$ ысул башкарып була.

Җавап: а) 10, б) 24.

Алга таба $X_1 = X_2 = ... = X_k = X$ дип алырбыз. $X = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n\}$ күплеге табигате теләсә нинди булган α_i элементларыннан төзелгән булырга мөмкин.

Комбинаториканың төп максаты – X күплеге элементларыннан төзелгән тоташтырманың үзенчәлекләрен истә тотып, шундый тоташтырмаларның санын табу.

Тоташтырмага X күплегенең барлык элементлары яки бер өлеше генә керәме, тоташтырмага кергән элементларның тәртибе мөһимме, бертөрле элементлар бармы — шушы сәбәпләргә карап тоташтырмалар 3 төргә бүленә: урнаштырма (размещение), алмаштырма (перестановка), оештырма (сочетание).

Мисал 2. „Русс лотосы“ билетлары 5, „Бинго“ билетлары 6 һәм „Шатлык шары“ билетлары 10 данә бар. „Русс лотосы“ яки „Бинго“ лотереясеннән бер билетны ничә төрле ысул белән сайлап алып була?

Чишү: Үзара кисешмәүче өч билетлар күплеге карап үтелә: 5 билеттан торучы X={„Русс лотосы“}, 6 билеттан торучы Y={„Бинго“}, 10 билеттан торучы Z={„Шатлык шары“}. X яки Y күплекләреннән бер билетны кушу кагыйдәсе нигезендә $5 + 6 = 11$ төрле ысул белән сайлап алып була.

Җавап: „Русс лотосы“ яки „Бинго“ лотереясеннән бер билеты кушу кагыдәсе нигезендә $5 + 6 = 11$ төрле ысул белән сайлап алып була.

Мисал 3. Отрядта 5 разведчик, 4 элемтәче һәм 2 табиб. Разведчик яки табиб булырлык итеп бер солдатны ничә төрле ысул белән сайлап алып була? Разведчик, элемтәче һәм табибтан торучы өч кешелек разведгруппаны ничә төрле ысул белән сайлап алып була?

Чишү: Үзара кисешмәүче өч солдатлар күплеге карап үтелә: 5 кешедән торучы X={„Разведчиклар“}, 4 кешедән торучы Y={„Элемтәчеләр“}, 10 кешедән торучы Z={„Табиблар“}.
а) Кушу кагыйдсе нигезенд X яки Z күплеклреннән бер солдатны $5 + 2 = 7$ төрле ысул белән сайлап алып була. б) Разведгруппа $x \in X, y \in Y, z \in Z$ булган (x, y, z) тоташтырмасыннан гыйбарәт. Шул сәбәпле тапкырлау кагыдәсе нигезендә бу группаны $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ төрле ысул белән сайлап алып була.

Җавап: Разведчиклар яки табиблар арасыннан бер солдатны 7 төрле ысул белән сайлап алып була. Разведгруппаны оештырыр өчен исә 40 вариант бар.

Мисал 4. Менюда 3 төрле шулпа, 4 төрле ботка һәм 2 төр салат бар. Көндезге тулы ашны ничә төрле ысул белән сайлап алып була?

Чишү: Көндезге тулы аш Ш - шулпа, Б – ботка, С — салат булган (Ш,Б,С) тоташтырмасыннан гыйбарәт. Бу тоташтырманы тапкырлау кагыйдәсе нигезендә $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ төрле ысул белән сайлап алып була.

Җавап: Көндезге тулы ашны сайлап алуның 24 варианты бар.

Мисал 5. Бер кешедә математикадан 7 китап бар, ә икенчесендә — 9. Алар үзара китапны китапка ничә төрле ысул белән алмаша ала?

Чишү: Беркабатлы алмашу х бер кешенең китабы, у икенче кешенең китабы булган (x,y) тоташтырмасыннан гыйбарәт. Тапкырлау кагыйдәсе нигезендә бу тоташтырманы тормышка $7 \cdot 9 = 63$ төрле ысул белән тормышка ашырып була.

Җавап: Алмашуның 63 ысулы бал.

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 1. 2 ,4 ,6 ,8 цифраларыннан торган 500-дән кимрәк ничә өчурынлы сан язып була?
а) цифралар кабатланмаган;
б) цифралар кабатланган очракларны карап узарга.

Бирем 2. Җөп цифралардан гына торган ничә ике урынлы яки өчурынлы сан бар? Ике урынлы саннарның беренче цифрасы, өч урынлы саннарның рәттән беренче һәм икенче цифрасы нуль була алмый.
а) цифралар кабатланмаган;
б) цифралар кабатланган очракларны карап узарга.

Бирем 3. Өч электр лампочкасы сүнгән яки янып торган халәттә булырга мөмкин. Төрле халәтләр саны ничәгә тигез? Барлык мөмкинлекләр өчен халәтләр «агачын» төзегез.

Бирем 4. Кибеттә биш сорт конфет бар. Өч сорттан артык булмаган конфетларны ничә төрле ысул белән сатып алып була? (Әгәр алынган конфетлар бер үк сорт конфетлардан торса, бу бер төрле сатып алу дип исәпләнә).

Бирем 5. Букинистик кибеттә И. С. Тургеневның «Рудин» романы 6 данә, «Дворяннар оясы» 3 данә һәм «Аталар һәм балалар» әсәре 4 данәдә бар. Болардан тыш «Рудин» һәм «Дворяннар оясы» романырын үз эченә алган 5 том, «Дворяннар оясы» һәм «Аталар һәм балалар» романырын үз эченә алган 7 том бар. Бу романнарның һәрберсе бер данәдә булырлык итеп, ничә төрле ысул белән китаплар сатып алып була?

§2. Кайтарусыз очраклы сайлау схемасы

Кайтарусыз очраклы сайлау схемасы. Төрле n элементтан торган $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ күплегеннән ирекле рәвештә α_{i1} элементы сайлап алына, теркәп куела һәм X күплегенә кире кайтарылмый (һәрбер элементның сайлануы тигез дәрәҗәдә мөмкин хәл). Шундый k сайлаудан соң k озынлыктагы (α_{i1}, α_{i2}, ..., α_{ik}) тоташтырма барлыкка кила. Бу тоташтырманың барлык элементлары да төрле (кабатланмыйлар).

Билгеләмә. Кайтарусыз очраклы сайлау схемасы ярдәмендә алынган һәм тәртипләштерелгән k элементлы $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik})$ җыелмасы *n элементтан сайланган k элементлы кабатланусыз урнаштырма (n – нан k – лап кабатланусыз урнаштырма)* дип атала.

Болай итеп билгеләнгән тоташтырмада:

1) $k \leq n$;

2) барлык элементлар да төрле;

3) элементларның урнашу тәртибе мөһим.

Мисал 6. $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ санлы күплеге өчен 3 элементтан төзелгән 2 элементлы кабатланусыз урнаштырмаларны язарга.

Чишү: $(0,1); (1,0); (0,2); (2,0); (1,2); (2,1)$.

Лемма. *Әгәр A_n^k* аша *n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз урнаштырмаларны тамгаласак, түбәндәге формула урынлы:*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.1}$$

Исбатлау. Ниндидер n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз урнаштырманы карыйк: $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik})$. Билгеләмә нигезендә, α_{i1} элементын X күплегеннән n төрле юл белән сайлап була, α_{i2} элементын $(n-1)$ төрле юл белән сайлап була. Шул рәвешле дәвам итеп, α_{ik} элементын $\big(n-(k-1)\big)$ төрле юл белән сайлап була.

Димәк, тапкырчыгыш кагыйдәсе нигезендә, бу тоташтырманы $n \cdot (n-1) \cdot\ \ldots\ \cdot (n-k+1)$ төрле юл белән сайлап була һәм n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз урнаштырмалар саны

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.2}$$

Лемма исбатланды.

Билгеләмә. Төрле k элементтан торган тоташтырманың элементлары тәртибен алмаштырып ясалган тоташтырма *k элементтан кабатланусыз алмаштырма* дип атала.

Мәсәлән, $(0,1,2)$; $(0,2,1)$; $(1,0,2)$; $(1,2,0)$; $(2,0,1)$; $(2,1,0)$ – кабатланусыз алмаштырмалар.

Лемма. *Әгәр P_k – k элементтан кабатланусыз алмаштырмалар саны булса,*

$$P_k = k!. \tag{2.3}$$

Исбатлау. Төрле k элементтан торган $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k)$ тоташтырмасын карыйк. Бу тоташтырманың теләсә кайсы алмаштырмасын кайтарусыз очраклы сайлау схемасы буенча төзергә мөмкин, һәм бу алмаштырма k элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз урынлаштырма булачак. Мондый урынлаштырмаларның, димәк, k элементтан кабатланусыз алмаштырмаларның саны да

$$P_k = A_k^k = \frac{k!}{(k-k)!} = \frac{k!}{0!} = k!, \tag{2.4}$$

була, чөнки $0! = 1$ дип кабул ителә.

Лемма исбатланды.

Билгеләмә. Кайтарусыз очраклы сайлау схемасы ярдәмендә алынган k элементлы $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ ...,\ \alpha_{ik})$ җыелмасы *n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз оештырма (n-нан k-лап кабатланусыз оештырма)* дип атала.

Болай итеп билгеләнгән тоташтырмада:

1) $k \leq n$;

2) барлык элементлар да төрле;

3) элементларның тәртибе мөһим түгел.

Мисал 7. $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ санлы күплеге өчен 3 элементтан төзелгән 2 элементлы кабатланусыз оештырмаларны язарга.

Чишү: $(0,1); (0,2); (1,2)$.

Искәрмә. Кабатланусыз урынлаштырмалар, алмаштырмалар, оештырмалар арасында тыгыз бәйләнеш бар. Мисалдагы $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ күплеге өчен 3 элементтан төзелгән 2 элементлы кабатланусыз урынлаштырмаларны классларга бүлик:

1) $(0,1)$, $(1,0)$;

2) $(0,2)$, $(2,0)$;

3) $(1,2)$, $(2,1)$.

Һәрбер класска без бертөрле җыелмалардан торган урынлаштырмаларны керттек. Бу урынлаштырмалар бер-берсеннән бары тик элементларының тәртибе белән генә аерылып торалар, ягъни алмаштырма булалар. Бер үк класска керүче урынлаштырмалар оештырма буларак тәңгәл киләләр. Шуңа күрә, оештырмалар саны урынлаштырмаларның класслары санына тигез була.

Лемма. *Әгәр* C_n^k *– n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз оештырмалар саны булса,*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.5}$$

Исбатлау. Ниндидер n элементтан төзелгән k элементлы кабатланусыз $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ ...,\ \alpha_{ik})$ оештырмасын карыйк. Бу тоташтырмадан ясалган урынлаштырмалар саны $k!$ га тигез. Шуңа күрә, искәрмә нигезендә

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.6}$$

Шулай итеп,

$$A_n^k = C_n^k P_k \tag{2.7}$$

Лемма исбатланды.

Мисал 8. Группа җыелышында 25 студент катнаша.

а) 3 кешедән торган президиум сайлау;

б) 3 кеше – рәис, секретарь һәм бер әгъзадан торган президиум сайлау;

в) президиумга сайланган 3 кешене төрлечә утырту мәсьәләләрен ничә төрле ысул белән башкарырга мөмкин.

Чишү: Мәсьәләдә $\{1,\ 2,\ ...,\ 25\}$ күплегеннән кайтарусыз очраклы сайлау схемасы нигезендә 3 кешене сайлау карала. Мәсәлән, $(15,\ 3,\ 21)$.

а) очрагында элементларның урнашу тәртибе мөһим түгел. Димәк, ул тоташтырма 25 элементтан төзелгән 3 элементлы кабатланусыз оештырма була. Аларның саны $C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!(25-3)!}=\frac{25!}{3!22!}=\frac{25\cdot24\cdot23\cdot22!}{1\cdot2\cdot3\cdot22!}=2300$.

б) очрагында элементларның урнашу тәртибе, ягъни сайланган 3 кешенең кайсысы председатель, секретарь һәм әгъза булуы мөһим. Димәк, ул тоташтырма 25 элементтан төзелгән 3 элементлы кабатланусыз урынлаштырма була. Аларның саны

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{(25-3)!}=\frac{25!}{22!}=\frac{25\cdot24\cdot23\cdot22!}{22!}=13800.$$

в) очрагында сайланган 3 кешене президиумга төрлечә итеп утырту саны 3 элементтан кабатланусыз алмаштырмалар санына тигез $P_3=3!=6$.

Җавап: а)2300 ; б) 13800; в) 6.

Мисал 9. Сыйныфта 30 укучы бар. Укытучы шулар арасыннан 2 дежур билгели. Дежурларны билгеләүнең ничә төрле варианты бар?

Чишү: Дежурларны билгеләү укучыларның сыйныф исемлеге номерларыннан торучы $X=\{1,2,3,\ldots,30\}$ күплегеннән ике сан сайлап алуга кайтып кала. (x,y) тоташтырмасын төзегәндә элементларның нинди урында торуы мөһим түгел. Шулай итеп бу тоташтырма 30 дан сайлап алынган 2шәр кабатланусыз оештырмалар санына тигез:

$$C_{30}^{2}=\frac{30!}{2!28!}=435.$$

Җавап: 435.

Мисал 10. Сыйныф укучылары арасында бишесе калганнарга караганда тизрәк йөгерәләр, дүртесе биегрәк сикерәләр, өчесе ераграк сикерәләр.

6 кешедән торучы команданы һәр спорт төреннән 2 катнашучы булырлык итеп укытучы ничә төрле ысул белән төзи ала?

Чишү: Үзара кисешмәүче өч укучылар күплеге карап үтелә: 5 кешедән торучы X={„Йөгерүчеләр“}, 4 кешедән торучы Y={„Биеклеккә сикерүчелрәр“}, 3 кешедән торучы Z={„Ераклыкка сикерүчеләр“}. Беренче чиратта һәр спорт төреннән командага сайлап алу санын ачыкларга кирәк (оештырмаларны карарга). Ә аннан соң тапкырлау кагыйдәсе нигезендә

$$C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 = 180.$$

Җавап: 6 спортсменнан торучы команданы 180 төрле ысул белән сайлап алып була.

Мисал 11. Бер «Спортлото» (36 дан 5) лотерея карточкасының хуҗасы 5 номерны ничә төрле ысул белән сыза ала?

Чишү: Мисал 36 элементтан 5-сен сайлап алуга тиң. Аңлашыла ки

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!31!} = 376992.$$

Җавап: 376992 ысул бар.

Мисал 12. Эксперемент остазы тычканнарда алты даруның тәэсирен тикшерү өчен сынау уздырмакчы була. Һәр тычканга 6 матдәдән 2се кертелсә, барлык нәтиҗәләрне күзәтер өчен аңа ничә тычкан кирәк?

а) даруларны кертү тәртибе мөһим булмаган;

б) мөһим булган очракларны карарга.

Чишү: а) Тәртип мөһим түгел. Ул вакытта 6 даруның 2 – сен ничә төрле ысул белән сайлап алып булу санын табарга кирәк. Бу сорауга оештырмаларны испләү формуласы җавап бирә

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

б) даруларны кертү тәртибе мөһим булса 6 – дан 2 элементны урнаштыру санын исплргә кирәк:

$$A_6^2 = \frac{6!}{2!} = 30.$$

Җавап: а) 15, б) 30.

Мисал 13. Сыйныф кысаларында уздырылучы шахмат ярышында 10 укучы ничә партия уйнарга тиеш?

Чишү: Партияләр саны тәртибе мөһим булмаган элементлары төрле булган парлар саны белән төгәл килә, ягъни

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45.$$

Җавап: 45 партия.

Мисал 14. 10 ярышучыга 3 призлы урынны ничә төрле ысул белән биреп була?

Чишү: Бу мисалда $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ күплегеннән булган кешеләр 3 урынга таратып урнаштырыла. Әлбәттә бер кешегә бердән артык приз бирелә алмый. Ягъни кире кайтарусыз очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Таратып бирү тәртибе мөһим булмау сәбәпле бу тоташтырма кабатланусыз урнаштырма була һәм аларны саны:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720.$$

Җавап: Призлы урыннарны (премиялорне) бирү саны 720.

Мисал 15. Ярышта 6 кеше катнаша. 3 призлы урынны алар ничә төрле ысул белан яулый ала?

Чишү: Бу мисалда $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ кплегеннән булган кешелр 3 урынга таратып урнаштырыла. Әлбтта бер кешегә бердн артык приз бирлә алмый. Ягъни кире кайтарусыз очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Таратып бирү тәртибе мөһим булмау сәбәпле бу тоташтырма кабатланусыз урнаштырма була һәм аларның саны:

$$A_6^3 = \frac{10!}{(6-3)!} = 120.$$

Җавап: Призлы урыннарны бир саны 120.

Мисал 16. Пассажирлар поездында 8 вагон бар. Һәрберсе аерым вагонда барырлык итеп 5 пассажирны шул вагоннарга ничек утыртырга була?

Чишү: Вагоннарны сайлап алу $X = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ күплегеннән башкарыла. Пассажирларны утырту $(x_1, \ldots, x_5)$ тоташтырмасын төзүдән гыйбарәт. Бу тоташтырмада элементлар кабатланмый һәм аларның тәртибе мөһим түгел. Шулай итеп бу тоташтырма кабатланусыз урнаштырма була:

$$A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6720.$$

Җавап: пассажирларны утырту саны 6720.

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 6. Биш дус очрашкан. Алар үзара кул биреп күрешәләр. Барлык күрешүләр саны ничәгә тигез. Мисалны турыдан — туры санап чыгу ысулы белән дә, комбинаторик формула ярдәмендә дә эшләгез.

Бирем 7. Алдагы күнегүдәге биш кеше түгәрәк өстәл артына
а) биш урындыкка;
б) өч урындыкка ничә төрле ысул белән утыра ала?

