КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Элементы теории обобщенных функций с приложениями к уравнениям с частными производными

Учебное пособие

Казань
2022

УДК 517

Рекомендовано учебно-методической комиссией института Математики и Механики Казанского (приволжского) федерального университета Протокол № 7 от 02.06. 2022 г.

Авторы:
к.ф.-м. н., ассис. Е. В. Патрин
к.ф.-м. н., доц. Л. Г. Салехов
Рецензент: к.ф.-м. н., доц. В. А. Сочнева

Элементы теории обобщенных функций с приложениями к уравнениям с частными производными. — Казань: Казанский федеральный университет, 2022.— 72 с.

В настоящее время математизация естественных наук и влияние компьютерных технологий обусловливают необходимость внедрения теории обобщенных функций в прикладной анализ.

Настоящее пособие есть попытка введения некоторого материала полезного для математиков интересующихся приложениями, и студентов инженерных специальностей, без трудоемких теоретических выкладок.

Оно может быть полезно магистрантам-математикам первого и второго года обучения, уже прослушавшим стандартный курс по уравнениям с частными производными, специализирующихся по теории функций. Также представляет интерес для специалистов, применяющих аппарат обобщенных функций в своих исследованиях. Пособие содержит ряд задач для самостоятельного решения.

Глава 1. Основные функциональные пространства.

Векторное пространство функций, на котором определена подходящая (естественная) сходимость для последовательностей, является основным пространством. Функции этого пространства называются основными функциями (или тестовыми функциями).

Напомним, что носитель функции вещественной переменной x (или комплексной переменной z) есть замыкание в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) множества точек x (или z), где функция отлична от нуля.

Носитель функции может быть неограниченным или всей прямой $\mathbb{R}$ (или всей плоскостью $\mathbb{C}$).

Если носитель содержится в ограниченном интервале вещественной оси $\mathbb{R}$ (или в ограниченной области комплексной плоскости $\mathbb{C}$), то говорят, что носитель ограниченный и, следовательно, компактный носитель.

1.1. Пространство $\mathcal{D}$.

Через $\mathcal{D}$ обозначают пространство функций φ (вещественных или комплекснозначных), зависящих от вещественной переменной x, которые бесконечно дифференцируемы и имеют компактные носители (то есть существует ограниченный интервал, вне которого каждая функция $\varphi(x) = 0$).

Концепция сходимости. Говорят, что бесконечная последовательность функций $\{\varphi_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, сходится к нулю в смысле $\mathcal{D}$ при $n \to \infty$, если:

1) $\varphi_n \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2) все носители функций $\varphi_n(x)$ содержатся в одном и том же интервале;

3) $\varphi_n \rightrightarrows 0$, то есть равномерно и все производные $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0,\ k = 1,\ 2, \ldots$.

Пример. Функция

$$\xi(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathcal{D}$. Носителем ее является замкнутый интервал $|x| \leq 1$, то есть ограничен. Последовательность $\{\frac{1}{n}\xi(x)\} \to 0$ в смысле $\mathcal{D}$, но последовательность $\{\frac{1}{n}\xi(x/n)\}$ не сходится в смысле $\mathcal{D}$, ибо бесконечно растут носители.

1.2. Пространство $\mathcal{D}^k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$.

Через $\mathcal{D}^k$ обозначают пространство функций φ (вещественных или комплекснозначных) с компактными носителями и имеющих непрерывные производные до порядка k включительно. Сходимость последовательности в пространстве $\mathcal{D}^k$ аналогична сходимости в пространстве $\mathcal{D}$, но в пункте 3) следует считать, что $k \leq n$.

1.3. Пространство $\mathcal{S}$ (функций быстрого убывания).

Через $\mathcal{S}$ обозначается пространство функций $\varphi(x)$, которые бесконечно дифференцируемы и убывают по модулю вместе со всеми производными быстрее, чем любая положительная степень функции $1/|x|$ при $|x| \to \infty$, то есть для любых неотрицательных целых чисел $j,\ k$

$$|x^j \varphi^{(k)}(x)| \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Концепция сходимости. Говорят, что бесконечная последовательность функций $\{\varphi_n :\ n \in \mathbb{N}\}$, сходится к нулю в смысле $\mathcal{S}$ при $n \to \infty$, если

1) $\varphi_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2) для всех неотрицательных $j,\ k$

$$|x^j \varphi_n^{(k)}(x)| \to 0$$

равномерно на $\mathbb{R}$.

