КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра математического анализа

С. Р. НАСЫРОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Казань – 2024

УДК 517.1
ББК

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИММ
Протокол № 6 от 14 апреля 2024 г.

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа **Р. Н. Гумеров**

Насыров С.Р.
Функциональный анализ / С.Р. Насыров. – Казань:
Казанский федеральный университет, 2024. – 134 с.

В настоящем учебном пособии излагаются теория метрических пространств, а также линейных ограниченных операторов и функционалов в банаховых и гильбертовых пространствах. Материал соответствует курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для классических университетов, 5-6 семестры.

© **Насыров С.Р., 2024**
© **Казанский федеральный университет, 2024**

1 Пространства l_p и L_p

1.1 Неравенства Гёльдера и Минковского

Пусть $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 1. *Для любых a, $b > 0$ справедливо неравенство:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда. когда $a^p = b^q$.

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Тогда производная $f'(x) = x^{p-1} - b$ обращается в нуль в точке $x = b^{\frac{1}{p-1}}$. Нетрудно видеть, что это — точка строгого минимума функции f, поскольку $f'(0) < 0$, $f'(x) > 0$ при достаточно больших x. Тогда

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} - b^q = 0.$$

□

Теорема 1 (неравенство Гёльдера). *Для любых чисел a_k, $b_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Обозначим первую сумму в правой части неравенства за α, а вторую за β. Пусть они обе строго больше нуля, иначе доказательство очевидно. Применяем доказанную выше лемму к выражениям $\frac{a_k}{\alpha}$ и $\frac{b_k}{\beta}$. Получим:

$$\frac{a_k b_k}{\alpha\beta} \leq \frac{a_k^p}{\alpha^p p} + \frac{b_k^q}{\beta^q q}.$$

Суммируя, получаем

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\alpha\beta} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}{\alpha^p p} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}{\beta^q q} = \frac{\alpha^p}{\alpha^p p} + \frac{\beta^q}{\beta^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\square$

Заметим, что при $n=2$ неравенство Гельдера превращается в неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 2 (неравенство Минковского). *Для любых* a_k, b_k, $1 \le k \le n$, *и* $p \ge 1$ *имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. При $p=1$ это неравенство следует из неравенства треугольника. Рассмотрим случай $p>1$. Можно считать, что выражение

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p$$

не равно нулю, иначе доказываемое неравенство очевидно. С использованием теоремы 1 имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k||a_k+b_k|^{p-1} \le \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k+b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k+b_k|^{p-1} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Деля на выражение

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

которое строго положительно, получаем нужное неравенство. $\square$

Смысл неравенство Минковского — это неравенство треугольника в пространстве последовательностей l_p (см. ниже).

1.2 Пространство l_p, $1 \le p < +\infty$

Определение. Пространство l_p состоит из последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введем операции суммы и умножения на скаляр.

1) Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$, причем x, $y \in l_p$. Определим их сумму

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + \ + y_n, \dots).$$

Покажем, что $x+y \in l_p$. При $p = 1$ применяем неравенство треугольника в $\mathbb{R}$: $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n|$ и затем суммируем по n. При $p > 1$ имеем

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \quad B := \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty.$$

Оценим частичную сумму

$$(\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку мажоранта не зависит от N, видим, что частичные суммы ряда с неотрицательными членами ограничены сверху. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$$

сходится и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1)$$

Следовательно, $x + y \in l_p$.

Заметим, что по сложению l_p является абелевой группой.

2) Пусть $\alpha \in \Lambda$. Определим произведение элемента $x \in l_p$ на скаляр α следующим образом:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Покажем, что $\alpha x \in l_p$. Имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha|^p|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2}$$

Таким образом, $x \in l_p \Rightarrow \alpha x \in l_p$.

Введем топологию в l_p. Для этого определим норму

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Докажем, что эта операция удовлетворяет все свойства нормы.

1^0. Очевидно, что $||x|| \geq 0$ для любого $x \in l_p$ и $||\Theta|| = 0$. Если $\|x\| = 0$, то для любого n имеем $|x_n|^p = 0 \Rightarrow x_n = 0\ \forall n$. Это означает, что $x = \Theta$.

2^0. Для любых $\alpha \in \Lambda$ и $x \in l_p$ имеем $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$. Это было установлено выше (см. (2)).

3^0. Неравенство треугольника следует из (1).

В итого получаем, что l_p — линейное нормированное пространство.

Теорема 3. *Пространство l_p $(p \geq 1)$ является банаховым.*

Доказательство. Пусть $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в l_p. Из фундаментальности следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :$ $\forall n, m \geq N$ выполняется неравенство $||x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|| < \varepsilon$, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p. \tag{3}$$

Значит, для любого k выполняется неравенство $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \Rightarrow$ $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$. Это означает, что для любого k последовательность $x_k^{(n)}$ — фундаментальна в Λ, которое совпадает с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Значит, Λ полно, поэтому последовательность $x_k^{(n)}$ сходится к некоторому $x_k \in \Lambda$.

Фиксируем натуральное число M. Из (3) следует, что при n, $m \geq N$

$$\sum_{k=1}^{M}|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p,$$

поэтому, устремляя m к бесконечности, получаем

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)} - x_k|^p \leq \varepsilon^p$$

Устремляя теперь M к бесконечности, заключаем, что при $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p \leq \varepsilon^p, \tag{4}$$

Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$. В силу (4) имеем $x^{(n)} - x \in l_p$. Далее $x = x^{(n)} - (x^{(n)} - x)$. Поскольку $x^{(n)}$ и $(x^{(n)} - x) \in l_p$, делаем вывод, что $x \in l_p$. Тогда (4) эквивалентно неравенству $\|x^{(n)} - x\| \leq \varepsilon$, $n \geq \mathbb{N}$. Отсюда заключаем, что $x^{(n)} \to x$, $n \to$
$\to \infty$. $\square$

1.3 Пространство ограниченных последовательностей l_∞

Определение. Пространство l_∞ состоит из последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sup\limits_{n \geq 1} |x_n| < +\infty$.

Пространство l_∞ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Более того, пространство l_∞ полно.

1.4 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Пусть E множество конечной меры Лебега μ.

Определение. Пространство $L_p(E)$ состоит из измеримых на E функций f таких, что функция $|f|^p$ является интегрируемой на E. Введем на $L_p(E)$ норму

$$\|f\| = \left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 1 (интегральное неравенство Гёльдера). *Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, причем p, $q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то произведение fg*

интегрируемо, т. е. $fg \in L_1(E)$ *и справедливо неравенство:*

$$\|fg\|_{L_1(E)} \leq ||f||_{L_p(E)} \cdot ||g||_{L_q(E)},$$

т. е.

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha = (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, \quad \beta = (\int_E |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Очевидно, что α, $\beta \geq 0$.

Можно считать, что α и β строго больше нуля, иначе неравенство очевидно. Действительно, пусть, к примеру, $\alpha = 0$. Тогда $\int\limits_E |f|^p d\mu = 0$ и по следствию из теоремы Чебышева $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, поэтому $fg \overset{\text{п.в.}}{=} 0$ и тогда $\int\limits_E fg d\mu = 0$.

Итак, пусть α, $\beta > 0$. В силу леммы, установленной перед доказательством неравенств Гельдера и Минковского для сумм, имеем

$$\frac{|f|}{\alpha} \cdot \frac{|g|}{\beta} \leq \frac{|f|^p}{\alpha^p p} + \frac{|g|^q}{\beta^q q}, \tag{$*$}$$

Слагаемые, стоящие в правой части неравенства (*), интегрируемы. По мажорантному признаку измеримая функция $\frac{|f| \cdot |g|}{\alpha\beta}$ интегрируема на E, следовательно, функция $fg \in L_1(E)$.

Интегрируя (*), получаем

$$\int_E \frac{|fg|}{\alpha\beta} d\mu \leq \int_E \frac{|f|^p}{\alpha^p p} d\mu + \int_E \frac{|g|^q}{\beta^q q} d\mu,$$

откуда

$$\frac{\int\limits_E |fg| d\mu}{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha^p}{\alpha^p p} + \frac{\beta^q}{\beta^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству Гельдера. □

Теорема 2 (интегральное неравенство Минковского). *Если функции* f, $g \in L_p(E)$, *то* $f + g \in L_p(E)$ *и* $\|f + g\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} +$

$\|g\|_{L_p(E)}$, *т. е.*

$$\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Имеем

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Поскольку функции $|f|^p$ и $|g|^p$ интегрируемы, по мажорантному признаку $|f+g|^p$ — интегрируема. Мы можем считать, что $\int\limits_E |f+g|^p d\mu \neq 0$, потому что иначе доказываемое неравенство очевидно.

Применяя неравенство треугольника $|f+g| \leq |f|+|g|$, получаем

$$\int_E |f+g|^p d\mu = \int_E |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_E |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int_E |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu. \tag{$*$}$$

Теперь заметим, что функция $\varphi := |f+g|^{p-1} \in L_q(E)$, поскольку $|\varphi|^q = |f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p$ — интеграруемая функция. Теперь, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_E |f|\cdot|f+g|^{p-1} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Аналогично

$$\int_E |g|\cdot|f+g|^{p-1} \leq \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Складывая полученные неравенства с учетом (*) получаем

$$\int_E |f+g|^p d\mu \leq \left[\left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Деля обе части последнего неравенства на положительное выражение $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, получаем неравенство Минковского. $\square$

1.5 Пространство $L_p(E)$

Пространство $L_p(E)$ состоит из измеримых на E функций f таких, что $|f|^p$ является интегрируемой на E функцией. Пусть

$$\|f\| := (\int\limits_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Определим на $L_p(E)$ линейные операции.

Для любых f, $g \in L_p(E)$ пусть $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Кроме того, для любого скаляра λ пусть $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Заметим, что если f, $g \in L_p(E)$, то $(f+g) \in L_p(E)$ в силу неравенства Минковского. Кроме того, $\lambda f \in L_p(E)$. Действительно,

$$\int\limits_E |\lambda f|^p d\mu = \int\limits_E |\lambda|^p |f|^p d\mu = |\lambda|^p \cdot \int\limits_E |f|^p d\mu.$$

Теперь проверим аксиомы нормы для $\|f\|$.

1. Очевидно, что $\|f\| \geq 0$ для любой функции $f \in L_p(E)$. Если $f \equiv 0$, то $|f|^p \equiv 0$ и $\int\limits_E |f|^p d\mu = 0$, поэтому $\|f\| = 0$. Обратно, если $\|f\| = 0$, то $\int\limits_E |f|^p d\mu = 0$, откуда следует лишь, что $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Таким образом, $\|f\|$ не является нормой, поскольку не выполняется первая аксиома.

Чтобы она выполнялась, удобно считать, что элементы множества $L_p(E)$ — это классы эквивалентности функций f таких, что f измерима и существует $\int\limits_E |f|^p d\mu$.

Напомним определение эквивалентных функций.

Определение. Две функции f и g эквивалентны, если $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$.

Отметим, что введенные операции сложения и умножения на скаляр переносятся на классы эквивалентности. Действительно, нетрудно видеть, что:

1) $f \sim g \Rightarrow \lambda f \sim \lambda g$.

2) $f \sim g$ и $k \sim h \Rightarrow f + h \sim g + k$.

2. Для любого скаляра λ и функции $f \in L_p(E)$ справедливо равенство $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$. В самом деле,

$$\int\limits_E |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int\limits_E |f|^p d\mu \Rightarrow \left(\int\limits_E |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Справедливо неравенство треугольника $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$. Действительно, это — неравенство Минковского.

Теперь изучим вопрос полноты.

Теорема. *Пространство $L_p(E)$, $p \geq 1$, полно.*

Доказательство проведем для случая $p=1$ (для произвольного p доказательство может быть проведено аналогичным образом).

Пусть f_k — фундаментальная последовательность в $L_1(E)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_k: \ \forall n, m \geq N_k \quad \|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Можно считать, что $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$

Фиксируем подпоследовательность f_{n_k} такую, что $n_k > N_k$, $k \geq 1$. Тогда $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$, т. е.

$$\int\limits_E |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| d\mu < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| d\mu < +\infty.$$

По следствию из теоремы Беппо Леви ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$$

сходится почти всюду к интегрируемой функции. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$ сходится почти всюду к функции S. Так как S измерима и $|S| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \Rightarrow |S|$ интегрируема по мажорантному признаку. Отсюда следует, что и S интегрируема.

По определению,

$$S = (f_{n_1} - f_{n_2}) + (f_{n_2} - f_{n_3}) + \dots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + \dots.$$

Частичные суммы записанного ряда равны $f_{n_1} - f_{n_k}$ и сходятся почти всюду к S при $k \to \infty$. Значит, $f_{n_k} \overset{\text{п.в.}}{\to} f_{n_1} - S$. Поскольку f_{n_1} и S интегрируемы, заключаем, что и f — интегрируемая функция.

Итак f_{n_k} сходится почти всюду к интегрируемой функции f. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности последовательности

$$\exists N: \forall n, m \geq N \int\limits_E |f_n - f_m| d\mu < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_E |f_n - f_{n_k}| d\mu < \varepsilon \text{ при } n \geq N \text{ и } n_k \geq N.$$

При $k \to \infty$ $|f_n - f_{n_k}| \overset{\text{п.в.}}{\to} |f_n - f|$. По теореме Фату получаем, что при $n \geq N$

$$\int\limits_E |f_n - f| d\mu \leq \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Таким образом, $f_n \to f$ в $L_1(E)$. $\square$

1.6 Пространство $L_\infty(E)$

Функция f ограничена на E, если $\exists M > 0 : \forall x \in E$ $|f(x)| \leq M$. Функция f называется существенно ограниченной на E, если существует ограниченная на E функция g такая, что $g \sim f$.

Определение. Пространство $L_\infty(E)$ — это пространство существенно ограниченных функций.

Если $f \in L_\infty(E)$, то $\|f\| = \inf\limits_{g \sim f} \sup\limits_E |g|$ — это норма функции f в $L_\infty(E)$. При этом, как и в случае пространств $L_p(E)$ за элементы $L_\infty(E)$ мы берем классы эквивалентности функций.

Упражнения. 1) Доказать, что $\|f\|$ определяет норму в пространстве $L_\infty(E)$.

2) Если f существенно ограниченная функция, то существует функция g такая, что $g \sim f$ и $\|f\|_{L_\infty(E)} = \sup\limits_E |g|$.

1.7 Шкала пространств $L_p(E)$.

Как связаны пространства $L_p(E)$ при разных p? Покажем, что если $\mu(E) < \infty$ и $p < r$, то $L_1(E) \supset L_p(E) \supset L_r(E) \subset L_\infty(E)$.

Теорема. *Пусть E — множество конечной меры и $1 \leq p < r \leq +\infty$, тогда $L_r(E) \subset L_p(E)$ и для любой функции $f \in L_r(E)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_p \leq C \cdot \|f\|_r, \quad C = (\mu(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_r(E)$. Представим $|f|^p$ в виде произведения $|f|^p = |f|^p \cdot 1$ и применим неравенство Гёльдера с с показателями

$p', \ q' > 1, \ \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$:

$$\int\limits_E |f|^p d\mu \leq \left(\int\limits_E (|f|^p)^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int\limits_E 1^{q'} d\mu \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Сначала рассмотрим случай $r \neq +\infty$. В качестве p' возьмем число такое, что $p \cdot p' = r$. Тогда $p' = \frac{r}{p} > 1$, $q' = \frac{p'}{p'-1} = \frac{r}{r-p}$ и последнее неравенство перепишется в виде

$$\int\limits_E |f|^p d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^r d\mu \right)^{\frac{p}{r}} \cdot (\mu(E))^{\frac{r-p}{r}}.$$

Возводя в степень $1/p$, получаем

$$\left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \cdot (\mu(E))^{\frac{r-p}{r \cdot p}}.$$

Если же $r = +\infty$, то $f \in L_\infty(E)$ и можно считать, что $|f| \leq \|f\|_\infty$. Таким образом, получаем:

$$\left(\int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E ||f||_\infty^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = ||f||_\infty \cdot (\mu(E))^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Пусть $\nu_f(A) := \int\limits_A f d\mu$, где A — произвольное измеримое подмножество E. Из свойств интеграла Лебега следует

Теорема. *Функция $\nu_f(A)$ сигма-аддитивна и абсолютно непрерывна как функция множества, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \mu(A) < \delta \Rightarrow |\nu_f(A)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь произвольный заряд ν, т.е. сигма-аддитивная функция определенная на сигма-алгебре измеримых множеств $\mathfrak{M}$. Встает вопрос: существует ли функция f такая, что $\nu = \nu_f$?

Определение. Пусть ν — заряд на $\mathfrak{M}$. Заряд ν называется абсолютно непрерывным относительно μ, если для любого нуль-множества по Лебегу (т. е. $\mu(A) = 0$) выполняется условие $\nu(A) = 0$.

Справедлива

Теорема (Радона-Никодима). *Если ν — заряд на $\mathfrak{M}$, абсолютно непрерывный относительно меры μ, то существует единственная (с точностью до эквивалентности) функция $f \in L_1(E)$ такая, что для любого измеримого множества A*

$$\nu(A) = \int\limits_A f d\mu.$$

Замечание. Функция f называется производной абсолютно непрерывного заряда ν по мере μ; при этом, пишут $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

2 Метрические пространства

2.1 Множества в метрическом пространстве

Пусть E – некоторое множество. Функция $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ называется метрикой или расстоянием на E, если выполняются следующие условия (аксиомы метрики):

1) $\forall x,\ y \in E \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

2) $\forall x,\ y \in E \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметрия);

3) $\forall x,\ y,\ z \in E \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Пара $(E.\rho)$ называется метрическим пространством. Часто для краткости, если понятно, какая метрика ρ используется, множество E называют метрическим пространством.

Отметим следующее утверждение.

Неравенство четырехугольника. Для любых четырех точек x, y, a и b из метрического пространства (E, ρ) справедливо неравенство

$$|\rho(x, y) - \rho(a, b)| \leq \rho(x, a) + \rho(y, b).$$

Доказательство. Применяя два раза неравенство треугольника и используя симметрию расстояния, получаем

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a)+\rho(a, y) \leq \rho(x, a)+\rho(a, b)+\rho(b, y) = \rho(x, a)+\rho(a, b)+\rho(y, b).$$

Итак, $\rho(x,y)-\rho(a,b) \le \rho(x,a)+\rho(y,b)$. Меняя местами x и y и используя симметрию расстояния, аналогично получаем $\rho(a,b)-\rho(x,y) \le \rho(x,a)+\rho(y,b)$. из полученных двух неравенств следует наше утверждение.

Пусть $x \in E$ и $\varepsilon > 0$. (Открытым) шаром радиуса ε с центром в точке x называется множество $U(x,\varepsilon) := \{y \in E \mid \rho(y,x) < \varepsilon\}$.

Шар $U(x,\varepsilon)$ также называется ε-окрестностью или просто окрестностью точки x. Отметим некоторые свойства шаров.

1) Для любой точки $x \in E$ и любых чисел ε_1, ε_2, таких что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, имеет место включение $U(x,\varepsilon_1) \subset (x,\varepsilon_2)$.

2) Для любой точки $y \in U(x,\varepsilon)$ существует $\delta > 0$ такое, что $U(y,\delta) \subset (x,\varepsilon)$.

Действительно, пусть $\delta = \varepsilon - \rho(y,x)$. Тогда $\delta > 0$ и для любого $z \in U(y,\delta)$ имеем $\rho(z,y) < \delta)$ и тогда $\rho(z,x) \le \rho(z,y)+\rho(y,x) < \delta + \rho(y,x) = \varepsilon$.

Свойство 2) означает, что любая точка из $U(x,\varepsilon)$ содержится в этом шаре вместе с некоторой окрестностью.

3) Пусть $U(x_1,\varepsilon_1),\ldots,U(x_k,\varepsilon_k)$ —- конечное число шаров и точка $a \in E$. Тогда существует $r > 0$ такое, что $U(a,r) \supset \cup_{j=1}^{k} U(x_j,\varepsilon_j)$.

Действительно, пусть $r = \max 1 \le j \le k[\rho(x_j,a)+\varepsilon_j]$. Покажем, что r является искомым, т.е. для любого j имеем $U(x_j,\varepsilon_j) \subset U(a,r)$. возьмем любую точку $z \in U(x_j,\varepsilon_j)$. Тогда $\rho(z,x_j) < \varepsilon_j$ и $\rho(z,a) \le \rho(z,x_j) + \rho(x_j,a) < \varepsilon_j + \rho(x_j,a) \le r$, т. е. $z \in U(a,r)$.

Множество в метрическом пространстве (E,ρ) называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре $U(a,r)$. В силу свойства 3) шаров центр шара можно выбирать произвольно. Из этого свойства следует сразу такое

Утверждение. *Объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.*

2.2 Топология метрических пространств

Рассмотрим топологию на E, базу топологии которой составляют шары $U(x,r)$, $x \in E$, $r > 0$. Отметим некоторые свойства этой топологии.

1) Хаусдорфовость. Для любых различных точек x, $y \in E$ существует $\delta > 0$ такое, что $U(x,\delta) \cap U(y,\delta) = \emptyset$.

2) Метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, т. е. у любой точки $x \in E$ существует счетная фундаментальная система окрестностей $U(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, при вопросы, связанные с непрерывностью, описываются на языке сходящихся последовательностей.

Будем говорить, что последовательность элементов $x_n \in E$ сходится к элементу $x \in E$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \ \rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Эквивалентное определение: $x_n \to x$, $n \to \infty$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Отметим, что здесь рассматривается предел числовой последовательности $\rho(x_n, x)$.

Свойства сходящихся последовательностей.

1) Предел сходящейся последовательности определяется единственным образом: Если $x_n \to x$, $n \to \infty$, и $x_n \to y$, $n \to \infty$, то $x = y$. Это следует из хаусдорфовости метрического пространства.

2) Любая сходящаяся последовательность ограничена.

3) Если $x_n \to x$, $n \to \infty$, то любая ее подпоследовательность $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$,

4) Если из любой подпоследовательности x_{n_k} можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к x, то и вся последовательность x_n сходится к x.

Утверждение. Функция расстояния является непрерывной функцией $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку E удовлетворяет первой аксиоме счетности, достаточно показать, что если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. Но это следует из неравенства треугольника. так как по неравенству четырехугольника $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y)$.

2.3 Фундаментальные последовательности и полнота метрического пространства

Последовательность x_n в метрическом пространстве называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n \geq N\ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Свойства фундаментальных последовательностей.

1) Любая фундаментальная последовательность ограничена.

2) Если последовательность x_n фундаментальна и некоторая ее подпоследовательность x_{n_k} сходится к x, то и вся последовательность сходится к x.

3) Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Пример. Рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на прямой с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Это пространство не полно. Действительно, возьмем любое иррациональное число, например, $\pi = 3.1415926\ldots$ Рассмотрим последовательность его рациональных приближений: $x_1 = 3$, $x_2 = 3.1$, $x_3 = 3.14$, $x_4 = 3.141$, $x_5 = 3.1415$ и т. д. Очевидно, что эта последовательность фундаментальна, но она не сходится ни к какому рациональному числу q, потому что иначе, в силу единственности предела в $\mathbb{R}$ мы б получили, что $\pi = q$, т. е. π является рациональным числом, что неверно.

Заметим, что замыкание $\mathbb{Q}$ на прямой является $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$.

Задача. Как описать точки $\mathbb{R}$, используя только рациональные числа?

Ответ: каждая точка из $\mathbb{R}$ может быть ассоциирована с некоторой фундаментальной последовательностью, состоящей из рациональных чисел, подобно тому как в примере выше число π было представлено через фундаментальную последовательность x_n десятичных приближений. При этом, разные фундаментальные последовательности могут представлять одно и то же действительное число. Например, число π можно задать и другой последовательностью y_n, если будем брать десятичные приближения не с недостатком, а с избытком: $y_1 = 4$, $y_2 = 3.2$, $y_3 = 3.15$, $y_4 = 3.142$, $y_5 = 3.1416$ и т. д. Поэтому элементы $\mathbb{R}$ на самом деле можно представлять как класс эквивалентности фундаментальных последовательностей по следующему отношению эквивалентности: $x_n \sim y_n$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Эта идея может быть обобщена на случай произвольных метрических пространств, если мы хотим вложить произвольное метрическое пространство в полное в виде плотного подмножества. Дадим необходимые определения.

Два метрических пространства (E^*, ρ^*) и (E^{**}, ρ^{**}) назовем (изометрически) изоморфными, если существует биекция $f : E^* \to E^{**}$ такая, что для любых x^*, $y^* \in E^*$ имеет место равенство $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^{**}(x^{**}, y^{**})$, где $x^{**} = f(x^*)$, $y^{**} = f(y^*)$.

Пусть (E, ρ) — метрическое пространство. Метрическое пространство (E^*, ρ^*) называется пополнением метрического пространства (E, ρ), если выполняются условия:

1) $E \subset E^*$;

2) $\overline{E} = E^*$, где $\overline{E}$ — замыкание E в E^*;

3) $\rho^*|_{E\times E} = \rho$;

4) (E^*, ρ^*) — полное метрическое пространство.

Пример. $\mathbb{R}$ является пополнением $\mathbb{Q}$ (оба пространства наделены метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$).

Теорема о пополнении. У любого метрического пространства (E, ρ) существует пополнение. Более того, это пополнение единственно с точностью до изоморфизма, который оставляет на месте точки E.

Доказательство. Сначала установим единственность. Предположим, что существуют два пополнения (E^*, ρ^*) и (E^{**}, ρ^{**}) метрического пространства (E, ρ). Докажем, что они изоморфны. Возьмем любую точку $x^* \in E^*$. Так как $E^* = \overline{E}$, существует последовательность $x_n \in E$ такая, что $\rho^*(x_n, x^*) \to 0$, $n \to \infty$. Так как последовательность x_n сходится в E^*, она фундаментальна, т. е. $\rho^*(x_n, x_m) \to 0$, n, $m \to \infty$. Но на элементах из E все три метрики совпадают, т. е. $\rho^*(x_n, x_m) = \rho(x_n, x_m) = \rho^{**}(x_n, x_m)$. Следовательно, $\rho^{**}(x_n, x_m) \to 0$, n, $m \to \infty$. Это означает фундаментальность последовательности x_n в E^{**}. Поскольку (E^{**}, ρ^{**}) — полное метрическое пространство, существует точка x^{**} такая, что $\rho^{**}(x_n, x^{**}) \to 0$, $n \to \infty$. Обозначим $x^{**} = f(x^*)$.

Докажем, что отображение $f : E^* \to E^{**}$ определено корректно, т. е. x^{**} не зависит от выбора последовательности x_n. Действительно, пусть x'_n — другая последовательность, которая сходится к x^*. Рассмотрим перемешанную последовательность x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, $x'_3 \ldots$ Те же рассуждения, что и выше показывают, она фундаментальна в E^*, следовательно, и в E^{**}. Поэтому она сходится в E^{**} к x^{**}. Поэтому ее подпоследовательность x_n' сходится в E^{**} к x^{**}. Итак, $f(x^*)$ не зависит от выбора последовательности.

Ясно, что аналогично f можно построить отображение $g : E^{**} \to E^*$, которое обратно к g, т. е. $g \circ f = id_{E^*}$, $f \circ g = id_{E^{**}}$. Это означает, что f — биекция.

Покажем, что $f|_E = id_E$. Действительно, для любого $x \in E$ стационарная последовательность x, x, $x, \ldots$ сходится к x. Она сходится к x и в E^*, и в E^{**}. Поэтому $f(x) = x$.

Наконец, пусть $x^{**} = f(x^*)$, $y^{**} = f(y^*)$. Выберем последовательности x_n и y_n в E такие, что $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$, $n \to \infty$, в пространстве E^*. Тогда в пространстве E^{**} имеем $x_n \to x^{**}$, $y_n \to y^{**}$, $n \to \infty$. В силу непрерывности расстояния получим $\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho^{**}(x_n, y_n) = \rho^{**}(x^{**}, y^{**})$. Таким образом, f — это изоморфизм E^* на E^{**}. Это доказывает единственность пополнения.

Существование. Рассмотрим множество всевозможных фундаментальных последовательностей x_n в E. Введем на этом множестве отношение эквивалентности: Назовем последовательности x_n и y_n эквивалентными, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Нетрудно проверить, что это — действительно отношение эквивалентности (докажите это строго!).

Обозначим множество классов эквивалентности через E^*. Элементы E^* будем обозначать x^*, $y^*, \ldots$ Если последовательность x_n является представителем класса эквивалентности x^*, то будем писать $x^* = [x_n]$.

Введем на E^* метрику ρ^*. Рассмотрим любые два элемента $x^* = [x_n]$, $y^* = [y_n]$. Имеем $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \to 0$, n, $m \to \infty$. Отсюда следует, что числовая последовательность $\rho(x_n, y_n)$ фундаментальна. Так как $\mathbb{R}$ полно, эта последовательность имеет предел. Обозначим $\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Покажем, что это определение корректно. т.е. не зависит от выбора представителей x_n и y_n классов эквивалентностей. Действительно, если x_n' и y_n' — другие последовательности, эквивалентные x_n и y_n, то $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = 0$, $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_n') = 0$. В силу неравенства четырехугольника имеем $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \le \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n') \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) =$

$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$.

Теперь покажем, что E можно вложить в E^*. Для любого $x \in E$ рассмотрим стационарную последовательность: x, x, $x\ldots$ Эта последовательность сходится к x, поэтому она фундаментальна в E и определяет класс эквивалентности, который является элементом E^*. Таким образом, E вкладывается в E^* как подмножество. Теперь покажем, что на E^* метрика ρ^* совпадает с ρ. Действительно, если x, $y \in E$, то они определяют стационарные последовательности $x_n = x$, $y_n = y$, которые, в свою очередь, определяют соответствующие точки в E^*. По определению, имеем $\rho^*(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$. Таким образом, на $E \times E$ метрика ρ^* совпадает с ρ.

Теперь установим, что $\overline{E} = E^*$, т.е. для любого $x^* \in E^*$ существует последовательность элементов x_n такая, что $x_n \to x^*$ в E^*. Рассмотрим $x^* \in E^*$. Тогда для некоторой фундаментальной в E последовательности x_n имеем $x^* = [x_n]$. Покажем, что последовательность элементов x_n сходится в E^* к x^*. В самом деле, последовательность x_n фундаментальна, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m,\ n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Используя непрерывность метрики ρ^*, получаем при $n \geq N$: $\rho^*(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho^*(x_n.x_m) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n.x_m) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Таким образом, $\rho^*(x_n, x^*) to 0$, $n \to \infty$, т.е. $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

Осталось доказать полноту построенного пространства (E^*, ρ^*). Пусть x_n^* — произвольная фундаментальная последовательность в E^*. Докажем, что она сходится в E^* к некоторому пределу. В силу того, что $\overline{E} = E^*$, для любого n существует элемент $x_n \in E$ такой, что $\rho^*(x_n, x_n^*) < 1/n$. Докажем, что последовательность x_n фундаментальна в E. Имеем $\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m) \leq \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) < 1/n + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + 1/m$. Поскольку при n, $m \to \infty$ величина $\rho^*(x_n^*, x_m^*) \to 0$ (в силу фундаментальности последовательности x_n^*) а также $1/n$ и $1/m \to 0$, получаем, что $\rho(x_n, x_m) \to 0$, n, $m \to \infty$. Это и означает фундаментальность последовательности x_n.

Обозначим $x^* = [x_n]$. Докажем, что $x_n^* \to x^*$, $n \to \infty$. Имеем: $\rho^*(x_n^*, x_m) \leq \rho^*(x_n^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_m) < 1/n + \rho(x_n, x_m)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу фундаментальности, $\exists N : \forall m,\ n \geq N$ выполняется неравенство: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Если m, $n \geq N$ и $m > 2/\varepsilon$, то $\rho^*(x_n^*, x_m) <$

$1/n+\rho(x_n,x_m) < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. Тогда $\rho^*(x_n^*,x^*) = \lim_{m\to\infty}\rho^*(x_n^*,x_m) \le \varepsilon$, откуда следует, что $x_n^* \to x^*$ в E^*.