Бирем 8. Бер сыйныфта 12 малай һәм 13 кыз укый. Спектакльдә катнашыр өчен 2 малайны һәм 3 кызны ничә төрле ысул белән сайлап алып була?

Бирем 9. Билгеле бер көнне сыйныфта 4 төрле фәннән 5 дәрес үткәрелә. Бу көн өчен дәресләр расписаниесенең ничә төрле варианты бар?

Бирем 10. Автоматик саклау камерасының йозагында һәркайсы 10 секторга бүленгән уртак күчәрле 4 диск бар. Беренче дискның һәр секторында татар алфавитының бер хәрефе, ә калган өч дискның һәр секторында 0-дән алып 9-га кадәр берәр бөтен сан язылган. Һәр дискта билгеле бер секторны урнаштырып шифр җыела. Йозакны бикләгәндә шифрны ничә төрле вариант белән куеп була?

§3. Биномиаль коэффициентларның үзлекләре

n элементтан k данә сайлап алып төзелгән кабатланусыз оештырманы n элементтан торучы $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ күплегенең $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik}\}$ кече күплеге дип карарга була. Ә C_n^m исә шундый кече күплекләр саны.

Түбәндәге биномиаль коэффициентлар дип аталучы C_n^m саннарының кайбер үзлекләре исбатлана.

Лемма

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{3.1}$$

Исбатлау. Билгеләмә нигезендә (2.5) фомуласыннан кулланыйк

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)} = C_n^{n-k}.$$

(3.1) формуласының мәгънәсе X күплегенең k -элементлы кече күплекләре саны анын $(n-k)$ –элементлы кече күплекләре санына тигез булуда. Бу аңлашыла да, чөнки һәр кече күплеккә аның X күплегенә кадәр тутыручы кече күплек туры килә.

Лемма исбатланды.

Лемма

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{3.2}$$

Исбатлау:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!\,(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!\,(n-k)!}\Big[(n-k)+k\Big] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Лемма исбатланды.

Лемма (Ньютон биномы)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \tag{3.3}$$

Исбатлау: Математик индукция ысулын кулланыйк. $n = 0$ булганда (3.3) формуласының сул ягында теләсә нинди a һәм b очен $(a+b)^0 = 1$. $n = 0$ булганда шулай ук $k = 0$, бу вакытта (3.3) формуласының уң ягында сумма бер генә кушылучыдан тора: $\sum\limits_{k=0}^{0} C_0^k a^{0-k} b^k = C_0^0 a^{0-0} b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ягъни формуланың ике ягы да бер үк нәтиҗәгә китерә.

$n = 1$ булганда формуланың шулай ук урынлы булуын искәртеп узыйк:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1 = a + b.$$

(3.3) формуласы $n = m$ булганда урынлы дип фараз итик, шуннан чыгып аны $n = m + 1$ өчен исбатлыйк.

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = (a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k +$$

$$+\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \left(C_m^k + C_m^{k-1}\right) a^{m+1-k} b^k + C_m^m a^0 b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k$$

чөнки монда $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1; \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k; \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1.$

Лемма исбатланды.

Лемма

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{3.4}$$

Исбатлау: (3.3) формуласына $a = b = 1$ дип кую җитә. C_n^k оештырмасы n – элементлы X күплегенең k -элементлы кече күплекләре саны булу сәбәпле, (3.4) формуласы шул кече күплекләрнең саны 2^n булуын күрсәтә.

Лемма исбатланды.

Мисал 17. 10 төрле элементтан торучы күплек бирелгән.

а) 3 – элементлы барлык кече күплекләр санын;

б) 5 – элементлы барлык кече күплекләр санын;

в) барлык кече күплекләр санын исәпләргә.

Чишү: Элементлары төрле һәм аларны урнашу тәртибе мөһим булмау сәбәпле теләсә кайсы кече күплек кабатланусыз оештырма булып тора.

а) очрагында $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$,

б) очрагында $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$,

в) очрагында исә (3.4) формуласыннан кулланып табабыз: $\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^{k} = 2^{10} = 1024$.

Җавап: 3 – элементлы барлык кече күплекләр саны 120, 5 – элементлы барлык кече күплекләр санын 252, барлык кече күплекләр саны 1024.

Мисал 18. $\left(1+x^2\right)^4$ аңлатмасындагы x^6 каршысындагы коэффициентны табарга.

Чишү: Ньютон биномын табабыз

$$\left(1+x^2\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \left(x^2\right)^k.$$

Аңлашыла ки x^6 дәрәҗәсе $k = 3$ булганда пәйдә булачак. Шулай итеп бу дәрәҗә каршысындагы коэффициент $C_4^3 = 4$.

Җавап: $\left(1+x^2\right)^4$ аңлатмасындагы x^6 каршысындагы коэффициент 4 – кә тигез.

C_n^m биномиаль коэффициентларын исәпләү өчен түбәндәге Паскаль өчпочмагыннан куллану уңайлы:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \texttt{n=0} \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \texttt{n=1} \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \texttt{n=2} \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \texttt{n=3} \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \texttt{n=4} \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
\end{array}$$

n – нчы юлда $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ саннары тора, шуның өстенә $C_n^0 = C_n^n = 1$. (3.2) формуласы нигезендә $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, ягъни C_n^k коэффициенты алдагы юлда янәшә торучы ике санны кушып исәпләнә.

§4. Кайтарулы очраклы сайлап алу схемасы

Кайтарулы очраклы сайлау схемасы. Төрле n элементтан торган $X = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n\}$ күплегеннән ирекле рәвештә α_{i1} элементы сайлап алына, теркәп куела һәм X күплегенә кире кайтарыла (һәр элементның сайлануы бер үк дәрәҗәдә мөмкин хәл). Шундый k сайлаудан соң k озынлыктагы $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ ...,\ \alpha_{ik})$ тоташтырма барлыкка килә. Бу тоташтырманың бертөсле элементлары булырга мөмкин (кабатланалар).

Билгеләмә. Кайтарулы очраклы сайлау схемасы ярдәмендә төзелгән һәм тәртипләштерелгән k элементлы $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ ...,\ \alpha_{ik})$ җыелмасы *n элементтан сайланган k элементлы кабатланулы урнаштырма (n-нан k-лап кабатланулы урнаштырма)* дип атала.

Болай итеп билгеләнгән тоташтырмада:

1) $k \in N$;

2) бертөрле элементлар булырга мөмкин;

3) элементларның урнашу тәртибе мөһим.

Мисал. $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ санлы күплеге өчен 3 элементтан төзелгән 2 элементлы кабатланулы урынлаштырмаларны язып алыйк:

$$(0,1); (1,0); (0,2); (2,0); (1,2); (2,1); (0,0); (1,1); (2,2). \tag{4.1}$$

Лемма. *Әгәр $\tilde{A}_n^k$ аша n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы урнаштырмалар санын тамгаласак*

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \tag{4.2}$$

Исбатлау. Ниндидер n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы урынлаштырманы карыйк: $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{ik})$. Бу тоташтырманың элементлары арасында бертөслеләре да булырга мөмкин, һәм һәр элементны n төрле юл белән сайлап була, димәк, тапкырчыгыш кагыйдәсе буенча бу тоташтырманы n^k төрле ысул белән сайларга мөмкин.

Лемма исбатланды.

Билгеләмә. Озынлыгы k һәм төзелмәсе (составы) $(k_1, k_2, \ldots k_l)$ булган ниндидер $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{ik})$ тоташтырмасын карыйк. Ягъни бу тоташтырмага

l төрле $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots \alpha_{jl}$ элементлары, тиңдәшле рәвештә, $k_1, k_2, \ldots k_l$ кабатлыгы белән керә. Шундый тәртиптә билгеләнгән тоташтырманың элементлары тәртибен алмаштырып төзелгән тоташтырма *кабатланулы алмаштырма* дип атала. Монда $(k_1 + k_2 + ... + k_l = k)$.

Мәсәлән, $(1, 1, 2)$; $(2, 1, 1)$; $(1, 2, 1)$ — озынлыгы 3 һәм төзелмәсе $(2, 1)$ булган кабатланулы алмаштырмалар.

Лемма. Әгәр $P(k_1, k_2, \ldots k_l)$ аша k озынлыгындагы $(k_1, k_2, \ldots k_l)$ төзелмәле кабатланулы алмаштырмалар санын тамгаласак,

$$P(k_1, k_2, \ldots k_l) = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_l!}. \tag{4.3}$$

Исбатлау. Озынлыгы k һәм l төрле $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots \alpha_{jl}$ элементларыннан торган $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{ik})$ тоташтырмасын карыйк. Аның бертөрле α_{j1} элементларының урынын алыштыру тоташтырманы үзгәртми һәм шундый алмаштырмалар саны $k_1!$ тигез. Шундый ук ысул белән α_{j2} элементы өчен тоташтырманы үзгәртми торган $k_2!$ алмаштырма барлыгын күрсәтә алабыз. Шул рәвешле дәвам итеп, α_{jl} элементы өчен тоташтырманы үзгәртми торган $k_l!$ алмаштырма барлыгын табабыз. Тапкырчыгыш кагыйдәсе буенча, тоташтырманы үзгәртмәүче алмаштырмалар саны $k_1! k_2! \ldots k_l!$ га тигез. Барлык алмаштырмалар саны $k!$ булганга күрә, төрле алмаштырмалар саны

$$P(k_1, k_2, \ldots k_l) = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_l!}. \tag{4.4}$$

Лемма исбатланды.

Билгеләмә. Кайтарулы очраклы сайлау схемасы ярдәмендә тезелгән k элементлы $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{ik})$ җыелмасы *n элементтан сайланган k элементлы кабатланулы оештырма (n-нан k-лап кабатланулы оештырма)* дип атала.

Болай билгеләнгән тоташтырмада:

1) $k \in N$;

2) бертөсле элементлар булырга мөмкин;

3) элементларның урнашу тәртибе мөһим түгел.

Мисал. $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ санлы күплеге өчен 3 элементтан төзелгән 2 элементлы кабатланулы оештырмаларны язып алыйк:

$$(0,1); (0,2); (1,2); (0,0); (1,1); (2,2). \tag{4.5}$$

Лемма. *Әгәр $\tilde{C}_n^k$ аша n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы оештырмалар санын тамгаласак*

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{4.6}$$

Исбатлау. Ниндидер n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы оештырманы карыйк: $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{ik})$. Бу җыелмага l төрле $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots \alpha_{jl}$ элементлары керә. Аларның кабатлыгы $k_1, k_2, \dots k_l$. Үзара беркыйммәтле тиңдәшлек ярдәмендә оештырмага озынлыгы $(n+k-1)$ булган k «1» дән һәм $(n-1)$ «0» дән торган тоташтырманы тиңдәш итеп куйыйк. Аны түбәндәгечә төзибез.

1 – нче этап. Оештырмага $(m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n)$ тоташтырмасын тиңдәш итик. Бу тоташтырманың озынлыгы n. Оештырмага k_i кабатлыгы белән керүче α_i элементы өчен $m_i = k_i$, ә α_i элементы оештырмага кермәсә, $m_i = 0$, һәм әлбәттә $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$.

2 этап. Беренче этапта төзелгән тоташтырмада һәрбер m_i саны урынына m_i «1» ле язабыз. Бу «1» леләр төркемнәре арасына «0» куябыз. Ниндидер $m_i = 0$ булса, ул урында «0» куела һәм аралыктагы «0» язылмый. Мәсәлән, $X = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$ күплеге ярдәмендә 4 элементтан төзелгән 6 элементлы кабатланулы оештырмалар:

$$(\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ), (\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4). \tag{4.7}$$

Беренче этапта бу оештырмаларга (3, 2, 1, 0) һәм (2, 2, 1, 1) тоташтырмалары тиңдәш, ә икенче этапта (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)
һәм (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) тоташтырмалары тиңдәш. Димәк, исбатлау башында бирелгән оештырмага үзара беркыйммәтле тиңдәшлек ярдәмендә ниндидер (1, 1, 1, 0, 1, 1, ...0, 1,) тоташтырмасы туры килә. Бу тоташтырмада k «1» элементы һәм $n-1$ «0» элементы бар. Димәк, бу тоташтырмадагы төрле алмаштырмалар саны n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы оештырмалар санына тигез була. Шулай итеп,

$$\tilde{C}_n^k = P_{n+k-1}(k; n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k. \tag{4.8}$$

Лемма исбатланды.

Искәрмә. Кабатланулы урнаштырма, алмаштырма, оештырмалар арасында тыгыз бәйләнеш бар. Беренче искәрмәдә эшләгән кебек n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы урынлаштырмаларны классларга бүләбез, һәрбер класска бер үк элементлардан төзелгән һәм бары тик элементларның тәртибе белән аерылган урынлаштырмаларны кертәбез. Икенче төрле әйткәндә, бер класска керүче n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы урынлаштырмалар $(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_l)$ төзелмәле кабатланулы алмаштырманы билгели. Шуңа күрә аларның саны

$$P(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_l) = \frac{k!}{k_1!k_2!...k_l!} \tag{4.9}$$

тигез. Бер класска керүче n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы барлык урынлаштырмалар n элементтан төзелгән k элементлы кабатланулы бер үк оештырманы бирә.

Мисал 19. Чәчәкләр кибетендә 3 төрдәге чәчәк саталар: канәфер (K), лалә (L), гөлчәчәк (G). Әгәр

а) чәчәкләрнең урнашу тәртибе белән аерылган бәйләмнәр бертөрле дип саналса,

б) чәчәкләрнең урнашу тәртибе белән аерылган бәйләмнәр төрле дип саналса, 5 чәчәктән ничә төрле бәйләм ясарга мөмкин?

Өстәлдә ничә ысул белән 3 канәфер чәчәге һәм 2 лалә чәчәге урнаштырырга мөмкин?

Чишү: Мәсьәләдә канәфер, лалә, гөлчәчәк чәчәкләреннән торган $X = \{K, L, G\}$ күплегеннән кайтарулы очраклы сайлау схемасы ярдәмендә 5 чәчәк сайлана. Нәтиҗәдә озынлыгы 5 булган тоташтырма төзелә. Мәсәлән, (L, G, G, K, L).

а) очрагында чәчәкләрнең нинди тәртиптә урнашуы мөһим түгел. Димәк, барлыкка килгән тоташтырма 3 элементтан төзелгән 5 элементлы кабатланулы оештырма була. Аларның саны

$$\tilde{C}_3^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 1\cdot 2} = 21.$$

б) очрагында чәчәкләрнең урнашу тәртибе мөһим, шуңа күрә, барлыкка килгән тоташтырма 3 элементтан төзелгән 5 элементлы кабатланулы урнаштырма була. Аларның саны

$$\tilde{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Өстәлдә 3 канәфер чәчәген һәм 2 лалә чәчәген төрлечә урнаштырулар саны (K, K, K, L, L) тоташтырмасы ярдәмендә төзелгән кабатланулы алмаштырмалар санына тигез була:

$$P_5(3;2) = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Җавап: а) 243, б) 10.

Мисал 20. 9 катлы йортта лифтка 4 кеше керде (беренче этажда). Алар төрле катларда ничә төрле ысул белән чыга ала?

Чишү: Бу мисалда $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ күплегеннән булган йорт катлары 4 кешегә таратылып урнаштырыла. Ягъни кайтарулы очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Урнаштыру тәртибе мөһим булу сәбәпле, бу тарату кабатланулы урнаштырма була

$$\widetilde{A}_8^4 = 8^4 = 4096$$

Җавап: Лифттан 4096 төрле ысул белән чыгып була.

Мисал 21. Телеграф буенча хәбәр биргәндә Морзе коды кулланыла. Бу кодта саннар, хәрефләр һәм тамгалар нокталар һәм сызыклар белн алмаштырыла. Төрле биш урынлы символны ничә төрле ысул белән төзергә була?

Чишү: Кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы нигезендә биш тамгалы символ $X = \{, , \cdot``,, , -``\}$ күплегенән төзелә. тамгаларны урнашу тәртибе мөһим. Шул сәбәпле бу каабатланулы урнаштырмалар була

$$\widetilde{A}_2^5 = 32$$

Җавап: Биш урынлы символлар саны 32.

Мисал 22. Сыйныфта 30 укучы бар. Алар якшәмбе көннәрендә уздырылачак иҗтимагый мөмкин 5 төрле эш буенча тавыш бирәләр. Һәр укучы бары тик бер тәкъдимгә генә тавыш биргенә ала. Тавышлар ничә төрле ысул белән таралып урнашырга мөмкин?

Чишү: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тавышлар күплегенән кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы нигезендә 30 укучыга таратып бирүләр саны

$$\widetilde{A}_5^{30} = 931322574615478515625$$

Җавап: Тавышларның бүленеп бирүләр саны 931322574615478515625.

Мисал 23. Төзелеш бинасының биш катына алты төрле тартма ничә төрле ысул белән таратып бирелергә мөмкин?

Чишү: Бу мисалда бинаның катлары булган $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ күплеге 6 таратып бирелү. Ягъни кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Тартмаларның таралып урнашу тәртибе мөһим булу сәбәпле бу таратып бирү кабатланулы урнаштырма була

$$\widetilde{A}_5^{6} = 15625$$

Җавап: Тармаларны катларга тарату саны 15625.

Мисал 24. Почта бүлегендә 10 төрле открытка сатыла. 12 открытканы ничә төрле ысул белән сатып алып була?

Чишү: Бу мисалда $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ күплегеннән булган открыткалар 12 сатып алуга таратып урнаштырыла. Ягъни кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Таратып урнаштыру тәртибе мөһим булмау сәбәпле бу таратып бирү 10нан 12элементлы кабатланулы оештырма була

$$\widetilde{C}_{10}^{12} = \frac{21!}{12!19!} = 293930$$

Җавап: Открыткалар сатып алулар саны 293930.