1.4. Пространство $\mathcal{E}$.

Через $\mathcal{E}$ обозначим пространство функций $\varphi(x)$ которые бесконечно непрерывно дифференцируемы и которые имеют произвольные носители.

Концепция сходимости. Говорят, что бесконечная последовательность $\varphi_n(x),\ n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в смысле $\mathcal{E}$ при $n \to \infty$, если

1) все $\varphi_n(x) \in \mathcal{E}$;

2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ и $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows 0$ равномерно на каждом ограниченном интервале вещественной оси $\mathbb{R}$ для $k = 1,\ 2, \ldots /$.

1.5. Пространство $\mathbf{Z}$ (целых функций).

Через $\mathbf{Z}$ обозначают пространство целых аналитических функций комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}y$ таких, что для любого целого $j > 0$ существуют числа a и C_j для которых

$$|z^j \varphi(z)| < C_j \mathrm{e}^{a|y|}\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.5.1}$$

Концепция сходимости. Говорят, что бесконечная последовательность $\{\varphi_n(z)\},\ n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в смысле $\mathbf{Z}$ при $n \to \infty$, если

1) все $\varphi_n(z) \in \mathbf{Z}$

2) существуют вещественные числа a и C_j, $j = 0, 1, 2,$, которые не зависят от n, такие, что

$$|z^j \varphi_n(z)| < C_j \mathrm{e}^{a|y|};$$

3) $\varphi_n(z) \rightrightarrows 0$ то есть равномерно на каждой ограниченной области комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

N.B. Если $\varphi(z) \in \mathbf{Z}$, то ее ряд Тейлора

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} z^j$$

сходится к $\varphi(z)$ в смысле $\mathbf{Z}$. Если $\varphi(z) \in \mathbf{Z}$, то $\varphi(x) \in \mathcal{S}$.

Следует также считать, что такие простые функции как e^z и e^{-z^2} не принадлежат $\mathbf{Z}$.

1.6. Теоремы о вложениях.

Предыдущие результаты приводят к следующим теоремам:

Теорема 6.1. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}^k$.

Теорема 6.2. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$.

Теорема 6.3. $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{E}$.

1.7. Пространство Φ.

Пусть Φ обозначает любое из пространств $\mathcal{D}^k$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$ и $\Phi = \mathbf{Z}$ в $\mathbb{C}$ с условием, что все эти пространства обладают их собственными характеристическими сходимостями (естественными сходимостями).

Естественно из структуры Φ можно сделать вывод, что Φ есть топологическое векторное пространство. Кроме того, если бесконечные последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ сходятся к нулю в смысле Φ и если a и b — вещественные или комплексные числа, то последовательность $\{a\varphi_n + b\psi_n\}$ также сходится к нулю в смысле пространства Φ. В дальнейшем можно будет говорить, что это свойство выполняется даже если константы a и b заменить некоторыми функциями, которые называются мультипликаторами.

Говорят, что последовательность $\{\varphi_n\}$ в Φ сходится к $\varphi \in \Phi$ по характеристической (естественной) сходимости в Φ, если $\varphi_n - \varphi \to 0$ при $n \to \infty$ и это записывается так: $\varphi_n \to \varphi$ в смысле Φ.

Пространство Φ является полным, поскольку каждая последовательность Коши сходится в Φ.

Это означает, что Φ обладает следующим свойством: если $\varphi_n - \varphi_{n'} \to 0$ при $n,\ n' \to \infty$ в смысле характеристической сходимости в Φ, то существует элемент $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в смысле Φ.

1.8. Пространство $\Phi(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1,\ y_2, , \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $z = (z_1,\ z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ вместо $x,\ y \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$ в структуре основных пространств $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^k$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$, $\mathbf{Z}$. Тогда обозначим эти пространства через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и в $\mathbb{C}^n$ через $\mathbf{Z}(\mathbb{C}^n)$, состоящие из функций n переменных. Концепция сходимости и другие свойства этих пространств будут аналогичны всем основным свойствам пространств, определенным ранее путем замены $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно.