Теорема полностью доказана.

2.4 Полнота подпространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра

Пусть (E,ρ) — метрическое пространство и $A \subset E$. Тогда $(A,\rho|_{A\times A})$ — также метрическое пространство. которое называется подпространством пространства (E,ρ).

Теорема. *Пусть (E,ρ) — некоторое метрическое пространство. Тогда его подпространство $(A,\rho|_{A\times A})$ полно тогда и только тогда, когда A замкнуто.*

Доказательство. Пусть A замкнуто. Если последовательность x_n фундаментальна в A, то она фундаментальна в E. Тогда, в силу полноты E, x_n сходится в E к некоторму элементу x. Но элементы последовательности принадлежат A, поэтому предел x этой последовательности принадлежит замыканию множества A. Поскольку A замкнуто, эта точка лежит в A. Таким образом, любая фундаменатльная в A последовательность сходится в A.

Обратно, пусть $(A,\rho|_{A\times A})$ полно. Требуется доказать, что A замкнуто, т.е. совпадает со своим замыканием. Рассмотрим любую точку x из $\overline{A}$. Тогда существует последовательность x_n в A, которая сходится к x. Эта последовательность фундаментальна. Поэтому она сходится к некоторому элементу $y \in A$. В силу единственности предела, $x = y \in A$. Таким образом, $\overline{A} = A$. Теорема доказана.

Теперь установим теорему о вложенных шарах, которая является обобщением принципа сжимающих отрезков.

Отметим, что любой шар $U(a,r)$ является открытым множеством. Рассмотирм также замкнутый шар $U[a,r] := \{x \in E \mid \rho(x,a) < r\}$. Он является замкнутым множеством (докажите это строго!). Заметим также, что не всегда замыкание $U(a,r)$ совпадает с $U[a,r]$ (приведите пример).

Теорема (о вложенных шарах). *Метрическое пространство*

(E,ρ) является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $U[a_1,r_1] \supset U[a_2,r_3] \supset \ldots U[a_n,r_n] \supset \ldots$, радиусы r_n которых стремятся к нулю при $n \to \infty$, имеет непустое пересечение.

Отметим, что это пересечение содержит ровно одну точку.

Доказательство. Необходимость. Пусть (E,ρ) полно. Рассмотрим любую убывающую последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $U[a_n,r_n]$, радиусы которых стремятся к нулю. Покажем, что пересечение всех этих шаров непусто. Для этого установим, что последовательность a_n центров шаров сходится к некоторому $a \in E$, и точка a принадлежит всем шарам $U[a_n,r_n]$.

В силу полноты пространства для доказательства сходимости последовательности a_n достаточно установить ее фундаментальность. Из монотонности последовательности шаров следует, что для любых $m \geq n$ имеем $U[a_m,r_m] \subset U[a_n,r_n]$. Поэтому $a_m \in U[a_n,r_n]$ при $m \geq n$,. т.е. $\rho(x_m,x_n) \leq r_n$. Следовательно, поскольку $r_n \to 0$, $n \to \infty$, получает: $\rho(x_m,x_n) \to 0$ при m, $n \to \infty$. Это и означает фундаментальность a_n.

Таким образом, последовательность a_n фундаментальна, следовательно, сходится к некоторому элементу $a \in E$. Докажем, что $a \in U[a_n,r_n]$, $n \geq 1$. В самом деле, $a = \lim_{m\to\infty} a_m$ и $a_m \in U[a_n,r_n]$, $m \geq n$. Отсюда следует, что a — точка прикосновения множества $U[a_n,r_n]$. Поскольку $U[a_n,r_n]$ — замкнутое множество, точка $a \in U[a_n,r_n]$. Таким образом, $\cap_{n=1}^{\infty} U[a_n,r_n]$ содержит точку a, поэтому это пересечение непусто.

Упражнение. Используя условие $r \to 0$, $n \to \infty$, докажите, что пересечение шаров состоит только из одной точки a.

Достаточность. предположим, что любая убывающая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Докажем, что (E,ρ) полно, т.е. любая фундаментальная в E последовательность a_n имеет предел. Из фундаментальности можно вывести, что существует такая подпоследовательность a_{n_k} последовательности a_n, для которой выполняется неравенство $\rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1}$.

Покажем, что если рассмотреть замкнутые шары с центрами в точках a_{n_k} радиусов $r_k = 1/2^k$, то они образуют убывающую последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров. Это равносильно включениям $U[a_{n_{k+1}}, r_{k+1}] \subset U[a_{n_k}, r_k]$, $k \geq 1$. Рассмотрим любую точку $x \in U[a_{n_{k+1}}, r_{k+1}]$. Для нее выполняется условие $\rho(x, a_{n_{k+1}}) < r_{k+1} = 1/2^{k+1}$. Следовательно, $\rho(x, a_{n_k}) \leq \rho(x, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1} + 1/2^{k+1} = 1/2^k = r_k$. Таким образом, $\rho(x, a_{n_k}) \leq r_k$, т. е. $x \in U[a_{n_k}, r_k]$.

Итак, последовательность замкнутых шаров $U[a_{n_k}, r_k]$ убывает по включению, а радиусы их $r_k = 1/2^k$ стремятся к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, существует точка $a \in \cap_{k=1}^{\infty} U[a_{n_k}, r_k]$. Так как $a \in U[a_{n_k}, r_k]$, $k \geq 1$, то $\rho(a_{n_k}, a) < r_k \to 0$, $k \to \infty$. Поэтому последовательность a_{n_k} стремится к a при $k \to \infty$. Однако, если фундаментальная последовательность содержит подпоследовательность, которая сходится к a, то и вся последовательность сходится к a. Поэтому последовательность a_n сходится. Теорема полностью доказана.

Пусть (E, ρ) — метрическое пространство и A, $B \subset E$. Множество A называется плотным в множестве B, если $\overline{A} \supset B$. Множество A называется нигде не плотным, если A не плотно ни в каком шаре $U(a, r)$, $a \in E$, $r > 0$. По другому это можно сформулировать так: внутренность замыкания A пуста.

Справедлива

Лемма. *Множество A нигде не плотно, тогда и только тогда, когда для любого шара $U(a, r)$ существует замкнутый шар $U[b, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, такой что $U[b, \varepsilon] \subset U(a, r)$* и *$\overline{A} \cap U[b, \varepsilon] = \emptyset$.*

Достаточность очевидна. Установим необходимость. Рассмотрим любой шар $U(a, r)$. Поскольку A не плотно в $U(a, r)$, существует точка $b \in U(a, r)$ такая, что $b \notin \overline{A}$. Множество $U(a, r) \setminus \overline{A}$ является разностью открытого и замкнутого множеств, поэтом оно открыто. Кроме того, $b \in U(a, r) \setminus \overline{A}$. В силу открытости точка b является внутренней точкой этого множества, т.е. $\exists \delta > 0$: $U(b, \delta) \subset U(a, r) \setminus \overline{A}$. Пусть $0 < \varepsilon < \delta$. Тогда $U[b, \varepsilon] \subset U(a, r) \setminus \overline{A}$, что и требовалось доказать.

Теорема Бэра. *Полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим, что (E, ρ) — полное метрическое пространство и $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Предположим, что все A_n нигде не плотны.

Рассмотрим любой замкнутый шар $U[a_1, r_1]$, $r_1 > 0$. Так как A_1 нигде не плотно, оно не плотно в шаре $U(a_1, r_1)$, поэтому по лемме существует замкнутый шар $U[a_2, r_2]$, $r_2 > 0$, такой, что $U[a_2, r_2] \cap A_1 = \emptyset$. Аналогично, так как A_2 нигде не плотно, оно не плотно в шаре $U(a_2, r_2)$, поэтому существует замкнутый шар $U[a_3, r_3]$, $r_3 > 0$, такой, что $U[a_3, r_3] \cap A_2 = \emptyset$. Повторяя эту процедуру, по индукции мы строим убывающую последовательность замкнутых шаров $U[a_k, r_k]$ таких, что $U[a_{k+1}, r_{k+1}] \cap A_k = \emptyset$. По теореме о вложенных шарах существует точка $a \in E$ такая, что $a \in \cap_{k=1}^{\infty} U[a_k, r_k]$. С другой стороны, $a \in U[a_{k+1}, r_{k+1}]$, $k \geq 1$, поэтому $a \notin A_k$, поскольку $U[a_{k+1}, r_{k+1}] \cap A_k = \emptyset$. Следовательно, $a \notin \cup_{k=1}^{\infty} A_k = E$ — противоречие, которое доказывает теорему Бэра.

Замечание. Теорему Бэра часто называют теоремой о категориях. Это связано со следующим определением. Множество A называется множеством первой категории, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. В противном случае оно называется множеством второй категории. Теорема Бэра утверждает, что все полные метрические пространства являются множествами второй категории.

2.5 Принцип сжимающих отображений

Пусть (E, ρ) — некоторое метрическое пространство. Оператором, действующим в A называется любое отображение $A : E \to E$. Образ элемента x под действием оператора A обозначается Ax. Отметим, что подобные обозначения используются в линейной алгебре. В данном случае не предполагается, что E наделено структурой линейного пространства. Даже если такая структура имеется, вообще говоря, не предполагается, что A — линейное отображение.

Оператор $A : E \to E$ называется сжимающим, если существует константа $\alpha \in [0; 1)$ такая, что для любых x, $y \in E$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Особо отметим, что в этом определении параметр α строго меньше единицы.

Любой сжимающий оператор A непрерывен. Действительно, если последовательность $x_n \to x$, $n \to \infty$, то $\rho(x_n, x) \to 0$ и из неравенства $\rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\rho(x_n, x)$ следует, что при $n \to \infty$ также $\rho(Ax_n, Ax) \to 0$, т. е. $Ax_n \to Ax$. Этим показана непрерывность A в любой точке $x \in E$.

Точка x называется неподвижной точкой оператора A, если выполняется равенство $Ax = x$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *В полном метрическом пространстве сжимающий оператор имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть (E, ρ) — полное метрическое пространство и A — сжимающий оператор в этом пространстве. Докажем, что существует неподвижная точка этого оператора.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in E$. Обозначим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, $x_3 = Ax_2, \ldots, x_{n+1} = Ax_n, \ldots$ В результате получим некоторую последовательность x_n в E. Докажем, что x_n фундаментальна.

Сначала оценим величину $\rho(x_{n+1}, x_n)$. Имеем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Применяя это неравенство несколько раз получаем

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \le \alpha^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le$$
$$\le \alpha^3\rho(x_{n-2}, x_{n-3}) \le \ldots \le \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

Теперь, с помощью полученной оценки и неравенства треугольника заключаем, что для любых m, $n \in \mathbb{N}$, таких что $m > n$, имеет место неравенство

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le \alpha^m\rho(x_1, x_0) + \alpha^{m-1}\rho(x_1, x_0) + \ldots + \alpha^{n+1}\rho(x_1, x_0) =$$
$$= (\alpha^m + \alpha^{m-1} + \ldots + \alpha^{n+1})\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha}\rho(x_1, x_0) \le \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha}\rho(x_1, x_0).$$

Поскольку $\alpha < 1$, заключаем, что $\alpha^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\rho(x_m, x_n) \to 0$, m, $n \to \infty$, т. е. последовательность x_n фундаментальна.

Из полноты пространства (E, ρ) следует, что x_n сходится е некоторому элементу $x \in E$. Докажем, что x — неподвижная точка оператора A. Имеем $\rho(Ax_n, x_n) = \rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^n\rho(x_1, x_0) \to$

0, $n \to \infty$. Следовательно, $\rho(Ax_n, x_n) \to 0$, $n \to \infty$. Используя непрерывность сжимающего оператора A и функции расстояния ρ, получаем: $0 = \lim_{n\to\infty} \rho(Ax_n, x_n) = \rho(\lim_{n\to\infty} Ax_n, \lim_{n\to\infty} x_n) = \rho(A \lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x_n) = \rho(Ax, x)$. Итак, $\rho(Ax, x) = 0$, откуда заключаем, что $Ax = x$, т.е. — неподвижная точка A.

Осталось доказать, что эта неподвижная точка единственна. Предположим, что имеет две неподвижные точки x и y. Тогда $Ax = x$, $Ay = y$ и $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$. Значит, $(1-\alpha)\rho(x, y) \le 0$. Используя тот факт, что $1 - \alpha > 0$, получаем $\rho(x, y) \le 0$. Значит, $\rho(x, y) = 0$, поэтому $x = y$. теорема полностью доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы дает конструктивный способ построения неподвижной точки оператора A. Для любого x_0, которое называется начальным приближением, строится итерационный процесс по правилу: $x_{n+1} = Ax_n \ldots$, $n \ge 1$. Построенная последовательность сходится к неподвижной точке x оператора A. Такой приближенный метод решения уравнения $Ax = x$ называется методом простой итерации

Замечание 2. Из доказательства следует оценка скорости сходимости итераций x_n к точному решению x уравнения $Ax = x$. Действительно, в ходе доказательства установлено, что $\rho(x_m, x_n) \le C\alpha^{n+1}$, $m > n$, где $C = \rho(x_1, x_0)/(1-\alpha)$. При $m \to \infty$ имеем $\rho(x_m, x_n) \to \rho(x, x_n) = \rho(x_n, x)$, поэтому $\rho(x_n, x) \le C\alpha^{n+1}$, Данная оценка показывает, что $\rho(x_n, x)$, т.е. расстояние от приближенного решения x_n до точного x стремится к нулю со скоростью не меньшей, чем та, с которой стремится нулю геометрическая прогрессия $C\alpha^{n+1}$ со знаменателем $\alpha < 1$.

В качестве приложения докажем разрешимость уравнения Фредгольма второго рода с малым параметром на отрезке $[a, b]$.

Это уравнение имеет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) y(t) dt, \quad a \le x \le b \qquad (*).$$

Здесь f — заданная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $K(x, y)$ — заданная функция двух переменных. непрерывная в квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$, λ — некоторое фиксированное вещественное число, называемое параметром. Требуется найти непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию y такую, что для любого $x \in [a, b]$ имеет место равенство $(*)$.

Поскольку $K(x, y)$ непрерывна на компактном множестве Q, по теореме Вейерштрасса она ограничена, т.е. существует константа $M > 0$. что $K(x, y) \leq M$, $(x, y) \in Q$.

Теорема. *Если выполняется неравенство* $|\lambda| < \frac{1}{(b-a)M}$, *то уравнение* $(*)$ *единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$Ay(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt,$$

определяемый левой частью равенства $(*)$. Установим, что этот оператор действует в пространстве $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке с метрикой $\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$. Действительно, если $y \in C[a, b]$, т.е. является функцией, непрерывной на $[z, b]$, то $Ay(x)$ является суммой непрерывной функции $f(x)$ и собственного интеграла, зависящего от параметра x. Используя непрерывность $K(x, y)$ в квадрате и функции y на отрезке $[a, b]$, заключаем, что собственный интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией от x.

Итак, $A : C[a, b] \to C[a, b]$. Заметим, что $C[a, b]$ — полное метрическое пространство. Теперь докажем сжимаемость оператора A, т.е. что существует константа $\alpha \in [0; 1)$ такая, что для любых функций y_1, $y_2 \in C[a, b]$ выполняется неравенство $\rho(Ay_1, Ay_2) \leq \alpha\rho(y_1, y_2)$.

Имеем

$$Ay_1(x) - Ay_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)(y_1(t) - y_2(t))dt,$$

поэтому

$$|Ay_1(x) - Ay_2(x)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(x, t)|\,|y_1(t) - y_2(t)|dt,$$

Поскольку $|y_1(t) - y_2(t)| \leq \max_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| = \rho(y_1, y_2)$ и $|K(x, t)| \leq M$, получаем

$$|Ay_1(x) - Ay_2(x)| \leq |\lambda| M \rho(y_1, y_2)(b - a).$$

Отметим, что правая часть последнего неравенства не зависит от x. Отсюда заключаем, что

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{x \in [a,b]} |Ay_1(x) - Ay_2(x)| \leq |\lambda| M(b - a)\rho(y_1, y_2).$$

Если обозначить $\alpha = |\lambda| M(b-a)$, то из условия теоремы следует, что $\alpha < 1$. Это означает сжимаемость A, и далее утверждение теоремы следует из принципа сжимающих отображений.

2.6 Компактнось в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.

Множество A в топологическом пространстве E называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Множество A называется секвенциально компактным, если из любого последовательности его элементов $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому элементу x данного множества.

Эти определения можно применять ко всему пространству E.

Множество A в топологическом пространстве E называется относительно компактным, если его замыкание компактно.

Множество A называется секвенциально компактным, если из любого последовательности его элементов $\{x_n\}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Отметим, что в метрических пространствах компактность равносильна секвенциальной компактности. Также относительная компактность равносильна относительно секвенциальной компактности. Подробности можно найти в книге [1].

Важным является вопрос о критериях относительной компактности множеств в метрическом пространстве. Введем определение.

Пусть $A \subset E$ и $\varepsilon > 0$. Множество $B \subset E$ называется ε-сетью множества A, если

$$A \subset \cup_{y \in B} B(y, \varepsilon).$$

Если множество BE является ε-сетью множества A и состоит из конечного числа элементов, то B называется конечной ε-сетью множества A.

Множество $A \subset E$ называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть множества A.

Очевидно, что любое вполне ограниченное множество является ограниченным, так как объединение конечного числа шаров (ограниченных множеств) ограничено.

Лемма. *Если $A \subset E$ вполне ограничено, то в E существует счетное множество C, плотное в A, т. е. $\overline{C} \supset A$.*

Доказательство. В качестве C можно взять объединение всех конечных $1/n$-сетей множества A, где $n \in \mathbb{N}$.

Теорема (Хаусдорф). *В метрическом пространстве E множество A относительно секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Доказательство. Необходомость. Предположим противное. Пусть A относительно секвенциально компактно, но не волне ограничено. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что никакое конечное множество не является ε-сетью множества A. фиксирууем произвольное $x_1 \in A$. Множество, состоящее из одного элемента x_1 не является ε-сетью множества A. Следовательно, существует $x_2 \in A$ такое, что $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$. Далее, Множество, состоящее из двух элементов x_1 и x_2 не является ε-сетью множества A, поэтому существует элемент $x_3 \in A$ такой, что $\rho(x_3, x_1) > \varepsilon$ и $\rho(x_3, x_2) > \varepsilon$. Далее, продолжая этот процесс, по индукции строим последовательность x_n элементов множества A такую, что $\rho(x_m, x_n) > \varepsilon$, $m \neq n$. Ясно, что никакая подпоследовательность этой последовательности не является фундаментальной. это противоречит относительно секвенциальной компактности множества A.

Достаточность. Пусть A — вполне ограниченное множество в E. Докажем, что оно относительно секвенциально компактно. Для этого рассмотрим любую последовательность x_n в A и выделим из нее фундаментальную подпоследовательность.

Пусть $\varepsilon = 1$. В силу вполне ограниченности A существует его конечная 1-сеть, состоящая элементов y_1, $y_2, \ldots, y_k$. Шары

$$B(y_1, 1),\ B(y_2, 1), \ldots, B(y_k, 1)$$

покрывают множество Aб а следовательно, и последовательность x_n. Так как шаров конечное число, то по крайней мере один их шаров содержит бесконечную последовательность элементов последовательности x_n. Выберем такую подпоследовательность и обозначим ее элементы через $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)} \ldots$

Пусть $\varepsilon = 1/2$. Применяя те же рассуждения, что и выше для $\varepsilon = 1$, выделяем из последовательности $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ подпоследовательность $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$, которая лежит в шаре радиуса $1/2$. Продолжая этот процесс, для любого натурального k находим подпоследовательность $x_n^{(k+1)}$ последовательности $x_n^{(k)}$ такую, что эта подпоследовательность лежит в некотором шаре радиуса $1/2^k$.

Теперь запишем элементы всех этих подпоследовательностей в бесконечную таблицу. В k-й строке запишем элементы последовательности $x_n^{(k)}$:

$$\begin{array}{l}
x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots x_n^{(1)},\ \ldots \\
x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \ldots x_n^{(2)},\ \ldots \\
x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)},\ \ldots x_n^{(3)},\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)},\ \ldots x_n^{(n)},\ \ldots
\end{array}$$

Каждая последующая строка таблицы является подпоследовательностью предыдущей.

Теперь рассмотрим диагональную последовательность этой таблицы — $x_n^{(n)}$. Нетрудно видеть, что элементы этой последовательность при $n \geq k$ содержатся в k-й строке таблицы, поэтому при $n \geq k$ все $x_n^{(n)}$ лежат в шаре радиуса $1/2^k$. В силу неравенства треугольника, $\rho(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < 1/2^{k-1}$ при m, $n \geq k$. Так как $1/2^{k-1} \to 0$, $k \to \infty$, делаем вывод, что последовательность $x_n^{(n)}$ фундаментальна. Итак, из любой последовательности элементов множества A можно выделить фундаментальную. Следовательно, A относительно секвендциально компактно. Теорема доказана.

2.7 Пространство $C(X, Y)$

Пусть X, Y — два компактных метрических пространства. Рассмотрим множество $C(X, Y)$ всех непрерывных функций $f : X \to Y$. Введем на множестве $C(X,Y)$ метрику

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x),g(x)). \tag{1}$$

Сначала покажем, что для любых f, $g\in C(X,Y)$ величина $\rho(f,g)$ конечна. Действительно, так как X компактно а f непрерывно, $f(X)$ также компактно (теорема из курса топологии). По критерию Хаусдорфа $f(X)$ вполне ограничено, следовательно, ограничено. Аналогично, множество $g(X)$ также ограничено. Поэтому Расстояние $\rho(f(x),g(x))$ между точками $f(x)$ и $g(x)$ двух ограниченных множеств ограничено. Это же можно доказать по-другому. Функция $\rho(f(x),g(x))$ действует из X в $\mathbb{R}$ и непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Так как X компактно, его образ при отображении $\rho(f(x),g(x))$ компактен в $\mathbb{R}$, следовательно, ограничен. Более того, это множество замкнуто в $\mathbb{R}$, поэтому содержит свою точную верхнюю грань. Следовательно, вместо $\sup$ в (1) можно написать $\max$.

Теорема. *Функция* (1) *определяет метрику на* $C(X,Y)$.

Доказательство. Ясно, что $\rho(f,g)\geq 0$. Если $f=g$, то $\rho(f,g)=0$. Обратно, если $\rho(f,g)=0$, то в силу неотрицательности $\rho(f(x),g(x))$ отсюда будет следовать, что $\rho(f(x),g(x))=0$ для всех x, $y\in X$, откуда $f(x)=g(x)$, $x\in X$. Это означает, что $f=g$.

Симметричность метрики $\rho(f,g)=\rho(g,f)$ очевидна. Осталось доказать неравенство треугольника. Пусть f, g и h — три непрерывные функции. Для любого $x\in X$ запишем неравенство треугольника в Y:

$$\rho(f(x),h(x))\leq\rho(f(x),g(x))+\rho(g(x),h(x)).$$

Так как $\rho(f(x),g(x))\leq\rho(f,g)$ и $\rho(g(x),h(x))\leq\rho(g,h)$, то и этого неравенства получаем

$$\rho(f(x),h(x))\leq\rho(f,g)+\rho(g,h).$$

В правой части последнего неравенства стоит число, не зависящее от x. Поэтому супремум функции в левой части не превосходит этого числа, т.е.

$$\rho(f,h)=\sup_{x\in X}\rho(f(x),h(x))\leq\rho(f,g)+\rho(g,h).$$

Теорема доказана.

Теперь введем понятие равномерной непрерывности функции. Функция $f : X \to Y$ называется равномерно непрерывной, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x', x'' \in X\ (\rho(x', x'') < \delta \implies \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon).$$

Это определение является естественным обобщением понятия равномерной непрерывности функций одной или нескольких вещественных переменных.

Теорема. *Пусть X, Y — компактные метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда f равномерно непрерывна.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Установим необходимость. Предположим противное. Пусть $f : X \to Y$ непрерывна, но не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists\, \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0 :\ \exists\, x'_\delta,\, x''_\delta \in X :\ \rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta \quad \text{и} \quad \rho(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon.$$

Будем брать в качестве δ числа $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Соответствующие точки x'_δ и x''_δ будем обозначать x'_n и x''_n. Тогда

$$\rho(x'_n, x''_n) < 1/n \quad \text{и} \quad \rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon.$$

Так как X компактно, X секвенциально компактно. Поэтому существует подпоследовательность x'_{n_k}, которая сходится к некоторому элементу $x \in X$. Тогда и x''_{n_k} тоже сходится к x, так как

$$\rho(x''_{n_k}, x) \leq \rho(x''_{n_k}, x'_{n_k}) + \rho(x'_{n_k}, x) < 1/n_k + \rho(x'_{n_k}, x) \to 0, \quad k \to \infty.$$

В силу непрерывности f получаем $f(x'_{n_k}) \to f(x)$, $f(x''_{n_k}) \to f(x)$, $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что $\rho(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})) \to 0$, $k \to \infty$. Но это противоречит тому, что $\rho(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})) \geq \varepsilon$, $k \geq 1$. противоречие доказывает теорему.

Отметим, что при доказательстве мы не использовали компактность Y. На самом деле, в этой теореме важна лишь компактность X.

Следствие. *Пусть X, Y — компактные метрические пространства. Тогда любой элемент пространства $C(X, Y)$ является равномерно непрерывной функцией.*

2.8 Теорема Арцела-Асколи

Пусть X, Y — компактные метрические пространства. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций в $C(X,Y)$. Семейство $\mathcal{F}$ называется равностепенно непрерывным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in X \, \forall f \in \mathcal{F} \, (\rho(x', x'') < \delta \implies \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon).$$

Это определение включает в себя условие равномерной непрерывности каждой функции семейства, но, кроме того, требует чтобы число δ можно было выбрать единым для всего семейства $\mathcal{F}$, т.е. оно не зависит от f.

Отметим некоторые простые свойства равностепенно непрерывных семейств.

1) Семейство $\mathcal{F}$ в $C(X,Y)$, состоящее из одной функции, равностепенно непрерывно. Это следует из теоремы о равномерной непрерывности.

2) Семейство $\mathcal{F}$ в $C(X,Y)$, состоящее из конечного числа функций, равностепенно непрерывно. В силу 1) для каждой функции f_k конечного семейства f_1, $f_2, \ldots, f_n$ можно подобрать соответствующее $\delta_k > 0$. Пусть $\delta = \min_{1\ ek \leq n} \delta_k$. Тогда $\delta_k > 0$ и является искомым для всего семейства.

Теорема (Обобщенная теорема Арцела-Асколи). *Пусть X, Y — компактные метрические пространства. Семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ относительно секвенциально компактно в этом пространстве тогда и только тогда. когда оно равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\mathcal{F}$ относительно секвенциально компактно в $C(X,Y)$. Докажем, что оно равностепенно непрерывно. Зададим $\varepsilon > 0$. По критерию Хаусдорфа $\mathcal{F}$ вполне ограничено. Следовательно, существует конечная $\varepsilon/3$-сеть этого множества. Пусть она состоит из функций f_1, $f_2, \ldots, f_k$. Конечное семейство $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ равностепенно непрерывно, поэтому

$$\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in X \, \forall 1 \leq j \leq k \, (\rho(x', x'') < \delta \implies \rho(f_j(x'), f_j(x'')) < \varepsilon/3).$$

Теперь рассмотрим любой элемент $f \in \mathcal{F}$. Так как семейство $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ является $\varepsilon/3$-сетью для $f \in \mathcal{F}$, существует f_j такое, что $\rho(f, f_j) < \varepsilon/3$. Пусть x', $x'' \in X$ таковы, что $\rho(x', x'') < \delta$. Тогда используя неравенство треугольника, определение метрики в $C(X,Y)$ и выбор δ для конечного семейства $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ получаем.

$$\rho(f(x'), f(x'')) \le \rho(f(x'), f_j(x')) + \rho(f_j(x'), f_j(x'')) + \rho(f_j(x''), f(x'')) \le$$

$$\le \rho(f, f_j) + \rho(f_j(x'), f_j(x'')) + \rho(f_j, f) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно.

Достаточность. Предположим, что $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно. Докажем, что $\mathcal{F}$ относительно секвенциально компактно. Рассмотрим любую последовательность f_n функций из $\mathcal{F}$. требуется выделить из нее фундаментальную в $C(X, Y)$ подпоследовательность.

Поскольку X компактно, оно вполне ограничено. Поэтому для любого натурального k существует его конечная $1/k$ сеть, обозначим ее через E_k. Пусть $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. Это множество плотно в X и является счетным, поэтому это множество можно записать в виде $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Рассмотрим последовательность элементов $f_n(x_1)$ в Y. Так как Y компактно, оно секвенциально компактно, поэтому из последовательности f_n можно выделить подпоследовательность $f_n^{(1)}$, такую, что $f_n^{(1)}(x_1)$ фундаментальна в Y. Теперь рассмотрим последовательность $f_n^{(1)}(x_2)$. Опять-таки, используя компактность Y, выделяем из $f_n^{(1)}$ подпоследовательность $f_n^{(2)}$ такую, что $f_n^{(2)}(x_2)$ фундаментальна в Y. Повторяя этот процесс, для любого $k \in \mathbb{N}$ выделяем из $f_n^{(k)}$ подпоследовательность $f_n^{(k+1)}$ такую, что $f_n^{(k+1)}(x_{k+1})$ фундаментальна в Y.

Далее рассмотрим «диагональную» последовательность $f_n^{(n)}$. Обозначим ее через φ_n. По построению, для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\varphi_n(x_k)$ фундаментальна. Докажем, что подпоследовательность φ_n последовательности f_n является искомой ,т.е. она фундаментальна в $C(X, Y)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно, то

$$\exists\, \delta > 0 : \; \forall x', x'' \in X \; \forall f \in \mathcal{F} \; (\rho(x', x'') < \delta \implies \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon).$$

Теперь фиксируем натуральное k такое, что $1/k < \delta$. Пусть конечная $(1/k)$-сеть имеет вид $E_k = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_l\}$. Поскольку $\varphi_n(x)$ фундаментальна для любого $x \in E$ и $E_k \subset E$, последовательность $\varphi_n(\overline{x}_j)$ фундаментальна для любого $1 \le j \le l$. Это означает, что любого $1 \le j \le l$

существует N_j такое, что для любых m, $n \geq N_j$, имеет место неравенство

$$\rho(\varphi_m(\overline{x}_j), \varphi_n(\overline{x}_j)).$$

Пусть $N = \max_{1 \leq jlel} N_j$. Тогда при m, $n \geq N$ последнее неравенство имеет место для всех j, $1 \leq j \leq l$.

Пусть теперь x — произвольная точка из X и m, $n \geq N$. Так как E_k — $(1/k)$-сеть в X, существует j такое, что $\rho(x, \overline{x}_j) < 1/k$. Так как $1/k < \delta$, получаем $\rho(x, \overline{x}_j) < 1/k$, откуда следует, что $\rho(\varphi_m(x), \varphi_m(\overline{x}_j))) < \varepsilon/3$, $\rho(\varphi_n(x), \varphi_n(\overline{x}_j))) < \varepsilon/3$. Наконец, в силу неравенство треугольника,

$$\rho(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) \leq \rho(\varphi_m(x), \varphi_m(\overline{x}_j)) + \rho(\varphi_m(\overline{x}_j), \varphi_n(\overline{x}_j)) + \rho(\varphi_n(\overline{x}_j), \varphi_n(x)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Поскольку мы получили, что $\rho(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$, заключаем, что $\rho(\varphi_m, \varphi_n) = \sup_{x \in X} \rho(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) \leq \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли N такое. что при m, $n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(\varphi_m, \varphi_n) \leq \varepsilon$. Это означает, что последовательность φ_n фундаментальна в $C(X, Y)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. С точки зрения предыдущих обозначений $C[a, b] = C([a, b], \mathbb{R})$. Поскольку $\mathbb{R}$ не является компактным, мы не можем применить доказанную теорему в этом случае. Введем определение.