Мисал 25. Алты бертөрле җисем өч тартмага салына (урнаштырыла). Һәр тартма барлык алты җисемне дә сыйдыра алса, бу эш — гамәлне ничә төрле ысул белән башкарып була?

Чишү: Бу мисалда $X = \{1, 2, 3\}$ күплегеннән булган урыннар 6 җисемгә таратып бирелә. Ягъни 6 элементлы X күплегеннән кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Таратып урнаштыру тәртибе мөһим булмау сәбәпле, ә җисемнәр бертөрле булгач бу таратып бирү 6дан 3 элементлы кабатланулы оештырма була

$$\widetilde{C}_3^6 = C_{6+3-1}^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = 28$$

Җавап: җисемнәрне тартмаларга таратып салулар саны 28.

Мисал 26. Почта бүлегендә һәрберсе сигез данәдән ким булмаган ун төрле открытка сатыла. Монда сигез открытканы ничә төрле ысул белән сатып алып була?

Чишү: Бу мисалда $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ открыткалар күплегеннән кабатланулы 8 сатып алу башкарыла. Ягъни кире кайтарулы очраклы сайлау схемасы тормышка ашырыла. Таратып урнаштыру тәртибе мөһим булмау сәбәпле бу таратып бирү 10нан 8 элементлы кабатланулы оештырма була

$$\widetilde{C}_{10}^8 = C_{10+8-1}^8 = C_{17}^8 = \frac{17!}{8!9!} = 24310$$

Җавап: Открыткалар сатып алулар саны 24310.

2-нче бүлек. Ихтималлык теориясе нигезләре

§5. Вакыйгалар алгебрасы

Тормышта күп кенә очракта нәтиҗәсе билгеле булмаган сынаулар (испытания) белән очрашырга туры килә. Ләкин шуңа карамастан, сынаулар саны күп булганда аның нәтиҗәсе закончалыкларын ачыкларга мөмкин.

Мәсәлән, тәңкәне (монетаны) чөйгәндә бөркетле ягы өскә каламы, санлы ягымы — алдан әйтү мөмкин түгел. Әмма күп мәртәбә чөйгәндә тәңкәнең бөркетле ягы өскә калу саны санлы ягы өскә калу санына якынча тигез булуы күзәтелә.

Ихтималлык теориясе (теория вероятностей) шундый нәтиҗәләре очраклы булган массакүләм сынауларны өйрәнү белән шөгыльләнә.

Билгеләмә. Сынауның анык (конкрет) мөмкин булган нәтиҗәсе *гади нәтиҗә* (элементарный исход) дип атала.

Билгеләмә. Билгеле бер сынауның гади нәтиҗәләр күплеге *гади нәтиҗәләр пространствосы* (пространство элементарных исходов) дип атала һәм Ω дип тамгалана.

Шулай итеп, һәр сынауга Ω – *гади нәтиҗәләр пространствосы*, ягъни бирелгән сынауның мөмкин булган барлык аерым нәтиҗәләр күплеге тиңдәш була. Бу аерым нәтиҗәләрне ω_i ләр аша тамгалыйлар һәм элементлар (нокталар) дип атыйлар.

Мисал өчен уен шакмагын өстәл өстендә бер мәртәбә чөябез. Бу сынауның гади нәтиҗәләр пространствосы:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Биредә $\omega_i = \{i$ очко чыкты$\}$ — гади нәтиҗәләр, $i = \overline{1,6}$.

Ихтималлык теориясендә төп төшенчәләрнең берсе булып *вакыйга* (событие) төшенчәсе тора. Сынау өчен вакыйганы түбәндәге язмалар билгели:

1) сынауның мөмкин булган нәтиҗәсе;

2) сынауның нәтиҗәсе турында логик фикер;

3) Ω күплегенең кече күплеге (аскүплеге). Бу кече күплеккә керүче гади нәтиҗәләр ниндидер A вакыйгасын билгелиләр.

Вакыйгаларны баш латин хәрефләре белән тамгалыйлар.

Мисал өчен тәңкәне бер мәртәбә чөябез. Бу сынауда $= \{$герблы ягы өскә калды$\}$ яки $! = \{$санлы ягы өскә калды$\}$ вакыйгалары күзәтелергә мөмкин.

Мисал өчен уен шакмагын өстәл өстендә бер мәртәбә чөябез. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ — бу сынауның гади нәтиҗәләр пространствосы. Монда $\omega_i = \{i$ очко чыкты$\}$, $i = \overline{1,6}$. Уен шакмагында җөп очко төшү вакыйгасын A дип тамгалыйк. җөп очко төшү безнең тамгаларда $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ гади нәтиҗәләренә туры килә. Димәк $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Вакыйгаларны очраклы, ышанычлы һәм булмаслык вакыйгаларга бүлеп була.

Билгеләмә. Билгеле бер сынау нәтиҗәсендә булырга да яки булмаска да мөмкин вакыйга *очраклы вакыйга* (случайное событие) дип атала.

Билгеләмә. Билгеле бер сынау нәтиҗәсендә һәрвакыт мәҗбүри үтәлүче вакыйга *ышанычлы вакыйга* (достоверное событие) дип атала.

Билгеләмә. Билгеле бер сынау нәтиҗәсендә беркайчан да килеп чыкмаслык вакыйга *булмаслык вакыйга* (невозможное событие) дип атала.

Мисал өчен уен шакмагын бер мәртәбә чөябез. Бу сынауда $A = \{3$ очко чыгу$\}$ – очраклы вакыйга, $B = \{6$ дан зур булмаган очко чыгу$\}$ – ышанычлы вакыйга, $C = \{8$ очко чыгу$\}$ – булмаслык вакыйга.

Искәрмә. Ышанычлы вакыйгага — Ω гади нәтиҗәләр пространствосы, булмаслык вакыйгага $\emptyset$ буш күплеге туры килә.

Билгеләмә. Әгәр A һәм B вакыйгаларының һичьюгы берсе күзәтелсә, бу вакыйга *A һәм B вакыйгаларының суммасы* дип атала һәм $A + B$ дип тамгалана. Бу $A + B$ вакыйгасына A һәм B күплекләренең берләшмәсе туры килә. *Берничә вакыйганың суммасы* дип, тиңдәшле рәвештә, бу вакыйгаларның һичьюгы берсе күзәтелгән вакыйга атала.

Мисал өчен ике атучы берәр атыш ясасыннар.

$A = \{$беренче атучының мишеньгә тидерүе$\}$,

$B = \{$икенче атучының мишеньгә тидерүе$\}$

вакыйгалары булса,

$A + B = \{$һичьюгы бер атучының мишеньгә тидерүе$\}$

вакыйгасы була.

Билгеләмә. Әгәр A һәм B вакыйгалары бер үк вакытта күзәтелсә, бу вакыйга *A һәм B вакыйгаларының тапкырчыгышы* дип атала һәм $A \cdot B$ дип тамгалана. Бу $A \cdot B$ вакыйгасына A һәм B күплекләренең кисешмәсе туры килә. *Берничә вакыйганың тапкырчыгышы* дип, тиңдәшле рәвештә, бу вакыйгаларның барысы да бер үк вакытта күзәтелгән вакыйга атала.

Мәсәлән, алдагы мисалда, $A{\cdot}B{=}\{$ике атучының да мишеньгә тидерүе$\}$ вакыйгасы була.

Билгеләмә. Әгәр A вакыйгасы күзәтелсә, ә B вакыйгасы күзәтелмәсә, бу вакыйга *A һәм B вакыйгаларының аермасы* дип атала һәм $A - B$ дип тамгалана, бу вакыйгага A һәм B күплекләренең $A \backslash B$ аермасы туры килә.

Мисал. Уен шакмагын чөйгәндә, $A = \{$җөп очко чыгу$\}$, $B = \{$3 тән зур очко чыгу$\}$ вакыйгалары булсын. Ул вакытта $(A - B) = \{$2 очко чыгу$\}$ вакыйгасы була.

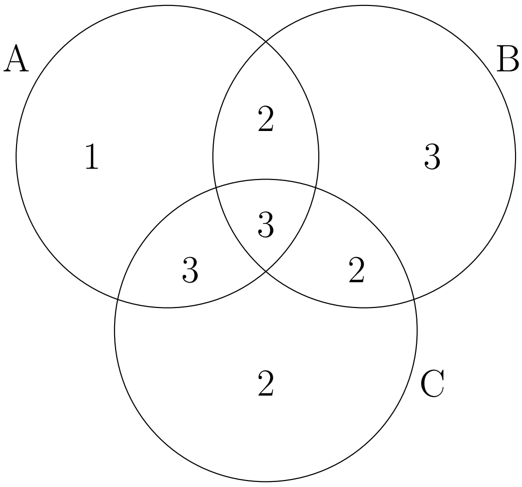
Билгеләмә. Ниндидер $\bar{A}$ вакыйгасы A вакыйгасы күзәтелмәгәндә генә булса, ул A вакыйгасына *капма-каршы вакыйга* (противоположное событие) дип атала. $\bar{A}$ капма-каршы вакыйгасына A күплегенең Ω гади нәтиҗәләр пространствосына өстәмәсе туры килә:

$$\bar{A} = \Omega \backslash A. \tag{5.1}$$

Мисал. Тәңкәне чөйгәндә $A = \{$бөркетле ягы өскә калды$\}$, $B = \{$санлы ягы өскә калды$\}$ вакыйгалары булсын. Бу вакыйгалар капма-каршы, чөнки сынауның нәтиҗәсе булып аларның берсе генә торырга мөмкин һәм аларның берсен күзәтү икенчесен инкарь итә, ягъни $B = \bar{A}$ һәм $A = \bar{B}$.

Мисал 27. Сыйныфта тугыз укучы математикадан, унбер укучы физикадан һәм ун укучы химиядән „5“-ле билгесе алган. „5“-ле билгесен математика һәм физикадан 5, математика һәм химиядән 6, химия һәм физикадан 7, барлык фәннәрдән дә 3 укучы алган. Бары тик математика буенча гына „5“-ле билгесен ничә укучы алган? Кимендә бер „5“-ле билгесен ничә укучы алган?

Чишү: Укучылар арасында өч күплек карап узыйк:
$A = \{$математика буенча „5“-ле билгесе алучылар$\}$,
$B = \{$физика буенча „5“-ле билгесе алучылар$\}$,
$C = \{$химия буенча „5“-ле билгесе алучылар$\}$.



$A \bigcap B \bigcap C$ өлкәсе барлык фәннәрдән дә „5“-ле билгесе алган укучыларга туры килә һәм үз эченә 3 укучыны ала.

$A \bigcap B$ өлкәсе математика һәм физикадан „5“-ле билгесе алган укучыларга туры килә һәм үз эченә 5 укучыны ала. Бу өлкәгә $A \bigcap B \bigcap C$ күплеге кертелгән инде. Шул сәбәпле $A \bigcap B$ эченә алардан тыш тагы 2 кеше эләгәчәк. Охшаш рәвештә $A \bigcap C$ һәм $B \bigcap C$ өлкәләренә дә саннар тутырыла.

A күплегенә 9 укучы керә. Аларның 8-е башка күплекләр белән кисешкән өлкәләрдә исәпләнгән инде. Шул сәбәпле A-ның башкалар белән кисешмәүче өлешендә 1 укучы кала. Ягъни бары тик математика буенча гына 1 укучы „5“-ле билгесе алган.

Охшаш рәвештә B-ның башкалар белән кисешмәүче өлешендә 3, C-ның башкалар белән кисешмәүче өлешендә 2 укучы кала.

б) Кимендә бер „5“-ле билгесен алган укучылар санын табар өчен барлык саннарны кушарга кирәк: $1+3+2+2+2+3+3=16$.

Җавап: Бары тик математика буенча гына „5“-ле билгесен 1 укучы гына алган. Кимендә бер „5“-ле билгесен 16 укучы алган.

Вакыйгалар өстендәге гамәлләрнең үзлекләре

1°. $\Omega + A = \Omega$	7°. $(A\backslash B)\cdot(B\backslash A) = \varnothing$
2°. $\Omega \cdot A = A$	8°. $A + B = B + A$
3°. $A \cdot A = A$ (A^2 түгел!)	9°. $A \cdot B = B \cdot A$
4°. $A + A = A$ ($2A$ түгел!)	10°. $C(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$
5°. $A + \varnothing = A$	11°. $\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}$, $\overline{A\cdot B} = \bar{A}+\bar{B}$
6°. $A \cdot \varnothing = \varnothing$	12°. $A + \bar{A} = \Omega$, $\bar{\bar{A}} = A$

Билгеләмә. Һәрбер сынауга Ω – гади нәтиҗәләр пространствосы беркыйммәтле тиңдәш була.Ниндидер бер сынауга кагылышлы барлык вакыйгаларны S дип тамгалыйк. Ачык күренгәнчә, S – Ω пространствосының барлык кече күплекләренең күплеге булып тора. Бу S күплеге сынауның *вакыйгалар алгебрасы* (алгебра событий) дип атала. $A \in S$ дип язу, A ның вакыйга булуын аңлата.

Теорема. *S күплеге кушу һәм тапкырлау гамәлләренә карата алгебра була, ягъни*

1) $\varnothing, \Omega \in S$;

2) әгәр $A,\ B \in S \ \Rightarrow\ A+B,\ A\cdot B \in S$;

3) әгәр $A \in S \ \Rightarrow\ \bar{A} \in S$

шартлары үтәлә.

Исбатлау. 1) Буш күплек $\varnothing$ теләсә кайсы күплекнең кече күплеге булып тора. Ω гади нәтиҗәләр пространствосын да үзенең кече күплеге итеп карарга була. Димәк, $\Omega, \varnothing \in S$.

2) Ниндидер $A,\ B \in S$ булсын ди. Вакыйгалар суммасы билгеләмәсе

буенча $A+B$ га A яки B вакыйгаларына туры килгән гади нәтиҗәләр керә. Димәк, $A+B \in S$. Вакыйгалар тапкырчыгышы билгеләмәсе буенча $A \cdot B$ га A һәм B вакыйгаларына туры килгән гади нәтиҗәләр керә. Димәк, $A \cdot B \in S$.

3) Ниндидер $A \in S$ булсын. Капма-каршы вакыйга билгеләмәсе буенча, $\bar{A}$ вакыйгасына A вакыйгасына кермәгән гади нәтиҗәләр керә. Димәк, $\bar{A} \in S$.

Теорема исбатланды.

Гамәлләр өчен хаклык таблицалары

A вакыйгасы күзәтелгәндә аңа берне, ә күзәтелмәгәндә, нольне тиңдәш итеп куябыз. Ул вакытта,

$A+B$

A B	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \cdot B$

A B	0	1
0	0	0
1	0	1

$\bar{A}$

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Мисал 28. A һәм B вакыйгаларының күзәтелүе, ә C вакыйгасының күзәтелмәве билгеле. $(A+\bar{B}) \cdot (B+\bar{C})$ вакыйгасының күзәтелү-күзәтелмәвен тикшерергә.

Чишү: Хаклык таблицасын тутырыйк:

A	B	C	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$A+\bar{B}$	$B+\bar{C}$	$(A+\bar{B}) \cdot (B+\bar{C})$
1	1	0	0	1	1	1	1

Димәк $(A+\bar{B}) \cdot (B+\bar{C})$ вакыйгасы күзәтелә.

Җавап: $(A+\bar{B}) \cdot (B+\bar{C})$ вакыйгасы күзәтелә.

§6. Ихтималлык билгеләмәләре

Нинди дә булса сынау үткәрергә җыенганда, аның нәтиҗәсен алдан әйтеп булмый. Югарыда бирелгән билгеләмәгә нигезләнеп, булачак нәтиҗәне вакыйга дип атый алабыз. Бу вакыйга очраклы вакыйга булырга мөмкин. Очраклы вакыйгалар, үзләренең табигатенә карамастан, билгеле бер ихтималлык закончалыкларына буйсыналар. Очраклы вакыйганың төп сан тасвирламасы булып ихтималлык тора. Ул очраклы вакыйганың объектив мөмкинлек үлчәме дип карала.

Ихтималлыкның дүрт билгеләмәсе бар: классик, геометрик, статистик һәм аксиоматик. Беренче өч билгеләмә – конструктив һәм аерым бер сынаулар өчен генә кулланыла. Аксиоматик билгеләмәгә килгәндә, ул теоретик характерда.

Ниндидер A вакыйгасының ихтималлыгын $P(A)$ дип тамгалыйлар.

Билгеләмә. Чикле сандагы тигез мөмкинлекле гади нәтиҗәләр (равновозможные элементарные события) бирә торган сынауны карыйк. Ниндидер A вакыйгасы өчен *классик ихтималлык*

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{6.1}$$

формуласы ярдәмендә исәпләнә. Монда n – бу сынауның барлык гади нәтиҗәләр саны, m — A вакыйгасына туры килгән гади нәтиҗәләр саны.

Мисал өчен уен шакмагын бер мәртәбә чөябез. җөп очко чыгуын — A вакыйгасы итеп алыйк: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Гади нәтиҗәләр пространствосы Ω да барысы 6 гади нәтиҗә, $n = 6$, ә $m = 3$, димәк

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Мисал 29. Мәктәп укучысы ирекле рәвештә ике урынлы сан сайлый. Бу санның 10 -га бүленү ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Очраклы сайланган ике урынлы сан 10 -га бүленә$\} = A$ вакыйгасы булсын. Барлыгы 90 икеурынлы сан бар. Алар арасында 10 -га кабатлылары 9 данә. A вакыйгасының ихтималлыгы классик (6.1) формуласы буенча исәпләнә һәм $P(A) = \frac{9}{90} = 0,1$ була.

Җавап: очраклы сайланган ике урынлы санның 10 -га бүленү ихтималлыгы $0,1$.