Проиллюстрируем эти замечания, взяв случай пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является векторным подпространством векторного пространства бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, суженных на $\mathbb{R}^n$.

Если $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то определяем $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом.

Функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ если и только если она бесконечно дифференцируема и существует ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ вне которого она идентична нулю. Для каждой функции $\varphi(x)$, если K есть наименьшее замкнутое множество, вне которого $\varphi(x) = 0$, то K называется опорный компакт или носитель функции $\varphi(x)$.

Эта структура $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ позволяет сделать следующее определение.

Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ обозначают пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$, которые бесконечно дифференцируемы и имеют ограниченный носитель (компактный).

Обозначим через $\Phi(\mathbb{R}^n)$ одно из пространств $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и $\Phi(\mathbb{C}^n)$ в $\mathbb{C}^n$ с учетом того, что все эти пространства имеют их собственные характеристические сходимости.

1.9. Концепция сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Говорят, что бесконечная последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к нулю в смысле $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ при $n \to \infty$, если

1) для всех $n \in \mathbb{N}$ носители φ_n содержатся в одном и том же ограниченном множестве.

2) $\varphi_n \rightrightarrows 0$ равномерно и все производные $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ равномерно для $k \in \mathbb{N}$.

Пример.

Функция

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & r \geq 1, \\ \exp\left(-\frac{1}{1-r^2}\right), & r < 1 \end{cases},$$

где $r = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$, принадлежит пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, аналогична функции в $\mathcal{D}$, указанной на странице 3.

Глава 2. Определение обобщенных функций (распределений).

2.1. Обобщенные функции.

Основные пространства позволяют определить структуру обобщенных функций.

Пусть Φ — основное пространство. Функционал F на Φ есть оператор, который ставит в соответствие вещественное или комплексное число каждой функции $\varphi \in \Phi$. Это число обозначается символом $< F,\ \varphi >$ (или $< F_x,\ \varphi(x) >$, если надо уточнить переменную), $F : \varphi \to \mathbb{C}(\mathbb{R}),\ \ \varphi \to < F,\ \varphi >$.

Дуальное пространство Φ' для пространства Φ есть пространство линейных секвенциально непрерывных функционалов F на Φ.

Напомним, что F есть линейный функционал, если $F \in \Phi'$ и

$$< F,\ a\varphi + b\psi >= a < F,\ \varphi > +b < F,\ \psi >,\ \ \varphi,\ \psi \in \Phi,\ \ a,\ b \in \mathbb{C},$$

и F является секвенциально непрерывным, если $< F,\ \varphi_n > \to 0$ при $n \to \infty$ для каждой бесконечной последовательности $\{\varphi_n\}$, которая сходится к нулю при $n \to \infty$ в смысле пространства Φ.

Также Φ' превращают в векторное пространство путем определения векторного сложения и скалярного умножения.

Если $F,\ G \in \Phi'$, то $aF + b\,G$ есть функционал такой, что

$$< aF + b\,G,\ \varphi >= a < F,\ \varphi > +b < G,\ \varphi > \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Нулевой элемент этого пространства есть функционал такой, что

$$< \mathbf{0},\ \varphi >= 0 \ \ \forall \varphi \in \Phi.$$

Равенство в Φ' определяется так: если $F - G = \mathbf{0}$, то $F = G$.

$$F = G \ \Leftrightarrow < F,\ \varphi > = < G,\ \varphi > \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{2.1.1}$$

Элементы пространства Φ' называются обобщенными функциями.

2.1.1. Вложения дуальных пространств.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — два основных пространства. Если $\Phi_1 \subset \Phi_2$ алгебраически и топологически (сходимость последовательностей в Φ_2 слабее, чем в Φ_1), то $\Phi_2' \subset \Phi_1'$.

В самом деле, для каждого $F \in \Phi_2'$, если F секвенциально непрерывен в смысле Φ_2', то F также секвенциально непрерывен в смысле Φ_1'. Следовательно, $F \in \Phi_1'$.

2.2. Распределения (по L. Schwartz).

Обобщенные функции по Л. Шварцу называются распределениями в Φ' (или $\Phi'(\mathbb{R}^n)$).

2.2.1. Вложения пространств распределений.

$$(\mathcal{D}^k)' \subset (\mathcal{D}^j)' \subset \mathcal{D}', \quad j > k, \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}', \quad \mathbf{Z}' \subset \mathcal{S}'.$$

2.3. Примеры распределений.