Семейство функций $\mathcal{F}$ в пространстве $C[a, b]$ называется равномерно ограниченным, если существует константа $M > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$ и любой точки x отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Теперь сформулируем классическую теорему Арцела-Асколи.

Теорема (Арцела-Асколи). *Для того чтобы семейство функций $\mathcal{F}$ в пространстве $C[a, b]$ было относительно секвенциально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равностепено непрерывным и равномерно ограниченным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\mathcal{F}$ относительно секвенциально компактно. Тогда по критерию Хаусдорфа оно вполне ограничено, следовательно, ограничено. Поэтому существует шар с центом в нуле θ (θ — это функция, тождественно равная нулю на $[a, b]$), который содержит $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F} \subset B(\theta, M)$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}$ имеем $\rho(f, \theta) < M$, т.е $\max_{x\in[a,b]} |f(x)| < M$. Поэтому семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено.

На самом деле, функции f и этого семейства действуют из $[a, b]$ в $[-M, M]$. Но $[-M, M]$ — компактное множество. поэтому семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно в $C[X, Y]$, где $X = [a, b]$, $Y = [-M, M]$ — компактные метрические пространства. По обобщенной теореме Арцела-Асколи семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно.

Обратно, пусть семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Из равномерной ограниченности следует, что существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$ и любого $x \in [a, b]$. Поэтому опять-таки мы можем считать, что семейство $\mathcal{F}$ принадлежит $C[X, Y]$, где $X = [a, b]$, $Y = [-M, M]$. Применяя обобщенную теорему Арцела-Асколи, убеждаемся, что семейство $\mathcal{F}$ относительно секвенциально компактно. Теорема доказана.

3 Основные понятия линейного функционального анализа

3.1 Нормированные пространства. Пополнение

Пусть E — линейное векторное пространство над полем Λ, где Λ — это либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пространство E называется нормированным ,если на нем задана функция $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем свойствам (аксиомам нормы):

1) $\forall x \in E$ имеет место неравенство $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\forall \alpha \in \Lambda$ и $\forall x \in E$ имеет место равенство $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (однородность);

3) $\forall x,\ y \in E$ имеет место неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Любое нормированное пространство E является метрическим с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. (Это почти очевидно.) Следовательно, в E

определена топология и сходимость последовательностей: $x_n \to x$, если $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

В этой топологии непрерывны операции сложения, умножения на скаляр и нормы, т.е.:

1) если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$;

2) если $\alpha_n \to \alpha$ и $x_n \to x$, то $\alpha_n x_n \to \alpha x$;

3) если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

Докажите это самостоятельно.

Поскольку любое нормированное пространство является метрическим можно говорить о полноте нормированных пространств. Полное метрическое пространство называется банаховым.

Справедлив аналог теоремы о пополнении для нормированных пространств.

Теорема. *Пусть E — нормированное пространство. Тогда E обладает пополнением, т.е. существует такое банахово пространство E^* с нормой $\|\cdot\|^*$, что:*

1) $E \subset E^*$;

2) E *плотно в* E^*;

3) $\forall x \in E$ *имеет место равенство* $\|x\|^* = \|x\|$.

Пополнение определяется единственным образом с точностью до изоморфизма, сохраняющего значение нормы

Доказательство основано на теореме о пополнении метрических пространств. Так как нормированное пространство E является метрическим, то существует метрическое пространство E^*, которо является его пополнением. Далее нужно ввести структуру линейного пространства на E^* и норму. (Подумайте, как это можно сделать.) Если ρ^* — метрика на E^*, то норма определяется равенством $\|x^*\|^* = \rho^*(x^*, \theta)$. Далее нужно проверить аксиомы нормы для $\|\cdot\|^*$ и убедиться, что метрика, порождаемая $\|\cdot\|^*$ совпадает с ρ^*.

Определение. Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

3.2 Сравнение норм в линейном векторном пространстве

Пусть E – линейное пространство. $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две нормы на E, а τ_1 и τ_2 — соответствующие топологии. Напомним, что по определению топология τ_1 слабее τ_2, если $\tau_1 \subset \tau_2$. Обозначим через $B_1(a,\varepsilon)$ и $B_2(a,\varepsilon)$ шары с центром в точке a радиуса ε) определяемые нормами ρ_1 и ρ_2.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Топология τ_1 слабее топологии τ_2.*

2) *Если x_n – последовательность в E и $\|x_n\|_2 \to 0$, $n \to \infty$, то $\|x_n\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.*

3) *Существует $C > 0$ такое, что $\|x\|_1 \leqslant C||x||_2$ $\forall x \in E$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\|x_n\|_2 \to 0$. Нам требуется доказать, что $\|x_n\|_1 \to 0$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$. Рассмотрим шар $B_1(\theta,\varepsilon_1)$. Этот шар открыт в топологии τ_1, а по условию $\tau_1 \subset \tau_2$. Поскольку $B_1(\theta,\varepsilon_1) \in \tau_1$, заключаем, что $B_1(\theta,\varepsilon_1) \in \tau_2$. Значит, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_2(\theta,\varepsilon) \subset B_1(\theta,\varepsilon_1)$. Из условия $\|x_n\|_2 \to 0$ следует, что для этого $\varepsilon > 0$ существует N: $\forall n \geqslant N$ $\|x_n\|_2 < \varepsilon$, т. е. $x_n \in B_2(\theta,\varepsilon)$. Поэтому при $n \geqslant N$ имеем $x_n \in B_1(\theta,\varepsilon_1)$. Это означает, что $\|x_n\|_1 < \varepsilon_1$ при $n \geqslant N$, т. е. $\|x_n\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.

2) $\Rightarrow$ 3) Предположим противное. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n : ||x_n||_1 > n||x_n||_2$. (Отметим. что $x_n \neq 0$.) Пусть $y_n = \frac{x_n}{n||x_n||_2}$. Тогда

$$||y_n||_2 = \frac{||x_n||_2}{n||x_n||_2} = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to 0,$$

но

$$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{n\|x_n\|_2} > 1,$$

т. е. $\|y_n\|_1 \not\to 0$, $n \to \infty$. Противоречие доказывает нужное утверждение.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $U \in \tau_1$. Требуется доказать, что $U \in \tau_2$. Фиксируем $x_0 \in U$. В силу открытости U в топологии τ_1 существует шар $B_1(x_0,\varepsilon) \subset U$. Если $\|x - x_0\|_2 < \frac{\varepsilon}{C}$, то $\|x - x_0\|_1 \leqslant C||x - x_0||_2 < \varepsilon$. Поэтому $B_2(x_0, \frac{\varepsilon}{C}) \subset U$ и x_0 — внутренняя точка U в τ_2. Итак, любая точка U является внутренней точкой в топологии τ_2. Значит, $U \in \tau_2$.

Определение. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными, если совпадают порождаемые ими топологии, т. е. $\tau_1 = \tau_2$.

Из теоремы 1 сразу вытекает

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

2) Для любой последовательности $x_n \in E$ из того, что $\|x_n\|_1 \to 0$, $n \to \infty$, следует, что $\|x_n\|_2 \to 0$, $n \to \infty$.

3) существуют константы $0 < C_1 \leqslant C_2 < +\infty$ такие, что для любого $x \in E$

$C_1\|x\|_2 \leqslant \|x|\|_1 \leqslant C_2\|x\|_2$, или, что то же самое, $\forall x \neq \theta$ $C_1 \leqslant \dfrac{||x||_1}{||x||_2} \leqslant C_2$.

3.3 Конечномерные линейные нормированные пространства

Пусть E — конечномерное евклидово пространство над полем Λ. Выберем базис в этом пространстве: $e_1,\ e_2, \ldots, e_n$. Тогда $n = \mathrm{dim}], E$ и любой элемент из E однозначно представим в виде $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$, где x_k — скаляры из поля Λ (координаты).

В конечномерно пространстве можно ввести евклидову норму

$$\|x\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Пространство E с нормой $\|x|$_0 обладает свойствами:

1) Последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ сходится к $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ тогда и только тогда, когда $x_j^{(m)} \to x_j^{(0)}$, $m \to \infty$, $\forall\ 1 \leqslant j \leqslant n$.

2) Множество в конечномерном пространстве E компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Теорема. *Пусть* $\|\cdot\|_1$ *– другая норма в конечномерном пространстве* E. *Тогда норма* $\|\cdot\|_1$ *эквивалентна норме* $\|\cdot\|_0$.

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|_1$. Докажем, что она непрерывна в евклидовой топологии. Пусть $x^{(m)} \to x^{(0)}$ по норме $\|\cdot\|_0$. Тогда для всех j, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$, имеем $x_j^{(m)} \to x_j^{(0)}$, $m \to \infty$. Пусть

$$x^{(0)} = x_1^{(0)}e_1 + x_2^{(0)}e_2 + \cdots + x_n^{(0)}e_n, \quad x^{(m)} = x_1^{(m)}e_1 + x_2^{(m)}e_2 + \cdots + x_n^{(m)}e_n.$$

Тогда

$$\Big|\|x^{(m)}\|_1 - \|x^{(0)}\|_1\Big| \leqslant \|x^{(m)} - x^{(0)}\|_1 =$$

$$= \|(x_1^{(m)} - x_1^{(0)})e_1 + (x_2^{(m)} - x_2^{(0)})e_2 + \dots + (x_n^{(m)} - x_n^{(0)})e_n\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant |x_1^{(m)} - x_1^{(0)}| \cdot \|e_1\|_1 + |x_2^{(m)} - x_2^{(0)}| \cdot \|e_2\|_1 + \dots + |x_n^{(m)} - x_n^{(0)}| \cdot \|e_n\|_1 \to 0,\ m \to \infty.$$

Это означает, что $f(x^{(m)}) \to f(x^{(0)})$, $m \to \infty$. Значит, f непрерывна.

2) Рассмотрим функцию f на единичной сфере

$$S = \{x \in E : \|x\|_0 = 1\}.$$

Множество S компактно, а f — непрерывная функция. По теореме Вейерштрасса существует $m = \min\limits_S f$ и $M = \max\limits_S f$. При этом, $m > 0$. Действительно, если бы $m = 0$, о существовал бы $x \in S$ такой, что $f(x) = 0$, то есть $\|x\|_1 = 0$ и тогда бы мы имели $x = \theta$, $\|x\|_0 = 0$ – противоречие с тем, что $x \in S$. Таким образом, $0 < m \leqslant \|x\|_1 \leqslant M < +\infty$. Если $x \neq \theta$, то $\frac{x}{||x||_0} \in S$ и

$$m \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_0} \right\|_1 \leqslant M \Rightarrow m \leqslant \frac{||x||_1}{||x||_0} \leqslant M \Rightarrow m\|x\|_0 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|_0.$$

В силу доказанной выше теоремы 2 эти нормы эквивалентны.

Следствие. Любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

Лемма о почти перпендикуляре. Единичная сфера в бесконечномерном пространстве

Определение. Расстоянием от точки x до множества A называется величина

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Если A замкнуто и $x \notin A$, то $\rho(x, y) > 0$.

Лемма о почти перпендикуляре. *Пусть L – подпространство в E, $L \neq E$. Тогда существует x такое, что $\|x\| = 1$ и $\rho(x, L) > \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Так как $L \neq E$, то существует $y \notin L$ такое, что

$$d = \rho(y, L) = \inf_{z \in L} \rho(y, z) > 0.$$

В силу свойств инфимума существует $z \in L$, такое, что $d \leqslant \rho(y,z) < 2d$. Пусть $x = \frac{y-z}{||y-z||}$. Ясно, что $\|x\| = 1$. Если $u \in L$, то

$$\rho(x,u) = \|x-u\| = \left\| \frac{y-z}{||y-z||} - u \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|y-z\|} \, \|y-z-u\|y-z\| \, \| = \frac{1}{\|y-z\|}\|y-v\|, \tag{1}$$

где $v = z + ||y-z|| \cdot u$. Так как z, $u \in L$, заключаем, что $v \in L$. Из определения d следует, что $\|y-v\| \geq d$. Значит, учитывая (1), получаем $d(x,u) > \frac{d}{\|y-z\|}$. Отсюда с учетом неравенства $\|y-z\| < 2d$ заключаем, что

$$\rho(x,L) = \inf_{u\in L} \rho(x,u) \geq \frac{d}{\|y-z\|} > \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}\,.$$

С помощью доказанной леммы установим следующий важный факт.

Теорема. *В бесконечномерном пространстве E единичная сфера не является относительно компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $x_1 \neq \theta$ (можно считать, что $\|x_1\| = 1$). Рассмотрим одномерное векторное пространство $L_1 = \{\lambda x_1, \lambda \in \Lambda\}$, L_1 является подпространством в E. По лемме о почти перпендикуляре существует $x_2 \in E$ такое, что $\|x_2\| = 1$ и $\rho(x_2, L_1) > \frac{1}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что $\rho(x_2, x_1) > \frac{1}{2}$. Теперь рассмотрим подпространство $L_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda\}$. По лемме о почти перпендикуляре существует $x_3 \in E$ такое, что $\|x_3\| = 1$ и $\rho(x_3, L_2) > \frac{1}{2}$. Значит, $\rho(x_3, x_2) > \frac{1}{2}$ и $d(x_3, x_1) > \frac{1}{2}$. Далее рассмотрим пространство $L_3 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, где $\lambda_k \in \Lambda\}$ и так далее. По индукции строим последовательность векторов x_n на единичной сфере, $\|x_n\| = 1$ таких, что $\rho(x_k, x_j) > \frac{1}{2}$ $(k \neq j)$. Построенная последовательность x_n не содержит никакой фундаментальной подпоследовательности и лежит на единичной сфере. Теорема доказана.

3.4 Линейные ограниченные операторы в нормированном пространстве

Пусть E, F — два линейных нормированных пространства над полем Λ. Рассмотрим любое линейное отображение $A : E \to F$, т. е такое отображение, что для любых x, $y \in E$ и λ, $\mu \in \Lambda$ имеет место равенство

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Такое отображение A называется линейным оператором, действующим из E в F.

Определение. Линейный оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в любой точке $x \in E$, т. е. если для любой последовательности x_n, сходящейся к x последовательность Ax_n сходится к Ax.

Утверждение. *Линейный оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в точке $x = \theta$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что линейный оператор A непрерывен в точке $x = \theta$. покажем, что он непрерывен в произвольной точке $x \in E$. Пусть $x_n \to x$, $n \to \infty$. Тогда $x_n - x \to \theta$ и $Ax_n - Ax = A(x_n - x) \to A\theta = \theta$. Итак, $Ax_n - Ax \to \theta$, поэтому $Ax_n \to Ax$. $\square$

Пусть $A : E \to F$ — линейный оператор. Введем понятие нормы линейного оператора A.

Определение 1. *Нормой A называется число*

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{1}$$

Определение 2. *Нормой A называется число*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Определение 3. *Нормой A называется наименьшее число C такое, что для любого $x \in E$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \leq C\|x\|.$$

(Если такого числа не существует, то полагают норму $\|A\|$ равной $+|infty$).

Покажем, что определения 1–3 эквивалентны между собой.

Эквивалентность определений 1 и 2. Пусть $\|A\|$ определено равенством (1) и

$$\alpha = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Покажем, что $\|A\| = \alpha$. Пусть $x \in E$ таково, что $\|x\| = 1$. Тогда

$$\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|.$$

Значит, $\alpha = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \|A\|$. Итак, $\alpha \le \|A\|$. Теперь покажем, что $\|A\| \le \alpha$. Если $x \ne \theta$, то $y = \frac{x}{\|x\|}$ удовлетворяет условию $\|y\| = 1$. Значит, $\|Ay\| \le \alpha$ или

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha.$$

Итак, при $x \ne \theta$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha.$$

Значит,

$$\|A\| = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha.$$

Эквивалентность определений 1 и 3. Отметим, что в определении 3 неравенство $\|Ax\| \le C\|x\|$ выполняется всегда при $x = \theta$, поэтому в этом определении можно рассматривать $x \ne \theta$. Вспомним определение супремума (это — наименьшая мажоранта). Поскольку $\|A\|$ определяется в (1) как супремум, делаем вывод, что $\|A\|$ — это наименьшая константа C такая, что

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le C, \forall x \ne \theta.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству $\|Ax\| \le C\|x\|$. $x \ne \theta$. Как уже отмечалось, ограничение $x \ne \theta$ не существенно. Таким образом, получаем определение 3.

Теорема. *Линейный оператор $A : E \to F$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — непрерывный линейный оператор. Требуется доказать, что A ограничен. Предположим противное. Тогда $\|A\| = +\infty$, т. е., в силу определения 2

$$\forall n \in N \quad \exists x_n : \|x_n\| = 1, \|Ax_n\| > n.$$

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{x_n}{n}$. Тогда $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$ $y_n \to \theta$. Так как оператор A непрерывен, $Ay_n \to A\theta = \theta$. Но $Ay_n = \frac{Ax_n}{n}$ и

$$||Ay_n|| = \frac{||Ax_n||}{n} > 1 \Rightarrow ||Ay_n|| \not\to 0 \Rightarrow Ay_n \not\to \theta.$$

Получили противоречие.

Достаточность. Пусть A — Ограниченный оператор. Достаточно показать непрерывность A в точке θ. Пусть $x_n \to \theta,\ n \to \infty$. Тогда $\|x_n\| \to 0,\ n \to \infty$. Так как

$$0 \leq \|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\| \to 0,$$

делаем вывод, что $\|Ax_n\| \to 0,\ n \to \infty$. Это означает, что $Ax_n \to \theta$, $n \to \infty$. Непрерывность A в точке θ доказана. □

В силу доказанной теоремы термины «линейный непрерывный оператор» и «линейный ограниченный оператор» означают одно и то же.

3.5 Пространство линейных ограниченных операторов $L(E, F)$

Рассмотрим множество $L(E, F)$ всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. Превратим E в линейное векторном пространство над полем Λ. Для этого определим операцию суммы операторов и умножения оператора на скаляр.

Если A, B — два линейных ограниченных оператора, то их сумма

$$(A + B)x \doteqdot Ax + Bx.$$

Если $\lambda \in \Lambda$, то определим произведение A на скаляр λ:

$$(\lambda A)x \doteqdot \lambda(Ax).$$

Все аксиомы линейного векторного пространства проверяются достаточно просто. Итак, мы получили линейное векторное пространство $L(E, F)$.

В качестве нейтрального элемента берем нулевой оператор, который будем обозначать через Θ:

$$\Theta x = \theta \quad \forall x \in E.$$

Введенная ранее норма действительно является нормой в $L(E,F)$. Проверим свойства нормы:

1) Очевидно, что всегда $||A|| \geq 0$, причем $\|\Theta\| = 0$. Обратно, если $\|A\| = 0$, то $\sup\limits_{x\neq\Theta} \frac{||Ax||}{||x||} = 0$. Значит, $\forall x \neq \theta$ имеем $0 \leq \frac{||Ax||}{||x||} \leq 0 \Rightarrow ||Ax|| = 0 \Rightarrow Ax = \theta$. Поэтому $A = \Theta$.

2) Для любых $\lambda \in \Lambda$ и $A \in L(E,F)$ оператор $\lambda A \in L(E,F)$ и $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$. Действительно,

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |(\lambda| \cdot \|Ax\|) = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

3) Пусть $A,\ B \in L(E,F)$. Имеем $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$, поэтому

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \cdot\|x\|) \leq$$
$$\leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

Следовательно, оператор $A+B$ ограничен и справедливо неравенство треугольника $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$.

Теорема. *Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство. Тогда пространство линейных ограниченных операторов $L(E,F)$ также является банаховым.*

Доказательство. Пусть последовательность A_n фундаментальна в $L(E,F)$, т. е $\|A_n - A_m\| \to 0$, $n,\ m \to \infty$. Требуется доказать, что существует оператор A такой. что $A_n \to A$ в $L(E,F)$.

Для любого $x \in E$ имеем

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|,$$

поэтому $\|A_n x - A_m x\| \to 0$, $n,\ m \to \infty$. Значит, последовательность $A_n x$ фундаментальна в F. В силу полноты F последовательность $A_n x$ сходится к некоторому вектору в F. Обозначим: $Ax := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.

Ясно, что введенный таким образом оператор A является поточечным пределом линейных операторов, поэтому он линеен. Докажем, что $A_n \to A$, $n \to \infty$. Для этого фиксируем любое $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальность последовательности A_n в $L(E,F)$ заключаем, что

$$\exists N : \forall m,n \geq N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \quad \|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{при}\, n,m \geq N.$$

Устремим $m \to \infty$. Тогда $A_m x \to Ax$ для $\forall x \in E$. Поскольку $\|A_n x - A_m x\| \le \varepsilon\|x\|$, при $m \to \infty$ получаем $\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon\|x\|$. Значит, $\|(A_n - A)x\| \le \varepsilon\|x\|$. Следовательно, $A_n - A$ — ограниченный линейный оператор и $\|A_n - A\| \le \varepsilon$, $n \ge N$. Поскольку $A = A_n - (A_n - A)$, значит, A является ограниченным линейным оператором как разность двух ограниченных операторов, т. е. $A \in L(E, F)$. При этом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \ge N : \|A_n - A\| \le \varepsilon$. Это означает, что $A_n \to A$, $n \to \infty$, в $L(E, F)$.

3.6 Сопряженное пространство.

Пусть $F = \Lambda$, т.е. совпадает с полем скаляров. Норма элемента $\|x\|$ в F — это просто модуль $|x|$. Таким образом, Λ — банахово пространство.

Рассмотрим операторы, действующие из E в Λ. Они сопоставляют векторам числа. Такие операторы называются функционалами и, как правило, обозначаются строчными латинскими буквами: f, g, $h \dots$

Примеры функционалов. 1) В пространстве $C[0,1]$, состоящем из непрерывных функций $x(t)$, $0 \le t \le 1$, рассмотрим линейный функционал

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

Имеем

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \le \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|.$$

Значит, $|f(x)| \le \|x\|$ для любого x. Отсюда следует, что f — ограниченный линейный функционал и $\|f\| \le 1$. Покажем, что $\|f\| = 1$. Рассмотрим постоянную функцию $x_0(t) \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$. Тогда $\|x_0\| = 1$ и $f(x_0) = 1$. Отсюда следует, что $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \ge |f(x_0)| = 1$. Значит, $\|f\| \ge 1$, поэтому $\|f\| = 1$.

2) В пространстве $L_1(0,1)$ интегрируемых по Лебегу функций $x(t)$ на $(0,1)$ с нормой

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$$

рассмотрим линейный функционал

$$f(x) = \int_0^1 t x(t)dt.$$

Имеем

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 tx(t)dt\right| \le \int_0^1 t|x(t)dt| \le \int_0^1 |x(t)|dt = \|x\|.$$

Таким образом, $|f(x)| \le \|x\|$, поэтому $\|f\| \le 1$.

Рассмотрим $L(E, \Lambda)$ — пространство линейных ограниченных функционалов на E. Оно называется пространством, сопряженным к E, и обозначается E^*.

Можно рассмотреть пространство $(E^*)^* \supset E$, сопряженное к E^*. Оно называется вторым сопряженным к E и обозначается E^{**}. Если $E = E^{**}$, то пространство E называется рефлексивным.

Теорема. *Для любого нормированного пространства E, пространство E^* –банахово.*

Это следует из того, что Λ — полное нормированное пространство и предыдущей теоремы.

3.7 Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства.

Рассмотрим произвольное нормированное пространство E. Сопряженное к нему E^* является банаховым. Можно рассмотреть пространство, сопряженное к E^*. Оно называется вторым сопряженным пространством и обозначается E^{**}. Покажем, что пространство E естественно вкладывается во второе сопряженное E^{**}, т.е. можно считать, что $E \subset E^{**}$.

Рассмотрим любой элемент $x \in E$. Определим теперь соответствующий ему функционал ψ_x на пространстве E^*:

$$\psi_x : E^* \to \Lambda$$

по формуле

$$\psi_x(f) = f(x).$$

Замечание. Смысл этого функционала простой. Мы привыкли, что $f(x)$ — это результат действия функции (функционала) f на точку x. Однако для вычисления $f(x)$ требуется два объекта: функция f и точка x.

Если f фиксировано и меняются точки x, то это означает, что функционал f действует на точки пространства E. Если же мы фиксируем точку x и меняем функционалы f, то получаем, что точка x действует на функционалы и таким образом определяет функционал ψ_x на пространстве функционалов.

Докажем, что функционал ψ_x является линейным ограниченным на E^* и его норма $\|\psi_x\| = \|x\|$. Линейность ψ_x практически очевидна:

$$\psi_x(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x) = \alpha_1\psi_x(f_1)+\alpha_2\psi_x(f_2).$$

Оценим норму ψ_x. Имеем $|\psi_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|\,\|x\|$. Из этого неравенства следует, что существуют константы C такие, что $|\psi_x(f)| \le C\,\|f\|$. Одной из таких констант является $\|x\|$, а наименьшей — норма $\|\psi_x\|$. Таким образом, $\|\psi_x\| \le \|x\|$.

Покажем, что на самом деле $\|\psi_x\| = \|x\|$. По следствию из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f \in E^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Следовательно, $\psi_x(f) = \|x\|$ и $\|\psi_x\| = \sup_{\|g\|=1}|\psi_x(g)| \ge \|x\|$. Итак, $\|\psi_x\| \ge \|x\|$, откуда $|\psi_x(f)| = \|x\|$.

Таким образом, доказана

Теорема. *Любой нормированное пространство E изометрически вкладывается в свое второе сопряженное E^{**}. Это вложение осуществляется следующим образом: любому элементу $x \in E$ сопоставляется элемент $\psi_x \in E^{**}$, действующий по правилу*

$$\psi_x(f) = f(x), \quad f \in E^*.$$

Норма этого функционала ψ_x во втором сопряженном пространстве совпадает с нормой x в пространстве E.

Нормированное пространство называется рефлексивным, если оно совпадает со своим вторым сопряженным: $E = E^{**}$. Примеры рефлексивных пространств: l_p, $1 < p < \infty$, $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, гильбертовы пространства. Пространства l_1, l_∞, $L_1(a,b), L_\infty(a,b)$ не являются рефлексивными.

4 Обратимые операторы. Теоремы Банаха. Принцип равномерной ограниченности

4.1 Ряды в банаховых пространствах

Пусть E — некоторое нормированное пространство. *Рядом* в E называется формальная сумма

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \ldots,$$

где $x_n \in F$, $n \geq 1$. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \in E$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = x$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится и его сумма равна x, т. е. $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Теорема. *Пусть E — банахово пространство, тогда любой абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n \geq m \geq N \quad \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|\sum\limits_{k=m}^{n} x_k\| \leq \sum\limits_{k=m}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$ при $n \geq m \geq N$. Но $\|\sum\limits_{k=m}^{n} x_k\| = \|S_n - S_{m-1}\|$ поэтому получаем, что последовательность S_n фундаментальна. Поскольку E полно, сущесвтует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в E $\square$.

4.2 Операции над множествами в линейных пространствах

Пусть $M \subset E$, $\alpha \in \Lambda$. Определим произведение множества на скаляр:

$$\alpha M := \{\alpha x \mid x \in M\}.$$

Определим также операцию суммы двух множеств. Если M, $N \subset E$, то

$$M + N := \{x + y \mid x \in M, y \in N\}.$$

Примеры. 1) Для шара $B(x,r)$ имеем $\alpha \cdot B(x,r) = B(\alpha x, |\alpha| r)$.

2) Справедливо включение $B(y,\delta) + B(-y,\delta) \supset B(\theta,\delta)$.

Доказательство: Пусть $x \in B(\theta,\delta)$. Тогда $\|x\| < \delta$, и $x = (y+x) + (-y) \in B(y,\delta) + B(-y,\delta)$, поскольку $y + x \in B(y,\delta)$ и $(-y) \in B(-y,\delta)$. $\square$.

Определение. Множество $M \subset E$ называется выпуклым, если для любых x, $y \in M$ имеем $tx + (1-t)y \in M, \quad 0 \leq t \leq 1$.

Свойство. *Любой шар $B(x,r)$ — выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть y, $z \in B(x,r)$. Рассмотрим элемент $ty+(1-t)z$. Поскольку $\|y-x\| < r$ и $\|z-x\| \leq r$, получаем

$$\|ty+(1-t)z-x\| = \|t(y-x)+(1-t)(z-x)\| \leq \|t(y-x)\|+\|(1-t)(z-x)\| < tr+(1-t)r = r.$$

Следовательно, $ty + (1-t)z \in B(x,r)$, $t \in [0,1]$.

Лемма 1. *Если $A : E \to F$ — линейный оператор и $M \subset E$ — выпуклое множество, то его образ AM является выпуклым.*

Лемма 2. *Если M — выпуклое в E множество, то $\mathcal{M} = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M$.*

Доказательство. Справедливо включение $M \subset \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M$, поскольку для любого $x \in M$ имеем $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$. Установим обратное включение $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M \subset M$. Для любых x, $y \in M$ имеем $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in M$ в силу выпуклости M.$\square$

Определение. Пусть P, $M \subset E$. Множество P называется плотным в M, если $\overline{P} \supset M$.

Лемма 3. 1) *Если P плотно в M, то αP плотно в αM для любого $\alpha \in \Lambda$.*

2) *Если P_1 плотно в M_1, P_2 плотно в M_2, то $P_1 + P_2$ плотно в $M_1 + M_2$.*

Доказательство почти очевидно.

4.3 Произведение операторов

Рассмотрим три линейных нормированных пространства E, F и G над полем Λ. Пусть $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$. Определим их произведение BA как суперпозицию $B \circ A$.

Теорема 1. *Если $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$, то их произведение BA принадлежит пространству $L(E,G)$. При этом,*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

Доказательство. Действительно, для любого $x \in E$

$$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

Теорема 2. *Если $A_n, A : E \to F; B_n, B : F \to G$–линейные ограниченные операторы. Если $A_n \to A$ в $L(E,F)$, $\quad B_n \to B$ в $L(F,G)$, то* $B_nA_n \to BA$ в $L(E,G)$.

Доказательство. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|B_nA_n - BA\| = \|(B_nA_n - BA_n) + (BA_n - BA)\| \leq$$

$$\leq \|(B_n - B)A_n\| + \|B(A_n - A)\| \leq \|B_n - B\| \cdot \|A_n\| + \|B\| \cdot \|A_n - A\|.$$

Поскольку $A_n \to A$, заключаем, что $\|A_n\| \to \|A\|$, поэтому последовательность $\|A_n\|$ ограничена и из того, что $\|A_n - A\| \to 0$, $\|B_n - B\| \to 0$ следует, что правая часть неравенство (*) стремится к нулю. Отсюда следует, что и левая часть $\|B_nA_n - BA\|$ стремится к нулю. поэтому $B_nA_n \to BA$. $\square$.

4.4 Теорема Банаха об обратном операторе

Перед формулировкой теоремы Банаха сделаем два замечания по поводу линейных ограниченных операторов.

1) Линейный оператор $A : E \to F$ ограничен, если существует $\delta > 0$ такое, что $\sup\limits_{\|x\|=\delta} \|Ax\| < +\infty$.

2) Справедливы равенства

$$\sup_{\|x\|=\delta} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq\delta} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<\delta} \|Ax\|.$$

Напомним, что ядром линейного оператора $A : E \to F$ называется множество

$$\operatorname{Ker} A := \{x \in E \mid Ax = \theta\}.$$

Оператор A инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Установим достаточность. Пусть $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$ и $Ax = Ay$. Тогда $Ax - Ay = \theta \Rightarrow A(x - y) = \theta \Rightarrow x - y = \theta \Rightarrow x = y$. $\square$.

Теорема (Банах). *Пусть E, F — банаховы пространства. Если $A : E \to F$ — линейный ограниченный оператор и выполняются условия:*

1) $AE = F$ (*т. е. A сюрьективно*),

2) $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$ (*т. е. A инъективно*),

то существует обратный оператор $A^{-1} : F \to E$, который является линейный ограниченным оператором, т. е. $A^{-1} \subset L(E, F)$.

Доказательство. Обозначим

$$T = \{x \in E : \|x\| < 1\}, \quad \widetilde{T} := \{y \in F : \|y\| < 1\}.$$

Это — единичные шары в E и F.