Билгеләмә. Чиксез сандагы тигез мөмкинлекле гади нәтиҗәләр бирә торган сынауны карыйк. Күп очракта, мондый сынаулар $\mu(\omega)$ үлчәмендәге ω өлкәсенең теләсә нинди бер ноктасын ирекле рәвештә сайлаудан гыйбарәт. Үлчәм (мера) итеп гади очракта озынлык, мәйдан яки күләм алына. Әгәр дә $A = \{$нокта ω ның D өлешеннән сайлана$\}$ вакыйгасы икән, геометрик ихтималлык

$$P(A) = \frac{\mu(D)}{\mu(\omega)} \tag{6.2}$$

формуласы ярдәмендә исәпләнә. Монда $\mu(D)$ — D ның үлчәме.

Мисал 30. Радиусы R булган түгәрәк эченә ирекле рәвештә нокта куела. Бу ноктаның түгәрәккә камалган квадрат эченә эләгү ихтималлыгын табарга.

Чишү: Билгеләмә тамгаларында: ω — түгәрәк, D — камалган квадрат, $A = \{$нокта камалган квадрат эчендә$\}$ вакыйгасы. Геометрик мәгълүматларга таянып, табабыз:

$$\mu(\omega) = \pi R^2, \mu(D) = 2R^2.$$

Димәк,

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Билгеләмә. Әгәр сынауларның нәтиҗәләре бер-берсе белән бәйләнмәгән булса, бу сынаулар *үзара бәйсез сынаулар* дип атала.

Билгеләмә. Бер-бер артлы үткәрелгән берничә бәйсез сынау вакытында *A вакыйгасының чагыштырмача ешлыгы* (относительная частота события) дип

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n} \tag{6.3}$$

чагыштырмасы атала. Монда n — сынаулар саны, m^* — A вакыйгасы белән тәмамланган сынаулар саны, ягъни A *вакыйгасының ешлыгы* (частота события).

Билгеләмә. Сынаулар саны зур булганда вакыйганың чагыштырмача ешлыгы *статистик ихтималлык* дип атала, ягъни

$$P(A) \approx P^*(A) \tag{6.4}$$

дип кабул ителә.

Мисал 31. Мишеньгә 100 мәртәбә аталар, шуларның 85-е мишень үзәгенә эләгә. Бер атуда мишеньнең үзәгенә эләгү ихтималлыгын табарга.

Чишү: $A = \{\text{үзәккә эләккән}\}$, $\overline{A} = \{\text{читкә киткән}\}$ вакыйгалары булсын. Гади нәтиҗәләр пространствосы $\Omega = \{A, \overline{A}\}$. Бер-бер артлы берничә бәйсез сынау үткәрелә. Сынаулар саны $m = 100$. Ихтималлыгы табылачак вакыйганы $A = \{\text{бер атуда мишеньның үзәгенә эләккән}\}$ — дип алыйк,
$m_A = 85$. Димәк, ихтималлыкның статистик билгеләмәсе нигезендә,
$P(A) \approx \frac{85}{100} = 0,85$.

Билгеләмә. Сынауда берьюлы күзәтелә алмый торган вакыйгалар *бергәлексез яки берьюлы мөмкин түгел* вакыйгалар (несовместные события) дип атала.

Ихтималлыкның аксиоматик нигезләрен 1933 елда академик А. Н. Колмогоров тәкъдим иткән. Бу билгеләмә хәзерге көндә дә универсаль булып тора. Аксиоматик билгеләмә ихтималлык теориясенең теләсә кайсы фактын логик әйтемнәр ярдәмендә исбатлауга юл ача.

Билгеләмә. Һәрбер сынауга Ω – гади нәтиҗәләр пространствосы һәм S – вакыйгалар алгебрасы беркыйммәтле тиңдәш. Әгәр S вакыйгалар алгебрасында бирелгән $P(A)$ сан функциясе түбәндәге аксиомаларны канәгатьләндерсә:

1) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in S$;

2) әгәр A һәм B бергәлексез вакыйгалар булса, $P(A+B) = P(A) + P(B)$;

3) $P(\Omega) = 1$,

ул *аксиоматик ихтималлык* дип атала.

Лемма. *Ихтималлык өчен түбәндәге шартлар үтәлә:*

1) $\forall A \in S,\ 0 \leq P(A) \leq 1$*;*

2) булмаслык вакыйга өчен $P(B) = 0$*;*

3) ышанычлы вакыйга өчен $P(C) = 1$*;*

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Исбатлау. Классик билгеләмәне кулланабыз. Тигез мөмкинлекле n төрле гади нәтиҗәле сынауны карыйк.

1) $P(A) = \frac{n_A}{n} \geq 0$ булуы ачык, ә $P(A) = \frac{n_A}{n} \leq 1$, чөнки $n_A \leq n$.

2) $P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

3) $P(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

4) $P(\bar{A}) = \frac{n_{\bar{A}}}{n} = \frac{n - n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} = 1 - P(A)$.

Лемма исбатланды.

Билгеләмә. Һәрбер сынау гади нәтиҗәләр пространствосы, вакыйгалар алгебрасы һәм бирелгән ихтималлык белән тулысынча тасвирлана. Әлеге $(\Omega,\ S,\ P)$ җыелмасы *ихтималлык моделе* дип атала.

Мисал өчен мишеньгә бер мәртәбә төбәп аталар. Бу сынауга ике гади нәтиҗә туры килә: $A = \{$үзәккә эләкте$\}$, $\bar{A} = \{$читкә китте$\}$. Димәк
$\Omega = \{A, \bar{A}\}$, $S = \{\Omega, A, \bar{A}, \varnothing\}$. Модельләр мондый булырга мөмкин:

1. яхшы атучы: $(\Omega, S, P_1) - P_1(A) = 0,9; \quad P_1(\bar{A}) = 0,1.$
2. начар атучы: $(\Omega, S, P_2) - P_2(A) = 0,3; \quad P_2(\bar{A}) = 0,7.$

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 11. R радиуслы түгәрәк эченә ирекле рәвештә нокта куелган. Шушы ноктадан түгәрәк үзәгенә кадәр ераклыкның $R/2$ дән кечкенә булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 12. Түбәләре (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) нокталарында булган квадрат эченә ирекле рәвештә нокта куелган. Аның x һәм y координаталары $y < 2x$ тигезсезлеген канәгатьләндерү ихтималлыгын табарга.

Бирем 13. Ягы a булган тигезьяклы өчпочмак эченә ирекле рәвештә нокта куелган. Ноктаның шушы өчпочмакка камалган түгәрәк эченә эләгү ихтималлыгын табарга.

Бирем 14. Ягы a га тигез булган квадрат эченә ирекле рәвештә A ноктасы куелган. Квадратның аерым бер түбәсеннән A ноктасына кадәр ераклыкның $a/2$ дән артмау ихтималлыгын табарга.

Бирем 15. Ягы a га тигез булган квадрат эченә ирекле рәвештә A ноктасы куелган. Квадрат үзәгеннән A ноктасына кадәр ераклыкның $a/2$ дән артмау ихтималлыгын табарга.

Бирем 16. Бер «Спортлото» (36 дан 5) лотерея карточкасының хуҗасы 5 номерны сыза. Аның тарафыннан 4 номерның алдан әйтү ихтималлыгын табарга.

Бирем 17. 12 төрле дәреслекне өч студентка очраклы рәвештә тараталар. Аерым очрак буларак кайбер кешегә бер китап та эләкмәскә мөмкин, яисә барлык китаплар да бер үк кешегә бирелә ала. Китапларның тигез итеп таратылу ихтималлыгын табарга.

Бирем 18. Җәлил белән Җәмилә Казан шәһәренең бауман урамында зур сәгать янында көндезге 13.00 һәм 14.00 арасында очрашырга сүз куешканнар. Һәрберсе иптәшен 20 минут көтәргә риза булса, аларның очрашу ихтималлыгын табыгыз.

Бирем 19. Салам кисәген очраклы ике урында сындырганда шул кисәкләрдән өчпочмак төзеп булу ихтималлыг табарга.

§7. Ихтималлыкларны кушу һәм тапкырлау кагыйдәсе

Теорема. *(ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе) Теләсә кайсы сынауның A һәм B вакыйгалары өчен*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B) \tag{7.1}$$

тигезлеге, ә аерым очрак буларак, бергәлексез вакыйгалар өчен

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{7.2}$$

тигезлеге дөрес.

Исбатлау. Классик билгеләмәне кулланыйк. Тигез мөмкинлекле n төрле гади нәтиҗәле сынауны карыйк. Күплектәге элементлар санын n_A, n_B, ... дип тамгалыйк. Ачык күренгәнчә:

$$n_{A+B}=n_A+n_B-n_{A\cdot B}.$$

Бу тигезләмәне n га бүлик:

$$\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}-\frac{n_{A\cdot B}}{n}.$$

Шулай итеп, классик билгеләмә нигезендә

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

дип яза алабыз.

Хәзер A һәм B бергәлексез вакыйгалар булсын ди. Алар өчен $A\cdot B=\emptyset$ — булмаслык вакыйга. Шуңа күрә $P(A\cdot B)=P(\emptyset)=0$. Димәк, (7.1) дән аерым очракта $P(A+B)=P(A)+P(B)$ тигезлеге килеп чыга.

Теорема исбатланды.

Теорема. *(ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе — гомуми очрак) Теләсә кайсы сынауның A_1, A_2, ..., A_m вакыйгалары өчен*

$$P(A_1+A_2+...+A_m)=1-P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot...\cdot\bar{A}_m) \tag{7.3}$$

тигезлеге дөрес.

Исбатлау. Бирелгән вакыйгаларның суммасын $A_1 + A_2 + \ldots + A_m = \{A_i, i = \overline{1,m}$, һичьюгы берсе була$\}$ дип, ә тапкырчыгышын $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_m = \{A_i, i = \overline{1,m}$, берсе дә булмый$\}$ дип язарга мөмкин. Бу ике вакыйга капма-каршы, шуңа күрә $P(A_1 + A_2 + ... + A_m) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_m)$ була.

Теорема исбатланды.

Билгеләмә. B вакыйгасы күзәтелгән очракта A вакыйгасының күзәтелү ихтималлыгы *шартлы ихтималлык* (условная вероятность) дип атала һәм

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} \qquad (n_B \neq 0) \tag{7.4}$$

тигезлеге ярдәмендә исәпләнә. Монда n_{AB} – $A \cdot B$ вакыйгасына уңайлы (благоприятные) гади нәтиҗәләр саны, n_B – B вакыйгасы өчен уңайлы гади нәтиҗәләр саны.

Мисал өчен уен шакмагын бер мәртәбә чөябез. Гади нәтиҗәләр пространствосы $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Әгәр $A = \{\omega_2, \ \omega_4, \ \omega_6\} = \{$җөп сан чыгуы$\}$, $B = \{\omega_6\} = \{$алты очко чыгуы$\}$ вакыйгалары булса,

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0,5, P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{1}{6},$$

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{1}{1} = 1, P(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{1}{3}.$$

Билгеләмә. A һәм B вакыйгаларының берсенең күзәтелүе икенчесенең күзәтелүенә бәйле булмаса, бу вакыйгалар *бәйсез* (независимые) дип атала һәм $P(A|B) = P(A)$ яки $P(B|A) = P(B)$ була.

Теорема. *(ихтималлыкларны тапкырлау кагыйдәсе) Теләсә нинди сынауның A һәм B вакыйгалары өчен*

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \tag{7.5}$$

тигезлеге, ә аерым очрак буларак, бәйсез вакыйгалар өчен

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \tag{7.6}$$

тигезлеге дөрес.

Исбатлау. Классик билгеләмәне кулланыйк. Тигез мөмкинлекле n төрле гади нәтиҗәле бер сынауны карыйк. Билгеләмә нигезендә

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \tag{7.7}$$

Димәк, $P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B)$. Шулай ук

$$P(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\dfrac{n_{AB}}{n}}{\dfrac{n_A}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$$

дип күрсәтергә була. Моннан $P(A \cdot B) = P(B|A) \cdot P(A)$ килеп чыга.

Хәзер A һәм B вакыйгалары бәйсез булсын ди. Бу очракта $P(A|B) = P(A)$, ә (7.5) тигезлегеннән $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ килеп чыга.

Теорема исбатланды.

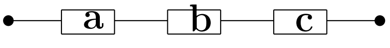
Кушу һәм тапкырлау кагыйдәләрен куллануга ышанычлылык турында мисал карап узыйк.

Билгеләмә. Приборның билгеле бер вакыт дәвамында өзлексез эшләү ихтималлыгын ышанычлылык дип атыйк.

Мисал 32. a, b, c приборларының билгеле бер вакыт дәвамында өзлексез эшләү ихтималлыклары тиңдәшле рәвештә $0,7$; $0,8$; $0,9$ булсын. a, b, c элементларыннан төзелгән җайланманың ышанычлы эшләү ихтималлыгын табарга. Элементларның а) эзлекле, б) параллель тоташкан очракларын карарга.

Чишү: $A_1 = \{$а элементы ышанычлы эшли$\}$, $A_2 = \{$b элементы ышанычлы эшли$\}$, $A_3 = \{$c элементы ышанычлы эшли$\}$ вакыйгаларының ихтималлыклары мисалның шарты нигезендә $P(A_1) = 0,7$; $P(A_2) = 0,8$; $P(A_3) = 0,9$.

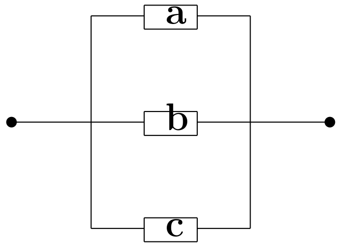
а) Приборлар эзлекле тоташтырылган булсын.



$A = \{$җайланма ышанычлы эшли$\}$ вакыйгасын $A = A_1A_2A_3$ рәвешендә күрсәтеп була. Ихтималлыкларны тапкырлау кагыйдәсе нигезендә исәпли-

без:
$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504.$

а) Приборлар параллель тоташтырылган булсын.



$B = \{$параллель тоташтырылган җайланма ышанычлы эшли$\}$ вакыйгасын $B = A_1 + A_2 + A_3$ рәвешендә күрсәтеп була. Ихтималлыкларны кушуның гомумиләштерелгән кагыйдәсе нигезендә исәплибез:
$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,994.$

Җавап: Җайланманың ышанычлы эшләү ихтималлыгы эзлекле тоташтырганда $0,504$-кә кадәр кими; ә параллель тоташтырганда исә $0,994$-кә кадәр арта.

Мисал 33. Укучы программадагы 40 сорауның 30 сен белә. Укучы тарафыннан бирелгән өч сорауның икесә җавап бирү ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Өч сорауның икесенә җавап бирә$\} = A$ вакыйгасы булсын. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсеннән файдаланыйк. Ул вакытта, тапкырлау кагыйдәсе нигезендә A вакыйгасы өчен отышлы нәтиҗәләр саны

$$m = C_{30}^2 C_{10}^1 = 4350$$

була. Барлык мөмкинлекләр саны исә

$$n = C_{40}^3 = 9880.$$

Шулай итеп

$$P(A) = \frac{4350}{9880} \approx 0,44.$$

Җавап: бирелгән өч сорауның икесенә җавап бирү ихтималлыгы якынча $0,44$.

Мисал 34. Йөзү буенча ярышта 14 ир-ат һәм 16 хатын-кыз катнаша. Өч җиңүче арасында ике ир – ат булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Өч җиңүче арасында икесе ир – ат$\} = A$ вакыйгасы булсын. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсеннән файдаланыйк. Ул вакытта, тапкырлау кагыйдәсе нигезендә A вакыйгасы өчен отышлы нәтиҗәләр саны

$$m = C_{14}^2 C_{16}^1 = 1456$$

була. Барлык мөмкинлекләр саны исә

$$n = C_{30}^3 = 4060.$$

Шулай итеп

$$P(A) = \frac{1456}{4060} \approx 0,36.$$

Җавап: өч җиңүче арасында ике ир – ат булу ихтималлыгы якынча $0,36$.

Мисал 35. Мәктәпнең дүртенче сыйныфында 16 кыз һәм 18 малай укый. Шуларның дүртесе укытучылар бүлмәсенә йөгереп керде. Алар арасында бер малай булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$4 йөгереп керүче арасында 1 малай$\} = A$ вакыйгасы булсын. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсеннән файдаланыйк. Ул вакытта, тапкырлау кагыйдәсе нигезендә A вакыйгасы өчен отышлы нәтиҗәләр саны

$$m = C_{16}^3 C_{18}^1 = 10080$$

була. Барлык мөмкинлекләр саны исә

$$n = C_{34}^4 = 46376.$$

Шулай итеп

$$P(A) = \frac{10080}{46376} \approx 0,22.$$

Җавап: укытучылар бүлмәсенә йөгереп кергщн дүрт укучы арасында бер малай булу ихтималлыгы якынча $0,22$.

Мисал 36. Оту ихтималлыклары $0,2$ булган ике төрле лотерея билетлары сатып алынган. Ике билетның кимендә берсе отышлы булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$ беренче билет отышлы булып чыкты$\} = A_1$, $\{$ икенче билет отышлы булып чыкты$\} = A_2$ вакыйгалары булсын. Ул вакытта,
$A = \{$кимендә бер билет отышлы булып чыкты$\}$ вакыйгасы өчен

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,2 + 0,2 - 0,2 \cdot 0,2 = 0,36.$$

Җавап: кимендә бер билет отышлы булу ихтималлыгы $0,36$.

Мисал 37. Европада футбол буенча чемпионат бара. Илнең берләшмә командасы чирекфиналда A командасын $0,7$ ихтималлыгы белән, B командасын $0,5$ ихтималлыгы белән ота ала. Берләшмә команданың финалга эләгү ихтималлыгын табарга.