2.3.1. Регулярные распределения.

Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда отображение $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2.3.1}$$

(интеграл берется по пересечению носителей функций f и φ) есть распределение и обозначается так:

$$< f,\ \varphi >= \int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{2.3.2}$$

Всякое распределение, определяемое формулой (2.3.2) называется регулярным распределением и обозначается T_f, то есть

$$< T_f,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Можно отождествить T_f и f, то есть $T_f = f$. Это отождествление является существенным моментом в теории распределений.

Элементы из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ являются локально суммируемыми функциями и определяют локальные распределения. Так что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ являются линейными подпространствами пространства $\mathcal{D}'$. В символах имеем:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}', \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{D}'.$$

Примеры. Следующие функции представляют регулярные распределения:

$$x^k \ \ (k \geq 0, \ k \in \mathbb{Z}), \ |x|^\nu \ \ (\nu > -1), \ \cos x, \ \mathrm{e}^{-x}, \ \mathrm{e}^{x^2}.$$

2.3.2. Иррегулярные распределения.

Имеются другого типа функционалы. Например, функционал, который ассоциирует с каждой функцией $\varphi(x)$ ее значение в точке $x = 0$, является, очевидно, линейным и непрерывным. Покажем, что этот функционал не может быть представлен в виде (2.3.2) с локально интегрируемой функцией $f(x)$. В самом деле, если некоторая локально интегрируемая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},$$

то она удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta(x)\mathrm{d}x = 0, \ \ \forall \theta(x) \in \mathbb{R}$$

такой, что $\theta(0) = 0$ и $\theta(x)f(x) \geq 0$. Следовательно, теория интеграла Лебега влечет, что $f(x) = 0$ почти всюду и любая функция $f(x)$ с этим последним свойством удовлетворяет определению

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

даже когда $\varphi(0) \neq 0$, а это есть противоречие.

Все распределения, которые не являются регулярными, называются иррегулярными (или сингулярными) распределениями. Примером сингулярного распределения является распределение Дирака δ, которое имеет следующее определение

$$< \delta, \ \varphi >= \varphi(0).$$

Если C есть вещественная константа, то $\delta(x - C)$ есть функционал, который ставит в соответствие функции $\varphi(x)$ ее значение в точке C, то есть $\varphi(C)$. Это есть распределение порядка не выше нуля:

$$< \delta(x - C), \ \varphi(x) >= \varphi(C), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}).$$

Если k — целое положительное число, то $\delta^{(k)}(x - C)$ есть функционал, который в точке $x = C$ принимает значение $(-1)^k\varphi^{(k)}(C)$. Это обобщенная функция (распределение) порядка k, так как

$$< \delta^{(k)}(x - C), \ \varphi(x) >= (-1)^k\varphi^{(k)}(C), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^k.$$

Также $\delta^{(k)}(x-C) \in (\mathcal{D}^j)'$, $j > k$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, но не принадлежит $(\mathcal{D}^j)'$, если $j < k$.

2.3.3. Регулярные распределения медленного (умеренного) роста.

Говорят, что $f(x)$ — функция медленного роста, если $x^n f(x)$ для некоторого целого положительного числа n есть функция ограниченная при $|x| \to \infty$.

Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и умеренного роста, то она определяет соответствующее распределение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, которое также обозначают f, то есть

$$< f,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Например, e^{-x} и e^{x^2} не являются элементами из $\mathcal{S}'$, но $u(x)\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{S}'$, где $u(x)$ — функция Хевисайда.

2.3.4. Аналитические функционалы (ультрараспределения).

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$ и $\varphi(z) \in \mathbf{Z}(\mathbb{C})$. Тогда, очевидно,

$$< \delta(z-a),\ \varphi(z) >= \varphi(a), \tag{2.3.3}$$

$$< \delta^{(k)}(z-a),\ \varphi(z) >= (-1)^k\varphi^{(k)}(a), \tag{2.3.4}$$

где $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Если f есть аналитическая функция и L — путь в комплексной плоскости, то отображение

$$\mathbf{Z}(\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \int_L f(z)\varphi(z)\mathrm{d}z$$

принадлежит $\mathbf{Z}'(\mathbb{C})$ и называется регулярным аналитическим функционалом (или регулярным ультрараспределением).