Имеем $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nT$. В силу линейности оператора A получаем

$$AE = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nT) = F \Rightarrow F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(AT).$$

Теорема Бэра утверждает, что полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. В силу этой теоремы существует $n \in N$ такое, что множество $n \cdot AT$ плотно в некотором шаре $B(y, r)$ По лемме 3 множество AT плотно в шаре $B(\frac{y}{n}, \frac{r}{n})$.

Множество T выпукло, поэтому по лемме 1 множество AT выпукло. По лемме 2 имеем

$$AT = \frac{1}{2}AT + \frac{1}{2}AT = \frac{1}{2}AT + \left(-\frac{1}{2}\right)AT$$

Используя лемму 3, заключаем, что множество $\frac{1}{2}AT$ плотно в шаре $B(\frac{y}{2n}, \frac{r}{2n})$, множество $(-\frac{1}{2})AT$ плотно в шаре $B(-\frac{y}{2n}, \frac{r}{2n})$, поэтому AT плотно в множестве

$$B(\frac{y}{2n}, \frac{r}{2n}) + B(-\frac{y}{2n}, \frac{r}{2n}) \supset B(\theta, \frac{r}{2n}).$$

Итак, AT плотно в $B(\theta, \delta) = \delta \cdot \widetilde{T}$, где $\delta = \frac{r}{2n}$.

Так как оператор A сюрьективен и инъективен, A — биекция, поэтому $\exists A^{-1}$, который является линейным оператором. действующим из F в E. Докажем, что

$$\sup_{\|y\|<\delta} \|A^{-1}y\| \leq 2.$$

Рассмотрим произвольное y из F такое, что $\|y\| < \delta$. Тогда $y \in \delta \cdot T$. Так как AT плотно в $\delta \cdot \widetilde{T}$, то

$$\exists y_1 \in AT : \|y - y_1\| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow y - y_1 \in \frac{\delta}{2} \cdot T.$$

Поскольку $y_1 \in AT$, существует $x_1 \in T$ такое, что $y = Ax_1$.

Поскольку $y - y_1 \in \frac{\delta}{2} \cdot T$ и $\frac{1}{2}AT$ плотно в $\frac{\delta}{2} \cdot T$, существует $y_2 \in \frac{1}{2}AT$ такое, что $\|y - y_1 - y_2\| < \frac{\delta}{4}$. При этом, $y_2 = Ax_2$, $x_2 \in \frac{1}{2}T)$.

Аналогично, существует $y_3 \in \frac{1}{4}AT$, такое, что $y_3 = Ax_3$, где $x_3 \in \frac{1}{4}T$ и $\|y - y_1 - y_2 - y_3\| < \frac{\delta}{8}$. По индукции строим последовательность $y_n = Ax_n$, обладающая свойствами:

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| < \frac{\delta}{2^n}, \quad x_n \in \frac{1}{2^{n-1}} T, \text{ т. е.} \|x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \to y$, т. е. $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Поскольку E полно, абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится. Обозначим $x := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Поскольку $A \in L(E, F)$, оператор A непрерывен. В силу непрерывности A получаем

$$Ax = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \Rightarrow x = A^{-1}y.$$

Итак,

$$\forall y : \|y\| < \delta \quad \exists x = A^{-1}y : \|x\| \leq 2.$$

Таким образом.

$$\sup_{\|y\|<\delta} \|A^{-1}y\| < +\infty.$$

Отсюда следует, что оператор A^{-1} ограничен.

4.5 «Малая» теорема Банаха.

Рассмотрим случай, когда $F = E$. В этом случае будем для краткости писать вместо $L(E, E)$ просто $L(E)$. Таким образом, $L(E)$ — пространство линейных ограниченных операторов $A : E \to E$.

Теорема («малая» теорема Банаха). *Пусть E — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор в E такой. что $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ обратим, т. е. $I - A$ имеет ограниченный линейный обратный оператор $(I - A)^{-1}$. Более того, этот оператор представим в виде ряда*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots,$$

который сходится абсолютно в $L(E)$.

Доказательство. Из теоремы о произведении операторов ($\|BA\| < \|B\| \cdot \|A\|$) следует, что

$$\|A^2\| = \|A\| \cdot \|A\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2.$$

Аналогично получаем, что $\|A^3\| \leq \|A\|^3$, $\|A^4\| \leq \|A\|^4, \dots, \|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Из этих оценок следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} < +\infty.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится абсолютно. Так как E — банахово пространство, $L(E)$ тоже банахово, поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится в $L(E)$. Обозначим

$$B := I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots \in L(E).$$

Пусть $B_n := I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ — частичная сумма ряда. Тогда

$$(I-A)B_n = B_n - AB_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} - A - A^2 - A^3 - \cdots - A^n = I - A^n.$$

При $n \to \infty$ последовательность $B_n \to B$ в $L(E)$. При этом, $\|A^n\| \le \|A\|^n \to 0$, $n \to \infty$, т.к $\|A\| < 1$. Значит, $\|A^n\| \to 0$ и $A^n \to \Theta$. В силу теоремы о непрерывности произведения операторов $(I-A)B_n \to (I-A)B$, $n \to \infty$. С другой стороны, $(I-A)B_n = I - A^n \to I$, поэтому $(I-A)B = I$.

Аналогично доказываем, что $B(I-A) = I$. По «большой» теореме Банаха оператор $I - A$ обратим и $(I-A)^{-1} = B \in L(E)\square$.

4.6 Множество обратимых операторов в пространстве всех ограниченных операторов

Рассмотрим банахово пространство E и его подмножество $\mathcal{G}$, состоящее из обратимых операторов.

Теорема 1. *Множество $\mathcal{G}$ обратимых операторов открыто в $L(E)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{G}$, т.е. A обратим. Требуется доказать, что существует $r > 0$ такое, что шар $B(A, r) \subset \mathcal{G}$. В качестве r возьмем любое положительное число, меньшее $1/\|A^{-1}\|$.

Пусть $C \in B(A, r)$. Тогда $C = A - B$, где $\|B\| < r$. Имеем $C = A(I - A^{-1}B)$. При этом,

$$\|A^{-1}B\| \le \|A^{-1}\| \, \|B\| < r\|A^{-1}\| < 1.$$

По «малой» теореме Банаха оператор $I - A^{-1}B$ обратим. Значит, оператор C обратим как произведение обратимых операторов A и $I - A^{-1}B$. Таким образом, $C \in G$, и мы доказали, что $B(A, r) \subset \mathcal{G}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть A — обратимый оператор в $L(E)$ и последовательность A_n сходится к A в $L(E)$. Тогда начиная с некоторого номера все операторы A_n обратимы и $A_n^{-1} \to A^{-1}$, $n \to \infty$.*

Доказательство. То, что начиная с некоторого номера операторы A_n обратимы, следует сразу из теоремы 1. Установим, что $A_n^{-1} \to A^{-1}$, $n \to \infty$.

Пусть $B_n = A - A_n$. Тогда $B_n \to \Theta$, $n \to \infty$. Следовательно, существует номер N такой, что

$$\|B_n\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}, \quad n \geq N.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что операторы A_n обратимы при $n \geq N$ и

$$A_n^{-1} = (A - B_n)^{-1} = [A(I - A^{-1}B_n)]^{-1} = (I - A^{-1}B_n)^{-1}A^{-1}.$$

При этом, в силу «малой» теоремы Банаха

$$\|I - A^{-1}B_n\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}B_n\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B_n\|} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Следовательно,

$$\|A_n^{-1}\| \leq \|I - A^{-1}B_n\|\,\|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|.$$

Тогда

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| = \|A_n^{-1}(A - A_n)A^{-1}\| \leq$$
$$\leq \|A_n^{-1}\|\,\|A - A_n\|\,\|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2\,\|A - A_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $A_n^{-1} \to A^{-1}$, $n \to \infty$, и теорема 2 доказана.

4.7 Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема Банаха-Штейгауза или принцип равномерной ограниченности играет важную роль в функциональном анализе и его приложениях.

Теорема (Банах-Штейнгауз). *Пусть E — банахово пространства, F — линейное нормированное пространство и $\mathcal{A}$ — некоторой семейство операторов из $L(E, F)$. Если для любого элемента $x \in E$*

множество $\{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ *ограничено в* F, *то существует константа* $C \leq 0$ *такая, что* $\|A\| \leq C$, $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Для любого натурального n пусть

$$X_n = \{x \in E \mid \|Ax\| \leq n \text{ для любого } A \in \mathcal{A}\}.$$

Отметим, что множества X_n замкнуты и выпуклы в E, причем $X_n = -X_n$. Действительно, если $x_m \to x$, $m \to \infty$, и $x_m \in X_n$, то для любого $A \in \mathcal{A}$ имеем $\|Ax_m\| \leq n$, $m \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ и пользуясь непрерывностью операторов A и нормы, получаем $\|Ax\| = \lim_{m\to\infty} \|Ax_m\| \leq n$, $A \in \mathcal{A}$. Значит, $x \in X_n$, откуда следует, что X_n замкнуто. Теперь установим выпуклость X_n. Пусть x, $y \in X_n$, $t \in [0;1]$. Тогда

$$\|A(tx+(1-t)y)\| = \|tAx+(1-t)Ay\| \leq t\|Ax\|+(1-t)\|Ay\| \leq tn+(1-t)n = n,$$

откуда следует, что $tx + (1-t)y \in X_n$. Это означает выпуклость X_n. Равенство $X_n = -X_n$. очевидно.

Докажем, что для любого $x \in E$ существует n такое, что $x \in X_n$. Действительно, по условию теоремы множество $\{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ ограничено, т. е. существует $M > 0$ такое, что $\|Ax\| \leq M$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Тогда для любого $n \geq M$ имеем $x \in X_n$.

Из доказанного следует, что полное пространство E представимо в виде $E = \cup n = 1^{\infty} X_n$. По теореме Бэра существует n такое, что X_n плотно в некотором шаре $B(x_0, r)$. Поскольку X_n замкнуто, заключаем, что $B(x_0, r) \subset X_n$. Так как $X_n = -X_n$, имеем $B(x_0, r) \subset -X_n$, поэтому $B(-x_0, r) = -B(x_0, r) \subset X_n$. Отсюда и из выпуклости X_n следует, что

$$\frac{1}{2}\,B(\theta, r) \subset \frac{1}{2}\,B(x_0, r) + \frac{1}{2}\,B(-x_0, r) \subset \frac{1}{2}\,X_n + \frac{1}{2}\,X_n = X_n.$$

Итак, установлено, что $\frac{1}{2}\,B(\theta, r) \subset X_n$. Отсюда получаем $B(\theta, 1) \subset \frac{2}{r}\,X_n$, т. е. для любого x такого, что $\|x\| \leq 1$ и для любого $A \in \mathcal{A}$

$$\|Ax\| \leq \frac{2n}{r}\,.$$

Значит, $\|A\| \leq \frac{2n}{r}$ и в качестве C можно взять $\frac{2n}{r}$. Теорема доказана.

5 Вполне непрерывные операторы

5.1 Определение и простейшие свойства вполне непрерывных операторов. Примеры

Пусть $A : E \to F$ — линейный оператор. Оператор A ограничен, если $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\| < +\infty$. Это условие эквивалентно следующему: оператор A переводит единичный шар $\{\|x\| \leq 1\}$ в ограниченное множество.

Лемма. *Линейный оператор $A : E \to F$ является ограниченным тогда и только тогда. когда A переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество.*

Доказательство. Пусть оператор A ограничен, т. е. $\|A\| < +\infty$. Это означает, что образ шара $B(\theta, 1)$ в пространстве E содержится в шаре $B(\theta, \|A\|)$ в пространстве F: $A(B(\theta, 1)) \subset B(\theta, \|A\|)$.

Пусть M —ограниченное множество в E. Тогда существует $r > 0$ такое, что $M \subset B(\theta, r)$. Отсюда следует, что

$$AM \subset A(B(\theta, r)) = A(r \cdot B(\theta, 1)) \subset rA(B(\theta, 1) \subset rB(\theta, \|A\|) = B(\theta, r\|A\|).$$

Таким образом, AM ограничено.

Обратно, пусть A переводит любое ограниченное множество в ограниченное. Тогда. в частности, образ шара $B(\theta, 1)$ ограничен и поэтому $\|A\| < +\infty$.$\square$

Определение. Линейный оператор $A : E \to F$ называется вполне непрерывным, если A переводит любое ограниченное множество в относительно компактное.

Примеры. 1) Если E — произвольное, а F — конечномерное пространства, то любой линейный ограниченный оператор является вполне непрерывным. Действительно, если M — ограниченное множество в E, A — линейный ограниченный оператор, то AM — ограниченное множество в конечномерном пространстве F. Но в конечномерном пространстве любое ограниченное множество относительно компактно.

2) Пусть E — бесконечномерное нормированное пространство. Пусть I — единичный оператор в E: $Ix = x$ $\forall x \in E$. Пусть $S =$

$\{x \in E | \|x\| = 1\}$, это — ограниченное множество. Оператор $I \in L(E)$ и $IS = S$. Таким образом, оператор I переводит ограниченное множество S в не относительно компактное множество. Значит, единичный оператор в бесконечномерном пространстве не является вполне непрерывным.

3) Рассмотрим пространство последовательностей l_2, состоящее из числовых последовательностей: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty.$$

Рассмотрим в l_2 оператор A, который ставит в соответствие элементу $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ элемент

$$Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots \right).$$

Имеем

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{2^{2n}} \le \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2.$$

Значит, $\|Ax\| = \frac{1}{2}\|x\| \ \forall x \in l_2$. Отсюда следует, что $\|A\| \le \frac{1}{2}$. (На самом деле, $\|A\| = \frac{1}{2}$.)

Докажем вполне непрерывность оператора A, т.е. что для любого ограниченного множества M, множество AM является относительно компактным. Достаточно установить, что для шара $M = \{\|x\| \le 1\}$ множество AM — относительно компактно. В силу критерия Хаусдорфа достаточно установить, что оно вполне ограничено, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть этого множества.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $n \in N$, такое, что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Рассмотрим множество N последовательностей

$$\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, 0, 0, 0, \dots \right), \tag{$*$}$$

таких, что $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < 1$. Оно лежит в n–мерном подпространстве пространства l_2. При этом, норма элемента (*) равна

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2^{2k}}} \le \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \le \frac{1}{2}.$$

Таким образом, это множество ограничено и лежит в конечномерном подпространстве пространства l_2. Значит, оно относительно компактно. т. е. вполне ограничено. Поэтому существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть C этого множества. Пусть $y \in AM$. Тогда для некоторого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ из единичного шара M имеем $y = Ax$, т.е.

$$y = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots\right).$$

Рассмотрим

$$\widetilde{y} = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, 0, 0, \ldots\right).$$

Ясно, что $\widetilde{y} \in N$. Для этого элемента существует z из $\frac{\varepsilon}{2}$-сети C такой, что $\|z - \widetilde{y}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда

$$\|z-y\| \leq \|z-\widetilde{y}\|+\|\widetilde{y}-y\| < \frac{\varepsilon}{2}+\|\widetilde{y}-y\| = \frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k^2}{2^{2k}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Это означает, что конечное множество C является ε-сетью множества AM.

Таким образом, оператор A вполне непрерывен.

5.2 Свойства вполне непрерывных операторов

Теорема 1. *Любой вполне непрерывный оператор $A : E \to F$ является ограниченным.*

Доказательство. Если множество не ограничено в F, то оно не относительно компактно. □

Теорема 2. *Множество вполне непрерывных операторов в $L(E, F)$ образует линеал.*

Доказательство. Пусть A, B — вполне непрерывные операторы. Докажем, что $A+B$ — вполне непрерывный оператор. Рассмотрим любую ограниченную последовательность $x_n \in E$ и её образ — Ax_n. Оператор A вполне непрерывен, поэтому существует последовательность $x_n^{(1)}$ такая, что последовательность $Ax_n^{(1)}$ фундаментальна в F. Рассмотрим последовательность $Bx_n^{(1)}$. Оператор B вполне непрерывен, $x_n^{(1)}$ — ограниченная последовательность, поэтому существует подпоследовательность $x_n^{(2)}$

последовательности $x_n^{(1)}$ такая, что $Bx_n^{(2)}$ фундаментальна в F. Теперь рассмотрим $(A+B)x_n^{(2)} = Ax_n^{(2)} + Bx_n^{(2)}$. Ясно. что $(A+B)x_n^{(2)}$ — фундаментальная последоватлеьность как сумма двух фундаментальных

Теперь докажем, что умножение на скаляр не выводит за класс вполне непрерывных операторов. Пусть λ — некоторый скаляр из поля Λ, A — вполне непрерывный оператор. Если x_n ограничена, то существует подпоследовательность $x_n^{(1)}$ такая, что последовательность $Ax_n^{(1)}$ фундаментальна. Тогда и последоватлеьность $(\lambda A)x_n^{(1)} = \lambda(Ax_n^{(1)})$ фундаментальна. Таким образом, множество вполне непрерывных операторов— это линеал.

Теорема 3. *Множество вполне непрерывных операторов — подпространство в* $L(E,F)$.

Доказательство. В теореме 2 доказано, что это множество является линеалом. Докажем его топологическую замкнутость. Пусть A_n — последовательность вполне непрерывных операторов и $A_n \to A$ в $L(E,F)$. Пусть x_n — некоторая ограниченная последовательность в E. Тогда существует $\exists M > 0$ такое, что $\|x_n\| \leq M$. Оператор A_1 вполне непрерывен, поэтому существует подпоследовательность $x_n^{(1)}$ последовательности и x_n такая, что последовательность $A_1 x_n^{(1)}$ фундаментальна в F. Оператор A_2 вполне непрерывен оператор, поэтому существует подпоследовательность $x_n^{(2)}$ последовательности $x_n^{(1)}$ такая. что последовательность $A_2 x_n^{(2)}$ фундаментальна в F. По индукции для любого $k \geq 2$ строим подпоследовательность $x_n^{(k)}$ последовательности $x_n^{(k-1)}$ такую, что последовательность $A_k x_n^{(k)}$ фундаментальна в F. Рассмотрим диагональную последовательность $x_n^{(n)}$. Она является подпоследовательностью последовательности x_n. Для любого k оследовательность $A_k x_n^{(n)}$ фундаментальна в F.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. По предположению, $A_k \to A, k \to \infty$, поэтому существует k такое, что $\|A_k - A\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Последовательность $A_k x_n^{(n)}$ фундаментальна, значит, существует

$$\exists N: \ \forall n, m \geq N \quad \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Пусть $n,\ m \geq N$, тогда

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| +$$

$$+\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| + \|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \tag{2}$$

Оценим слагаемые в правой части последнего неравенства. Имеем

$$\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\| = \|(A - A_k)x_n^{(n)}\| \le \|A - A_k\| \cdot \|x_n^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично доказываем, что $\|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|$. В силу (1) имеем $\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Значит, в силу (2)

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при n, $m \ge N$. Это означает, что последовательность $Ax_n^{(n)}$ фундаментальна. Таким образом, A — вполне непрерывный оператор.□

Теорема 4. *Пусть $A : E \to F$ и $B : F \to G$ — два линейных оператора. Если один из этих операторов ограничен,а другой вполне непрерывен, то их произведение BA — вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. 1) Пусть A — ограниченный, а B — вполне непрерывный операторы. Если последовательность x_n ограничена в E, то Ax_n — ограниченная последовательность в F и в силу вполне непрерывности B существует фундаментальная подпоследовательность последовательности $B(Ax_n) = (BA)x_n$.

2) Теперь рассмотирм случай, когда A — вполне непрерывный, а B — ограниченный операторы. Если последовательность x_n ограничена в E то в силу вполне непрерывности A существует подпоследовательность $x_n^{(1)}$ последовательности x_n такая, что последовательность $A_n^{(1)}$ фундаментальна. Тогда в силу ограниченности B заключаем, что последовательность $B(Ax_n^{(1)})$ фундаментальна. □

Следствие. *Множество вполне непрерывных операторов — это двустронний идеал в пространстве $L(E)$.*

Примеры. 1) Оператор $A : E \to F$ называется конечномерным, если AE — конечномерное подпространство в F. Любой конечномерный линейный ограниченный оператор является вполне непрерывным.

2) Рассмотрим пространство l_2 — пространство последовательностей

$$x = (x_1, ..., x_n, ...) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$ — ограниченная последовательность, т. е. $\widetilde{\alpha} = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n| < +\infty$. Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$, определяемый равенством

$$Ax = (\alpha_1 x_1, ..., \alpha_n x_n, ...).$$

Покажем ограниченность оператора A. Для любого $x \in l_2$ имеем

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n x_n)^2} = \sqrt{\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 x_n^2} \leq \widetilde{\alpha} \cdot \sqrt{\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} x_n^2} = \widetilde{\alpha} \cdot \|x\|.$$

Таким образом, $\|Ax\| \leq \widetilde{\alpha}\|x\|$, откуда следует, что A ограничен в $L(l_2)$ и $\|A\| \leq \widetilde{\alpha}$.

Покажем, что если $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, то A — вполне непрерывный оператор. Рассмотирм оператор

$$A_n = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 ..., \alpha_n x_n, 0, 0, 0...).$$

Он является линейным ограниченным оператором. Более того, A_n — вполне непрерывный оператор, потому что он конечномерный. Покажем, что $A_n \to A$, $n \to \infty$. Рассмотрим оператор

$$A - A_n = (0, 0, ..., 0, \alpha_{n+1} x_{n+1}, ..., \alpha_{n+2} x_{n+2}, ...).$$

Тогда в силу доказанной выше оценки для норм такого рода операторов имеем

$$\|A - A_n\| \leq \sup_{k>n} |\alpha_k|.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |\alpha_k| = \overline{\lim}_{n\to\infty} |\alpha_n| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0.$$

Значит, $A_n \to A$, $n \to \infty$. Применяя теорему 4, заключаем, что оператор A вполне непрерывен.

3) Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

в пространстве $C[a, b]$. При этом считаем,что ядро $K \in C([a, b]^2)$. Поскольку K непрерывно на компактном множестве $[a, b]^2$, по теореме Вейерштрасса существуе тконстанта M такая, что $|K(x, y)| \leq M$ для любых

x, $y \in [a,b]$. Тогда

$$|Af(x)| = |\int_a^b K(x,y)f(y)dy| \leq \int_a^b |K(x,y)| \cdot |f(y)|dy \leq M(b-a)\|f\|.$$

Беря супремум в левой части этого неравенства, заключаем, что A — ограниченный оператор и $\|A\| \leq M(b-a)$.

Докажем вполне непрерывность оператора A. Пусть $\mathcal{F}$ — ограниченное множество в $C[a,b]$. Покажем, что $A\mathcal{F}$ — относительно компактно в $C[a,b]$. Так как $\mathcal{F}$ — ограниченное множество и оператор A ограничен. делаем вывод, что $A\mathcal{F}$ — ограниченное множество.

Установим равностепенную непрерывность $A\mathcal{F}$. Пусть $\|f\| \leq C$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$Af(x_1) - Af(x_2) = \int_a^b K(x_1,y)f(y)dy - \int_a^b K(x_2,y)f(y)dy =$$

$$= \int_a^b (K(x_1,y) - K(x_2,y))f(y)dy.$$

Так как функция K непрерывна на компактном множестве, она равномерно непрерывна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad \forall y \in [a,b] \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)C}.$$

Тогда, если $|x_1 - x_2| < \delta$, то

$$|Af(x_1) - Af(x_2)| \leq \int_a^b (K(x_1,y) - K(x_2,y))f(y)dy < \varepsilon.$$

Таким образом, $A\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно. По теореме Арцела-Асколи $A\mathcal{F}$ относительно компактно. Это доказывает вполне непрерывность оператора A. Итак, доказана

Теорема. *Если $K(x,y)$ — непрерывная функция на $[a,b]^2$, то интегральный оператор*

$$Af(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

является вполне непрерывным в пространстве $C[a,b]$.

Замечание. Можно показать, что на самом деле теорема верна на только для непрерывных ядер, но и в несколько более общем случае. Можно требовать, чтобы ядро было ограничено в квадрате $[a, b]^2$ и непрерывно в нем за исключением конечного числа кривых, которые являются графиками непрерывных функций $y = \varphi_k(x)$, $a \leq x \leq b$. Такие ядра называются регулярными.

6 Пространства, сопряженные к $L_p(E)$, $p \geq 1$

6.1 Подготовительная лемма

Пусть E — множество конечной меры, $f : L_p(E) \to \mathbb{R}$ $(p \geq 1)$ – линейный непрерывный функционал. Рассмотрим характеристическую функцию измеримого множества A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Очевидно, что $|\chi_A(x)| \leq 1$, поэтому $\chi_A \in L_\infty(E) \subset L_p(E)$. Следовательно. определена функция $\nu(A) := f(\chi_A)$.

Лемма. *Функция $\nu(A) = f(\chi_A)$ является зарядом, абсолютно непрерывным относительно меры μ.*

Доказательство. 1) Докажем σ-аддитивность ν. Пусть $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A и A_k измеримы. Требуется доказать, что $\nu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$. очевидно, что $chi_A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}$. Это равенство справедливо поточечно, т.е .ядля любого x. покажем, что оно справедливо в смысле сходимости в $L_p(E)$.

Имеем $\|\chi_A\|_{L_p} = (\int_E \chi_A^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\mu(A))^{\frac{1}{p}} = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k))^{\frac{1}{p}}$,

$$\|\chi_A - \sum_{k=1}^{N} \chi_{A_k}\|_{L_p} = \|\sum_{k=N+1}^{\infty} \chi_{A_k}\|_{L_p} = \|\chi_{\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k}\|_{L_p} = (\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(A_k))^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

$N \to \infty$, следовательно,

$$\|\chi_A - \sum_{k=1}^{N} \chi_{A_k}\|_{L_p} \to 0.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{k=1}^{N}\chi_{A_k}$ сходится к χ_A в $L_p(E)$. В силу непрерывности функционала f отсюда следует, что

$$\nu(A) = f(\chi_A) = f(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty}f(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k) \Rightarrow \nu(A).$$

Таким образом, ν — σ-аддитивня функция множества, т. е. заряд.

2) Теперь установим, что ν абсолютно непрерывен относительно меры μ. Пусть $\mu(A) = 0$. Тогда A — нуль-множество по Лебегу и $\chi_{_A} = 0$ почти всюду. Поэтому $\chi_{_A} \sim 0$ и $\nu(A) = f(\chi_{_A}) = f(\theta) = 0.\square$

По теореме Радона-Никодима существует интегрируемая функция φ: такая что

$$\nu(A) = \int_A \varphi d\mu.$$

Лемма. *Пусть $g \in L_p(E)$. Если произведение $g\varphi$ интегрируема на E, т.е. $g\varphi \in L_1(E)$, то*

$$f(g) = \int_E (g \cdot \varphi) d\mu.$$

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда g — ступенчатая функция из $L_p(E)$, т.е. $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \cdot \chi_{E_k}$, где E_k измеримы и $E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Функция $g \in L_p(E)$, и

$$|g|^p = \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\chi_{E_k}, \quad \int_E |g|^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\mu(E_k) < +\infty,$$

Далее,

$$g - \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot \chi_{E_k} = \sum_{k=N+1}^{\infty} y_k \cdot \chi_{E_k}. \quad \|g - \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot \chi_{E_k}\| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k|^p \cdot \mu(E_k) \to 0, N \to \infty,$$

как остаток сходящегося ряда.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \cdot \chi_{E_k}$ сходится в $L_p(E)$ к g. Тогда, используя непрерывность f, получаем

$$f(g) = f(\sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \nu(E_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \int_{E_k} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (g\varphi) d\mu = \int_{E_k} (g\varphi) d\mu.$$

Итак, мы доказали, что $f(g) = \int_E g \cdot \varphi d\mu$.

2) Теперь рассмотрим случай, когда g — произвольная функция из $L_p(E) \subset L_1(E)$. Существует последовательность $g_n \in L_1(E)$ такая, что g_n равномерно сходится к g, $n \to \infty$, т. е. $\sup |g_n - g| \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $g_n - g \in L_\infty(E)$ и $\|g_n - g\|_\infty \to 0$. Так как $L_\infty(E) \subset L_p(E)$, получаем, что $g_n - g \in L_p(E)$ и

$$\|g_n - g\|_p \le C \cdot \|g_n - g\|_\infty, \quad C = (\mu(E))^{\frac{1}{p}}. \tag{$*$}$$

Так как $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, то из (*) следует, что $\|g_n - g\|_p \to 0$.

Мы видим, что $g_n = (g_n - g) + g \in L_p(E)$ и $g_n \to g$ в $L_p(E)$. Из доказанного в 1) следует, что

$$f(g_n) = \int_E (g_n \varphi) d\mu.$$

Далее,

$$\left| \int_E (g_n \varphi) d\mu - \int_E (g\varphi) d\mu \right| = \left| \int_E (g_n - g)\varphi d\mu \right| \le$$
$$\le \int_E |g_n - g| \cdot |\varphi| d\mu \le \|g_n - g\|_\infty \int_E |\varphi| d\mu \to 0.$$

Таким образом, $\int_E (g_n\varphi) d\mu \to \int_E (g\varphi) d\mu$. Из непрерывности функционала f и того, что $g_n \to g$ в $L_p(E)$, следует. что $f(g_n) \to f(g)$, $n \to \infty$. Переходя к пределу в (**) при $n \to \infty$, получаем $f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu$.□

6.2 Пространство, сопряженное к $L_1(E)$

Теорема. *Пусть E — множество конечной меры. Тогда пространство $(L_1(E))^*$ изометрически изоморфно пространству $L_\infty(E)$. Более того, для любого функционала $f \in (L_1(E))^*$ существует единственный элемент $\varphi \in L_\infty(E)$ такой, что*

$$f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu,$$

при этом $\|f\| = \|\varphi\|_\infty$.

Доказательство. Пусть $f \in (L_1(E))^*$. Тогда $\nu(A) = f(\chi_A)$ — абсолютно непрерывный заряд и по теореме Радона-Никодима существует единственная функция $\varphi \in L_1(E)$ Такая, что $\nu(A) = \int_A \varphi d\mu$. Докажем, что $\varphi \in L_\infty(E)$ и оценим норму f через норму φ.

Фиксируем число $c > 0$ и рассмотрим множество $A_c = E(|\varphi| > c)$. Построим функцию

$$g_c := \begin{cases} \operatorname{sign}\varphi & \text{на } A_c, \\ 0 & \text{вне } A_c \end{cases}$$

Имеем $|g_c| \leq 1$ на E, поэтому $g_c \in L_1(E)$. Подсчитаем ее норму:

$$\|g_c\|_{L_1} = \int_E |g_c| d\mu = \int_{A_c} d\mu = \mu(A_c).$$

Функция φ интегрируема и по свойству интеграла Лебега ее модуль $|\varphi|$ также интегрируем. Имеем

$$cdotg_c varphi = \begin{cases} |\varphi|, & \text{на } A_c, \\ 0, & \text{вне } A_c \end{cases}$$

Отсюда видно, что $|g_c\varphi| \leq |\varphi|$. По мажорантному признаку функция $g_c\varphi$ интегрируема. Следовательно, мы можем применить лемму из предыдущего раздела, согласно которой

$$f(g_c) = \int_E g_c \varphi d\mu = \int_{A_c} |\varphi| d\mu \geq c \cdot \mu(A_c).$$

Запишем цепочку очевидных неравенств:

$$c \cdot \mu(A_c) \leq f(g_c) \leq |f(g_c)| \leq \|f\| \cdot \|g_c\|_1 \leq \|f\| \cdot \mu(A_c).$$

Таким образом, $c \cdot \mu(A_c) \leq \|f\| \cdot \mu(A_c)$. Если $\mu(A_c) \neq 0$, то $c \leq \|f\|$, т. е. если $c > \|f\|$, то $\mu(A_c) = 0$. Значит, функция φ почти всюду ограничена и $\varphi \in L_\infty(E)$, причем $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|$.

Так как $\varphi \in L_\infty(E)$. функция $g\varphi$ интегрируема и в силу леммы $f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu$. Отметим, что мы доказали это для любой функции $g \in L_1(E)$.