Чишү: Финалга эләгер өчен берләшмә команда иң элек чирек – һәм ярымфиналларны отарга тиеш. Шуңа күрә ихтималлыкларны тапкырлау кагыйдәсеннән файдаланыйк. Ул вакытта, $C = \{$берләшмә команда финалга узды$\}$ вакыйгасы ихтималлыгы

$$P(C) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35.$$

Җавап: берләшмә команданыж финалга узу ихтималлыгы $0,35$.

Мисал 38. Аучы ерагаючы мишеньгә өч тапкыр аткан. Атуга керешкәндә тидерү ихтималлыгы $0,8$, ә һәр атудан соң бу ихтималлык $0,1$ гә кими. Аучының ике тапкыр тидерү ихтималлыгын табарга.

Чишү: $A = \{$аучы ике тапкыр тидерде$\}$ вакыйгасы $B = \{$беренче һәм икенче атуда тидерде, өченче атуда тидермәде$\}$, $C = \{$беренче һәм өченче атуда тидерде, икенче атуда тидермәде$\}$, $D = \{$икенче һәм өченче атуда тидерде, беренче атуда тидермәде$\}$ вакыйгаларының суммасыннан гыйбарәт. Ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе нигезендә

$$P(A) = P(A)+P(B)+P(C) = 0,8\cdot0,7\cdot0,4+0,8\cdot0,3\cdot0,6+0,2\cdot0,7\cdot0,6 = 0,452$$

Җавап: төгәл ике тапкыр мишеньга тидерү ихтималлыгы $0,452$.

Бирем 20. Аварияне хәбәр итү өчен бер-берсенә бәйсез эшләүче ике сигнализатор куелган. Авария вакытында беренче сигнализаторның хәбәр бирү ихтималлыгы 0,95 кә тигез, ә икенчесенеке – 0,9. Авария вакытында кимендә бер сигнализаторның хәбәр бирү ихтималлыгын табарга.

Бирем 21. Детальләр 2 эшкәртү операциясе аша уза. Беренче операциядә брак ясау ихтималлыгы $0,02$, ә икенчесендә — $0,03$. Аерым операцияләрдә брак ясау бәйсез вакыйгалар дип фараз итеп, ике операциядән соң брак деталь килеп чыгу ихтималлыгын табарга.

Бирем 22. Беренче станокның сәгать дәвамында өзлексез эшләү ихтималлыгы 0,9, ә икенчесенең – 0,95. Әгәр станоклар бер-берсеннән бәйсез эшләсә, сәгать дәвамында бары тик бер генә станокның сафтан чыгу ихтималлыгын табарга.

Бирем 23. Сатып алучы тузан суырткыч һәм идән сөрткеч алган. Гарантия срогы дәвамында тузан суырткычның сафтан чыгу ихтималлыгы $0,95$, ә идән сөрткеч өчен — $0,9$. Һичьюгы бер приборның гарантия срогын аклау ихтималлыгын табарга.

Бирем 24. Студент өчен беренче имтиханны бирү ихтималлыгы 0,9, икенчесен – 0,8, ә өченчесен – 0,85. Студентның ике имтиханны бирү ихтималлыгын табарга.

Бирем 25. Дошман самолетына бәйсез ике зенит ракетасы җибәрелгән. Беренче ракетаның эләгү ихтималлыгы 0,9 га тигез, ә икенчесенеке – 0,8. Һичьюгы бер ракетаның эләгү ихтималлыгын табарга.

Бирем 26. Тартмада 1 дән 5 кә кадәр номерлар төшерелгән биш шар бар. Ирекле рәвештә бер-бер артлы кире кайтармыйча ике шар алына. 1 һәм 4 номерлы шарлар алу ихтималлыгын табарга.

§8. Тулы ихтималлык һәм Байес формуласы

Билгеләмә. Сынауның мөмкин булган ахыры турындагы фикер гипотеза дип атала.

Билгеләмә. Әгәр $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$ – ниндидер бер сынауның гипотезалары булса һәм алар бу сынауның бар мөмкин нәтиҗәләрен үз эченә алсалар, өстәвенә, сынау үткәч, бу гепотезаларның бары тик берсе генә гамәлгә ашса, бу гепотезалар әлеге сынауның *тулы группасы* (полная группа) дип атала.

Тулы группага керүче гипотезаларның ихтималлыклары суммасы һәрвакыт бергә тигез.

Теорема. *Ниндидер A вакыйгасы тулы группага керүче $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$ гипотезаларының бары тик берсе белән генә була алсын ди. Шушы шарт үтәлгәндә:*

1) $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k) \cdot P(H_k)$

тулы ихтималлык формуласы дөрес;

2) A вакыйгасы күзәтелгән очракта, гипотезаларның ихтималлыкларын

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} \tag{8.1}$$

Байес формуласы буенча яңадан саныйлар.

Исбатлау. Теореманың шарты буенча A вакыйгасы тулы группа хасил итүче гипотезаларның берсе белән генә була ала. Димәк,

1) $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + ... + A \cdot H_n = \sum_{k=1}^{n}(A \cdot H_k)$,

2) $A \cdot H_i,\ \ i = \overline{1,n}$ вакыйгалары бергәлексез.

Ихтималлыкларны кушу һәм тапкырлау теоремаларыннан

$$P(A) = P\left(\sum_{k=1}^{n} A \cdot H_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A \cdot H_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k) \cdot P(H_k) \tag{8.2}$$

тулы ихтималлык формуласы килеп чыга.

Ихтималлыкларны тапкырлау теоремасы нигезендә,

$$P(A \cdot H_i) = P(H_i|A) \cdot P(A) = P(A|H_i) \cdot P(H_i),\ \ i = \overline{1,n} \tag{8.3}$$

була. Моннан

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} \tag{8.4}$$

Байес формуласы килеп чыга.

Теорема исбатланды.

Мисал 39. Студент имтиханга тулысынча әзер түгел. Ул n билетның бары тик k сын гына өйрәнгән. Студентның өйрәнгән билет алу ихтималлыгы кайсы очракта зуррак, беренче булып алгандамы яисә икенче булыпмы?

Чишү: Сынау студентның бер билет алуыннан гыйбарәт. Сынау үтәлгәндә $H_1 = \{$беренчесе студент өйрәнгән билет$\}$, $H_2 = \{$беренчесе студент өйрәнмәгән билет$\}$ гипотезалары булырга мөмкин. Безне $A = \{$студент өйрәнгән билет алды$\}$ вакыйгасы кызыксындыра.

Билетны беренче булып алганда ихтималлыкның классик билгеләмәсеннән файдаланабыз:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Билетны икенче булып алганда:

$$P(H_1) = \frac{k}{n}, P(H_2) = \frac{n-k}{n},$$

$$P(A|H_1) = \frac{k-1}{n-1}, P(A|H_2) = \frac{k}{n-1},$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) =$$

$$= \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{k}{n} + \frac{k}{n-1} \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n(n-1)}(k-1+n-k) = \frac{k}{n}.$$

Димәк, студентның өйрәнгән билет алу ихтималлыгы ике очракта да $\frac{k}{n}$ га тигез була.

Шунысы кызык, студент билетны ничәнче (беренче, икенче, өченче, һ.б.) булып алуына карамастан, аның өйрәнгән билет алу ихтималлыгы барлык очракта да $\frac{k}{n}$ га тигез.

Мисал 40. Турист тауга өч төрле маршрут белән менә ала. Беренче маршрут буенча тау түбәсенә менеп җитү ихтималлыгы $0,7$ -гә тигез, икенчесе буенча — $0,9$, өченчесе буенча — $0,4$.

а) Маршрут ирекле рәвештә сайланган очракта менеп җитү ихтималлыгын;

б) әгәр альпинист түбәгә менеп җиткән булса, аның икенче маршрут буенча менгән булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Маршрут узылды$\} = A$ вакыйгасы булсын. Әгәр маршрут очраклы рәвештә сайланган булса барлык өч юл да тигез ихтималлыклы.
а) Тулы ихтималлык формуласы буенча

$$P(A) = 0,7 \cdot \frac{1}{3} + 0,9 \cdot \frac{1}{3} + 0,4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

б) Байес формуласы (8.4) буенча

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 0,45.$$

Җавап: а) маршрутны узу ихтималлыгы $\frac{2}{3}$ б) маршрут узылган очракта туристның икенче маршрут белән барган булу ихтимллыгы $0,45$.

Мисал 41. Бер сыйныфта 20 кыз һәм 10 малай укый. Дәрескә өй эшен ике кыз һәм өч малай әзерләмичә килгән.
а) Очраклы сайланган укучының дәрескә әзер булмау ихтималлыгын табарга.
б) такта янына җавап бирергә кыз бала чакырылу ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Укучы дәрескә әзер түгел$\} = A$ вакыйгасы булсын. Малайны сайлау ихтималлыгы классик формула буенча исәпләнә һәм
$P(\text{малай}) = \frac{10}{20+10} = \frac{1}{3}$. Кыз баланы сайлау ихтималлыгы $P(\text{кыз}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Тулы ихтималлык (8.3) формуласы буенча

$$P(A) = \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{30}.$$

Җавап: а) укучының дәрескә әзер булмау ихтималлыгы $\frac{5}{30}$ б) җавап бирергә кыз бала чакырылу ихтималлыгы $\frac{2}{3}$.

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 27. Альпинист тауга 4 төрле маршрут белән менә ала. Беренче маршрут буенча тау түбәсенә менеп җитү ихтималлыгы 0,7 гә тигез, икенчесе буенча – 0,9, өченчесе буенча – 0,4, дүртенчесе буенча – 1. а) Маршрут ирекле рәвештә сайланган очракта менеп җитү ихтималлыгын; б) әгәр альпинист түбәне буйсындырган булса, аның икенче маршрут буенча менгән булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 28. 3 бертөрле тартма бар. Беренче тартмада 5 ак, 4 кара, 2 кызыл шар бар; икенчесендә тиңдәшле рәвештә 7, 9, 1; өченчесендә – 2, 3, 6. Ирекле рәвештә сайланган савыттан очраклы рәвештә бер шар алына. а) Ак шар алыну ихтималлыгын; б) әгәр ак шар алынган булса, аның өченче тартмадан булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 29. Кибеттә өч заводтан кайтарылган тигез сандагы телевизорлар бар. Беренче завод телевизорлары арасында яшерен дефектлылары 5%, икенчесенекендә – 3%, өченчесенекендә – 7%. Очраклы рәвештә бер телевизор сайлана. а) Сайланган телевизорның яшерен дефекты булу ихтималлыгын; б) әгәр телевизор дефектлы булса, аның беренче заводта эшләнгән булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 30. Беренче тартмада 7 төзек һәм 4 төзек булмаган радиолампа бар, икенче тартмада – 5 төзек һәм 3 төзек булмаган. Беренче тартмадан бер лампа икенчесенә күчереп салынган, аннан соң беренче тартмадан очраклы рәвештә бер лампа сайланган. а) Сайланган лампаның төзек булу ихтималлыгын; б) әгәр сайланган лампа төзек булса, күчереп салынган лампаның төзек булмау ихтималлыгын табарга.

Бирем 31. Кеше эштән соң өенә автобус белән яки трамвай белән кайта ала. Ул төрлечә йөри: 1/3 очракта автобусны сайлый, ә калган 2/3 очракта – трамвайны. Әгәр ул автобуска утырса, 75% очракта өйгә кичке сәгать алтыда кайтып җитә, әгәр трамвайга утырса, бары тик 70% очракта гына. а) Ирекле сайланган көнне бу кешенең өенә кичке алтыда кайтып җитү ихтималлыгын; б) әгәр өенә кичке алтыда кайтып җиткән булса, автобуска утырган булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 32. Студентлар төркемендә 10 чаңгычы, 6 гимнаст һәм 4 йөгерешче бар. Чаңгычы өчен зачет нормасын үтәү ихтималлыгы – 0,9, гимнаст өчен – 0,8, йөгерешче өчен – 0,75. Төркемнән очраклы рәвештә студент сайлана. а) Сайланган студентның зачёт нормасын үтәү ихтималлыгын; б) әгәр сайланган студент зачёт нормасын үтәсә, аның чаңгычы булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 33. Авыруны тикшергәндә H_1 яки H_2 чире булуга шик бар. Аларның ихтималлыклары тиңдәшле рәвештә $0,7$ һәм $0,3$. Диагнозга төгәллек кертү өчен анализ билгеләнгән, аның нәтиҗәсе булып уңай яки тискәре реакция тора. H_1 чире булган очракта уңай реакциянең ихтималлыгы $0,9$, ә тискәресенеке — $0,1$; ә H_2 очрагында уңай һәм тискәре реакцияләр тигез ихтималлы. а) Анализ нәтиҗәсендә тискәре реакция булу ихтималлыгын; б) әгәр анализда тискәре реакция булса, H_1 чире булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 34. Автомобильләрне страховкалау агентлыгы йөртүчеләрне 3 төркемгә бүлә: беренче төркем – ипле генә йөрүчеләр, икенче төркем – уртача йөрүчеләр, өченче төркем – үзләрен куркыныч астына куючылар. Агентлык үз автомобильләрен страховкалаган йөртүчеләрнең 30% беренче төркемнән, 50% – икенче төркемнән, ә 20% – өченче төркемнән дип фараз итә. Ел дәвамында беренче төркем вәкиленең һичьюгы бер авариягә эләгү ихтималлыгы 0,01; икенче төркем өчен бу ихтималлык 0,02 гә тигез; өченче төркем вәкиле өчен – 0,08. Үз автомобилен страховкалаган очраклы йөртүче сайлана. а) Аның ел дәвамында һичьюгы бер авариягә эләгү ихтималлыгын; б) әгәр шофер авариягә эләккән булса, аның өченче төркемнән булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 35. Җыю өчен детальләрнең 40% беренче станоктан, 30% – икенчесеннән, 20% – өченчесеннән, 10% – дүртенчесеннән килә. Беренче станок тарафыннан чыгарылган детальләр арасында 2% брак, икенчесеннән – 1%, өченчесеннән – 2%, дүртенчесеннән – 3% бракка чыга. җыюга килгән детальнең: а) брак булу ихтималлыгын; б) әгәр деталь брак булса, аның икенче станокта җыелган булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 36. Зачётка килгән 20 студентның 8 е бик яхшы әзерләнгән, 6 сы – яхшы, 4 се – уртача һәм 2 се начар. Бик яхшы әзерләнгән студент зачёттагы 40 сорауның барысына да җавапны белә, яхшы әзерләнгәне – 35 енә, уртачасы – 25 енә һәм начары – 10 ысына. Зачётны бирү өчен очраклы сайланган сорауга җавап бирергә кирәк. Билгеле бер студент өчен а) аның зачет бирү ихтималлыгын; б) әгәр ул зачетны биргән булса, аның яхшы әзерләнгән булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 37. Англиядә халыкны язып алу мәгълүматлары буенча (1891 ел) түбәндәгеләр ачыкланган: караңгы күзле аталар һәм караңгы күзле уллар тикшерелгән кешеләрнең 5% тәшкил итә, караңгы күзле аталар һәм ачык күзле уллар – 7,9%, ачык күзле аталар һәм караңгы күзле уллар 8,9%, ачык күзле аталар һәм ачык күзле уллар – 78,2%. Ачык күзле атаның караңгы күзле улы туу ихтималлыгын табарга.

Бирем 38. Ике бертөрле тартма бар. Беренче тартмада 7 ак һәм 3 кара шар ята, икенчесендә ак шарлар саны 6, кара шарлар 4 данә. ирекле рәвештә тартма сайлана һәм аннан очраклы шар алына. сайланган шар ак булып чыккан. Бу шарның беренче тармадан булу ихтималлыгы нинди?

§9. Аз санлы тәҗрибәләр сериясе

Билгеләмә. Бертөрле n бәйсез сынаулар эзлеклелеге бирелсен ди. Бу сынауларның һәркайсысында даими p ихтималлыгы белән A вакыйгасы килеп чыга торса, шундый сынаулар эзлеклелеге *Бернулли схемасы* дип атала.

Билгеләмә. Бертөрле n бәйсез сынауларда ниндидер A вакыйгасы k мәртәбә булды, дигән вакыйганы $A_{n,k}$ дип тамгалыйк. Шул рәвешле билгеләнгән вакыйганың ихтималлыгы $P_n(k) = P(A_{n,k})$ *биномиаль ихтималлык* дип атала.

Мисал 42. Мәргәннең (снайпер) һәр атуда мишеньга тидерү ихтималлыгы даими һәм $0,7$-гә тигез. Өч бәйсез атуда мишеньга ике тапкыр тидерү ихтималлыгын табарга.

Чишү: Сынау бер атудан гыйбарәт. Бу сынауның нәтиҗәәләре $A = \{$бер атуда тидерү$\}$ һәм $\overline{A} = \{$бер атуда тидерүмәү$\}$, аларның ихтималлыклары тиңдәш рәвештә $P(A) = p = 0,7$ һәм $P(\overline{A}) = q = 0,3$.

Бернулли схемасын кангатьләндерүче бертөрле бәйсез өч сынаудан (атудан) торучы серия уздырыла. Һәр сынауда даими $p = 0,7$ ихтималлыгы белән A вакыйгасы тормышка ашарга мөмкин.

$A_{3,2} = \{$Өч атуда мишеньга ике тапкыр тидерү$\}$ вакыйгасын берьюлы мөмкин булмаган кушылучылардан торучы $A_{3,2} = A \cdot A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot A \cdot A$ рәвешендә күрсәтеп була. Һәр кушылучы исә үзара бәйсез вакыйгаларның тапкырчыгышы. $A \cdot A \cdot \overline{A}$ кушылучысында тапкырланучылар бәйсез һәм төрле атуларның нәтиҗәләре булып тора. Бу вакыйга беренче һәм икенче атуда тидерүне һәм өченче атуда тидермәүне аңлата.