Обратно, пусть $\varphi \in L_\infty(E)$. Определим функционал на $L_1(E)$:

$$f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu.$$

Этот функционал линейный и ограниченный и определен для любой функции $g \in L_1(E)$, поскольку функция $g\varphi$ интегрируема по мажорантному признаку. Оценим норму этого функционала. Имеем

$$|f(g)| = \left|\int_E g\varphi d\mu\right| \le \int_E (|g| \cdot |\varphi|) d\mu \le \|\varphi\|_\infty \int_E |g| d\mu = \|\varphi\|_\infty \|g\|_1,$$

откуда следует, что f — ограниченный линейный функционал и $\|f\| \le \|\varphi_\infty\|$. Но ранее было доказано, что $\|\varphi\|_\infty \le \|f\|$. Поэтому $\|f\| = \|\varphi\|_\infty$. □

Следствие. *Пространство $L_\infty(E)$ полно.*

Доказательство. Любое сопряженное пространство полно. □

6.3 Пространство сопряженное к $L_p(E), p > 1$

Теорема. *Пространство сопряженное к $L_p(E)$, $p > 1$, изометрически изоморфно пространству $L_q(E)$ (q — сопряженный показатель, $q = \frac{p}{1-p}$). Более того, для любого функционала $f \in (L_p(E))^*$ существует единственный элемент $\varphi \in L_q(E)$ такой, что*

$$f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu,$$

при этом $\|f\| = \|\varphi\|_q$.

Доказательство. Для любого натурального n рассмотрим множество $E_n = E(|\varphi| \le n)$. Пусть

$$g_n = \begin{cases} \operatorname{sign}\varphi|\varphi|^{q-1} & \text{на } E_n, \\ 0 & \text{вне } E_n \end{cases}$$

Имеем $|q_n| \le n^{q-1}$ на E. Функции φ и g_n измеримы, поэтому φg_n измерима. При этом, $\varphi g_n \in L_1(E)$ по мажорантному признаку, поскольку $|\varphi g_n| \le n^{q-1}|\varphi|$.

Функция g_n ограничена, поэтому $g_n \in L_\infty(E) \subset L_p(E)$. В силу леммы

$$f(g_n) = \int_E g_n \cdot \varphi d\mu.$$

Поскольку

$$g_n \cdot \varphi = \begin{cases} |\varphi|^q, & \text{на } E_n, \\ 0, & \text{вне } E_n, \end{cases}$$

заключаем, что

$$f(g_n) = \int_{E_n} |\varphi|^q d\mu. \tag{1}$$

Имеем

$$\|g_n\|_p = \left(\int_{E_n} (|\varphi|^{q-1})^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{E_n} |\varphi|^{p(q-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда с использованием (1) получаем

$$\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu = f(g_n) = |f(g_n)| \leq \|f\| \cdot \|g_n\|_p = \|f\| \cdot (\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Деля на $\left(\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, получаем

$$\left(\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|. \tag{2}$$

Заметим, что даже если $\int_{E_n} |\varphi|^q d\mu = 0$, и нельзя делить на нулевое выражение, неравенство (2) все равно верно, потому что слева в нем будет стоять нуль, а справа — неотрицательная величина.

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n = \varphi \cdot \chi_{E_n}$. Тогда $|\varphi_n|^q = |\varphi|^q \cdot \chi_{E_n}$ и неравенство (2) можно записать в виде

$$\int_E |\varphi_n|^q d\mu \leq \|f\|^q.$$

При $n \to \infty$ имеем $\varphi_n \to \varphi$ и $|\varphi_n|^q \to |\varphi|^q$. В силу теоремы Фату функция $|\varphi|^q$ интегрируема на E и

$$\int_E |\varphi|^q d\mu \leq \|f\|^q \Rightarrow \varphi \in L_q(E),$$

откуда

$$(\int_E |\varphi|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

т. е. $\|\varphi\|_q \leq \|f\|$.

Так как $\varphi \in L_q(E)$, то для любой функции $g \in L_p$, функция $g\varphi$ интегрируема (неравенство Гельдера). Тогда в силу леммы

$$f(g) = \int_E (g\varphi) d\mu,$$

Обратно, для любого $\varphi \in L_q(E)$ определим функционал

$$f(g) := \int_E (g\varphi) d\mu.$$

Этот функционал определен на всем пространстве $L_p(E)$ в силу неравенства Гельдера и является линейным.

По неравенству Гельдера

$$|f(g)| \leq \|\varphi\|_q \cdot \|g\|_p,$$

поэтому f — ограниченный линейный функционал и $\|f\| \leq \|\varphi\|_q$. Ранее было доказано, что $\|\varphi\|_q \leq \|f\|$. Если сопоставить эти два неравенства, то получим $\|f\| = \|\varphi\|_q$. $\square$

Следствие 1. *Все пространства* $L_p(E)$ *при* $p > 1$ *являются полными.*

Доказательство. В силу теоремы $L_p(E) \simeq (L_q(E))^*$, а $(L_q(E))^*$ полно как сопряженной пространство. $\square$

Следствие 2. *Пространство* $L_p(E)$ *при* $p > 1$ *рефлексивны.*

7 Теорема Хана-Банаха

7.1 Упорядоченные множества. Лемма Цорна.

При доказательстве теоремы Хана-Банаха нам понадобится лемма Цорна. Для ее формулировки напомним некоторые факты из теории упорядоченных множеств.

Пусть X — некоторое множество. Отношение $\prec$ на множестве X называется отношение порядка, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall x \in X \ (x \prec x)$;

2) $\forall x,\ y \in X\ \ (x \prec y$ и $y \prec x)$;

3) $\forall x,\ y\ \ z \in X\ \ (x \prec y$ и $y \prec z \Rightarrow x \prec y)$.

Свойство 1) называется рефлексивностью, свойство 2) — антисимметричностью, а 3) — транзитивностью.

Множество X, снабженное отношением порядка, называется упорядоченным. Если для элементов $x,\ y \in X$ выполняется либо условие $x \prec y$, либо $y \prec x$, то элементы $x,\ y$ называются сравнимыми.

Множество X называется совершенно упорядоченным или линейно упорядоченным, если для любых $x,\ y \in X$ верно либо $x \prec y$ либо $y \prec x$, т.е. любые два элемента множества X сравнимы. Не любое упорядоченное множество является совершенно упорядоченным. Например, если в $\mathbb{R}^2$ ввести отношение порядка $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$, если одновременно $x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$, то оно не будет вполне упорядоченным, так как, к примеру, пары $(1, 2)$ и $(2, 1)$ не сравнимы.

Подмножество $A \subset X$ называется ограниченным сверху, если существует элемент $x \in X$ такой, что для любого $a \in A$ выполняется условие $a \prec x$. Такой элемент x называется мажорантой множества A.

Если элемент $a \in A$ обладает свойством: если $b \in A$ и $a \prec b$, то $a = b$, то a называется максимальным элементом множества A. Если множество A не вполне упорядочено, то возможны ситуации, когда A содержит несколько, а даже бесконечно много максимальных элементов. Пример: замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ с описанным выше отношением порядка.

В случае множеств, которые не являются вполне упорядоченными, максимальные элементы не нужно путать с наибольшими. Элемент $a \in A$ называется наибольшим элементом множества A, если a является мажорантой множества A. Очевидно, что если у A имеется наибольший элемент, то он является единственным максимальным элементом этого множества. Если же у множества существует по крайней мере два различных максимальных элемента, то они не сравнимы и наибольшего элемента не существует.

Не у всякого множества существует максимальные элементы. Важной задачей является определить, существует ли у данного множества максимальный элемент. Часто для этого используют следующий классический результат.

Лемма Цорна. *Если множество A таково, что любое его совершенно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то A обладает по крайней мере одним максимальным элементом.*

Мы не будем давать доказательство этого факта. Отметим лишь, что при его доказательстве используется аксиома выбора, т.е. лемма Цорна верна в теории множеств, в которой включена эта аксиома.

7.2 Продолжение линейных функционалов. Теорема Хана-Банаха.

Пусть E — линейное нормированное пространство и пусть линеалы L_1 и L_2 в нем таковы что $L_1 \subset L_2 \subset E$. Пусть $f_1 : L_1 \to \Lambda$ и $f_2 : L_2 \to \Lambda$ — два линейных ограниченных функционала. определенные на L_1 и L_2 соответственно. Говорят, что f_2 является продолжением f_1, если $f_2|_{L_1} = f_1$. Ясно, что если f_2 — продолжение f_1, то $\|f_1\| \leq \|f_2\|$. Важной задачей является нахождение продолжения заданного на линеале функционала с сохранением нормы. Возможность такого продолжения обеспечивает

Теорема (Хан–Банах). *Пусть L — некоторый линеал в E и $f : L \to \Lambda$ — линейный ограниченный функционал. Тогда существует его продолжение $F : E \to \Lambda$ такое, что $\|F\| = \|f\|$.*

Доказательство проводится в три этапа.

I) Вещественный случай. Продолжение на одно измерение.

Пусть E — вещественное нормированное пространство, т. е. $\Lambda = \mathbb{R}$. Пусть L — некоторый линеал в E и $f : L \to \Lambda$ — линейный ограниченный функционал. Если $L = E$, то функционал f уже задан на всем пространстве и доказывать нечего. Если $L \neq E$, то существует элемент $x_1 \in E \setminus L$. Рассмотрим минимальный линеал M, содержащий линеал L и вектор x_1. Очевидно, что $M = \{x + tx_1, x \in L, t \in \mathbb{R}\}$. При этом $l \subset M$, $L \neq M$. Покажем, что f можно продолжить на M до некоторого функционала g с сохранением нормы.

В силу линейности $g(x+tx_1) = g(x)+tg(x_1) = f(x)+ct$, где константа $c = g(x_1)$ пока не известна. Докажем, что можно подобрать c таким образом, что $\{g\} = \{f\}$. Обозначим $\gamma = \{f\}$. Нашей задачей является нахождения константы c такой, что

$$|g(z)| \leq \gamma\|z\| \quad \forall z \in M. \tag{1}$$

На самом деле достаточно установить неравенство

$$g(z) \leq \gamma\|z\| \quad \forall z \in M. \tag{2}$$

Действительно, тогда беря в (2) в качестве аргумента g вектор $(-z)$, который также принадлежит M, Имеем в силу линейности

$$-g(z) = g(-z) \leq \gamma\| - z\| = \gamma\|z\| \quad \forall z \in M. \tag{3}$$

Поэтому в силу (2) и (3)

$$|g(z)| = \max\{g(z), -g(z)\} \leq \gamma\|z\|,$$

т. е. неравенство (1) справедливо.

Распишем (2) более подробно:

$$f(x) + ct \leq \gamma\|x + tx_1\|. \tag{4}$$

При $t = 0$ неравенство очевидно, так как $\gamma = \|f\|$.

При $t > 0$ неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$c \leq -f(x/t) + \gamma\|(x/t) + x_1\|, \tag{5}$$

а при $t < 0$ неравенству

$$c \leq -f(x/t) - \gamma\|(x/t) + x_1\|, \tag{6}$$

Обозначим

$$A = \inf_{u \in L}[-f(u) + \gamma\|u + x_1\|], \quad B = \sup_{v \in L}[-f(v) - \gamma\|v + x_1\|]$$

Докажем, что $B \leq A$. для этого установим, что для любых u, $v \in L$ имеет место неравенство

$$-f(v) - \gamma\|v + x_1\| \leq -f(u) + \gamma\|u + x_1\|. \tag{7}$$

Неравенство (7) эквивалентно неравенству

$$f(u) - f(v) \leq \gamma(\|u + x_1\| + \|v + x_1\|). \tag{8}$$

Докажем его. Привлекая свойство линейности f, определение нормы функционала и неравенство треугольника, получаем

$$f(u)-f(v) = f(u-v) \le \gamma\|u-v\| = \gamma\|(u+x_1)-(v+x_1)\| \le \gamma(\|u+x_1\|+\|v+x_1\|).$$

Таким образом, (8). а следовательно и (7), доказано. Из (7) следует, что $B \le A$. Теперь выберем c произвольно из отрезка $[B, A]$. Из неравенства $c \le A$ следует (5), а их неравенства $c \ge B$ следует (6). Из (5) и (6) следует (4) и эквивалентное ему неравенство (2). Наконец, из (2) следует (1), а (1) равносильно неравенству $\|g\| \le \gamma = \|f\|$. Но g — продолжение f, поэтому $\|g\| = \|f\|$. Случай I) полностью доказан.

II) Общий вещественный случай.

Рассмотрим все возможные продолжения f_α функционала f на линеалы M_α с сохранением нормы: $\|f_\alpha\| = \|f\|$. Введем на множестве $\mathfrak{M}$ всех таких продолжений отношение порядка. По определению, для двух продолжений, f_α и f_β, имеет место $f_\alpha \prec f_\beta$, если $M_\alpha \subset M\beta$ и f_β является продолжением f_α.

С помощью леммы Цорна докажем, что $\mathfrak{M}$ обладает максимальным элементом.

Для этого рассмотрим любое совершенно упорядоченное множество $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$. Это означает, что для любых f_α, $f_\beta \in \mathfrak{N}$ либо $M_\alpha \subset M_\beta$ и f_β является продолжением f_α либо $M_\beta \subset M_\alpha$ и f_α является продолжением f_β. Установим, что $\mathfrak{N}$ ограничено сверху. Для этого определим M как объединение всех линеалов M_α таких, что $f_\alpha \in \mathfrak{N}$.

Покажем, что M — линеал. Действительно, пусть x, $y \in M$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$. По определению M существуют M_α, M_β такие, что $x \in M_alpha$, $y \in M_\beta$ и f_α, $f_\beta \in \mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{N}$ совершенно упорядочено, либо $M_\alpha \subset M_\beta$ либо $M_\beta \subset M_\alpha$. Пусть, для определенности, $M_\alpha \subset M_\beta$. Тогда x, $y \in M_\beta$. Но M_β — линеал, поэтому $\lambda x+\mu y \in M_\beta \subset M$. Итак, $\lambda x+\mu y \in M$ $\forall x$, $y \in M$, т.е. M является линеалом.

Теперь определим на линеале M линейный функционал g следующим образом. Пусть $x \in M$. Тогда $x \in M_\alpha$ для некоторого α и $f_\alpha \in \mathfrak{N}$. Положим $g(x) = f_\alpha(x)$. Установим корректность этого определения, т.е. что если x также принадлежит некоторому M_β, то $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$. Но это следует из того, что $\mathfrak{N}$ совершенно упорядочено. следовательно, либо f_β

является продолжением f_α либо f_α является продолжением f_β. Поэтому $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$.

Покажем, что g является линейным функционалом на M. Пусть опять $x \in M_\alpha$, $y \in M_\beta$ и f_α, $f_\beta \in \mathfrak{N}$. Можно считать, что $M_\alpha \subset M_\beta$ и f_β является продолжением f_α. Тогда x, $y \in M_\beta$ и $g(\lambda x+\mu y) = f_\beta(\lambda x+\mu y) = \lambda f_\beta(x) + \mu f_\beta(y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$. Это означает линейность g.

Теперь установим, что g — ограниченный функционал и $\|g\| = \|f\|$. Пусть $x \in M$. Тогда $x \in M_\alpha$ и $g(x) = f + \alpha(x)$. Следовательно,

$$|g(x)| = |f_\alpha(x)| \leq \|f_\alpha\| \, \|x\| = \|f\| \, \|x\|,$$

поскольку $f_\alpha \in \mathfrak{N}$, т.е. $\|f_\alpha\| = \|f\|$. Итак, $|g(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \;\; \forall x \in M$, поэтому $\|g\| \leq \|f\|$. Поскольку g — продолжение f, имеет место равенство $\|g\| = \|f\|$.

Ясно, что g — мажоранта множества $\mathfrak{N}$. В силу леммы Цорна $\mathfrak{M}$ обладает максимальным элементом F. Установим, что область определения F — все пространство E. Если бы это было не так, то существовал бы элемент из E, не принадлежащий области определения F. Тогда, применяя продолжение функционала F на одно измерение, описанное в п. I), мы бы получили элемент из $\mathfrak{M}$, который больше, чем его максимальный элемент F — противоречие, доказывающее, что F — нужное продолжение.

III) Комплексный случай.

Пусть $f : L \to \mathbb{C}$ — линейный ограниченный функционал, заданный на линеале $L \subset E$. Тогда $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $h(x) = \Im f(x)$. Нетрудно убедиться, что g и h являются линейными вещественными функционалами на E, если мы будем рассматривать E как пространство над полем $\mathbb{R}$.

Оценим норму g. Имеем

$$|g(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \, \|\|x, \quad x \in E,$$

поэтому $\|g\| \leq \|f\|$. Итак, g — линейный ограниченный функционал и $\|g\| \leq \|f\|$.

Теперь выразим h через g. Имеем $f(ix) = if(x) = i(g(x)+ih(x)) = -h(x) + ig(x)$, откуда $h(x) = -ig(ix)$. Итак,

$$f(x) = g(x) - ig(ix).$$

В силу доказанного в п. II) вещественный функционал g допускает продолжение до линейного ограниченного функционала G, заданного на всем E и такого, что $\|G\| = \|g\| \le \|f\|$. Определим на E комплексный функционал

$$F(x) = G(x) - iG(ix).$$

Докажем, что F является искомым продолжением f. Сначала установим, что F — линейный комплексный функционал. Поскольку G — линейный функционал над полем $\mathbb{R}$, нетрудно убедиться из его определения, что

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y), \quad x, y \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Чтобы доказать, что это равенство справедливо и для комплексных констант λ и μ, достаточно доказать, что $F(ix) = iF(x)$, $x \in E$. Имеем

$$F(ix) = G(ix) - iG(i^2 x) = G(ix) - iG(-x) =$$

$$= G(ix) + iG(x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x).$$

Итак, линейность над $\mathbb{C}$ доказана.

Очевидно, что F — продолжение f на все E. Осталось показать, что $\|F\| = \|f\|$. Фиксируем $x \in E$. Запишем комплексное число $F(x)$ в показательной форме: $F(x) = re^{i\theta}$. Тогда

$$F(e^{-i\theta}x) = e^{-i\theta}F(x) = e^{-i\theta}re^{i\theta} = r$$

вещественное число. Так как $F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x) - iG(ie^{-i\theta}x)$ вещественно, то $F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$, поэтому

$$|F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \le \|G\|\,\|e^{-i\theta}x\| = \|G\|\,\|x\|.$$

Здесь мы использовали, что $|e^{-i\theta}| = 1$. Наконец, с учетом этого же равенства получаем

$$|F(x)| = |e^{-i\theta}F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| \le \|G\|\,\|x\|.$$

Итак, $|F(x)| \le \|G\|\,\|x\|$, $x \in E$, откуда $\|F\| \le \|G\|$. Поскольку $\|G\| \le \|f\|$, получаем $\|F\| \le \|f\|$. Наконец, F — продолжение f, поэтому $\|F\| = \|f\|$.

Теорема Хана–Банаха полностью доказана.

7.3 Следствия из теоремы Хана–Банаха

Следствие 1. *Пусть L — некоторое подпространство в E, $x_0 \notin L$ и d — расстояние от x_0 до L. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на E такой, что $f \equiv 0$ на L, $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = d$.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство

$$M = \{x + tx_0, x \in L, t \in \Lambda\},$$

натянутое на L и вектор x_0. Определим на M линейный функционал φ по правилу

$$\varphi(x + tx_0) = td.$$

Отметим, что для точек x, лежащих в L, значение параметра $t = 0$, поэтому $\varphi(x) = 0 \cdot d = 0$, $x \in L$. Кроме того, при $x = \theta$, $t = 1$ получаем $\varphi(x_0) = d$.

Докажем, что $\|\varphi\| = 1$. Для этого докажем, что

$$\|x + tx_0\| \geq |t|d. \tag{$*$}$$

При $t = 0$ неравенство очевидно. При $t \neq 0$ имеем

$$\|x + tx_0\| = |t| \cdot \|x/t + x_0\| = |t| \cdot \|x_0 - (-x/t)\| \geq |t|d,$$

поскольку вектор $(-x/t)$ принадлежит L, а d — расстояние от x_0 до L.

В силу (*) имеем

$$|\varphi(x + tx_0)| = td \leq \|x + tx_0\|,$$

откуда следует, что $\|\varphi\| \leq 1$.

На самом деле, $\|\varphi\| = 1$, потому что в силу определения расстояния от точки до множества существует последовательность точек $x_n \in L$ такая, что

$$\|x_n - x_0\| \to d, \quad n \to \infty.$$

Пусть $y_n = x_n - x_0 = x_n + (-1)x_0$. Очевидно, что $y_n \in M$, $|\varphi(y_n)| = d$, $\|y_n\| \to d$, $n \to \infty$. Поэтому

$$\frac{|\varphi(y_n)|}{\|y_n\|} \to 1, \quad n \to \infty,$$

следовательно,

$$\|\varphi\| = \sup_{y\in M} \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|} \geq 1.$$

Итак, $\|\varphi\| = 1$. С помощью теоремы Хана–Банаха продолжим φ до линейного ограниченного функционала f на все E. Это продолжение удовлетворяет всем условиям и является искомым.

Следствие 2. *Пусть E – нормированное пространство и $x_0 \neq \theta$ — некоторый элемент E. Тогда существует линейный ограниченный функционал на E такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Для доказательство достаточно применить предыдущее следствие для случая, когда L — тривиальное подпространство, состоящее из одного элемента — нуля θ.

8 Спектр линейного ограниченного оператора

8.1 Определение спектра. Дискретная и непрерывная часть спектра

Пусть $A \in L(E)$, т.е. $A : E \to E$ — линейный ограниченный оператор. для любого фиксированного скаляра $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим оператор $A_\lambda := A - \lambda I$, где $I = I_E$ — тождественный оператор в E. Число λ называется регулярным значением оператора A, если оператор A_λ обратим. В этом случае оператор R_λ^{-1} называется резольвентой оператора A. Обозначим через $\mathcal{O}(A)$ множество регулярных значений оператора A. По определению, спектр $\sigma(A)$ оператора A есть множество

$$\sigma(A) = \Lambda \setminus \mathcal{O}(A).$$

Таким образом, $\lambda \in \sigma(A)$, если оператор $A_\lambda := A - \lambda I$ не обратим.

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Возможны два случая.

1) Если оператор A_λ не обратим, потому что его ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ нетривиально. Тогда существует $x \neq 0$ такой, что $A_\lambda x = \theta$, т.е. $Ax = \lambda x$. Такое

λ называется собственным значением оператора A, а вектор x называется собственным вектором, соответствующим собственному значению λ. В этом случае говорят, что λ принадлежит дискретной части спектра оператора A.

2) Ядро $\operatorname{Ker} A_\lambda$ состоит только из нулевого вектора θ. В этом случае говорят, что λ принадлежит непрерывной части спектра оператора A.

Примеры. 1) Рассмотрим линейный оператор A в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Известно, что оператор A_λ обратим тогда и только тогда, когда ядро оператора $\operatorname{Ker} A_\lambda$ тривиально, т.е. определитель его матрицы $\det \|A_\lambda\| \neq 0$.

Таким образом, $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\det \|A_\lambda\| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель матрицы оператора A_λ является многочленом порядка n, поэтому спектр оператора A является дискретным и состоит из не более, чем n точек. В комплексном случае точек — ровно n с учетом из кратности.

2) Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ оператор $Ax(t) = tx(t)$ и найдем его спектр. Уравнение $A_\lambda x = \theta$ равносильно уравнению $tx(t) = \lambda x(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Отсюда следует, что $x(t) = 0$ для всех точек отрезка $[0,1]$ за исключением, быть может, одной точки $t = \lambda$, если λ лежит на отрезке $[0,1]$. Но функция $x(t) \in C[0,1]$, поэтому она непрерывна и даже если $\lambda \in [0,1]$, она в этой точке тоже равна нулю. Итак, $x(t) \equiv 0$, т.е. $x = \theta$ — нулевой элемент пространства $C[0,1]$. Итак, мы показали, что ядро оператора A_λ всегда тривиально, значит, собственных значений у оператора A нет.

Пространство $C[0,1]$ банахово. По теореме Банаха об обратном операторе оператор $A_\lambda x$ обратим тогда и только тогда, когда $A_\lambda(C[0,1]) = C[0,1]$, т.е. когда уравнение $A_\lambda x = y$ имеет решение для любого $y \in C[0,1]$. Это уравнение равносильно уравнению

$$(t-\lambda)x(t) = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Оно имеет решение

$$x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}$$

во всех точках, отличных от $t = \lambda$. Если $\lambda \notin [0,1]$, то это решение непрерывно на $[0,1]$, поскольку $y \in C[0,1]$. Если же $\lambda \in [0,1]$, то функция x будет непрерывной на $[0,1]$ только если $y(\lambda) = 0$. Таким образом, уравнение $A_\lambda x = y$ разрешимо не для всех $y \in C[0,1]$. Поэтому все точки отрезка $[0,1]$ принадлежат спектру. Итак, $\sigma(A) = [0,1]$, причем все точки спектра принадлежат непрерывной части.

8.2 Свойства спектра

I) Если $\|A\|$ ограниченный оператор, то $\sigma(A)$ — ограниченное множество, причем $\forall \lambda \in \sigma(A)$ выполняется неравенство $|\lambda| \leq \|A\|$. Это означает, что в вещественном случае спектр лежит на отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$, а в комплексном случае — в круге радиуса $\|A\|$ с центром в начале координат.

Доказательство. При $\lambda \neq 0$ имеем $A_\lambda = A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $\|\lambda^{-1}A\| < 1$. По «малой» теореме Банаха об обратном операторе оператор $I - \lambda^{-1}A$ обратим. Значит, и оператор A_λ обратим:

$$(A_\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}.$$

II) Спектр $\sigma(A)$ линейного ограниченного оператора A является замкнутым множеством.

Для доказательства установим, что его дополнение $\mathcal{O}(A)$ является открытым множеством. Пусть $\lambda_0 \in \mathcal{O}(A)$. Тогда оператор A_{λ_0} обратим. Если $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, то

$$\|A_\lambda - A_{\lambda_0}\| = \|(A - \lambda I) - (A - \lambda_0 I)\| = \|(\lambda_0 - \lambda)I\| = |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Множество обратимых линейных операторов открыто. Значит, можно подобрать ε таким образом, чтобы в ε-окрестности оператора A_{λ_0} будут содержаться только обратимые оператора. Тогда для всех λ, лежащих в ε-окрестности точки λ_0, операторы A_λ будут обратимы.

III) В комплексном случае $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Для доказательства установим несколько вспомогательных утверждений.

1) Для любых $\lambda,\ \mu \in \mathcal{O}(A)$ справедливо соотношение Гильберта

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

Действительно, $A_\mu - A_\lambda = (A - \mu I) - (A - \lambda I) = (\lambda - \mu) I$, поэтому

$$R_\lambda - R_\mu = R_\lambda A_\mu R_\mu - R_\lambda A_\lambda R_\mu = R_\lambda (A_\mu - A_\lambda) R_\mu = R_\lambda (\lambda - \mu) I R_\mu (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

2) Резольвента R_λ непрерывно зависит от λ на множестве $\mathcal{O}(A)$.

Доказательство. Пусть некоторая последовательность λ_n из $\mathcal{O}(A)$ сходится к $\lambda \in \mathcal{O}(A)$. Имеем

$$\|A_{\lambda_n} - A_\lambda\| = \|(\lambda - \lambda_n) I\| = |\lambda_n - \lambda| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $A_{\lambda_n} \to A_\lambda$ и по свойству обратимых операторов заключаем, что $R_{\lambda_n} = A_{\lambda_n}^{-1} \to A_\lambda^{-1} = R_\lambda$.

3) При $\lambda \to \infty$ резольвенты $R_\lambda \to \Theta$.

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} A)^{-1}.$$

При $\lambda \to \infty$ заключаем, что $\lambda^{-1} \to 0$, $I - \lambda^{-1} A \to I$, поэтому

$$(I - \lambda^{-1} A)^{-1} \to I^{-1} = I.$$

Следовательно, $R_\lambda \to 0 \cdot I = \Theta$.

4) Для любого непрерывного линейного функционала F на пространстве линейных ограниченных операторов $L(E)$ функция $f(\lambda) := F(R_\lambda) : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ является аналитической.

Используя соотношение Гильберта, получаем

$$\Delta f(\lambda) = f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda) = F(R_{\lambda+\Delta\lambda}) - F(R_\lambda) = F(R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda) =$$

$$= F(\Delta\lambda R_\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}) = \Delta\lambda \cdot F(R_\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}). \qquad (*)$$

При $\Delta\lambda \to 0$ получаем в силу свойства 2) $R_{\lambda+\Delta\lambda} \to R_\lambda$, поэтому $R_\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda} \to R_\lambda^2$ и в силу непрерывности F получаем $F(R_\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}) \to F(R_\lambda^2)$. Отсюда в силу $(*)$ получаем, что существует

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\lambda} = F(R_\lambda^2).$$

Это означает, что в любой точке из $\mathcal{O}$ функция f комплексно дифференцируема.

Доказательство непустоты спектра в комплексном случае. Предположим, что спектр $\sigma(A)$ пуст. Тогда $\mathcal{O} = \mathbb{C}$. В силу доказанного в п. 4) Для любого непрерывного линейного функционала F на пространстве линейных ограниченных операторов $L(E)$ функция $f(\lambda) := F(R_\lambda) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является аналитической. В силу п.3) при $\lambda \to \infty$ имеем $f(\lambda) = F(R_\lambda) \to F(\Theta) = 0$.

Итак, $f(\lambda)$ аналитична во всех точках плоскости и стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. По теореме Лиувилля, $f(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$, причем очевидно, что $C = 0$. Таким образом, для любого функционала $F \in (L(E))^*$ имеем $F(R_\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Однако для любого фиксированного λ резольвента $R_\lambda \neq \Theta$, и по следствию из теоремы Хана-Банаха существует $F \in (L(E))^*$ такой, что $F(R_\lambda) \neq 0$. Это доказывает, что $\sigma(A) \neq \emptyset$.

9 Гильбертовы пространства. Пространство, сопряженное к гильбертову.

Напомним, что гильбертовым пространством называется унитарное пространство (пространство со скалярным произведением), полное относительно нормы, определяемой скалярным произведение.

9.1 Прямая сумма подпространств. Ортогональное дополнение

Пусть H — гильбертово пространство, L и M — подпространства в H. Суммой L и M называется множество

$$L + M = \{x + y \mid x \in L, y \in M\}.$$

Сумма $L + M$ называется прямой суммой, если для любого $z \in L + M$ существуют единственные $x \in L$, $y \in M$ такие, что $z = x + y$. Прямая сумма L и M обозначается $L \oplus M$.

Пусть L — линеал в H. Ортогональным дополнением L называется множество

$$L^\perp = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in L\}.$$

Лемма. *Множество $L^\perp$ — подпространство в H.*

Доказательство. Покажем, что $L^\perp$ — линеал. Пусть x_1, $x_2 \in L^\perp$ и скаляры α_1, $\alpha_2 \in \Lambda$. Тогда для любого $y \in L$ имеем $(x_1, y) = 0$, $(x_2, y) = 0$. Отсюда следует, что $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y) = 0$. Следовательно, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L^\perp$.

Теперь докажем, что $L^\perp$ — замкнутый линеал. Пусть $x_n \in L^\perp$, $x_n \to x$, $n \to \infty$. Тогда для любого $y \in L$ имеем $(x_n, y) = 0$ и в силу непрерывности скалярного произведения $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0$. Таким образом, $x \in L^\perp$. Итак, предел любой последовательности элементов из $L^\perp$ принадлежит множеству $L^\perp$. Значит, $L^\perp$ — замкнутое множество.

Упражнение. Пусть L — линеал в H. Чему равно множество $L^{\perp\perp}$?

Теорема. *Пусть $L^\perp$ — подпространство в H. Тогда $H = L \oplus L^\perp$.*

Доказательство. Рассмотрим любое $z \in H$. Пусть $d = \operatorname{dist}(z, L) = \inf_{x \in L} \|z - x\|$. Из свойств инфимума следует, что существует последовательность $x_n \in L$ такая, что $\|z - x_n\| \to d$, $n \to \infty$. В силу тождества параллелограмма имеем

$$2(\|z - x_n\|^2 + \|z - x_m\|^2) = \|2z - x_n - x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} 0 \le \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|z - x_n\|^2 + \|z - x_m\|^2) - 4\|z - (x_n + x_m)/2\|^2 \le \\ &\le 2(\|z - x_n\|^2 + \|z - x_m\|^2) - 4d^2, \qquad (*) \end{aligned}$$

поскольку $(x_n + x_m)/2 \in L$. При n, $m \to \infty$ имеем $\|z - x_n\|^2 \to d^2$, $\|z - x_m\|^2 \to d^2$, поэтому правая часть в неравенстве $(*)$ стремится к нулю. Переходя к пределу получаем, что

$$0 \le \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|^2 \le 0.$$

Следовательно, $\|x_n - x_m\| \to 0$, n, $m \to \infty$. Это означает, что последовательность x_n фундаментальна. Пространство H полно, поэтому x_n сходится к некоторому элементу x.

Так как $x_n \in L$ и L замкнуто, заключаем, что $x \in L$. Наконец,

$$\|z - x\| = \lim_{n\to\infty} \|z - x_n\| = d.$$

Пусть теперь $y = z - x$. Докажем, что $y \in L^{\perp}$. Для этого рассмотрим следующее выражение

$$\|z-(x+tx_1)\|^2 = \|(z-x)-tx_1)\|^2 = \|y-tx_1)\|^2 = \|y\|^2-2t\operatorname{Re}(y,x_1)+t^2\|x_1\|^2,$$

где $t \in \mathbb{R}$, x_1 — любой фиксированный элемент из L. Как функция вещественной переменной t это — квадратичный трехчлен. Так как $(x + tx_1) \in L$, то $\|z - (x + tx_1)\|^2 \geq d^2$, причем при $t = 0$ имеем $\|z - (x + 0x_1)\|^2 = \|z - x\|^2 = d^2$. Таким образом, при $t = 0$ у этой функции минимум. Следовательно, производная по t в точке $t = 0$ равна нулю. Отсюда следует, что $\operatorname{Re}(y, x_1) = 0$, причем это верно для любого $x_1 \in L$.

Если H — вещественное гильбертово пространство, то заключаем, что $(y, x_1) = 0$, $x_1 \in L$, откуда $y \in L^{\perp}$. Если H — комплексное пространство, то для любого $x_1 \in L$ вектор $ix_1 \in L$. Значит, $\operatorname{Re}(y, ix_1) = \operatorname{Re}[-i(y, x_1)] = \Im(y, x_1) = 0$. Итак, $(y, x_1) = 0$, $x_1 \in L$, откуда $y \in L^{\perp}$.

Осталось доказать, что разложение $z = x + y$ векторов $z \in H$ единственно. Предположим, что существует другое разложение $z = x_1 + y_1$, $x_1 \in L$, $y_1 \in L^{\perp}$. Тогда $x + y = x_1 + y_1$, откуда $x - x_1 = y_1 - y$. При этом элемент $x - x_1 \in L$ и в то же время он равен элементу $y_1 - y \in L^{\perp}$. Значит от ортогонален самому себе:

$$(x - x_1, x - x_1) = \|x - x_1\|^2 = 0,$$

откуда $\|x - x_1\| = 0$ и $x - x_1 = \theta$, т.е. $x = x_1$. Значит, $y_1 - y = \theta$ и $y = y_1$. Теорема доказана.

9.2 Ортогональные проекторы

Пусть L — некоторое подпространство в гильбертовом пространстве H и $L^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Тогда любой элемент $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Сопоставим вектору x вектор y. В результате получаем отображение $P : H \to H$.

Утверждение. *Отображение P является линейным ограниченным оператором и $\|P\| \leq 1$.*

Доказательство. Пусть $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, где y_1, $y_2 \in L$, z_1, $z_2 \in L^{\perp}$. Для любых α, $\beta \in \Lambda$ имеем

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2).$$

При этом $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L^{\perp}$. Значит,

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Это означает линейность оператора P.

Пусть теперь $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. В силу перпендикулярности y и z получаем

$$\|x\|^2 = (x, x) = (y + z, y + z) = (y, y) + (y, z) + (z, y) + (z, z) =$$

$$= (y, y) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Из этого неравенства следует, что $\|y\|^2 \leq \|x\|^2$, т.е. $\|Px\| = \|y\| \leq \|x\|$. Значит, $\|Px\| \leq \|x\|$ для любого $x \in H$. Это означает, что линейный оператор P является ограниченным и его норма $\|P\| \leq 1$.

Отметим, что если L — тривиальное подпространство, состоящее из нулевого вектора, то $P = \Theta$ и $\|P\| = \|\Theta\| = 0$. Если же L содержит ненулевой вектор y, то из равенства $y = y + \theta$, $y \in L$, $\theta \in L^{\perp}$ следует, что $Py = y$. поэтому $\|Py\| = \|y\|$, $\frac{\|Py\|}{\|y\|} = 1$ и $\|P\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \geq 1$. Итак, $\|P\| \geq 1$. Но из доказанного выше утверждения следует, что $\|P\| \leq 1$. Значит, $\|P\| = 1$.

Введенный оператор называется оператором ортогонального проектирования на подпространство L или ортогональным проектором (на L) или, для краткости, ортопроектором.

Установленные выше утверждения соберем в виде теоремы.

Теорема 1. *Любой ортопроектор P в гильбертовом пространстве H является линейным ограниченным оператором. Если $P \neq \Theta$, то $\|P\| = 1$.*

Приведем еще один результат об ортопроекторах.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный ограниченный оператор P в гильбертовом пространстве H являлся ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) $P^* = P$ *(самосопряженность оператора P);*

2) $P^2 = P$ *(идемпотентность оператора P).*

Доказательство. Необходимость. Пусть P — ортопроектор на подпространство L. Тогда для любого x справедливо разложение $x = y + z$,

$y \in L$, $z \in L^{\perp}$. При этом, $Px = y$. Поскольку, как мы показывали выше, $Py = y$, получаем $P^2 x = P(Px) = Py = y = Px$. Значит, $P^2 x = Px$ для любого $x \in H$, т.е. $P^2 = P$.

Далее, пусть $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, где y_1, $y_2 \in L$, z_1, $z_2 \in L^{\perp}$. Тогда $y_j \perp z_k$ для любых j и k, поэтому

$$(Px_1, x_2) = (y_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) + (y_1, z_2) = (y_1, y_2) =$$

$$= (y_1, y_2) + (z_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, y_2) = (x_1, Px_2).$$

Итак, $(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2)$ для любых x_1, $x_2 \in H$. Поэтому оператор P самосопряжен.

Достаточность. Пусть $P^* = P$ и $P^2 = P$. Покажем, что P — ортопроектор. Пусть $L = N(P - I)$. Тогда L — подпространство в H и для любого $y \in L$ имеем $(P - I)y = \theta$, т.е. $Py = y$.

Установим, что $Px \in L$ для любого $x \in H$. Действительно, пусть $y = Px$. Тогда $(P - I)y = (P - I)Px = P^2 x - Px = \theta$, поскольку $P^2 = P$. Значит, $y \in N(P - I) = L$.

Теперь покажем, что для любого $z \in L^{\perp}$ выполняется равенство $Pz = 0$. В самом деле, для любого $x \in H$ имеем $(Pz, x) = (z, Px) = 0$, так как $z \in L^{\perp}$ и $Px \in L$. Таким образом, $(Pz, x) = 0$ для любого $x \in H$, т.е. вектор Pz ортогонален H, поэтому $Pz = \theta$.

Наконец, покажем, что P — ортопроектор на L. Пусть $x \in H$, $y = Px$. Тогда $y \in L$ и $x = y + z$, где $z = x - y$. Покажем, что $z \in L^{\perp}$. Для любого $y_1 \in L$ имеем

$$(z, y_1) = (z, Py_1) = (Pz, y_1) = (Px - Py, y_1) = (y - Py, y_1) = (\theta, y_1) = 0,$$

поскольку $y = Py$. Итак, любой элемент $x \in H$ представим в виде $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$, причем $y = Px$. Значит, P — ортопроектор на L. Теорема доказана.

Упражнение. Доказать, что линейный ограниченный оператор P в гильбертовом пространстве H является ортопроектором тогда и только тогда, когда оператор $I - P$ — ортопроектор. На какое подпространство проектирует оператор $I - P$?

Пример. Рассмотрим произвольное измеримое множество на отрезке $[a,b]$. Для любого $x \in L_2(a,b)$ определим оператор

$$Px(t) = \begin{cases} x(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что $P^2 = P$, $P^* = P$, т.е. P — ортопроектор.

9.3 Пространство, сопряженное к гильбертову

Теорема. *Пространство, сопряженное к гильбертову пространству H, изоморфно H. Для любого функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, y). \tag{1}$$

Обратно, любой элемент $y \in H$ определяет линейный непрерывный функционал f на H по формуле (1)*. При этом,*

$$\|f\| = \|y\|,$$

т.е. норма линейного непрерывного функционала в сопряженном пространстве H^* равна норме элемента y в пространстве H.

Доказательство. Пусть $f \in H^*$, т.е. f — некоторый линейный непрерывный функционал на H, $f : H \to \Lambda$. Рассмотрим ядро линейного функционала f:

$$L = \operatorname{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Из курса алгебры следует, что L — линеал. Поскольку L — это прообраз одноточечного множества, состоящего из нуля и очевидно замкнутого множества, из курса топологии следует, что L топологически замкнуто, т.е. L — подпространство.

Будем считать. что $L \neq H$, иначе ситуация тривиальна. Тогда существует $z \in H \backslash L$. В силу леммы представим z в виде суммы $z = x_0 + y_0$, $x_\in L$, $y_0 \in L^\perp$. Ясно, что $f(z) \neq 0$ и $f(z) = f(x_0) + f(y_0) = f(y_0)$. Поэтому $f(y_0) \neq 0$.

Теперь рассмотрим любой элемент $x \in H$. Имеем $x = (x - \alpha y_0) + \alpha y_0$. Подберем скаляр α так, чтобы $f(x - \alpha y_0) = 0$. Имеем $f(x - \alpha y_0) =$

$f(x) - \alpha f(y_0) = 0$, откуда $\alpha = \frac{f(x)}{f(y_0)}$. Тогда $f(x) = \alpha f(y_0)$. С другой стороны,

$$(x, y_0) = (x - \alpha y_0, y_0) + (\alpha y_0, y_0) = \alpha(y_0, y_0) = \frac{f(x)}{f(y_0)}(y_0, y_0)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{f(y_0)}{(y_0, y_0)}(x, y_0) = \left(x, \frac{\overline{f(y_0)}}{(y_0, y_0)}\, y_0\right) = (x, y),$$

где

$$y = \frac{\overline{f(y_0)}}{(y_0, y_0)}\, y_0.$$

Итак, $f(x) = (x, y)$, $x \in H$. Оценим $|f(x)|$:

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad x \in H,$$

откуда $\|f\| \leq \|y\|$. С другой стороны, $f(y) = (y, y) = \|y\|^2$, поэтому

$$\frac{|f(y)|}{\|y\|} = \|y\|,$$

откуда следует, что

$$\|f\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \|y\|.$$

Значит, $\|f\| = \|y\|$.

Наконец, для любого фиксированного $y \in H$ равенство $f(x) = (x, y)$ определяет линейный функционал с нормой $\|y\|$. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие $f \leftrightarrow y$, которое сохраняет норму, т.е. является изометрическим изоморфизмом. Теорема доказана.

Замечание. В случае вещественного пространства H указанное соответствие $f \leftrightarrow y$ является линейным, а в случае комплексного антилинейным, поскольку скалярное произведение в комплексных пространствах антилинейно по второму аргументу.

9.4 Унитарные операторы в гильбертовом пространстве

Пусть H — гильбертово пространство. Линейный оператор $U : H \to H$ называется унитарным. если он сюръективен и $(Ux, Uy) = (x, y)$ для любых x, $y \in H$.

Свойства унитарных операторов.

1) Для любого $x \in H$ имеем $\|Ux\| = \|x\|$, т.е. любой унитарный оператор U является изометрией.

Доказательство. Имеем $(Ux, Ux) = (x, x)$, т.е. $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$.

2) $\|U\| = 1$ для любого унитарного оператора U. Это сразу следует из 1).

3) $N(U) = \{\theta\}$, т.е. любой унитарный оператор U инъективен.

4) Унитарный оператор U обратим. Это следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

5) Оператор U^{-1} также является унитарным. Действительно, U^{-1} является биективным отображение, поэтому он сюръективен. Если x, $y \in H$, $u = U^{-1}x$, $v = U^{-1}y$, то $Uu = x$, $Uv = y$ и

$$(x, y) = (Uu, Uv) = (u, v) = (U^{-1}x, U^{-1}y).$$

Примеры унитарных операторов.

1) Рассмотрим комплексное гильбертово пространство $L_2(a, b)$. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ — измеримая функция такая, что $|f(t)| = 1$ почти всюду на $[a, b]$. Рассмотрим оператор $U : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$, действующий по правилу

$$Ux(t) = f(t)x(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Покажем, что U — унитарный оператор. Сначала установим сюръективность. Решим уравнение $Ux = y$, т.е. $f(t)x(t) = y(t)$. Почти всюду имеем $x(t) = (1/f(t))y(t)$. Функция x измерима как произведение измеримых функций и $|x(t)| = |y(t)|$, поскольку $|1/f(t)| = 1$ почти всюду.

Теперь покажем, что U сохраняет скалярное произведение. Имеем

$$(Ux, Uy) = \int_a^b Ux(t)\overline{Uy(t)}dt = \int_a^b f(t)x(t)\overline{f(t)y(t)}dt =$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{f(t)}x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt = (x, y).$$

2) Оператор сдвига в $L_2(\mathbb{R})$. Фиксируем некоторой число $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим оператор $Ux(t) = x(t - t_0)$. Сюръективность: уравнение

$x(t-t_0) = y(t)$ имеет решение $x(t) = y(t+t_0)$. Сохранение скалярного произведения:

$$(Ux, Uy) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ux(t)\overline{Uy(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\overline{y(t-t_0)}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt = (x, y).$$

Теперь изучим спектр унитарного оператора.

Теорема. *В комплексном гильбертовом пространстве спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(U)$. Тогда $|\lambda| \le \|U\| = 1$. При этом $\lambda \ne 0$, поскольку оператор $U - 0 \cdot I = U$ обратим. Утверждается, что $\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1})$. Действительно,

$$U^{-1} - \lambda^{-1} I = U^{-1}(I - \lambda^{-1} U) = -\lambda^{-1} U^{-1}(U - \lambda I).$$

Если бы оператор $U^{-1} - \lambda^{-1} I$ был бы обратим, то $U - \lambda I$ был бы тоже обратим. При этом оператор U^{-1} унитарный, следовательно, $|\lambda^{-1}| \le \|U^{-1}\| = 1$, откуда $|\lambda| \ge 1$. Итак, $|\lambda| = 1$.

10 Сопряженные операторы

10.1 Определение и норма сопряженного оператора

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства E в нормированное пространств F. Определим оператор A^*, действующий из сопряженного пространства F^* в сопряженное пространство E^* по правилу $A^* f(x) = f(Ax)$. Это проиллюстрировано на диаграмме ниже:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "f \circ A"'] & & F \arrow[dl, "f"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd}$$

Можно сказать, что сопряженный оператор сопоставляет функционалу $f : F \to \Lambda$ функционал $f \circ A : E \to \Lambda$, определенный на E.

Покажем, что $A^* : F^* \to E^*$ является линейным ограниченным оператором и вычислим его норму.

Линейность: $A^*(\alpha f + \beta g) = \alpha A^* f + \beta A^* g$. Действительно,

$$A^*(\alpha f+\beta g)(x) = (\alpha f+\beta g)(Ax) = \alpha f(Ax)+\beta g(Ax) = \alpha(A^* f)x+\beta(A^* g)x.$$

Ограниченность: обозначим $\varphi = A^* f$. Тогда

$$|\varphi(x)| = |(A^* f)x| = |f(Ax)| \le \|f\| \, \|Ax\| \le \|f\| \, \|A\| \, \|x\|.$$

Отсюда следует, что φ — ограниченный линейный функционал, причем $\|\varphi\| \le \|f\| \, \|A\|$. Значит, $\|A^* f\| \le \|f\| \, \|A\|$. ИЗ этого неравенства следует, что A^* — ограниченный линейный оператор и $\|A^*\| \le \|A\|$.

Покажем, что на самом деле $\|A^*\| = \|A\|$. Для любого $x \in E$ рассмотрим элемент $y = Ax \in F$. По следствию из теоремы Хана-Банаха существует линейный ограниченный функционал $f \in F^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(y) = \|y\|$, т.е. $f(Ax) = \|Ax\|$. Следовательно,

$$\|Ax\| = |f(Ax)| = |(A^* f)x| \le \|A^* f\| \, \|x\| \le \|A^*\| \, \|f\| \, \|x\| = \|A^*\| \, \|x\|.$$

Таким образом, $|Ax\| \le \|A^*\| \, \|x\|$. Поскольку это верно для любого $x \in E$, заключаем, что $\|A\| \le \|A^*\|$. С учетом доказанного выше неравенства $\|A^*\| \le \|A\|$ заключаем, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть* $A \in L(E, F)$. *Тогда* $A^* \in L(F^*, E^*)$ *и* $\|A^*\| = \|A\|$.

10.2 Свойства операции сопряжения оператора

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Действительно,

$$(A + B)^* f(x) = f(A + B)(x) = f(Ax + Bx) = f(Ax) + f(Bx) =$$

$$= A^* f(x) + B^* f(x) = (A^* + B^*)f(x).$$

2) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$.

Доказательство:

$$(\lambda A)^* f(x) = f((\lambda A)(x)) = f(\lambda Ax) = \lambda f(Ax) = (\lambda A^*)f(x).$$

Замечание. Как мы показывали выше, в гильбертовом пространстве H для каждого линейного непрерывного функционала f существует элемент $y \in H$ такой, что $f(x) = (x, y)$, $x \in H$. Сопряженный оператор определяется по другому: то такой оператор A^*, что для любых x, $y \in H$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Это определение несколько отличается от определения, данного для произвольных нормированных пространств. В частности, если H — комплексное гильбертово пространство, то тогда $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, т.е. скаляр выносится с комплексным сопряжением. Это — следствие того, что в комплексном гильбертовом пространстве скалярное произведение антилинейно по второму сомножителю. Как отмечалось выше, изоморфизм между H и H^*, определяемый соответствием $f \leftrightarrow y$, антилинеен в комплексном гильбертовом пространстве. Поэтому этот факт не противоречит утверждению 2).

3) $(AB)^* = B^*A^*$.

Действительно,

$$(AB)^*f(x) = f((AB)x) = f(A(Bx)) =$$

$$= (A^*f)(Bx) = B^*(A^*f)(x) = (B^*A^*)f(x).$$

4) Если $I_E : E \to E$ — единичный оператор в E, действующий по правилу $I_E x = x \ \forall x \in E$, и $I_{E^*} : E^* \to E^*$ — аналогичный единичный оператор в сопряженном пространстве E^*, то

$$I_E^* = I_{E^*}.$$

Доказательство: $(I_E^* f)(x) = f(I_E(x)) = f(x) = I_{E^*} f(x)$.

5) Пусть $A : E \to F$ — линейный ограниченный оператор. Рассмотрим оператор $A^* : E^* \to F^*$, сопряженный к A и оператор $A^{**} : E^{**} \to F^{**}$, сопряженный к A^*. Как мы показали ранее, можно считать, что $E \subset E^{**}$, $F \subset F^{**}$. Рассмотрим сужение $A^{**}|_E$. Утверждается, что

$$A^{**}|_E = A.$$

Доказательство. Напомним. что при вложении $E \subset E^{**}$ точки $x \in E$ отождествляются с элементами $\psi_x = E^{**}$, т.е. функционалами на пространстве E^*Ю, действующими по правилу: $\psi_x(f) = f(x)$. Аналогичное утверждение справедливо для вложения $F \subset F^{**}$. Имеем

$$A^{**}\psi_x(f) = \psi_x(A^*f) = A^*f(x) = f(Ax) = \psi_{Ax}(f).$$

Итак, $A^{**}\psi_x(f) = \psi_{Ax}(f) \ \forall f \in E^*$. Значит, $A^{**}\psi_x = \psi_{Ax}$. Если отождествить $x \in E$ с $\psi_x \in E^{**}$ и $Ax \in F$ с $\psi_{Ax} \in F^{**}$, то тогда можно написать $A^{**}x = Ax$, $x \in E$. Это и означает, что $A^{**}|_E = A$.

Теорема. *Пусть E и F — банаховы пространства. Оператор $A \in L(E, F)$ обратим тогда и только тогда, когда A^* обратим. При этом,*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A : E \to F$ обратим. Тогда существует линейный ограниченный $B : F \to E$, обратный к A слева и справа: $BA = I_E$, $AB = I_F$. Применяя оператор сопряжения и его свойства, получаем $(BA)^* = I_E^*$, $(AB)^* = I_F^*$ или $A^*B^* = I_{E^*}$, $B^*A^* = I_{F^*}$. Отсюда следует, что линейный ограниченный оператор B^* является левым и правым обратным к A^*. По «большой» теореме Банаха (здесь существенно, что E и F — банаховы пространства) заключаем, что A^* обратим и его обратный совпадает с $B^* = (A^{-1})^*$.

Достаточность. Пусть теперь A^* обратим. В силу доказанной необходимости, применяя ее к оператору A^*, заключаем, что A^{**} обратим. Следовательно, $A^{**} : E^{**} \to F^{**}$ инъективен. Поскольку A является сужением A^{**} на E, делаем вывод, что A инъективен.

Докажем, что A сюръективен, т.е. $AE = F$. Сначала заметим. что AE — подпространство в F. действительно, очевидно, что AE — линеал. Докажем, что этот линеал топологически замкнут. Пусть $y_n \in AE$, $y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Тогда для некоторых $x_n \in E$ имеем $y_n = Ax_n$. Поскольку $A = A^{**}|E$, $x_n = A^{-1}y_n = (A^{**})^{-1}y_n \to (A^{**})^{-1}y_0$ в E^{**} . Здесь мы воспользовались, что A^{**} обратим и $(A^{**})^{-1}$ — непрерывный оператор. Обозначим $x_0 = (A^{**})^{-1}y_0$. Покажем, что $x_0 \in E$. Действительно, так как x_n сходится в E^{**}, она фундаментальна в E^{**}. Но $x_n \in E$, поэтому

x_n фундаментальна в E. Пространство E является банаховым. поэтому x_n сходится в E. В силу единственности предела получаем, что предел x_0этой последовательности в E^{**} принадлежит E. Итак, $x_n \to x_0$, откуда $y_n = Ax_n \to Ax_0$. Окончательно имеем $y_0 = Ax_0 \in AE$, поэтому $y_0 \in AE$.

Теперь предположим противное, т.е. что $AE \neq F$. Тогда по следствию из теоремы Хана-Банаха существует такой линейный непрерывный функционал $f : F \to \Lambda$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f \equiv 0$ на AE. Последнее означает, что $f(Ax) = 0$, т.е. $A^*f(x) = 0$, $x \in E$. Значит, функционал A^*f — нулевой, а так как A^* обратим, то $f = \theta$. то противоречит тому, что $\|f\| = 1$. Итак, A инъективен и сюръективен. По «большой» теореме Банаха A обратим. Теорема доказана.

10.3 Оператор, сопряженный к вполне непрерывному

Напомним, что линейный оператор называется вполне непрерывным, если он переводит ограниченные множества в относительно (секвенциально) компактные. Для проверки вполне непрерывности оператора достаточно рассмотреть шар единичного радиуса $S = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ доказать, что его образ AS является относительно компактным в F. Действительно, если M — ограниченное множество в E, то существует $r > 0$ такое, что $M \subset rS$. Тогда $AM \subset rAS$. Если AS — относительно компактно, то rAS, очевидно, тоже относительно компактно и AM относительно компактно как подмножество относительно компактного множества.

Теорема. *Пусть E и F — банаховы пространства и оператор $A \in L(E, F)$ вполне непрерывен. Тогда $A^* : F^* \to E^*$ вполне непрерывен. Обратно, если A^* вполне непрерывен, то вполне непрерывен и A.*

Перед доказательством заметим следующий почти очевидный факт. Если f — непрерывная функция, заданная в метрическом пространстве X, действующая в Λ, и $T \subset X$, то

$$\sup_{x \in T} |f(x)| = \sup_{x \in \overline{T}} |f(x)|.$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Для простоты изложения рассмотрим вещественный случай ($\Lambda = \mathbb{R}$). Пусть A — вполне непрерывный оператор, S — единичный шар в E. Тогда $T := AS$ — относительно компактное в F множество и его замыкание $\overline{T}$ компактно. Пусть $S^* = \{f \in F^* : \|f\| \leq 1\}$ — единичный шар в F^*. Для доказательства вполне непрерывности оператора A^* достаточно установить, что A^*S^* — относительно компактное множество в E^*.

Рассмотрим любой функционал $\varphi \in A^*S^*$. Тогда $\varphi = A^*f$, $f \in S^*$, т.е. $\|f\| \leq 1$. Имеем

$$\|\varphi\| = \sup_{x\in S} |\varphi(x)| = \sup_{x\in S} |A^*f(x)| = \sup_{x\in S} |f(Ax)| = \sup_{y\in T} |f(y)| = \sup_{y\in \overline{T}} |f(y)|.$$

Из полученного равенства следует, что множество A^*S^* изометрически изоморфно некоторому подмножеству $\mathcal{F}$ пространства непрерывных функций, определенных на компактном множестве $\overline{T}$. При этом,

$$|f(y)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \, \|Ax\| \leq \|f\| \, \|A\| \, \|x\| = \|A\|,$$

т.к. $\|f\| \leq 1$, $\|x\| \leq 1$. Таким образом, любая такая f действует из $\overline{T}$ в отрезок $[-\|A\|, \|A\|]$. Теперь покажем, что семейство функций $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно. Имеем

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|f\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Из этого неравенства следует равностепенная непрерывность. По обобщенной теореме Арцела множество $\mathcal{F}$ относительно компактно. Следовательно, относительно компактно и изометрически изоморфное ему множество A^*S^*.

Достаточность. Пусть A^* — вполне непрерывный оператор. По доказанному выше A^{**} — вполне непрерывный оператор. Рассмотрим любое ограниченное множество M в E. Тогда $AM \subset A^{**}M$. Множество $A^{**}M$ относительно компактно в E^{**}, поэтому его подмножество AM относительно компактно в E^{**}, но тогда AM относительно компактно в E, так как фундаментальность последовательности элементов из E в пространствах E^{**} и E означает одно и то же. Теорема доказана.

10.4 Примеры сопряженных операторов

1) Рассмотрим линейный оператора $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть оператор задается матрицей $\|a_{kj}\|$, т.е. $y = Ax$ записывается в координатах

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j, \quad 1 \le k \le n.$$

Любой линейный функционал f имеет вид $f(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k$, где f_k — вещественные числа. Имеем

$$f(Ax) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k = \sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \sum_{k,j=1}^{n} f_k a_{kj} x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{kj} f_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k = A^* f(x)$$

где

$$(A^* f(x))_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k, \quad 1 \le j \le n.$$

Мы видим, что оператор, сопряженный к A задается матрицей, транспонированной к A.

В комплексном случае, если мы реализуем функционалы через скалярное произведение, кроме транспонирования нужно еще брать комплексное сопряжение от элементов матрицы.

2) Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$$

в вещественном пространстве $L_2(a, b)$.

Будем предполагать, что $K(t, s) \in L_2(Q)$, где $Q = [a, b] \times [a, b]$ — квадрат на плоскости. Это означает, что функция $K(t, s)$ измерима и существует интеграл Лебега

$$\int_Q K^2(t, s) dt ds. \tag{1}$$

В теории функций действительного переменного и теории меры Лебега имеется теорема Фубини о связи кратных и повторных интегралов.

Из нее, в частности, следует, что в случае существования интеграла (1) функция $K^2(t,s)$ для почти всех t интегрируема в смысле Лебега по s, т.е. почти всюду на $[a,b]$ существует

$$\varphi(t) := \int_a^b K^2(t,s)ds,$$

функция $\varphi(t)$ интегрируема и

$$\int_Q K^2(t,s)dtds = \int_a^b \varphi(t)dt,$$

т.е.

$$\int_Q K^2(t,s)dtds = \int_a^b dt \int_a^b K^2(t,s)ds.$$

В силу неравенства Гельдера (точнее, его частного случая при $p = q = 2$, т. е. неравенства Коши-Буняковского) произведение двух квадратично интегрируемых функций интегрируемо. Таким образом. для почти всех t функция $K(t,s)x(s)$ интегрируема по переменной s. Обозначим

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Функция $y(t)$ определена почти всюду на $[a,b]$. Доопределим ее в остальных точках отрезка произвольным образом. Покажем, что $y(t) \in L_2(a,b)$. В силу неравенства Коши-Буняковского получаем

$$|y(t)| = \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b K^2(t,s)ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b x^2(s)ds \right)^{1/2} = \left(\int_a^b K^2(t,s)ds \right)^{1/2} \|x\|.$$

Отметим, что $\|x\|$ — константа, т.е. на зависит от t.

Далее, из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_a^b y^2(s)ds \leq \int_a^b dt \int_a^b K^2(t,s)ds \cdot \|x\|^2 = \int_Q K^2(t,s)dtds \cdot \|x\|^2. \qquad (2)$$

Здесь при сведении повторного интеграла к кратному мы опять применили теорему Фубини. Заметим, что норма $K(t,s)$ в пространстве $L_2(Q)$ равна

$$\|K\| = \left(\int_a^b K^2(t,s)ds \right)^{1/2}.$$

Поэтому, извлекая корень квадратный из обеих частей неравенства (2), получаем $\|y\| \le \|K\| \cdot \|x\|$, т.е.

$$\|Ax\| \le \|K\| \cdot \|x\|.$$

Из этого неравенства следует, что $A : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ — линейный ограниченный оператор, и его норма $\|A\| \le \|K\|$.

Теперь найдем оператор, сопряженный к A. Пусть $f \in L_2(a,b)$. Мы показали выше, что если $f \in L_2(a,b)$. то $y = Ax \in L_2(a,b)$. Произведение функций из $L_2(a,b)$ интегрируемо, поэтому существует

$$\int_a^b y(t)f(t) = \int_a^b f(t)dt \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

С другой стороны этот интеграл равен скалярному произведению (y,f), благодаря которому f определяет линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, который будем обозначать также f, т.е. считать, что $f(y) := (y,f)$.

В силу того, что для интеграла Лебега интегрируемость равносильна абсолютной, нетрудно убедиться, что существует повторный интеграл

$$\int_a^b dt \int_a^b |K(t,s)|\,|x(s)|\,|f(t)|ds$$

Тогда функция $|K(t,s)|\,|x(s)|\,|f(t)|$ интегрируема в квадрате Q и по теореме Фубини можно равны повторные интегралы, получающиеся сменой порядка интегрирования. Получаем:

$$(y,f) = (Ax,f) = \int_a^b dt \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,f(t)ds = \int_a^b ds \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,f(t)dt =$$

$$= \int_a^b x(s)\,ds \int_a^b K(t,s)\,f(t)dt = (x, A^* f),$$

где

$$A^* f(s) = \int_a^b K(t,s)\,f(t)dt.$$

Меняя обозначения переменных, получаем

$$A^* f(t) = \int_a^b K(s,t)\,f(s)ds,$$

т.е. $A^* f$ также является интегральным оператором с ядром $K(s,t)$. Ядро $K(s,t)$ называется транспонированным к ядру ядром $K(t,s)$.

В комплексном случае транспонированное к ядру $K(t,s)$ ядро имеет вид $\overline{K(s,t)}$, т.е. кроме изменения местами переменных в ядре нужно еще произвести операцию комплексного сопряжения.