Ихтималлыкларны тапкырлау кагыйдәсе нигезендә

$$P(A \cdot A \cdot \overline{A}) = P(A \cdot \overline{A} \cdot A) = P(\overline{A} \cdot A \cdot A) = p^2 q.$$

Ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе нигезендә, биномиаль ихтималлык өчен исәпләп табабыз:

$$P_3(2) = P(A_{3,2}) = P(A \cdot A \cdot \overline{A}) + P(A \cdot \overline{A} \cdot A) + P(\overline{A} \cdot A \cdot A) =$$
$$= 3\,p^2 q = 3(0,7)^2\, 0,3 = 0,441.$$

Җавап: Өч бәйсез атуда мишеньга ике тапкыр тидерү ихтималлыгы $0,441$.

Теорема. *Ниндидер A вакыйгасы өчен Бернулли схемасы шартлары үтәлсә,*

1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$*;*

2) $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$*;*

3) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$*;*

4) $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n, \;\; q = 1 - p$

була.

Исбатлау. 1) Ачык күренгәнчә, $A_{n,k}$ вакыйгасын

$$A_{n,k} = \sum \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{k} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot ... \cdot \bar{A}}_{n-k} \qquad (9.1)$$

рәвешендә таркатып була. Бу сумма барлык урынлаштырмалар санынча алына, димәк $P_n(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ – кушылучылар саны. Ихтималлыкларны кушу һәм тапкырлау теоремаларына таянып:

$$P_n(k) = P(A_{n,k}) = P\left(\sum \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{k} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot ... \cdot \bar{A}}_{n-k}\right) \qquad (9.2)$$

дип яза алабыз. җәя эчендәге вакыйгалар бергәлексез, шуңа күрә

$$P_n(k) = \sum \underbrace{P(A) \cdot ... \cdot P(A)}_{k} \cdot \underbrace{P(\bar{A}) \cdot ... \cdot P(\bar{A})}_{n-k}. \qquad (9.3)$$

Шарт буенча, $P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q$, димәк $P_n(k) = \sum p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

2) Ньютон биномы формуласын һәм 1) тигезләмәне кулланып,

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n \qquad (9.4)$$

дип яза алабыз. Ләкин $q = 1 - p$. Димәк. $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1^n = 1$.

3) Бертөрле һәм бәйсез n сынауда ниндидер A вакыйгасы күзәтелүе саны k_1 дән азрак һәм k_2 дән күбрәк булмаса – бу вакыйганы B хәрефе аша тамгалыйк. Ачык күренгәнчә, B вакыйгасын $B = A_{n,k_1} + A_{n,k_1+1} + ... + A_{n,k_2}$

рәвешендә таркатып була. Ихтималлыкларны кушу һәм тапкырлау теоремалары нигезендә,

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P(B) = P\left(\sum_{k=k_1}^{k_2} A_{n,k}\right) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \tag{9.5}$$

4) Бертөрле һәм бәйсез n сынауда ниндидер A вакыйгасы һичьюгы бер мәртәбә күзәтелсә – бу вакыйганы C хәрефе аша тамгалыйк. Ачык күренгәнчә, C вакыйгасын $C = A_{n,1} + A_{n,2} + ... + A_{n,n}$ рәвешендә таркатып була.

Ихтималлыкларны кушу һәм тапкырлау теоремалары нигезендә

$$P_n(k \geq 1) = P(C) = P\left(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) - P_n(0) = 1 - q^n \tag{9.6}$$

дип яза алабыз. Чөнки биредә $P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n$.

Теорема исбатланды.

Биномиаль ихтималлыкларның үзлекләре турындагы теорема барлык $n \geqslant 2$ өчен дә урынлы әлбәттә. Ләкин, C_n^k коэффициентларындагы $n!$-ны исәпләү соралгач, бу формулалар бары тик кечкенә n саннары өчен кулланыла.

Мисал 43. Бернулли схемасы буенча уздырылучы бәйсез n сынуда иң зур ихтималлыкка ия нәтиҗәләр санын табарга.

Чишү: n бәйсез бертөрле сынаудан торучы эзлеклелекне карап узыйк. Бу сынауларның һәркайсында даими p ихтималлыгы белән A вакыйгасы килеп чыгарга мөмкин. Әгәр

$$P_n(m_0) > P_n(m_0 + 1), \tag{9.7}$$

$$P_n(m_0) > P_n(m_0 - 1), \tag{9.8}$$

шартлары үтәлсә $P_n(m_0)$ ихтималлыгы калганнары арасында иң зурысы булачак, ә m_0 **зурлыгы исә иң ихтимал нәтиҗәләр саны** дип атала.

(9.7) тигезсезлеген башкача языйк һәм рәвеш үзгәртик:

$$1 > \frac{P_n(m_0+1)}{P_n(m_0)} = \frac{C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}}{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}} = \left(\frac{n-m_0}{m_0+1}\right)\frac{p}{q}.$$

Шулай итеп $m_0q+q > n\,p-m_0p$, ягъни $q=1-p$ булуын испкә алсак, m_0-ны астан бәялибез:

$$n\,p-q < m_0. \tag{9.9}$$

Охшаш рәвештә (9.8) тигезсезлегеннән

$$1 < \frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0-1)} = \frac{C_n^{m_0}p^{m_0}q^{n-m_0}}{C_n^{m_0-1}p^{m_0-1}q^{n-m_0+1}} = \left(\frac{n-m_0+1}{m_0}\right)\frac{p}{q}$$

чагыштыруы килеп чыга. Шулай итеп

$$m_0q < (n-m_0+1)p$$

ягъни

$$m_0 < n\,p+p. \tag{9.10}$$

Җавап: (9.9)-(9.10) бәяләре нигезендә иң ихтимал нәтиҗәләр саны

$$n\,p-q < m_0 < n\,p+p \tag{9.11}$$

тигезсезлеген канагатьләндерә.

Алга таба психологик, БДИ һәм башка төрле тестларга хас мисалны карап узыйк.

Мисал 44. Тестта 6 сорау бар. Һәр сораугa бары тик берсе генә дөрес булган 4 җавап китерелгән. җавапавапны очраклы рәвештә генә тамгалаганда

а) 2 сораугa;

б) 1 сораудан алып 3 сораугa кадәр;

в) иң ихтимал сораулар санына

дөрес җавап бирү ихтималлыгын табарга.

Чишү: Сынау бер сораугa җавапны очраклы рәвештә тамгалаудан гыйбарәт. Безне $A=\{\text{бер сораугa дөрес җавап бирелгән}\}$ вакыйгасы кызыксындыра. Монда шарт нигезендә $P(A)=p=\frac{1}{4}$ һәм $P(\overline{A})=q=\frac{3}{4}$.

Бернулли схемасын кангатьләндерүче бертөрле бәйсез 6 сынаудан торучы серия уздырыла. Таләп ителгән ихтималлыклар биномиаль ихтималлыкларның үзлекләренә таянып исәпләнә.

а) пунктындагы 2 сорауга дөрес җавап бирү ихтималлыгы теоремадагы 1)-нче формула буенча исәпләнә:

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0,297.$$

б) пунктындагы 1 сораудан алып 3 сорауга кадәр дөрес җавап бирү ихтималлыгы теоремадагы 3)-нче формула буенча исәпләнә, һәр кушылучыны тапканда 1)-нче формула кулланыла:

$$P_6(1 \leqslant k \leqslant 3) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 =$$
$$= \frac{6!}{1!5!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$$
$$= 0,356 + 0,297 + 0,132 = 0,785.$$

в) беренче чиратта иң ихтимал m_0 санын табыйк. Бу мисалда $n = 0$, $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$. (9.11)-ны исәпкә алсак:

$$\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < m_0 < \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4},$$

$m_0 = 1$ булуы килеп чыга. Шулай итеп, 6 сорауга җавап биргәндә иң ихтимал д өрес җаваплар саны - бер һәм аңа тиңдәш ихтималлык

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6!}{1!5!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0,356.$$

Җавап: Тиңдәш пунктлар өчен ихтималлыклар түбәндәгечә:
а) $P_6(2) = 0,297$; б) $P_6(1 \leqslant k \leqslant 3) = 0,785$; в) $P_6(m_0 = 1) = 0,356$.

Мисал 45. Эшче ясаган детальнең яраклы булу ихтималлыгы 0,9. Эшләнелгән 4 детальнең

а) төгәл 2 се яраклы булуының;

б) яраклы детальләр санының 1 дән ким һәм 3 тән артык булмавының ихтималлыгын табарга.

Чишү: Сынау: деталь ясау. $A = \{$яраклы деталь ясау$\}$.
Димәк, $P(A) = p = 0,9, P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0,1$.
Бертөрле 4 бәйсез сынаулар эзлеклелеге бирелгәнлектән,

а) $P_4(2) = C_4^2\,p^2\,q^{4-2} = \frac{4!}{2!2!}\cdot 0,9^2\cdot 0,1^2 = 0,0486;$

б)

$$P_n(1 \leqslant k \leqslant 3) = \sum_{k=1}^{3} P_4(k) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) = C_4^1 p^1 q^{4-1} + C_4^2 p^2 q^{4-2} +$$
$$+ C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{1!3!}\cdot 0,9^1\cdot 0,1^3 + \frac{4!}{2!2!}\cdot 0,9^2\cdot 0,1^2 + \frac{4!}{3!1!}\cdot 0,9^3\cdot 0,1^1 = 0,3438.$$

Җавап:

Мисал 46. Атучының мишшеньга тидерү ихтималлыгы $0,8$. Биш атуда мишеньга кимендә өч тапкыр тидерү ихтималлыгын табарга.

Чишү: {Атучының биш атуда мишеньга кимендә өч тапкыр тидерүе } = {атучы 3 яки 4 яки 5 тапкыр тидерүе} = A вакыйгасы булсын. Мондый вакыйганың ихтималлыгы ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе нигезендә табыла ала.

$$P(A) = P_n(3 \leqslant k \leqslant 5) = C_5^3(0,8)^3(1-0,8)^2 + C_5^4(0,8)^2(1-0,8)^1 +$$
$$+ C_5^5(0,8)^5(1-0,8)^0 = 0,9.$$

Җавап: кимендә өч тапкыр тидерү ихтималлыгы $0,9$.

Мисал 47. Кибеткә 10 сатып алучы керде. Аларның һәрберсе өчен сатып алу ихтималлыгы $0,3$. Дүрт кеше нәрсә дә булса сатып ихтималлыгын табарга.

Чишү: {Дүрт кеше нәрсә дә булса сатып алды} = A вакыйгасы булсын.

$$P(A) = P_{10}(4) = C_{10}^4(0,3)^4(1-0,3)^6 = 0,2.$$

Җавап: ун кешенең дүртесе нәрсә дә булса сатып ихтималлыгы $0,2$.

Мисал 48. Хәбәр җибәргәндә бер тамгада хата ясау ихтималлыгы $0,01$. Сигез тамгадан торучы хәбәрдә ике хата ясау ихтималлыгын табарга.

Чишү: {Сигез тамгадан торучы хәбәрдә ике хата ясау} = A вакыйгасы булсын.

$$P(A) = P_8(2) = C_8^2(0,01)^2(1-0,01)^6 = 0,003.$$

Җавап: сигез тамгадан торучы хәбәрдә ике хата ясау ихтималлыгы $0,003$.

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 39. Төркемдәге 25 студентның 6 сы отличник. Ирекле рәвештә сайлап алынган 5 студент арасында 2 отличник булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 40. Студент имтиханга 25 сорауның 20 сенә әзерләнгән. Студентның ирекле сайланган 3 сорауның 2 сен белү ихтималлыгын табарга.

Бирем 41. Мәргән мишеньга бер атуда 80% төгәллек белән тидерә. Аның

а) 5 атуда иң ихтимал тидерүләр санын;

б) 6 атуда иң ихтимал тидерүләр санын табыгыз.

Һәр очракта шул вакыйгаларның ихтималлыкларын исәпләгез.

Бирем 42. Алдагы мисал шартлары үтәлгән очракта мәргәннең 5 атуда мишеньга бер тапкыр да тидермәү ихтималлыгын исәпләгез.

§10. Күп санлы тәҗрибәләр сериясе

Биномиаль ихтималлыкларны санаганда, $!_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ коэффициентларын, димәк $n!$ ны исәпләмичә булмый. Ләкин n саны шактый зур булганда, бу бик зур күләмле исәпләүгә китерә, шуңа күрә, сынаулар саны зур булганда, якынча формулаларга мөрәҗәгать итәргә туры килә. Мондый формулалар Пуассонның һәм Лапласның чик теоремаларыннан килеп чыга.

Лапласның якынча формулалары. *Бернулли схемасы буенча зур n санлы сынаулар үткәрелә. Ниндидер A вакыйгасы бу сынауларда даими p ихтималлыгы белән күзәтелә. Өстәвенә,p саны нульгә дә, бергә дә якын сан түгел. Шушы шартлар үтәлгәндә, биномиаль ихтималлыклар якынча*

1) $P_n(k_1) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_1)$*;*

2) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{k_i=k_1}^{k_2} \varphi(x_i)$*;*

3) $[k_1, k_2]$ аралыгы бик зур булса, $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ *формулалары нигезендә исәпләнәләр. Биредә* $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *– Гаусс функциясе,* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ *– Лаплас функциясе.*

Пуассонның якынча формулалары. *Бернулли схемасы буенча зур n санлы сынаулар үткәрелә. Ниндидер A вакыйгасы бу сынауларда даими p ихтималлыгы белән күзәтелә. Өстәвенә, p саны нульгә яки бергә якын тора, ә* $\lambda = np$ *даими зурлык. Шушы шартлар үтәлгәндә, биномиаль ихтималлыклар якынча*

1) $P_n(k_1) \approx \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda}$*;*

2) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx e^{-\lambda}\sum_{k_i=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}$*;*

3) $[k_1, k_2]$ *аралыгы бик зур булса,* $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ *формулалары нигезендә исәпләнәләр.*

$\varphi(x)$ һәм $\Phi(x)$функцияләренең үзлекләре:

1°. Гаусс функциясе – җөп функция: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

Лаплас функциясе – так функция: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2°. $|x| > 5$ булганда $\varphi(x) \approx 0$; $\Phi(x) \approx \begin{cases} 0,5, \quad x > 5 \ \ 1C; 30 = 40, \\ -0,5, \quad x < 5 \ \ 1C; 30 = 40. \end{cases}$

3°. $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

Искәрмә. Якынча формулалар, кагыйдә буларак, $npq \geq 10$ очрагында кулланылалар.

$\varphi(x)$, $\Phi(x)$ һәм $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ функцияләренең кыйммәтләре кулланма ахырындагы таблицаларда китерелә.

Мисал 49. Ир бала туувы ихтималлыгы 0,5 кә тигез. Яңа туган 50 бала арасында егермесе ир бала булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: Мәсьәләнең шарты Бернулли схемасына туры килә: бертөрле һәм бәйсез 50 сынау вакытында даими 0,5 ихтималлыгы белән $A = \{\text{ир бала туды}\}$ вакыйгасы күзәтелергә мөмкин. Димәк, $n = 50$, $p = 0,5$, $q = 0,5$ $npq = 12,5 > 10$. Искәрмәне истә тотып, якынча исәпләүгә күчәбез, p нульгә дә, бергә дә якын түгел, димәк, Лаплас чик теоремасын кулланабыз:

$$x = \frac{20 - 50 \cdot 0,5}{\sqrt{50 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \approx -1,41,$$

$$P_{50}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\varphi(-1,41).$$

Таблица буенча $\varphi(-1,41) = \varphi(1,41) = 0,1476$ дип табабыз.

Җавап: $P_{50}(20) \approx 0,042$.

Мисал 50. Эпидемия чорында грипп белән авыру ихтималлыгы $0,3$. башлангыч сыйныфта укучы 90 укучының

а) иң ихтимал сандагы балалар авырып китү ихтималлыгын;

б) 20-дән алып 30 балага кадәр авыру ихтималлыгын табарга.

Чишү: Сынау очраклы рәвештә бер баланы сайлап алудан гыйбәрәт. Нәтиҗәдә $P(A) = p = 0,3$, $P(\overline{A}) = q = 0,7$ ихтималлыклары белән ике очрак булырга мөмкин: $A = \{\text{бала авыру}\}$, $A = \{\text{бала сәламәт}\}$.

Бернулли схемасын канәгатьләндерүче бертөрле бәйсез күп $n = 90$ сандагы сынаулар сериясе уздырыла. Һәр сынауда даими нульгә якын булмаган $p = 0,3$ ихтималлыгы белән A вакыйгасы тормышка ашарга мөмкин. Шулай итеп Лапласның чик теоремасы кулланыла.

а) пункты өчен беренче чиратта иң ихтимал m_0 санын табыйк. Бу мисалда $n = 90$, $p = 0,3$, $q = 0,7$. (9.11)-ны исәпкә алсак:

$$26,7 < 90 \cdot 0,3 - 0,3 < m_0 < 90 \cdot 0,3 + 0,7;$$

$m_0 = 27$ булуы килеп чыга.