11 Уравнения Фредгольма в банаховом пространстве. Теория Рисса-Шаудера

11.1 Операторы Фредгольма. Нормальная разрешимость

Пусть E — банахово пространство. Оператор $A \in L(E)$ называется оператором Фредгольма, если он представим в виде

$$A = I - T,$$

где оператор I — тождественный, а T — вполне непрерывный.

Отметим, что оператор A^*, сопряженный к фредгольмову оператору A, является также фредгольмовым, так как

$$A^* = (I - T)^* = I^* - T^* - I - T^*,$$

а оператор T^* вполне непрерывен как сопряженный к вполне непрерывному.

Мы будем рассматривать четыре вида уравнений:

1) неоднородное уравнение Фредгольма для оператора A в пространстве E:

$$Ax = y,$$

2) однородное уравнение Фредгольма для оператора A в пространстве E:

$$Ax = \theta,$$

3) неоднородное уравнение Фредгольма для оператора A^* в сопряженном пространстве E^*:

$$A^* f = g,$$

4) однородное уравнение Фредгольма для оператора A^* в сопряженном пространстве E^*:

$$A^* f = \theta,$$

Введем следующие обозначения: $N(A)$ — ядро оператора A, $R(A)$ — область значений оператора A. Если A — произвольный ограниченный оператор, то $N(A)$ — подпространство в E, в то время как $R(A)$ — линеал, не всегда топологически замкнутый.

Оператор A называется нормально разрешимым, если $R(A)$ — подпространство в E.

Теорема. *Любой оператор Фредгольма нормально разрешим.*

Доказательство. Пусть $A = I - T$ — оператор Фредгольма. Тогда T — вполне непрерывный оператор. Рассмотрим произвольную последовательность $y_n \in R(A)$, сходящуюся к некоторому y. Требуется доказать, что $y \in R(A)$. Можно считать, что $y \neq \theta$, иначе очевидно, что $y \in R(A)$.

Поскольку $y_n \to y \neq \theta$, будем считать, что $y_n \neq \theta$. Так как $y_n \in R(A)$, существуют $x_n \in A : y_n = Ax_n \neq \theta$. Значит, $x_n \notin N(A)$. Так как $N(A)$ — подпространство в E, $d_n := \operatorname{dist}(x_n, N(A)) > 0$. Поскольку $\operatorname{dist}(x_n, N(A)) = \inf_{z \in N(A)} \|x_n - z\|$, в силу характеристического свойства инфимума существуют $z_n \in N(A)$ такие, что

$$d_n \leq \|x_n - z_n\| \leq 2d_n.$$

Установим, что последовательность d_n ограничена в $\mathbb{R}$. Предположим противное. Тогда можно считать, что $d_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $x_n - z_n \neq \theta$ для всех n. Обозначим

$$x'_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}.$$

Ясно, что $\|x'_n\| = 1$, $n \geq 1$. Имеем

$$Ax'_n = \frac{Ax_n - Az_n}{\|x_n - z_n\|} = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|},$$

потому что $Ax_n = y_n$ и $Az_n = \theta$. При $n \to \infty$ имеем $y_n \to y$ и $\|x_n - z_n\| \to \infty$, поэтому $Ax'_n \to \theta$.

Далее $I = A + T$, поэтому $x'_n = Ax'_n + Tx'_n$. Последовательность x'_n ограничена, а оператор T вполне непрерывен. Поэтому, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что последовательность Tx'_n сходится к некоторому $z \in E$. Тогда $x'_n = Ax'_n + Tx'_n \to \theta + z = z$. Кроме того, в силу непрерывности оператора A имеем $Ax'_n \to Az$. Но $Ax'_n \to \theta$, поэтому $Az = \theta$, т.е. $z \in N(A)$.

Последовательность $x'_n \to z$, поэтому существует такое N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\|x'_n - z\| < \frac{1}{3}$ b. Вспоминая определение x'_n получаем

$$\left\| \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} - z \right\| < \frac{1}{3} \Rightarrow \|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\| \, z)\| < \frac{1}{3} \|x_n - z_n\| \leq \frac{2}{3} d_n < d_n,$$

С другой стороны, элемент $z_n + \|x_n - z_n\| \, z$ является линейной комбинацией элементов z_n и z из $N(A)$, поэтому в силу определения расстояния от точки до множества имеем

$$\|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\| \, z)\| \geq d_n.$$

Полученное противоречие доказывает, что d_n ограничена.

Значит, $x_n - z_n$ — ограниченная последовательность. Имеем

$$x_n - z_n = A(x_n - z_n) + T(x_n - z_n) = y_n + T(x_n - z_n).$$

По предположению, последовательность $y_n \to y$. Оператор T вполне непрерывен, поэтому можем считать, что последовательность $y_n + T(x_n - z_n)$ сходится к некоторому элементу x. Тогда $x_n - z_n = y_n + T(x_n - z_n)$ тоже сходится к x. Наконец, в силу непрерывности A

$$A(x_n - z_n) = Ax_n - Az_n = y_n \to Ax,$$

$n \to \infty$. Но $y_n \to y$, поэтому в силу единственности предела $y = Ax$. Это означает, что $y \in N(A)$ и теорема доказана.

11.2 Теоремы Фредгольма

Теперь установим три знаменитые теоремы Фредгольма.

Теорема 1. *Пусть A — оператор Фредгольма в банаховом пространстве E и y — некоторый фиксированный элемент из E. Уравнение $Ax = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in N(A^*)$ выполняется равенство $f(y) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение $Ax = y$ разрешимо. Тогда существует по крайней мере один $x \in E$ такой, что $Ax = y$. Тогда для любого $f \in N(A^*)$ имеем

$$f(y) - f(Ax) = A^*f(x) = \theta(x) = 0,$$

поскольку $A^*f = \theta$ — нулевой функционал.

Достаточность. Предположим, что для любого $f \in N(A^*)$ выполняется равенство $f(y) = 0$. Докажем, что уравнение $Ax = y$ разрешимо, т.е. $y \in R(A)$. Предположим противное. По предыдущей теореме оператор A нормально разрешим, поэтому $R(A)$ — подпространство. Если $y \notin R(A)$, то по следствию из теоремы Хана-Банаха существует функционал f такой. что $f \equiv 0$ на $R(A)$ и $f(y) \neq 0$.

Теперь рассмотрим любой элемент $x' \in E$. Тогда $y' = Ax' \in R(A)$ и, поскольку $f \equiv 0$ на $R(A)$,

$$0 = f(y') = f(Ax') = A^*f(x')$$

Итак, функционал A^*f равен нулю на любом элементе из E. Поэтому $A^*f = \theta$. Значит, $f \in N(A^*)$. По предположению, тогда $f(y) = 0$. Но по построению $f(y) \neq 0$. Противоречие доказывает теорему.

Теорема 2 (альтернатива Фредгольма). *Пусть A — оператор Фредгольма в банаховом пространстве E. Или уравнение $Ax = y$ разрешимо для любой правой части $y \in E$ или однородное уравнение имеет нетривиальное решение.*

Замечание. Теорему 2 можно сформулировать в такой форме: для оператора Фредгольма A в банаховом пространстве $R(A) = E$ тогда и только тогда, когда $N(A) = \{\theta\}$, т.е. A сюръективен тогда и только тогда, когда он инъективен.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что уравнение $Ax = y$ разрешимо для любой правой части $y \in E$, но $N(A) \neq \{\theta\}$. Тогда существует $x_1 \neq \theta$ такой, что $Ax_1 = \theta$. Уравнение $Ax = y$ разрешимо для любой правой части, поэтому существует элемент $x_2 \in E$ такой, что $Ax_2 = x_1$. Аналогично существует элемент $x_3 \in E$ такой, что $Ax_3 = x_2$. Продолжая этот процесс, строим последовательность $x_n \in E$ такую, что $Ax_{n+1} = x_n$.

Рассмотрим $E_n = N(A^n)$ — ядро оператора A^n. Как ядро линейного непрерывного оператора E_n — подпространство в E. Имеем

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$$

Действительно, если $x \in E_n$, т.е. $A^n x = \theta$, то $A^{n+1}x = A(A^n x) = A\theta = \theta$, т.е. $x \in E_{n+1}$. При этом, $E_{n-1} \subset E_n$, но $E_{n-1} \neq E_n$, поскольку $x_n \in E_n \setminus E_{n-1}$. Действительно, по построению, $A^{n-1}x_n = x_1 \neq \theta$, но $A^n x_n = Ax_1 = \theta$. Отметим также, что $AE_n \subset E_{n-1}$, поскольку если $x \in E_n$, т.е. $A^n x = \theta$, то $A^{n-1}Ax = \theta$, т.е. $Ax \in E_{n-1}$.

По лемме о почти перпендикуляре существует $y_n \in E_n$ такое, что $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dist}(y_n, E_{n-1}) > 1/2$. Поскольку $I = A + T$, имеем $y_n = Ay_n + Ty_n$. Последовательность y_n ограничена, а T вполне непрерывен. Тогда последовательность Ty_n должна содержать фундаментальную подпоследовательность. С другой стороны, $Ty_n = y_n - Ay_n$. Пусть $n > m$. Тогда

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|(y_n - Ay_n) - (y_m - Ay_m)\| = \|y_n - (y_m + Ay_n - Ay_m)\| > 1/2,$$

поскольку $y_m + Ay_n - Ay_m \in E_{n-1}$. Действительно, $y_m \in E_m \subset E_{n-1}$. Поскольку $y_m \in E_m$, элемент $Ay_m \in E_{m-1} \subset E_{n-1}$. Наконец, $y_n \in E_n$, откуда $Ay_n \in E_{n-1}$. Итак, y_m, Ay_n и Ay_m принадлежат подпространству E_{n-1}, поэтому $y_m + Ay_n - Ay_m \in E_{n-1}$.

Теперь, учитывая, что $\|Ty_n - Ty_m\| > 1/2$ при $n > m$, убеждаемся, что Ty_m не содержит никакой фундаментальной подпоследовательности. Противоречие доказывает необходимость условия теоремы.

Достаточность. Пусть $N(A) = \{\theta\}$. Требуется доказать, что $R(A) = E$. Предварительно установим, что уравнение $A^* f = g$ имеет решение для любой правой части g.

Уравнение $A^* f = g$ равносильно тому, что $f(Ax) = g(x)$ для любого $x \in E$. Оператор A отображает E на $R(A)$. Поскольку оператор Фредгольма нормально разрешим, $R(A)$ — подпространство банахова пространства E. Поэтому $R(A)$ — банахово. Ядро оператора A по условию тривиально. Если мы будем рассматривать A как оператор $A : E \to R(A)$, то по теореме Банаха об обратном операторе существует обратный $A^{-1} : R(A) \to E$. Теперь определим функционал $f : R(A) \to \Lambda$

по формуле: $f(x) = g(A^{-1}x)$. Он является линейным ограниченным на $R(A)$, поэтому по теореме Хана-Банаха существует его продолжение на E. Обозначим его также f. Ясно, что $f(Ax) = g(x)$, $x \in E$, поэтому уравнение $A^*f = g$ имеет решение для любой правой части g. Теперь применим уже доказанную необходимость условия теоремы к оператору A^*. Получаем, что $N(A^*) = \{\theta\}$. В силу теоремы 1 отсюда следует, что уравнение $Ax = y$ разрешимо для любого y, поскольку если $f \in N(A^*)$, то f — нулевой функционал и тогда $f(y) = \theta(y) = \theta$. Теорема доказана.

Строение ядер оператора Фредгольма и сопряженного к нему.

Лемма 1. *Если A — оператор Фредгольма в банаховом пространстве E, то его ядро конечномерно.*

Доказательство. Если $x \in N(A)$, то $Ax = \theta$, откуда $Tx = x$. Если бы ядро $N(A)$ было бы бесконечномерно, то на нем вполне непрерывный оператор совпадал бы с тождественным. Но тождественный оператор не является вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве. Лемма доказана.

Введем определения. Пусть $x_1,\ x_2, \ldots, x_n \in E$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E^*$ — две конечные системы элементов. Будем говорить, что система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ биортогональна системе векторов $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, если для любых k и j имеют место равенства $f_k(x_j) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Если эти условия выполняются, то говорят также, что система векторов $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ биортогональна системе функционалов $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Методом полной математической индукции нетрудно установить следующий результат.

Лемма 2. *Для любой линейно независимой системы векторов (функционалов) существует биортогональная ей система функционалов (векторов).*

С помощью этой леммы устанавливается

Теорема 3. *Для любого оператора Фредгольма A в банаховом пространстве E ядра $N(A)$ и $N(A^*)$ конечномерны и их размерности совпадают:*

$$\dim N(A) = \dim N(A^*).$$

Доказательство. В силу леммы 1 ядра конечномерны. Осталось доказать, что их размерности совпадают.

Пусть $n = \dim N(A)$, $m = \dim N(A^*)$. Докажем, что $n \geq m$.

Предположим противное, т.е. что $n < m$. Пусть $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — базис в $N(A)$. В силу леммы 2 существует биортогональная ей система функционалов $\varphi_1,\ \varphi_2 \ldots, \varphi_n$.

Пусть теперь $f_1,\ f_2, \ldots, f_m$ — базис $N(A^*)$. По лемме 2 существует биортогональная ему система векторов $z_1,\ z_2, \ldots, z_m$.

Построим оператор

$$Kx := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) z_k.$$

Оператор K конечномерен (множество его значений — лежит в подпространстве, порожденном конечным числом векторов $z_1,\ z_2, \ldots, z_n$.) Поэтому K вполне непрерывен. Теперь рассмотрим оператор $B = A - K$. Имеем $B = (I-T) - K = I - (T+K)$. Поскольку оператор $T+K$ вполне непрерывен как сумма вполне непрерывных операторов T и K, оператор B является оператором Фредгольма.

Докажем, что $N(B) = \{\theta\}$. Пусть $x \in N(B)$. Тогда $Bx = \theta$, т.е.

$$Ax - Kx = Ax - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) z_k = \theta.$$

Применяя к обеим частям этого равенства функционал f_j и пользуясь биортогональностью, получаем

$$A^* f_j(x) = f_j(Ax) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_j(z_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \delta_{jk} = \varphi_j(x).$$

Но $f_j \in N(A^*)$, поэтому $A^* f_j = \theta$ — нулевой функционал. Значит, $A^* f_j(x) = 0$, т.е. $\varphi_j(x) = 0$, $1 \leq j \leq n$. Эти равенства означают, что $Kx = \theta$, и поскольку $Ax - Kx = \theta$, заключаем, что $Ax = \theta$, т.е. $x \in N(A)$.

Разложим x по базису ядра $N(A)$: $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Тогда

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_j(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{jk} = \alpha_j$$

Но выше было доказано, что $\varphi_j(x) = 0$, поэтому $\alpha_j = 0$ для любого j. Итак, $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \theta$.

Таким образом мы показали, что ядро $N(B)$ тривиально. Значит, в силу альтернативы Фредгольма уравнение $Bx = y$ разрешимо для любой правой части. Возьмем в качестве правой части z_{n+1}. (Здесь мы пользуемся тем, что по предположению $m > n$). Вспоминая определение оператора B, заключаем, что существует $x \in E$ такой, что

$$Ax - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) z_k = z_{n+1}.$$

Теперь применим к обеим частям этого равенства функционал f_{n+1}. Получаем

$$f_{n+1}(Ax) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_{n+1}(z_k) = f_{n+1}(z_{n+1}).$$

При этом $f_{n+1}(Ax) = A^* f_{n+1}(x) = 0$, поскольку $f_{n+1} \in N(A^*)$ и $f_{n+1}(z_k) = \delta_{n+1,k} = 0$ в силу того, что $n+1 > n \geq k$. Отсюда следует, что левая часть $f_{n+1}(Ax) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) f_{n+1} z_k$ равна нулю. В то же время правая часть $f_{n+1}(z_{n+1}) = \delta_{n+1,n+1} = 1$.

Противоречие доказывает, что $n \geq m$, т.е.

$$\dim N(A) \geq \dim N(A^*).$$

Применяя это утверждение к сопряженному оператору, получаем

$$\dim N(A^*) \geq \dim N(A^{**}).$$

Но A — сужение оператора A^{**}, поэтому $N(A) \subset N(A^{**})$ и $\dim N(A^{**}) \geq \dim N(A)$. Это доказывает, что

$$m = \dim N(A^*) \geq \dim N(A) = n.$$

Наконец, из неравенств $n \geq m$ и $m \geq n$ следует, что $n = m$. Теорема доказана.

В итоге сформулируем еще раз в более кратком виде три теоремы Фредгольма для оператора Фредгольма в банаховом пространстве E.

Теорема 1. $y \in R(A) \;\Leftrightarrow\; f(y) = 0 \;\; \forall \;\; f \in N(A^*)$.

Теорема 2. $R(A) = E \;\Leftrightarrow\; N(A) = \{\theta\}$.

Теорема 3. $\dim N(A) = \dim N(A^*) < +\infty$.

12 Интегральные операторы и уравнения Фредгольма

12.1 Спектр вполне непрерывного оператора

Рассмотрим свойства спектра вполне непрерывного оператора A в банаховом пространстве E.

1) *Если оператор A вполне непрерывен в бесконечномерном пространстве E, то $\lambda = 0 \in \sigma(A)$.*

Действительно, если бы $\lambda = 0$ было бы регулярным значением, то оператор $A - 0 \cdot I = A$ был бы обратим и существовал бы его обратный — B. Тогда мы бы имели $I = BA$. Произведение ограниченного B и вполне непрерывного оператора A является вполне непрерывным. Таким образом, мы получили бы, что I является вполне непрерывным. Но I не является вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве — противоречие.

Отметим, что $\lambda = 0$ может принадлежать как дискретной, так и непрерывной части спектра. К примеру, если ядро A нетривиально, то любой элемент $x \in N(A)$, $x \neq \theta$, является собственным вектором соответствующим собственному значению $\lambda = 0$:

$$Ax = \theta = 0 \cdot x.$$

Число $\lambda = 0$ может принадлежать и непрерывной части спектра.

Пример. Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$$

в пространстве $C[0,1]$. Никакой элемент $x \in C[0,1]$ не является собственным вектором для значения $\lambda = 0$, потому что из равенства

$$\int_0^t x(s)ds \equiv 0$$

после дифференцирования следует, что $x(t) \equiv 0$. Но пространство $C[0,1]$ бесконечномерно, поэтому $\lambda = 0$ — точка спектра.

2) *Любое ненулевое $\lambda \in \sigma(A)$ является собственным значением A конечной кратности, т.е. существует конечное число линейно независимых векторов, которые являются собственными векторами оператора A, отвечающими собственному значению λ.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда $A_\lambda = A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$. Ясно, что оператор A_λ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $I - \lambda^{-1}A$. Но A вполне непрерывен, поэтому $\lambda^{-1}A$ также вполне непрерывен. Отсюда следует, что оператор $I - \lambda^{-1}A$ является оператором Фредгольма. Теперь заметим, что ядро оператора $I - \lambda^{-1}A$ нетривиально. В противном случае он был бы инъективен и по альтернативе Фредгольма сюръективен. Тогда по «большой» теореме Банаха он был бы обратим, что невозможно. Итак, ядро оператора $I - \lambda^{-1}A$ нетривиально. Но (ненулевой) вектор принадлежит этому ядру тогда и только тогда. когда он является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ. Поскольку по теореме 3 об операторах Фредгольма ядро оператора $I - \lambda^{-1}A$ конечномерно, делаем вывод, что количество линейно независимых векторов, соответствующих собственному значению λ конечно. Более того, максимальное число таких векторов совпадает с размерностью ядра оператора $I - \lambda^{-1}A$.

3) *Собственные векторы оператора A, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство проведем с помощью метода полной математической индукции по числу векторов n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо для векторов, количество которых равно $2,\ 3, \ldots, n-1$. докажем, что для n векторов оно также справедливо. Итак, рассмотрим вектора $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1,\ Ax_2 = \lambda_2 x_2, \ldots, Ax_n = \lambda_n x_n.$$

Предположим, что их линейная комбинация равна нулю:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор A. Получим

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n x_n = \theta.$$

Теперь умножая первое равенство на λ_n и вычитая второе, получим:

$$\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \alpha_2(\lambda_n - \lambda_2)x_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})\alpha_{n-1}x_{n-1} = \theta.$$

По предположению индукции вектора x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ линейно независимы, поэтому все коэффициенты $\alpha_j(\lambda_n - \lambda_j) = 0$, $1 \le j \le n-1$. Поскольку $\lambda_n \ne \lambda_j$, $1 \le j \le n-1$, заключаем, что $\alpha_j = 0$, $1 \le j \le n-1$. Поэтому $\alpha_n x_n = \theta$. Вектор $x_n \ne \theta$, поэтому $\alpha_n = 0$. Итак, $\alpha_j = 0$, $1 \le j \le n$. Это и означает линейную независимость векторов x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Теперь установим важную теорему о спектре вполне непрерывного оператора в бесконечномерно банаховом пространстве E.

Теорема. *Спектр вполне непрерывного оператора A в бесконечномерно банаховом пространстве E состоит из нуля и не более чем счетного числа собственных значений $\lambda_n \ne 0$ конечной кратности. В случае бесконечного числа λ_n последовательность $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Большинство утверждений было доказано выше. Осталось показать, что если число попарно различных λ_n бесконечно, то $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это эквивалентно тому, что вне любого круга $\{|\lambda| \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, содержится не более чем конечное число λ_n.

Предположим противное, т.е. что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное число точек спектра, содержащихся во внешности круга $\{|\lambda| > \varepsilon\}$. Тогда существует последовательность λ_n точек спектра $\sigma(A)$ такая, что $|\lambda_n| > \varepsilon$.

Для любого n существует собственный вектор x_n такой. что $Ax_n = \lambda_n x_n$. Так как все λ_n попарно различны, вектора x_n линейно независимы. Пусть E_n — линеал, натянутый на вектора x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Поскольку E_n конечномерный линеал. он является подпространством в E. Очевидно, что

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots,$$

причем $E_{n-1} \ne E_n$, $n \ge 2$. Рассмотрим вектор $y \in E_n$. Он раскладывается по порождающей это подпространство системе векторов x_1, $x_2, \ldots, x_n$, т.е.

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Тогда
$$Ay = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \alpha_2\lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n x_n \in E_n.$$
Обозначим $\mu_k = \lambda_n^{-1}$. Тогда $|\mu_k| = |1/\lambda_k| \le 1/\varepsilon$, $k \ge 1$. Имеем
$$y - \mu_n Ay = \alpha_1(1-\lambda_1\mu_n)x_1 + \alpha_2(1-\lambda_2\mu_n)x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}(1-\lambda_{n-1}\mu_n)x_{n-1} \in E_{n-1}.$$

По лемме о почти перпендикуляре для любого $n \ge 2$ существует $y_n \in E_n$ такой, что $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dist}(y_n, E_{n-1}) > 1/2$. Последовательность y_n ограничена в E, а последовательность μ_n ограничена в Λ, поэтому последовательность $\mu_n y_n$ тоже ограничена. Оператор A вполне непрерывен. Следовательно, последовательность $A(\mu_n y_n) = \mu_n Ay_n$ содержит фундаментальную подпоследовательность. Однако при $n > m$ имеем
$$\|\mu_n Ay_n - \mu_m Ay_m\| = \|y_n - [(y_n - \mu_n Ay_n) + \mu_m Ay_m]\|.$$
Заметим, что выше мы показали, что $y_n - \mu_n Ay_n \in E_{n-1}$. Вектор $Ay_m \in E_m$, поскольку $y_m \in E_m \subset E_{n-1}$. Значит, $z := (y_n - \mu_n Ay_n) + \mu_m Ay_m \in E_{n-1}$. Отсюда следует, что
$$\|\mu_n Ay_n - \mu_m Ay_m\| = \|y_n - z\| \ge \operatorname{dist}(y_n, E_{n-1}) > 1/2.$$
Таким образом, $\|\mu_n Ay_n - \mu_m Ay_m\| > 1/2$, $n \ne m$, и последовательность $\mu_n Ay_n$ не может содержать никакой фундаментальной подпоследовательности. Противоречие доказывает теорему.

12.2 Вполне непрерывность некоторых интегральных операторов

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:
$$x(t) - \mu\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$
где $K(t,s)$, $y(t)$ — известные функции, μ — фиксированная константа, $x(t)$ — неизвестная функция.

Возможны следующие основные ситуации.

1) Мы решаем уравнение Фредгольма (1) в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$. При этом, функция $y(t)$ непрерывна, ядро $K(t,s)$

а) либо непрерывно всюду в квадрате $Q := [a,b] \times [a,b]$,

б) либо ограничено в квадрате Q и непрерывно за исключением конечного числа линий вида $s = \varphi_k(t)$, $a \le t \le b$, где φ_k — непрерывные функции.

Будем называть ядро $K(t,s)$ регулярным, если оно удовлетворяет либо а), либо более общему условию б).

2) Мы решаем уравнение Фредгольма (1) в пространстве $L_2(a,b)$. При этом мы предполагаем, что ядро $K(t,s) \in L_2(Q)$, а функция $y(t) \in L_2(a,b)$.

Мы покажем, что при таких условиях интегральный оператор $\mathcal{K}$, определенный равенством (2) является вполне непрерывным оператором как в пространстве $C[a,b]$, так и в пространстве $L_2(a,b)$.

Сначала установим вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если ядро $K(t,s)$ регулярно, то линейный оператор (2) действует из $L_2(a,b)$ в $C[a,b]$ и является вполне непрерывным.*

Доказательство проводится с помощью теоремы Арцела-Асколи. Рассмотрим более простой случай, когда ядро удовлетворяет условию а), т.е. непрерывно в квадрате Q. Тогда ядро ограничено, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что $|K(t,s)| \le M$, $a \le t, s \le b$.

Пусть функция $x \in L_2(a,b)$. Тогда, как мы показывали ранее, $\mathcal{K}x(t)$ — функция из $L_2(a,b)$. При этом, в силу неравенства Коши-Буняковского

$$|\mathcal{K}x(t)| = \left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \int_a^b |K(t,s)||x(s)|ds \le M\int_a^b |x(s)|ds \le$$

$$\le M\left(\int_a^b |x(s)|^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_a^b ds\right)^{1/2} = M\sqrt{b-a}\,\|x\|_{L_2(a,b)}. \qquad (3)$$

Далее, поскольку $K(t,s)$ непрерывно на компактном множестве Q, оно равномерно непрерывно. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых t_1, $t_2 \in [a,b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и для любого $s \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon.$$

Тогда если мы обозначим $y(t) = \mathcal{K}x(t)$, то при $|t_1 - t_2| < \delta$, применяя опять неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|y(t_1)-y(t_2)| = |\mathcal{K}x(t_2)-\mathcal{K}x(t_2)| = \left|\int_a^b K(t_1,s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2,s)x(s)ds\right| =$$

$$= \left|\int_a^b (K(t_1,s) - K(t_2,s))x(s)ds\right| \le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|ds \le$$

$$\le \varepsilon \int_a^b |x(s)|ds \le \varepsilon\sqrt{b-a}\,\|x\|_{L_2(a,b)}. \tag{4}$$

Из последнего неравенства следует, что функция $y(t) = \mathcal{K}x(t)$ непрерывна на $[a,b]$, т.е. оператор $\mathcal{K}$ действует из $L_2(a,b)$ в $C[a,b]$. Во-вторых, если мы рассмотрим ограниченное семейство функций $x(t)$ в пространстве $L_2(a,b)$, т.е. такое, что $\|x\|_{L_2(a,b)} \le C$ для любой функции x из этого семейства, то семейство $\mathcal{F}$ их образов $y(t) = \mathcal{K}x(t)$ будет равностепенно, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$ для любой функции $y \in \mathcal{F}$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le \sqrt{b-a}\,C\,\varepsilon.$$

Наконец, из (3) следует равномерная ограниченность семейства $\mathcal{F}$:

$$|y(t)| \le \sqrt{b-a}\,C\,M.$$

В силу классической теоремы Арцела-Асколи семейство $\mathcal{F}$ относительно компактно в $C[a,b]$. Итак, оператор $\mathcal{K}$ переводит любой семейство, ограниченное в $L_2(a,b)$ в семейство, относительно компактное в $C[a,b]$. Это означает, что оператор $\mathcal{K} : L_2(a,b) \to C[a,b]$ ограничен. Лемма доказана.

Справедлива

Теорема 1. *Если ядро $K(t,s)$ регулярно, то оператор*

$$\mathcal{K}x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \tag{2}$$

является вполне непрерывным оператором в пространстве $C[a,b]$.

Как и лемма, теорема доказывается с помощью теоремы Арцела-Асколи. Рассмотрим более простой случай а) (случай б) требует более тонких рассуждений).

Рассмотрим ограниченное семейство функций $x(t)$, непрерывных на $[a,b]$. Это означает, что существует константа C такая. что для любой функции $x(t)$ из семейства

$$\|x\|_{C[a,b]} := \max_{a\le t\le b} |x(t)| \le C.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{K}$ действует из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Это — следствие теоремы о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.

Теперь мы хотим показать, что семейство $\mathcal{F}$ функции $y(t) = \mathcal{K}x(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Для этого нам нужно установить справедливость оценок, аналогичных оценкам (3) и (4), только вместо нормы $x(t)$ в пространстве $L_2(a,b)$ мы должны использовать норму в пространстве $C[a,b]$. Рассуждая сначала как и при доказательстве (3), но используя затем вместо неравенства Коши-Буняковского оценку интеграла через максимум подинтегральной функции, мы получаем (см. (3)):

$$|\mathcal{K}x(t)| \le M \int_a^b |x(s)|ds \le M(b-a)\|x\|_{C[a,b]}. \tag{3'}$$

Аналогично вместо (4) имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le \varepsilon \int_a^b |x(s)|ds \le \varepsilon(b-a)\|x\|_{C[a,b]}. \tag{4'}$$

Поскольку для функции $x(t)$ из рассматриваемого семейства $\|x\| \le C$, то из $(3')$ следует равномерная ограниченность семейства $\mathcal{F}$, а из $(4')$ равностепенная непрерывность. С помощью теоремы Арцела-Асколи видим, что семейство $\mathcal{F}$ относительно компактно. Это и означает вполне непрерывность оператора $\mathcal{K}$ как оператора, действующего в пространстве $C[a,b]$. Теорема 1 доказана.

Как следствие леммы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть ядро $K(t,s)$ оператора $\mathcal{K}$ принадлежит пространству $L_2(Q)$. Тогда оператор $\mathcal{K}$ действует вполне непрерывно из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай, когда ядро $K(t,s)$ непрерывно. В силу леммы выше оператор $\mathcal{K} : L_2(a,b) \to C[a,b]$ вполне непрерывен. Далее заметим, что $C[a,b] \subset L_2(a,b)$ и в силу оценки

$$\|x\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \max_{[a,b]} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} =$$

$$= \max_{[a,b]} |x(t)| \left(\int_a^b dt\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\, \|x\|_{C[a,b]}$$

оператор вложения $A : C[a,b] \to L_2(a,b)$ сопоставляющий непрерывной функции $x(t)$, т.е. элементу пространства $C[a,b]$ эту же функцию, но рассматриваемую как элемент пространства $L_2(a,b)$ является линейным ограниченным оператором:

$$\|Ax\|_{L_2(a,b)} \leq \sqrt{b-a}\, \|x\|_{C[a,b]}.$$

Теперь рассмотрим произведение (суперпозицию) операторов

$$A\mathcal{K} : L_2(a,b) \to L_2(a,b).$$

Этот оператор является произведением ограниченного оператора A и вполне непрерывного оператора $\mathcal{K}$ поэтому он вполне непрерывен.

Теперь рассмотрим общий случай. Воспользуемся тем фактом, что множество всех непрерывных функций, определенных на квадрате Q, плотно в $L_2(a,b)$. В силу этого существует последовательность непрерывных ядер $K_n(t,s)$, которая сходится в $L_2(Q)$ к ядру $K(t,s)$. Эти ядра определяют линейные операторы

$$\mathcal{K}_n x(t) = \int_a^b K_n t, s) x(s) ds, \tag{4}$$

которые, как мы показали выше, вполне непрерывны.