$x_1 = \frac{m_0 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{27-90\cdot 0,3}{\sqrt{90\cdot 0,3\cdot 0,7}} = 0$ аргументы өчен кушымтадагы таблицадан карап Гаусс функциясенең $\varphi(0) = 0,3989$ кыйммәтен табабыз, 1)-нче фурмуладан кулланып ихтималлыкны исәплибез:

$$P_{90}(27) = \frac{27 - 90\cdot 0,3}{\sqrt{90\cdot 0,3\cdot 0,7}}\varphi(0) = 0,9.$$

б) пункты өчен аргументларны табабыз:

$$x_2 = \frac{20 - 90\cdot 0,3}{\sqrt{90\cdot 0,3\cdot 0,7}} = -1,61; \qquad x_2 = \frac{30 - 90\cdot 0,3}{\sqrt{90\cdot 0,3\cdot 0,7}} = 0,69.$$

Бу аргументлар өчен кушымтадагы таблицадан карап так Лаплас функциясенең $\Phi(-1,61) = -0,4463$, $\Phi(0,69) = 0,2549$ кыйммәтләрен табабыз, 2)-нче формуладан кулланып 20-дән 30 балага кадәр бала авырып китү ихтималлыгын исәплибез:

$$\begin{aligned} &P_{90}(20 \leqslant k \leqslant 30) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = \\ &= \Phi(-1,61) - \Phi(0,69) = 0,4463 + 0,2549 = 0,7012. \end{aligned}$$

Җавап: а) $P_{90}(27) = 0,09$; б) $P_{90}(20 \leqslant k \leqslant 30) = 0,7012$.

Мисал 51. Ел дәвамында автомобильның авариягә элэгү ихтималлыгы $0,002$-гә тигез. Ел дәвамында 1000 автомобильның авариягә элэгүчеләр 3-тән 5-кә кадәр булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: Сынау очраклы рәвештә бер автомобильны сайлап алудан гыйбәрәт. Нәтиҗәдә $P(A) = p = 0,002$, $P(\overline{A}) = q = 0,998$ ихтималлыклары белән ике очрак булырга мөмкин: $A = \{$сайланган автомобиль ел дәвамында авариягә эләгәчәк$\}$, $A = \{$сайланган автомобиль ел дәвамында авариягә эләкмиячәк$\}$.

Бернулли схемасын канәгатьләндерүче бертөрле бәйсез күп $n = 1000$ сандагы сынаулар сериясе уздырыла. Һәр сынауда даими нульгә якын булган $p = 0,002$ ихтималлыгы белән A вакыйгасы тормышка ашарга мөмкин. Шулай итеп Пуассонның чик теоремасы кулланыла. 2)-нче формула нигезендә

$$P_{1000}(3 \leqslant k \leqslant 5) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!}\right).$$

Бу аргументлар өчен кушымтадагы таблицадан карап так Эйлер-Лаплас-Пуассон функциясенең $\lambda = n\,p = 1000 \cdot 0,002 = 2$ булгандагы кыйммәтләрен кулланып табабыз:

$$P_{1000}(3 \leqslant k \leqslant 5) = 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 = 0,3067.$$

Җавап: $P_{1000}(3 \leqslant k \leqslant 5) = 0,3067.$

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 43. Билгеле бер укчы өчен бер атуда мишеньнең үзәгенә тидерү ихтималлыгы 0,2 гә тигез. 10 атуда мишень үзәгенә кимендә 3 тапкыр тидерү ихтималлыгын ачыкларга.

Бирем 44. Кибеткә сигез сатып алучы керде. Әгәр аларның һәрберсе өчен сатып алу ихтималлыгы 0,3 булса, кергән кешеләрнең өчесе әйбер сатып алу ихтималлыгын табарга.

Бирем 45. Уенчы боҗраларны таякка ыргыта, бу вакытта уңышның ихтималлыгы 0,1. Алты боҗраның кимендә икесе таякка эләгү ихтималлыгын табарга.

Бирем 46. Хәбәр биргәндә бер тамгада хата җибәрү ихтималлыгы 0,01 гә тигез. 10 тамгадан торучы хәбәрдә төгәл өч хата булу ихтималлыгын ачыкларга.

Бирем 47. Мәктәпнең беренче сыйныфларына 90 бала алынырга тиеш. Әгәр малай туу ихтималлыгы 0,52 булса, бу балалар арасында 40 тан алып 50 гә кадәр кызлар булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 48. Билгеле бер баскетболчы өчен тупны кәрзингә кертү ихтималлыгы 0,7 гә тигез. 10 ыргыту башкарылган. Кайсы вакыйганың ихтималлыгы зуррак: тупны 6 тапкыр кертүме яки 8 тапкырмы?

Бирем 49. Бер уку елыннан соң дәреслекне алга таба кулланып булмау ихтималлыгы 0,2 гә тигез. Яңа уку елы башына мәктәп китапханәсендә кабат 100 дәреслек булсын өчен 15 яңа дәреслек алырга кирәк булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 50. Чыршы үсентесенең тернәкләнеп үсеп китү ихтималлыгы 0,8 гә тигез. 200 үсенте утыртылган. Аларның кимендә 150 се үсү ихтималлыгын табарга.

Бирем 51. Эпидемия чорында грипп белән авырып китү ихтималлыгы 0,4 кә тигез. Сыйныфтагы 30 укучының яртысыннан кимрәге авырып китү ихтималлыгын табарга.

Бирем 52. Лотерея билетына оту ихтималлыгы 0,1 гә тигез. Сатып алынган 5 билет арасында 2 се отышлы булу ихтималлыгын табарга.

Бирем 53. Әзер товарларны саклау бинасыннан кибеткә яхшылап төрелгән сыйфатлы 4000 чыршы уенчыгы җибәрелә. Уенчыкның юлда ватылу ихтималлыгы $0,0005$. Кибеткә 3 ватык уенчык килү ихтималлыгын табарага.

Бирем 54. Алдагы мисал шартлары үтәлгән очракта, кибеткә килгән ватык уенчыклар саны

а) 3-тән алып 5-кә кадәр булу

б) 3-тән алып 3999-га кадәр булу ихтималлыгн табарга.

§11. ТДИ һәм БДИ мисаллары

ТДИ мисаллары

Мисал 52. (**№ 325454**) Ниндидер төбәктә яңа туган сабыйның малай булу ихтималлыгы $0,512$. Бу төбәктә 2010 - нчы елда 1000 яңа туган сабыйга уртача 477 кыз бала туры килгән. 2010 - нчы елда бу төбәктә кыз бала тууның чагыштырмача ешлыгы шул ук вакыйганың ихтималлыгыннан күпмегә аерыла?

Чишү: $\{$Кыз бала туды$\} = A$ вакыйгасы булсын. Ул вакытта $\{$Малай бала туды$\} = \overline{A}$ капма — каршы вакыйга була. Мисалның шарты буенча бу вакыйганың ихтималлыгы $P(\overline{A}) = 0,512$. Моннан
$p = P(\bar{A}) = 1-P(A) = 1-0,512 = 0,488$. Кыз балалар тууның чагыштырмача ешлыгы $p^* = \frac{477}{1000} = 0,477$. Биремдә соралган аерма $0,512 - 0,477 = 0,035$

Җавап: 2010 - нчы елда төбәктә кыз бала тууның чагыштырмача ешлыгы шул ук вакыйганың ихтималлыгыннан $0,035$ - кә аерыла.

Мисал 53. (**№ 132730**) Машаның телевизоры ватылган һәм бары тик бер генә очраклы канал күрсәтә. Маша телевизорны кабыза. Бу вакытта егерме каналның өчесендә кинокомедия күрсәтәләр. Машаның кинокомедия күрсәтмәгән каналга эләгү ихтималлыгын табарга.

Чишү: $\{$Комедия күрсәтәләр$\} = A$ вакыйгасы булсын. A вакыйгасының ихтималлыгы классик (6.1) формуласы буенча исәпләнә һәм
$P(A) = \frac{3}{20} = 0,15$ була. Капма — каршы $\overline{A}$ вакыйгасының ихтималлыгы кызыксындыра. Ихтималлыкларның 4 -нче үзлеге нигезендә:
$P(\overline{A}) = 1 - 0,15 = 0,85$.

Җавап: комедия күрсәтмәгән каналга эләгү ихтималлыгы $0,85$.

Мисал 54. (**№ 341364**) Уен сөяген ике тапкыр чөяләр. Төшкән ике санның суммасы 4 яки 7 булу ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: Беренче кубикның һәр 6 төрле төшү мөмкинлегенә икенчесенең 6 төрле төшүе туры килә. Ягъни барлык мөмкинлекләр саны тапкырлау кагыйдәсе нигезендә $n = 36 = 6 \cdot 6$.

{Төшкән ике санның суммасы 4 яки 7 } $= A$ вакыйгасы булсын. A вакыйгасын үзара берьюлы мөмкин булмаган {Төшкән ике санның суммасы 4 } $= B$ һәм
{Төшкән ике санның суммасы 7 } $= C$ вакыйгалар суммасы рәвешендә күрсәтеп була: $A = B + C$. B вакыйгасына $m_B = 3$ төрле нәтиҗә отшлы: $1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$. Классик формула нигезендә аның ихтималлыгы $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{36}$. C вакыйгасына $m_C = 6$ төрле нәтиҗә отшлы: $1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1$. Классик формула нигезендә аның ихтималлыгы $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{6}{36}$. Берьюлы мөмкин булмаган вакыйгалар өчен ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе нигезендә:

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Җавап: төшкән ике санның суммасы 4 яки 7 булу ихтималлыгы $0,25$.

Мисал 55. (**№ 315173**) Чаңгы ярышында Рәсәйдән 11 спортчы, Норвегиядән 6 спортчы һәм Швецциядән 3 спортчы катнаша. Спортчыларның ярышка китү тәртибе җирәбә тарафыннан билгеләнә. Стартка беренче китүче спортчының Рәсәйдән булмау ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: {Беренче номер Рәсәй спортчысына эләкте} $= A$ вакыйгасы булсын. Барлыгы $n = 20 = 11+6+3$ спортчы бар. Һәр спортчының номеры шар эченә яшерелгән дип күзаллыйбыз. Аныклык өчен Рәсәй спортчылары язылган номерлар ак шарларга тутырылган дип исәплик, калган илләрнең шарлары — кара төстә. Җирәбәдә беренче номер игълан ителә. Аңлашыла ки A вакыйгасына файдалы нәтиҗәләр саны 11. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсе нигезендә

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 0,55.$$

Безне {Беренче номер Рәсәй спортчысына эләкмәде} $= \overline{A}$ капма — каршы вакыйгасы һәм аның ихтималлыгы кызыксындыра. Ихтималлыкларның 4-нче үзлеге нигезендә: $P(\overline{A}) = 1 - 0,55 = 0,45$.

Җавап: стартка беренче китүче спортчының Рәсәйдән булмау ихтималлыгы $0,45$.

Мисал 56. (**№ 31112**) Рәсәйдән килгән 20 сәяхәтче арасында берничә кеше чит телләрне белә. Аларның бишесе бары тик инглизчә генә сөйләшә, өчесе бары тик французча, икесе французча һәм инглизчә. Очраклы сайланган сәяхәтченең французча сөйләшү ихтималлыгы нинди?

Чишү: {Сәяхәтче французча сөйләшү} $= A$ вакыйгасы булсын. Барлыгы $n = 20$ сәяхәтче бар. Французча сөйләшүчеләр саны $m = 5 = 2 + 3$. Әлбәттә бары тик французча гына сөйләшүчеләрне дә, французча һәм инглизчә сөйләшүчеләрне дә саныйбыз. Бу үзара кисешмәүче күплекләр. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсе нигезендә

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = \frac{5 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 0,25.$$

Җавап: сәяхәтченең французча сөйләшү ихтималлыгы $0,25$.

Мисал 57. (**№ 132728**) Коля өчурынлы сан сайлый. Аның 5 -кә бүленү ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: {Коля сайлаган сан 5 -кә бүленә} $= A$ вакыйгасы булсын. Берурынлы һәм икеурынлы натураль саннар 1 -дән алып 99 -га кадәр урнашкан, ягъни алар барсы бергә 99 данә. 1 -дән алып 999 -га кадәр барлыгы 999 сан бар. Шуларның $n = 999 - 99 = 900$ -е өчурынлы. 1 -дән алып 99 -га кадәр сан арасында 19 -ы 5 -кә бүленә. Моны ачыклар өчен 99 -ны 5 кә бүлеп, бөтен өлешне аерып алу җитә: $\left[\frac{99}{5}\right] = \left[19\frac{4}{5}\right] = 19$. Нәкъ шул рәвешле 1 -дән алып 999 -га кадәр саннар арасында 199 -ы 5 -кә бүленүе ачыклана: $\left[\frac{999}{5}\right] = \left[199\frac{4}{5}\right] = 199$. Аңлашыла ки, өчурынлы саннар арасында 5 -кә бүленүчеләре
$m = 180 = 199 - 19$ данә. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсе нигезендә $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{180}{900} = 0,2$.

Җавап: Коля сайлаган өчурынлы санныж 5 -кә бүленү ихтималлыгы $0,2$.

БДИ мисаллары

Мисал 58. (**<u>№ 282857</u>**) Фабрикада сумкалар ясыйлар. Уртача 100 сумканың 8 -ендә күзгә яшерен кимчелек була. Сатып алынган сумканың сыйфатлы булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: 100 сумканың 92 -се сыйфатлы. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсе нигезендә $\{$сыйфатлы сумка сайланган$\} = A$ вакыйгасының ихтималлыгы $P(A) = \frac{92}{100} = 0,92$ була.

Җавап: кимчелексез сумка сайланган булу ихтималлыгы $0,92$.

Мисал 59. (**<u>№ 282856</u>**) Сатуга кайткан уртача 1000 насосның 5 -се ватык. Контроль өчен алынган очраклы насосның төзек булу ихтималлыгын табарга.

Чишү: 1000 насосның 995 -е төзек. Ихтималлыкның классик (6.1) билгеләмәсе нигезендә $\{$төзек насос сайланган$\} = A$ вакыйгасының ихтималлыгы $P(A) = \frac{995}{1000} = 0,995.$ була.

Җавап: очраклы сайланган насосның төзек булу ихтималлыгы $0,995$.

Мисал 60. (**<u>№ 320209</u>**) Уникетамгалы циферблаттан торучы механик сәгать нindидер мизгелдә сафтан чыккан һәм йөрүдән туктаган. Сәгать угы 10 тамгасына җитеп, ләкин 1 тамгасына барып җитмичә катып калган булу ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: $\{$Сәгать угы 10 тамгасына җитеп, ләкин 1 тамгасына барп җитмичә катып калган$\} = A$ вакыйгасы булсын. Бу мисалны чишәр өчен геометрик ихтималлык төшенчәсен кулланырга кирәк. Сәгать угының очы тулы 12 сәгатькә ягъни 360° -ка туры килүче тулы бер әйләнәне уза. Әгәр R аша шул сәгать угының озынлыгын тамгаласак, бу әйләнәнең озынлыгы $L = 2\pi R$ була. 10 һәм 1 тамгалары арасында тулы 3 сәгать ягъни 90° -ка туры килүче дуга урнашкан. Бу дуганың озынлыгы $l = \frac{\pi}{2}R$. Геометрик ихтималлык (6.2) формуласы

$$P(A) = \frac{l}{L}$$

рәвешен ала. Шулай итеп

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi R} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Җавап: сәгать угы 10 тамгасына җитеп, ләкин 1 тамгасына барп җитмичә катып калаган булу ихтималлыгы $0,25$.

Мисал 61. (**<u>№ 320172</u>**) Сәүдә үзәгендә кофе сатучы ике бертөрле автомат тора. Көн ахырына автоматта кофе бетү ихтималлыгы $0,3$-кә тигез. Ике автоматта да кофе бетү ихтималлыгы исә $0,12$-кә тигез. Көн азагында ике автоматта да кофе калу ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: $\{$i-нче автоматта кофе бетте$\} = A_i$ вакыйгасы булсын, $i = \overline{1,2}$. Ул вакытта мисалның шарты буенча $P(A_i) = 0,3$; $P(A_1A_2) = 0,12$. Аңлашыла ки,автоматларның эшләве бәйсез түгел. Чыннан да алар бәйсез эшли дип фараз итсәк $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ булыр иде. Әммә шарт буенча $P(A_1A_2) = 0,12$. $\{$Кимендә бер автоматта кофе бетте$\} = A_1 + A_2$ вакыйгасын карыйк. Ихтималлыкларны кушу кагыйдәсе нигезендә $P(A_1+A_2) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) = 0,3+0,3-0,12 = 0,48$. Моннан нәтиҗә буларак $P(\overline{A_1 + A_2}) = 1-0,48 = 0,52$ булуы килеп чыга. Мисалда $\{$көн азагынада ике автоматта да кофе калды$\} = \overline{A}_1\overline{A}_2$ вакыйгасының ихтималлыгын табу сорала. Вакыйгалар өстендәге гамәлләрнең 11°-нче үзлеге нигезендә $\overline{A_1 + A_2} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Шулай булгач $P(\overline{A_1 + A_2}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = 0,52$.

Җавап: көн азагынада ике автоматта да кофе калу ихтималлыгы $0,52$.

Мисал 62. (**<u>№ 319353</u>**) Ике фабрика автомобиль фаралары өчен бертөрле пыялалар ясап чыгара. Беренче фабрика бу пыялаларның 45%ын, икенчесе 55%ын чыгара. Беренче фабрикада ясалган пыялаларның 3%ы эшкә яраксыз, ә икенче фабрикада мондый яраксыз пыялалар 1%ны тәшкил итә. Кибеттә очраклы рәвештә сатып алынган пыяланың эшкә яраксыз булу ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: $\{$Пыяла беренче фабрикада ясалган$\} = H_1$ һәм $\{$Пыяла икенче фабрикада ясалган$\} = H_2$ гипотезаларын карап узыйк. Мисалның шарты буенча $P(H_1) = 0,45$ һәм $P(H_2) = 0,55$. $\{$Пыяла эшкә яраксыз$\} = A$ вакыйгасының шартлы ихтималлыклары исә $P(A|H_1) = 0,03$ һәм $P(A|H_2) = 0,01$. Тулы ихтималлык (8.3) формуласы нигезендә $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0,03 \cdot 0,45 + 0,01 \cdot 0,55 = 0,0135 + 0,0045 = 0,018$.