Докажем, что $\mathcal{K}_n \to \mathcal{K}$, $n \to \infty$, в пространстве линейных ограниченных операторов на $L_2(Q)$. С помощью неравенства Коши-Буняковского и теоремы Фубини имеем

$$\int_a^b (\mathcal{K}_n x(t) - \mathcal{K}x(t))^2 dt = \int_a^b dt \left(\int_a^b [K_n(t,s) - K(t,s)] x(s) ds\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_a^b dt \int_a^b (K_n(t,s) - K(t,s))^2 ds \int_a^b x(s)^2 ds =$$

$$= \|x\|^2_{L_2(a,b)} \int_a^b dt \int_a^b (K_n(t,s) - K(t,s))^2 ds = \|x\|^2_{L_2(a,b)} \|K_n - K\|^2_{L_2(Q)}.$$

Извлекая корень квадратный, получаем

$$\|\mathcal{K}_n x - \mathcal{K} x\|_{L_2(a,b)} \leq \|K_n - K\|_{L_2(Q)} \|x\|^2_{L_2(a,b)}.$$

Это означает, что

$$\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}\| \leq \|K_n - K\|_{L_2(Q)},$$

и поскольку $\|K_n - K\|_{L_2(Q)}$, заключаем, что $\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}\| \to 0,\ n \to \infty$.

Таким образом, оператор $\mathcal{K}$ является пределом последовательности вполне непрерывных операторов $\mathcal{K}_n$ в $L_2(a,b)$. Поскольку множество вполне непрерывных операторов образует подпространство (значит, топологически замкнутое множество), отсюда следует, что оператор $\mathcal{K}$ вполне непрерывен в $L_2(a,b)$. Теорема 2 доказана.

12.3 Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в пространстве $L_2(a,b)$

Для простоты мы будем рассматривать случай вещественного пространства $L_2(a,b$.

Пусть $K(t.s) \in L_2(Q)$, $Q = [a,b]^2$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{1}$$

Здесь $y(t)$ — заданная функция из пространства $L_2(a,b)$, μ — фиксированный вещественный параметр. Из теоремы 2 следует, что оператор

$$Tx(t) = \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

является вполне непрерывным в пространстве $L_2(a,b)$. Поэтому уравнение (1) можно записать в виде $(I-T)x = y$ или $Ax = y$, где $A = I - T$ — оператор Фредгольма.

Оператор, сопряженный к $A = I - T$ имеет вид $A^* = I - T^*$, где

$$T^*x(t) = \mu \int_a^b K(s,t)x(s)ds.$$

Рассмотрим однородное уравнения для оператора A:

$$x(t) - \mu \int_a^b K(t,s)x(s)ds = 0, \quad a \le t \le b. \tag{1'}$$

а также неоднородное и однородное уравнения для сопряженного оператора

$$f(t) - \mu \int_a^b K(s,t)f(s)ds = g(t), \quad a \le t \le b. \tag{2}$$

$$f(t) - \mu \int_a^b K(s,t)f(s)ds = 0, \quad a \le t \le b. \tag{2'}$$

Сформулируем три теоремы Фредгольма для этих интегральных уравнений.

Теорема 1. *Или уравнение* (1) *разрешимо в* $L_2(a,b)$ *при любой правой части* $y(t) \in L_2(a,b)$ *или однородное уравнение* $(1')$ *имеет нетривиальное решение.*

Теорема 2. *Однородные интегральные уравнения* $(1')$ *и* $(2')$ *имеют одинаковое, притом конечное, число линейно независимых решений.*

Теорема 3. *Пусть* $y(t)$ *— заданная функция из пространства* $L_2(a,b)$. *Интегральное уравнение* (1) *имеет решение* $x(t) \in L_2(a,b)$ *тогда и только тогда, когда для любого решения* $f(t)$ *однородного уравнения* $(2')$ *выполняется равенство*

$$\int_a^b y(t)f(t)dt = 0. \tag{3}$$

Замечание 1. Пространство $L_2(a,b)$ является гильбертовым. Любой линейный функционал действует на нем через скалярное произведение. Потому условие (5) означает, что функционал, определенный элементом f, принадлежащим ядру сопряженного оператора (т.е. являющимся решением однородного уравнения $(2')$), примененный к $y(t)$, равен нулю. Интеграл $\int_a^b y(t)f(t)dt$ — это просто скалярное произведение y и f.

Замечание 2. В силу теоремы 2 ядро сопряженного оператора конечномерно. Поэтому условие (3) достаточно проверять на элементах конечного базиса f_1, $f_2, \dots, f_n$ пространства решений:

$$\int_a^b y(t)f_j(t)dt = 0, \quad 1 \le j \le n.$$

12.4 Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в пространстве $C[a,b]$

Рассмотрим разрешимость интегрального уравнения Фредгольма в пространстве $C[a,b]$. Известно, что пространство, сопряженное к $C[a,b]$ устроено как пространство функций ограниченной вариации.

Функция $g:[a,b]\to\mathbb{R}]$ называется функцией ограниченной вариации, если конечна величина

$$\sup_{\tau}|g(t_k)-g(t_{k-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям

$$\tau:\quad a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$$

отрезка $[a,b]$. Этот супремум называется полной вариацией функции g и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$.

Введем понятие интеграла Римана-Стилтьеса. Пусть функции f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}]$. Интегральной суммой Римана-Стилтьеса называется величина

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(g(t_k)-g(t_{k-1})),$$

где точки $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ образуют разбиение τ отрезка $[a,b]$ и ξ_k семейство промежуточных точек, отвечающих разбиению τ. Если существует конечный предел таких интегральных сумм, то этот предел называется интегралом Римана Стилтьеса функции f (относительно функции g) и обозначается

$$\int_a^b f(t)dg(t).$$

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, а функция g имеет ограниченную вариацию, то интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ существует.

Если функция $g(t)\equiv t$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(t)dg(t)=\int_a^b f(t)dt$$

обычный интеграл Римана от функции f по отрезку $[a,b]$.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, а функция g непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Пространство, сопряженное к $C[a, b]$ устроено следующим образом. Если f — элемент из сопряженного пространства. т.е. линейный непрерывный функционал на $C[a, b]$, то существует функция ограниченной вариации g такая, что для любой непрерывной функции $x(t) \in C[a, b]$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t).$$

Функция g определяется не единственным образом, но можно так подобрать g, чтобы норма функционала f совпадала с полной вариацией функции g на отрезке $[a, b]$.

В формулировках теорем Фредгольма используется сопряженный оператор, действующий в сопряженном пространстве. Однако мы можем избежать использования функций ограниченной вариации, сводя дело к пространству $L_2(a, b)$. Для этого установим следующий результат.

Лемма. *Пусть ядро оператора $K(t, s)$ регулярно и функция $y(t) \in C[a, b]$. Если $x(t)$ — решение уравнения*

$$x(t) - \mu \int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

в пространстве $L_2(a, b)$, то оно непрерывно, т.е. $x(t) \in C[a, b]$. Таким образом, в этом случае решения уравнения (1) в пространствах $L_2(a, b)$ и $C[a, b]$ совпадают.

Доказательство. Из (1) следует, что

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t), \quad a \le t \le b.$$

Таким образом, $x = \mu\mathcal{K}x + y$. Если ядро $K(t, s)$ регулярно, то мы показывали, что в этом случае оператор $\mathcal{K}$ действует из $L_2(a, b)$ в $C[a, b]$. Таким образом, $\mathcal{K}x$ — непрерывная функция. Поскольку y непрерывна, заключаем, что $\mu\mathcal{K}x + y$ — непрерывная функция. Это и означает, что x непрерывна. т.е. $x \in C[a, b]$.

Теперь мы можем сформулировать теоремы в случае, когда ядро $K(t,s)$ регулярно и правая часть $y(t) \in C[a,b]$.

Теорема 1. *Или уравнение* (1) *разрешимо в* $C[a,b]$ *при любой правой части* $y(t) \in C[a,b]$ *или однородное уравнение* $(1')$ *имеет нетривиальное решение.*

Теорема 2. *Однородные интегральные уравнения* $(1')$ *и* $(2')$ *имеют одинаковое, притом конечное, число линейно независимых решений.*

Теорема 3. *Пусть* $y(t)$ *— заданная функция из пространства* $C[a,b]$. *Интегральное уравнение* (1) *имеет решение* $x(t) \in C[a,b]$ *тогда и только тогда, когда для любого решения* $f(t)$ *однородного уравнения* $(2')$ *выполняется равенство*

$$\int_a^b y(t)f(t)dt = 0. \tag{3}$$

13 Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

13.1 Определение и примеры самосопряженные операторов

Отметим, что в гильбертовом пространстве сопряженный оператор A^* определяется равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Ранее мы уже отмечали, что это определение несколько отличается от определения сопряженного оператора в банаховом пространстве, поскольку в комплексном случае скалярное произведение антилинейно по второму аргументу.

Оператор A в гильбертовом пространстве называется самосопряженным, если для любых x, $y \in H$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Примеры самосопряженных операторов

1) Оператор умножения на вещественнозначную функцию в комплексном гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$: $Ax(t) = f(t)x(t)$. Имеем

$$(Ax, y) = \int_a^b Ax(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b f(t)x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{f(t)y(t)}d = (x, Ay),$$

поскольку $\overline{f(t)} = f(t)$.

2) Интегральный оператор с симметричным ядром $K(t,s) = K(s,t) \in L_2(Q)$, $Q = [a,b]^2$, в вещественном пространстве $L_2(a,b)$:

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Имеем

$$A^*x(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)ds = \int_a^b K(s,t)x(s)ds = Ax(t),$$

поэтому оператор A самосопряжен.

13.2 Свойства спектра самосопряженного оператора

1) Все собственные значения самосопряженного оператора A вещественны.

Действительно, пусть A самосопряжен и $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Требуется доказать, что λ вещественно. Имеем $(Ax, x) = (x, Ax)$, т.е. $(\lambda x, x) = (x, \lambda x)$. Значит, $\lambda(x,x) = \overline{\lambda}(x,x)$, откуда $\overline{\lambda} = \lambda$, поскольку $(x,x) = \|x\|^2 \neq 0$.

2) Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям самосопряженного оператора A, ортогональны.

Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, причем x, $y \neq \theta$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $(Ax, y) = (x, Ay)$, откуда $(\lambda x, y) = (x, \mu y)$. Учитывая, что в силу 1) μ вещественно, получаем $\lambda(x,y) = \mu(x,y)$, т.е. $(\lambda - \mu)(x,y) = 0$. Поскольку $\lambda \neq \mu$, заключаем, что $(x,y) = 0$, т.е. $x \perp y$.

3) Спектр самосопряженного оператора вещественный, т.е. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \xi + i\eta$, $\eta \neq 0$. Покажем, что $\lambda \notin \sigma(A)$, т.е. оператор $A_\lambda = A - \lambda I$ обратим.

Имеем

$$(A_\lambda)^* = (A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I = A - \overline{\lambda} I = A_{\overline{\lambda}}.$$

Отсюда следует, что $(A_\xi)^* = A_\xi$, т.е. оператор A_ξ самосопряжен. Так как λ и $\overline{\lambda}$ не являются вещественными числами, в силу 1) они не являются собственными значениями оператора A. Значит, $N(A_\lambda) = N(A_{\overline{\lambda}}) = \{\theta\}$. Из тривиальности ядра оператора A_λ следует, что A_λ инъективен. Теперь докажем, что он сюръективен.

Имеем $A_\lambda x = Ax - \lambda x = Ax - (\xi + i\eta)x = (Ax - \xi x) - i\eta x = A_\xi x - i\eta x$. Значит, с использованием равенств $\overline{i\lambda} = -i\lambda$ и $(A_\xi x, x) = (x, A_\xi x)$ для самосопряженного оператора A_ξ получаем

$$\|A_\lambda x\|^2 = (A_\lambda x, A_\lambda x) = (A_\xi x - i\eta x, A_\xi x - i\eta x) =$$

$$= (A_\xi x, A_\xi x) - (A_\xi x, i\eta x) - (i\eta x, A_\xi x) + (i\eta x, i\eta x) =$$
$$= \|A_\xi x\|^2 + i\eta(A_\xi x, x) - i\eta(x, A_\xi x) + \|\eta x\|^2 =$$
$$= \|A_\xi x\|^2 + \|\eta x\|^2 \geq |\eta|^2 \|x\|^2.$$

Итак, A_λ инъективен и $\|A_\lambda x\| \geq |\eta|\,\|x\|$ для любого $x \in H$. Оператор A_λ отображает H на линеал $R(A_\lambda)$. Поэтому существует обратное линейное отображение $A_\lambda : R(A_\lambda) \to H$. Если $y \in R(A_\lambda)$, то существует $x \in H$ такой, что $A_\lambda x = y$. Значит, $x = A_\lambda^{-1} y$ и $\|x\| \leq (1/|\eta| \|A_\lambda x\|)$, т.е.

$$\|A_\lambda^{-1} y\| \leq \frac{1}{|\eta|}\,\|y\|.$$

Теперь покажем, что оператор A_λ нормально разрешим, т.е. линеал $R(A_\lambda)$ является подпространством в H. Пусть $y_n \in R(A_\lambda)$ и $y_n \to y$. Требуется доказать, что $y \in R(A_\lambda)$. Так как $y_n \in R(A_\lambda)$, существует $x_n \in H$ такое, что $A_\lambda x_n = y_n$. В силу фундаментальности y_n имеем

$$\|x_n - x_m\| = \|A_\lambda^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \frac{1}{|\eta|}\,\|y_n - y_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Значит, последовательность x_n тоже фундаментальна. Поскольку H полно, эта последовательность сходится к некоторому $x \in H$. Отсюда следует, что $y_n = A\lambda x_n \to A\lambda x$, $n \to \infty$. Но $y_n \to y$, поэтому $y = A\lambda x$. Это означает, что $y \in R(A_\lambda)$.

Итак, $R(A_\lambda)$ является подпространством в H. Докажем, что $R(A_\lambda) = H$. Предположим, что это не так, т.е. $R(A_\lambda) \neq H$. Тогда существует элемент $z \in R(A_\lambda)^\perp$, не равный нулю. Для любого x имеем

$$(A_{\overline{\lambda}} z, x) = (z, A_{\overline{\lambda}}^* x) = (z, A_\lambda x) = 0,$$

так как $A_\lambda x \in R(A_\lambda)$ и $z \in R(A_\lambda)^\perp$. Таким образом, элемент $A_{\overline{\lambda}} z$ ортогонален любому $x \in H$, поэтому $A_{\overline{\lambda}} z = \theta$. Но выше мы показали, что $N(A_{\overline{\lambda}} z) = \{\theta\}$. Поэтому $z = \theta$ — противоречие.

В результате мы показали, что оператор A_λ инъективен и сюръективен. По теореме Банаха оператор A_λ обратим.

Теперь установим одно свойство самосопряженных операторов.

Теорема. *Если A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве,* то

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Пусть $M = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Имеем для x, таких, что $\|x\| = 1$:

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \, \|x\| \leq \|A\| \, \|x\|^2 = \|A\|.$$

Из этого неравенства следует, что $M \leq \|A\|$.

Теперь докажем, что $\|A\| \leq M$. Из определения M следует, что для x, таких, что $\|x\| = 1$, имеет место неравенство $|(Ax, x)| \leq M$. Тогда для произвольного x верно неравенство

$$|(Ax, x)| \leq M \|x\|^2. \tag{1}$$

В самом деле, при $x = \theta$ это неравенство очевидно. При $x \neq \theta$ вектор $y = \frac{x}{\|x\|}$ лежит на единичной сфере, т.е. $\|y\| = 1$. Значит, $|(Ay, y)| \leq M\|x\|^2$. Поэтому

$$\left| \left(A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \, , \, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \left| \left(\frac{Ax}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{1}{\|x\|^2} \, |(Ax, x)| \leq M,$$

что и требовалось доказать.

Теперь установим, что

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4 \operatorname{Re}(Ax, y). \tag{2}$$

Действительно,

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = (Ax + Ay, x+y) - (Ax - Ay, x-y) =$$

$$= [(Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)] - [(Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)] =$$

$$= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) = 2(Ax, y) + 2(y, Ax) = 2(Ax, y) + 2\overline{(Ax, y)} = 4\,\mathrm{Re}(Ax, y).$$

Рассмотрим два любых вектора x, y таких что $\|x\| = \|y\| = 1$. Докажем, что

$$|(Ax, y)| \leq M. \tag{3}$$

Имеем $(Ax, y) = Re^{i\theta}$. Тогда

$$|(Ax, y)| = R = e^{-i\theta}(Ax, y) = (Ax, e^{i\theta}y) = (Ax, y_1),$$

где $y_1 = e^{i\theta}y$ и $\|y_1\| = \|y\| = 1$. Поскольку $(Ax, y_1) = R$ — действительное число, с учетом (1) и (2) получаем

$$|(Ax, y)| = (Ax, y_1) = \mathrm{Re}(Ax, y_1) = \frac{1}{4}\,[(A(x+y_1), x+y_1) - (A(x-y_1), x-y_1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\,[|(A(x+y_1), x+y_1)| + |A(x-y_1), x-y_1)| \leq \frac{1}{4}\,M[\|x+y_1\|^2 + \|x-y_1\|^2] =$$

$$= \frac{1}{4}\,M\,([(x, x) + 2\,\mathrm{Re}(x, y_1) + (y_1, y_1)] + [(x, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, y_1) + (y_1, y_1)]) =$$

$$= \frac{1}{4}\,M(2\|x\|^2 + 2\|y_1\|^2) = M.$$

Таким образом, для любых x и y, лежащих на единичной сфере справедливо неравенство $|(Ax, y)| \leq M$.

Из неравенства (3) следует, что для произвольных x и y

$$|(Ax, y)| \leq M\|x\|\,\|y\|.$$

Полагая в последнем неравенстве $y = Ax$, получаем

$$\|Ax\|^2 = |(Ax, Ax)| \leq M\|x\|\,\|Ax\|.$$

Значит, $\|Ax\| \leq M\|x\|$ для любого x, т.е. $\|A\| \leq M$. Теорема доказана.

14 Теория Гильберта-Шмидта

14.1 Вполне непрерывные самосопряженные операторы

Изучим вопрос, как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора. Поскольку оператор самосопряжен, его спектр вещественный. Поскольку оператор вполне непрерывен, его спектр состоит из нуля и не более чем счетного числа (вещественных) собственных значений. В случае бесконечного числа собственных значений их последовательность λ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Возникает вопрос: существует ли хотя бы одно собственное значение такого оператора. Ответ дает следующая

Теорема. *Если вполне непрерывный самосопряженный оператор $A \neq \Theta$, то существует по крайней мере одно собственное значение оператора A, отличное от нуля. Более того, либо $\|A\|$, либо $-\|A\|$ является собственным значение оператора A.*

Доказательство. Выше мы доказали, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Поскольку A — самосопряженный оператор,

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

поэтому (Ax, x) принимает вещественные значения. В силу свойств супремума существует последовательность x_n в H такая, что $\|x_n\| = 1$ и $(Ax_n, x_n) \to \lambda$, где λ равно либо $\|A\|$, либо $-\|A\|$.

Последовательность x_n ограничена, а оператор A вполне непрерывен, поэтому Ax_n содержит фундаментальную подпоследовательность, которая в силу полноты H сходится. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что $Ax_n \to \ell$, $n \to \infty$. Покажем, что $A\ell = \lambda\ell$, причем $\ell \neq \theta$.

Имеем

$$\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = (Ax_n - \lambda x_n, Ax_n - \lambda x_n) =$$

$$= (Ax_n, Ax_n) - (\lambda x_n, Ax_n) - (Ax_n, \lambda x_n) + (\lambda x_n, \lambda x_n) =$$
$$= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2\|x_n\|^2.$$

При $n \to \infty$ получаем $\|Ax_n\|^2 \to \|\ell\|^2$, $(Ax_n, x_n) \to \lambda$, и поскольку нормы $\|x_n\| = 1$,

$$\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 \to \|\ell\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \|\ell\|^2 - \lambda^2.$$

Число $\|\ell\|^2 - \lambda^2$ является пределом неотрицательной последовательности, поэтому $\|\ell\|^2 - \lambda^2 \geq 0$, следовательно, $\|\ell\| \geq |\lambda| = \|A\| > 0$. Поэтому $\ell \neq \theta$.

Докажем обратное неравенство то есть что $\|\ell\| \leq \|A\|$. Действительно, $\ell = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, причем $\|Ax_n\| \leq \|A\|\,\|x_n\| = \|A\|$, откуда $\|\ell\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq A$. Итак, $\|\ell\| = \|A\| = |\lambda|$.

Поскольку $\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 \to \|\ell\|^2 - \lambda^2$, заключаем, что $\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 \to 0$, $n \to \infty$, т.е. последовательность $Ax_n - \lambda x_n$ стремится к θ. Но $Ax_n \to \ell$, поэтому $\lambda x_n = Ax_n - (Ax_n - \lambda x_n) \to ell$. Значит, $A(\lambda x_n) \to A\ell$. С другой стороны, $A(\lambda x_n) = \lambda Ax_n \to \lambda\ell$. в силу единственности предела получаем $A\ell = \lambda\ell$. Таким образом, ℓ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, причем λ равно либо $\|A\|$, либо $-\|A\|$. Теорема доказана.

Факторизация гильбертова пространства, соответствующая вполне непрерывному самосопряженному оператору.

Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда согласно предыдущей теореме множество ненулевых собственных значений оператора A непусто (конечно или счетно). Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных векторов (назовем это число кратностью собственного значения). Занумеруем все собственные значения и запишем их в последовательность, причем каждое собственное значение встречается столько раз, какова его кратность. В результате получим последовательность $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_{n+m}$, $\lambda_{n+m+1} = \ldots$. Теперь выпишем систему собственных векторов $\{e_k\}$, отвечающих собственным значениям λ_k. Без ограничения общности можем считать, что система $\{e_k\}$ ортонормирована. Действительно, собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. А если существует несколько линейно независимых векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, то мы можем ортогонализовать их. применяя метод Грама-Шмидта. После ортогонолизации мы нормируем векторы, деля каждый вектор на его длину.

Теперь рассмотрим линейную оболочку системы собственных векторов: $\Delta\{e_k\} = \{\sum \alpha_k e_k$, где $\alpha_k = 0$ для всех k кроме конечного числа$\}$. Это — линеал в гильбертовом пространстве H. Пусть L — это замыкание линеала $\Delta\{e_k\}$ в H. Тогда L — подпространство в H.

Обозначим $N = L^{\perp}$. Тогда $H = L \oplus N$. Утверждается, что $y \in N$

тогда и только тогда, когда $y \perp e_k$ для любого k. Действительно, если $y \in N = L^\perp$, то $y \perp e_k$, поскольку $e_k \in L$. Обратно, если $y \perp e_k$ для любого k, то для любого $x \in \Delta\{e_k\}$ имеем $y \perp x$ в силу линейности скалярного произведения. Наконец, скалярное произведение непрерывно, поэтому если $x \in N$, то существует последовательность $x_n \in \Delta\{e_k\}$ такая, что $x_n \to x$, $n \to \infty$, поэтому в силу того, что $(y, x_n) = 0$, получаем

$$(y, x) = \lim_{n\to\infty} (y, x_n) = 0.$$

Предложение 1. *Оператор A переводит L в L и N в N.*

Доказательство. Сначала покажем, что A переводит $\Delta\{e_k\}$ в $\Delta\{e_k\}$. Действительно, если $x \in \Delta\{e_k\}$, то $x = \sum_k \alpha_k e_k$, где сумма конечна, и $Ax = \sum_k \alpha_k \lambda_k e_k$, поэтому $Ax \in \Delta\{e_k\}$.

Пусть теперь $x \in L$. Тогда $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in \Delta\{e_k\}$. Значит, $Ax_n \in \Delta\{e_k\}$ и в силу непрерывности оператора A имеем $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n \in L$. Итак, $AL \subset L$.

Теперь покажем, что $AN \subset N$. Пусть $x \in N$. Тогда $(x, e_k) = 0$ для любого k. Значит, $(Ax, e_k) = (x, Ae_k) = (x, \lambda_k e_k) = \lambda_k (x, e_k) = 0$. Отсюда следует, что $(Ax, e_k) = 0$ для любого k, т.е. $Ax \in N$.

Предложение 2. *Подпространство N совпадает с ядром оператора A, т.е. $N = N(A)$.*

Доказательство. Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Рассмотрим его сужение на N. Утверждается, что $A|_N = \Theta$, т.е. $N \subset N(A)$. Действительно, если бы это было не так, то у оператора $A|_N$ существовал бы ненулевой собственный вектор. Но все собственные вектора оператора A лежат в $L = N^\perp$.

Теперь покажем, что $N(A) \subset N$. Пусть $y \in N(A)$. Тогда $Ay = \theta$ и для любого k получаем $\lambda_k (e_k, y) = (\lambda_k e_k, y) = (Ae_k, y) = (e_k, Ay) = 0$. Поскольку $\lambda_k \neq 0$, заключаем, что $(e_k, y) = 0$. Это означает, что $y \in N$.

Теперь опишем действие оператора A на пространстве H. Любой вектор $x \in H$ представим в виде $x = x' + x''$, где $x \in L$ и $x'' \in N$. Подпространство L в H само является гильбертовым пространством с той же нормой. Ясно, что система собственных векторов образует в ортонормированный базис.

Разложим x' по этому базису: $x' = \sum \alpha_k e_k$. В случае, когда число собственных значений λ_k бесконечно, это — ряд Фурье, в противном случае это — конечная сумма. Пользуясь непрерывностью и линейностью оператора A получаем

$$Ax' = A(\sum \alpha_k e_k) = \sum \alpha_k A e_k = \sum \alpha_k \lambda_k e_k.$$

Поэтому, поскольку $Ax'' = 0$, получаем

$$Ax = Ax' + Ax'' = Ax' = \sum \alpha_k \lambda_k e_k. \tag{$*$}$$

Заметим, что в случае бесконечной системы e_k ряд Фурье сходится. Действительно, ряд

$$\sum_k |\alpha_k|^2$$

сходится в силу неравенства Бесселя. Поскольку последовательность λ_k ограничена, т.е. существует C такое, что $|\lambda_k| \le C$, для любого k, получаем

$$\sum_k |\lambda_k \alpha_k|^2 \le C^2 \sum_k |\alpha_k|^2 < +\infty.$$

Значит, последовательность коэффициентов ряда $\sum \alpha_k \lambda_k e_k$ принадлежит пространству l_2, и ряд $(*)$ сходится.

14.2 Уравнения Фредгольма в гильбертовом пространстве

Рассмотрим уравнение

$$x - \mu A x = y \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H, где A — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Так как A — вполне непрерывен, для него справедливы три теоремы Фредгольма, устанавливаемые ранее. Однако использование дополнительного свойства самосопряженности позволяет решить это уравнение, если мы знаем собственные вектора оператора A. Опишем схему решения.

Пусть x — решение уравнения (1). Тогда $x = y + \mu A x$, при этом, $\mu A x = A(\mu x) \in L$. Разложим известный вектор y на две компоненты:

$y = y' + y''$, $y' \in L$, $y'' \in N$. Далее разложим y' по ортонормированному базису:

$$y' = \sum_k \beta_k e_k.$$

Поскольку $x = y + \mu Ax$, $\mu Ax \in L$, будем искать решение в виде

$$x = y + \sum_k \alpha_k e_k = y' + y'' + \sum_k \alpha_k e_k = \sum_k \beta_k e_k + y'' + \sum_k \alpha_k e_k, \qquad (2)$$

где числа α_k неизвестны.

Подставив (2) в (1), получим с учетом равенств $Ay'' = \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$, $Ay' = A(\sum_k \beta_k e_k) = \sum_k \beta_k \lambda_k e_k$, $Ay' = A(\sum_k \alpha_k e_k) = \sum_k \alpha_k \lambda_k e_k$:

$$y + \sum_k \alpha_k e_k - \mu A \left(\sum_k \beta_k e_k + y'' + \sum_k \alpha_k e_k \right) = y,$$

$$\sum_k \alpha_k e_k - \mu A \left(\sum_k \beta_k e_k \right) - \mu A \left(\sum_k \alpha_k e_k \right) = \theta,$$

$$\sum_k \alpha_k e_k - \mu \sum_k \beta_k \lambda_k e_k - \mu \sum_k \alpha_k \lambda_k e_k = \theta,$$

Поскольку e_k образуют ортонормированный базис, получаем, что для любого k

$$\alpha_k - \mu \beta_k \lambda_k - \mu \alpha_k \lambda_k = \theta$$

или

$$\alpha_k (1 - \mu \lambda_k) = \mu \beta_k \lambda_k. \qquad (3)$$

Таким образом, для того, чтобы уравнение (1) имело решение, необходимо, чтобы существовали константы α_k такие, чтобы имели место равенства (3).

Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть для любого k числа $1 - \mu\lambda_k \neq 0$, т.е. $\lambda = \mu^{-1} \neq \lambda_k$. В этом случае, уравнения (3) имеют единственное решение

$$\alpha_k = \frac{\mu \lambda_k \beta_k}{1 - \mu \lambda_k}. \qquad (4)$$

Покажем, что последовательность α_k принадлежит пространству l_2 (если пространство L бесконечномерно). Обозначим $\mu_k = 1/\lambda_k$. Тогда

$$\alpha_k = \frac{\mu}{\mu_k - \mu} \beta_k.$$

Так как β_k — коэффициенты Фурье элемента y', ряд $\sum |\beta_k|^2 < +\infty$. При $k \to \infty$ имеем $\mu_k \to \infty$, поэтому $\frac{\mu}{\mu_k - \mu} \to 0$. Следовательно, последовательность $\frac{\mu}{\mu_k - \mu} \to 0$ ограничена:

$$\left| \frac{\mu}{\mu_k - \mu} \right| \leq C$$

для некоторого $C > 0$ и

$$\sum |\alpha_k|^2 \leq C^2 \sum |\beta_k|^2 < +\infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_k \alpha_k e_k$ сходится в гильбертовом пространстве H и, следовательно,

$$x = y + \sum_k \alpha_k e_k$$

дает единственное решение уравнения (1).

2) Предположим, что λ принадлежит спектру оператора A. Тогда λ является собственным значением кратности $m \geq 1$:

$$\lambda = \lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \ldots = \lambda_{l+m}$$

для некоторого $l \in \mathbb{N}$. В этом случае в уравнениях

$$\alpha_k(1 - \mu\lambda_k) = \mu\beta_k\lambda_k, \quad k = l+1, l+2, \ldots, l+m,$$

левая часть равна нулю. Поэтому для того чтобы эти уравнения имели решения. необходимо. чтобы

$$\beta_k = 0, \quad k = l+1, l+2, \ldots, l+m.$$

. Напомним, что β_k — это коэффициенты Фурье известной правой части уравнения (1), значит для разрешимости (1) необходимо, чтобы

$$(y, e_k) = 0, \quad k = l+1, l+2, \ldots, l+m.$$

Нетрудно видеть, что эти условия являются и достаточными. Остальные коэффициенты α_k определяются по формулам (4) если сумма бесконечна, ряд сходится. Это обосновывается так же, как в п. 1). Нетрудно видеть, что при выполнении этих условий при $k = l+1, l+2, \ldots, l+m$, мы имеем уравнения $0 \cdot \alpha_k = 0$, которые имеют решение для произвольных α_k. Следовательно в случае, когда $\lambda = \mu^{-1}$ совпадает с собственным значением кратности m общее решение уравнения (1) зависит от m произвольных постоянных α_k, $l+1 \leq k \leq l+m$.

Полученные результаты можно применить к интегральному уравнению Фредгольма с симметричным ядром (вещественный случай, $K(x,y) = K(y,x)$). В силу симметричности ядра соответствующий интегральный оператор самосопряжен. Зная его спектр и собственные функции, можем не только сформулировать результаты о разрешимости этого уравнения в пространствах $L_2(a,b)$ и $C[a,b]$, но и выписать решение в явном виде с помощью только что описанного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – СПб: БХВ, 1984. – 752 с.

2. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.

3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 484 с.

4. *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу / А.Н. Шерстнев. – Казань: УНИПРЕСС, 1998. – 488 с.

Содержание