Җавап: кибеттә очраклы рәвештә сатып алынган пыяланың эшкә яраксыз булу ихтималлыгы $0,018$.

Мисал 63. (**<u>№ 320176</u>**) Яңа электр чәйнегенең бер елдан артык эшләү ихтималлыгы $0,97$. Аның ике елдан артык эшләү ихтималлыгы исә $0,89$. Бу чәйнекнең ике елдан кимерәк, ләкин бер елдан артыгырак эшләү ихтималлыгын табыгыз.

Чишү: $\{$Чәйнек бер елдан артык эшләде$\} = A_1$ һәм $\{$Чәйнек ике елдан артык эшләде$\} = A_2$ вакыйгаларын карап узыйк. Мисалның шарты буенча $P(A_1) = 0,97$ һәм $P(A_2) = 0,89$. Безгә $\{$Чәйнек ике елдан кимерәк, ләкин бер елдан артыгырак эшләде$\} = A$ вакыйгасының ихтималлыгын табарга кирәк. Аңлашыла ки, чәйнек бер елдан артык эшләсә үзара бер юлы мөмкин булмаган ике очрак булырга мөмкин. Чәйнек ике елдан кимерәк, я исә озагырак эшли. Шулай итеп $A_1 = A + A_2$, ә кушылучылар берьюлы мөмкин булмау сәбәпле $P\big(A_1\big) = P\big(A\big) + P\big(A_2\big)$. Ягъни $0,97 = P\big(A\big) + 0,89$, монан $P\big(A\big) = 0,08$.

Җавап: чәйнекнең ике елдан кимерәк, ләкин бер елдан артыгырак эшләү ихтималлыгы $0,08$.

Мөстәкыйль чишү өчен биремнәр

Бирем 55. (**<u>№ 320184</u>**) Уен сөяген ике тапкыр чөяләр. $\{$Төшкән очколар суммасы 5 $\} = A$ вакыйгасы өчен ничә элементар вакыйга отышлы?

Бирем 56. (**<u>№ 282853</u>**) Очраклы тәҗрибә барышында ике уен сөяген чөяләр. Төшкән очколар суммасы 8 булу ихтималлыгын табыгыз. Нәтиҗәне йөзенче тәртипкә кадәр түгәрәкләгез.

Бирем 57. (**<u>№ 510333</u>**) Очраклы тәҗрибә барышында симметрик тәңкәне өч тапкыр чөяләр. „БӨРКЕТ“ кимендә ике тапкыр төшү ихтималлыгын табыгыз.

Бирем 58. (**№ 504533**) 25 -тән башлап 39 -га кадәр натураль саннар арасыннан очраклы рәвештә бер санны сайлыйлар. Аның 5 -кә бүленү ихтималлыгы нинди?

Бирем 59. (**№ 325580**) Уку әсбаплары кибетендә 100 каләм сатыла. Аларның 37-се кызыл, 8-е яшел, 17-се миләүшә төстә. Шулай ук үзара тигез санда зәңгәр һәм кара каләмнәр бар. Алисә очраклы рәвештә кызыл яки кара каләмне тартып чыгару ихтималлыгын табыгыз.

Төп төшенчәләр сүзлеге

Алмаштырма - перестановка - *соединение, полученное перестановкой элементов в исходном наборе элементов.*

Берьюлы мөмкин түгел вакыйгалар - несовместные события - *события, которые не могут произойти одновременно в результате данного испытания.*

Берьюлы мөмкин вакыйгалар - совместные события - *события, которые могут произойти одновременно в результате данного испытания.*

Булмаслык вакыйга яки мөмкин түгел вакыйга - невозможное событие - *событие, которое не может произойти в результате данного испытания.*

Вакыйга - событие - *возможный результат испытания.*

Вакыйгалар алгебрасы - алгебра событий - *множество всех событий данного испытания.*

Вакыйгалар суммасы - сумма событий - *событие, которое происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из слагаемых событий.*

Вакыйгалар тапкырчыгышы - произведение событий - *событие, которое происходит тогда, когда происходит все события, входящие в произведение.*

Вакыйганың ешлыгы - частота события - *число реализаций события.*

Вакыйганың чагыштырмача ешлыгы - относительная частота события - *отношение частоты к числу всех испытаний.*

Гади нәтиҗә - элементарный исход - *конкретный результат испытания.*

Гади нәтиҗәләр галәме - пространство элементарных исходов - *множество всех элементарных исходов данного испытания.*

Геометрик ихтималлык - геометрическая вероятность - *вероятность, применяемая для испытаний с бесконечным числом равновозможных элементарных исходов.*

Ихтималлык - вероятность - *число, характеризующее возможность исхода события.*

Ихтималлык теориясе - теория вероятностей - *методы оценки возможности событий при различных испытаниях.*

Кайтарулы очраклы сайлау схемасы - схема выбора с возвращением (с повторением) - *схема случайного выбора элемента без возвращения.*

Кайтарусыз очраклы сайлау схемасы - схема выбора без возвращения (без повторения) - *схема случайного выбора элемента без возвращения.*

Капма-каршы вакыйга - противоположное событие - *когда исход одного события исключает исход другого события.*

Классик ихтималлык - классическая вероятность - *вероятность, применяемая для испытаний с конечным числом равновозможных элементарных исходов.*

Күплек - множество - *набор элементов, объединенных общим свойством.*

Очраклы вакыйга - случайное событие - *событие, которое может произойти в результате испытания.*

Оештырма - сочетание - *набор элементов, в котором не важно местоположение элементов.*

Статистик ихтималлык - *статистическая вероятность - вероятность, применяемая для испытаний с неравновозможными элементарными исходами.*

Сынау - испытание - *действие, имеющие случайный и массовый характер, для которого нельзя однозначно предсказать его результат и которое может быть повторено многократно.*

Тигез ихтималлы вакыйгалар - равновозможные события - *события имеющие равную возможность реализации в результате данного испытания.*

Тоташтырма - соединение - *набор элементов.*

Тулы группа - полная группа - *множество событий, охватывающих* *все варианты реализации испытания.*

Урнаштырма - размещение - *набор элементов, в котором важно местоположение элементов.*

Шартлы ихтималлык - условная вероятность - *вероятность события с учетом возможности реализации других событий.*

Ышанычлы вакыйга - достоверное событие - *событие, которое всегда происходит в результате данного испытания.*

Үзара бәйсез сынаулар - независимые события - *события, для которых исход одного из них не влияет на исход другого.*

Үзара бәйле сынаулар - зависимые события - *возможность влияния одного события на исход другого события.*

Гаусс һәм Лаплас функцияләре кыйммәтләре таблицасы

Талицада $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ Гаусс һәм $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dx$ Лаплас функцияләренең кыйммәтләре x аргументы 0 дән 5 кә кадәр үзгәргән аралыкта гына бирелә. Аргументның $x > 5$ кыйммәтләре өчен $\varphi(x) = 0$ һәм $\Phi(x) = 0,5$ дип кабул ителә. Аргументның тискәре кыйммәтләре өчен $\varphi(x)$ функциясенең җөп булуы: $\varphi(-x) = \varphi(x)$, ә $\Phi(x)$ функциясенең так булуы:
$\Phi(-x) = -\Phi(x)$ кулланыла.

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
0,01	0,3989	0,0040	0,41	0,3668	0,1591	0,81	0,2874	0,2910
0,02	0,3989	0,0080	0,42	0,3653	0,1628	0,82	0,2850	0,2939
0,03	0,3988	0,0120	0,43	0,3637	0,1664	0,83	0,2827	0,2967
0,04	0,3986	0,0160	0,44	0,3621	0,1700	0,84	0,2803	0,2995
0,05	0,3984	0,0199	0,45	0,3605	0,1736	0,85	0,2780	0,3023
0,06	0,3982	0,0239	0,46	0,3589	0,1772	0,86	0,2756	0,3051
0,07	0,3980	0,0279	0,47	0,3572	0,1808	0,87	0,2732	0,3078
0,08	0,3977	0,0319	0,48	0,3555	0,1844	0,88	0,2709	0,3106
0,09	0,3973	0,0359	0,49	0,3538	0,1879	0,89	0,2685	0,3133

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
0,11	0,3965	0,0438	0,51	0,3503	0,1950	0,91	0,2637	0,3186
0,12	0,3961	0,0478	0,52	0,3485	0,1985	0,92	0,2613	0,3212
0,13	0,3956	0,0517	0,53	0,3467	0,2019	0,93	0,2589	0,3238
0,14	0,3951	0,0557	0,54	0,3448	0,2054	0,94	0,2565	0,3264
0,15	0,3945	0,0596	0,55	0,3429	0,2088	0,95	0,2541	0,3289
0,16	0,3939	0,0636	0,56	0,3410	0,2123	0,96	0,2516	0,3315
0,17	0,3932	0,0675	0,57	0,3391	0,2157	0,97	0,2492	0,3340
0,18	0,3925	0,0714	0,58	0,3372	0,2190	0,98	0,2468	0,3365
0,19	0,3918	0,0753	0,59	0,3352	0,2224	0,99	0,2444	0,3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
0,21	0,3902	0,0832	0,61	0,3312	0,2291	1,01	0,2396	0,3438
0,22	0,3894	0,0871	0,62	0,3292	0,2324	1,02	0,2371	0,3461
0,23	0,3885	0,0910	0,63	0,3271	0,2357	1,03	0,2347	0,3485
0,24	0,3876	0,0948	0,64	0,3251	0,2389	1,04	0,2323	0,3508
0,25	0,3867	0,0987	0,65	0,3230	0,2422	1,05	0,2299	0,3531
0,26	0,3857	0,1026	0,66	0,3209	0,2454	1,06	0,2275	0,3554
0,27	0,3847	0,1064	0,67	0,3187	0,2486	1,07	0,2251	0,3577
0,28	0,3836	0,1103	0,68	0,3166	0,2517	1,08	0,2227	0,3599
0,29	0,3825	0,1141	0,69	0,3144	0,2549	1,09	0,2203	0,3621

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
0,31	0,3802	0,1217	0,71	0,3101	0,2611	1,11	0,2155	0,3665
0,32	0,3790	0,1255	0,72	0,3079	0,2642	1,12	0,2131	0,3686
0,33	0,3778	0,1293	0,73	0,3056	0,2673	1,13	0,2107	0,3708
0,34	0,3765	0,1331	0,74	0,3034	0,2703	1,14	0,2083	0,3729
0,35	0,3752	0,1368	0,75	0,3011	0,2734	1,15	0,2059	0,3749
0,36	0,3739	0,1406	0,76	0,2989	0,2764	1,16	0,2036	0,3770
0,37	0,3726	0,1443	0,77	0,2966	0,2794	1,17	0,2012	0,3790
0,38	0,3712	0,1480	0,78	0,2943	0,2823	1,18	0,1989	0,3810
0,39	0,3697	0,1517	0,79	0,2920	0,2852	1,19	0,1965	0,3830
1,20	0,1942	0,3849	1,60	0,1109	0,4452	2,00	0,0540	0,4772
1,21	0,1919	0,3869	1,61	0,1092	0,4463	2,02	0,0519	0,4783
1,22	0,1895	0,3888	1,62	0,1074	0,4474	2,04	0,0498	0,4793
1,23	0,1872	0,3907	1,63	0,1057	0,4484	2,06	0,0478	0,4803
1,24	0,1849	0,3925	1,64	0,1040	0,4495	2,08	0,0459	0,4812
1,25	0,1826	0,3944	1,65	0,1023	0,4505	2,10	0,0440	0,4821
1,26	0,1804	0,3962	1,66	0,1006	0,4515	2,12	0,0422	0,4830
1,27	0,1781	0,3980	1,67	0,0989	0,4525	2,14	0,0404	0,4838
1,28	0,1758	0,3997	1,68	0,0973	0,4535	2,16	0,0387	0,4846
1,29	0,1736	0,4015	1,69	0,0957	0,4545	2,18	0,0371	0,4854

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,30	0,1714	0,4032	1,70	0,0940	0,4554	2,20	0,0355	0,4861
1,31	0,1691	0,4049	1,71	0,0925	0,4564	2,22	0,0339	0,4868
1,32	0,1669	0,4066	1,72	0,0909	0,4573	2,24	0,0325	0,4875
1,33	0,1647	0,4082	1,73	0,0893	0,4582	2,26	0,0310	0,4881
1,34	0,1626	0,4099	1,74	0,0878	0,4591	2,28	0,0297	0,4887
1,35	0,1604	0,4115	1,75	0,0863	0,4599	2,30	0,0283	0,4893
1,36	0,1582	0,4131	1,76	0,0848	0,4608	2,32	0,0270	0,4898
1,37	0,1561	0,4147	1,77	0,0833	0,4616	2,34	0,0258	0,4904
1,38	0,1539	0,4162	1,78	0,0818	0,4625	2,36	0,0246	0,4909
1,39	0,1518	0,4177	1,79	0,0804	0,4633	2,38	0,0235	0,4913
1,40	0,1497	0,4192	1,80	0,0790	0,4641	2,40	0,0224	0,4918
1,41	0,1476	0,4207	1,81	0,0775	0,4649	2,42	0,0213	0,4922
1,42	0,1456	0,4222	1,82	0,0761	0,4656	2,44	0,0203	0,4927
1,43	0,1435	0,4236	1,83	0,0748	0,4664	2,46	0,0194	0,4931
1,44	0,1415	0,4251	1,84	0,0734	0,4671	2,48	0,0184	0,4934
1,45	0,1394	0,4265	1,85	0,0721	0,4678	2,50	0,0175	0,4938
1,46	0,1374	0,4279	1,86	0,0707	0,4686	2,52	0,0167	0,4941
1,47	0,1354	0,4292	1,87	0,0694	0,4693	2,54	0,0158	0,4945
1,48	0,1334	0,4306	1,88	0,0681	0,4699	2,56	0,0151	0,4948
1,49	0,1315	0,4319	1,89	0,0669	0,4706	2,58	0,0143	0,4951

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,50	0,1295	0,4332	1,90	0,0656	0,4713	2,60	0,0136	0,4953
1,51	0,1276	0,4345	1,91	0,0644	0,4719	2,62	0,0129	0,4956
1,52	0,1257	0,4357	1,92	0,0632	0,4726	2,64	0,0122	0,4959
1,53	0,1238	0,4370	1,93	0,0620	0,4732	2,66	0,0116	0,4961
1,54	0,1219	0,4382	1,94	0,0608	0,4738	2,68	0,0110	0,4963
1,55	0,1200	0,4394	1,95	0,0596	0,4744	2,70	0,0104	0,4965
1,56	0,1182	0,4406	1,96	0,0584	0,4750	2,72	0,0099	0,4967
1,57	0,1163	0,4418	1,97	0,0573	0,4756	2,74	0,0093	0,4969
1,58	0,1145	0,4429	1,98	0,0562	0,4761	2,76	0,0088	0,4971
1,59	0,1127	0,4441	1,99	0,0551	0,4767	2,78	0,0084	0,4973
2,80	0,0079	0,4974	3,00	0,00443	0,49865	4,00	0,0001338	0,499968
2,82	0,0075	0,4976	3,10	0,00327	0,49903	4,50	0,0000160	0,499997
2,84	0,0071	0,4977	3,20	0,00238	0,49931	5,00	0,0000015	0,49999997
2,86	0,0067	0,4979	3,30	0,00172	0,49952			
2,88	0,0063	0,4980	3,40	0,00123	0,49966			
2,90	0,0060	0,4981	3,50	0,00087	0,49977			
2,92	0,0056	0,4982	3,60	0,00061	0,49984			
2,94	0,0053	0,4984	3,70	0,00042	0,49989			
2,96	0,0050	0,4985	3,80	0,00029	0,49993			
2,98	0,0047	0,4986	3,90	0,00020	0,49995			

Эйлер – Пуассон функциясе кыйммәтләре таблицасы

$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ функциясенең кыйммәтләр таблицасы

k	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Әдәбият

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник/ В.Е. Гмурман — М: Юрайт, 2019. — 479 с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман — М., Юрайт, 2019. — 406 с.
3. Солодовников, А.С. Теория вероятностей/ А.С. Солодовников — М.: Просвещение, 1983. — 207 с.
4. Виленкин, Н.Я. Задачник — практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики/ Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов — М.: Просвещение, 1979. — 114 с.
5. Стребков, Е.В. Комбинаторика: учебное пособие/ Е.В. Стребков, В.С. Желтухин, И.А. Бородаев. — Казань: Казан. ун-т, 2012. — 104 с.
6. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учебное пособие для учащихся 7 — 9 классов общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк — М.: Просвещение, 2005. — 78 с.
7. Стребков, Е.В. Значение комбинаторики для формирования навыков математического моделирования// Материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225 – летию Н.И. Лобачевского, Т.2. — Казань: Изд-во Казан. ун. – та, 2017. — 278 с.
8. Стребков, Е.В. Ихтималлык теориясе элементлары: методик кулланма/ Е.В. Стребков, И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев — Казань: Минитипография института проблем информатики АН РТ, 2008. — 36 с.

Авторлар

Физика–математика фәннәре кандидаты
Казан (Идел буе) федераль университетының
Исәпләү математикасы һәм мәгълүмати технологияләр институтының
Математик статистика кафедрасы доценты
Стребков Евгений Владимирович;

физика–математика фәннәре кандидаты,
Казан (Идел буе) федераль университетының
Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институтының
Югары математика һәм математик модельләштерү кафедрасы доценты
Гарипов Илнур Бурханович;

Казан (Идел буе) федераль университетының
Н.И. Лобачевский исемендәге математика һәм механика институтының
Югары математика һәм математик модельләштерү кафедрасы өлкән укытучысы
Мавлявиев Ринат Мизхатович.