Пусть $L = \Gamma_a$ — замкнутый путь, идущий вокруг точки $a \in \mathbb{C}$ один раз в положительном направлении. Тогда, в силу формулы (2.3.3) и интегральной формулы Коши, имеем

$$\left\langle \left.\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(z-a)}\right|_{\Gamma_a},\ \varphi(z) \right\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_a}\frac{\varphi(z)\mathrm{d}z}{z-a} = \varphi(a) =< \delta(z-a),\ \varphi >, \forall\varphi \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}),$$

то есть имеем равенство в смысле $\mathbf{Z}'(\mathbb{C})$:

$$\delta(z-a) = \left.\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(z-a)}\right|_{\Gamma_a}.$$

Пример. Вычислить
$$\delta^{(k)}(z-a), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Глава 3. Свойства обобщенных функций (распределений).

3.1. Носитель.

Определение 3.1.

Говорят, что две обобщенные функции F и G из $\mathcal{D}'$ (или $\mathcal{S}'$) равны на замкнутом интервале $[c,\ c'] \subset \mathbb{R}$, если
$$< F,\ \varphi >=< G,\ \varphi >$$
для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ или $\varphi \in \mathcal{S}$ с носителем в открытой окрестности отрезка $[c,\ c']$.

Две обобщенные функции $F,\ G \in \Phi'$ называются равными на открытом множестве в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$, если $\Phi' = \mathbf{Z}'(\mathbb{C})$), если
$$< F,\ \varphi > = < G,\ \varphi >, \quad \forall \varphi \in \Phi$$
и φ имеют носитель в этом открытом множестве.

Поскольку интегрируемые функции, равные почти всюду, порождают одну и ту же обобщенную функцию, то из этого определения следует, что такие функции можно отождествить. Следовательно, значения обобщенной функции могут быть указаны (определены) только в интервале, а не в точке.

Если $F \in \Phi'$, то требуется точно определить, что значит F равна нулю на открытом множестве из $\mathbb{R}$. В определении поэтому говорится, что обобщенная функция $F \in \Phi'$ равна нулю на открытом множестве, если $< F,\ \varphi >= 0\ \ \forall \varphi \in \Phi$ и φ имеет носитель в этом открытом множестве.

Носитель обобщенной функции (или распределения) есть дополнение для самого большого открытого множества на котором она равна нулю (это может быть точка или все $\mathbb{R}$).

Если S_1 и S_2 суть носители обобщенных функций F_1 и F_2, то носитель обобщенной функции $aF_1 + bF_2$ содержится в $S_1 \bigcup S_2$.

N.B. Если носитель распределения F и носитель функции φ не имеют общих точек, то $< F,\ \varphi >= 0$.

Примеры.

Носитель обобщенной функции f, определяемой формулой

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & -1<x<1, \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases},$$

есть, очевидно, отрезок $[-1,\ 1]$, $\delta(x-c)$ имеет носитель в точке $x=c$.

3.1.1. Точечный носитель.

Если носитель обобщенной функции F состоит из одной точки $x=c$, то эта обобщенная функция F является конечной линейной комбинацией обобщенных функций $\delta(x-c)$ и $\delta^{(k)}(x-c),\ k=1,\ 2,\ldots.$

Этот тип носителя называется точечным носителем.

Далее проведем классификацию обобщенных функций посредством носителя обобщенной функции.

3.1.2. Обобщенные функции с носителем, ограниченным снизу.

Символом $\mathcal{D}'_+$ обозначают пространство обобщенных функций, имеющих носители ограниченные снизу (или „слева “). Для каждого элемента $F\in\mathcal{D}'_+$ существует конечное число C, такое, что носитель F содержится на полупрямой $x\geq C$.

Примеры.

$$u(x-1)x^n,\ u(x+1),$$

где $n>0$ — целое, $u(x)$ — функция Хевисайда.

3.1.3. Распределения (обобщенные функции) с ограниченным носителем.

Распределения с ограниченным носителем, очевидно, принадлежат пространству $\mathcal{D}'_+$. Они также принадлежат пространству $\mathcal{E}'$. Это свойство важно благодаря простой структуре основного пространства $\mathcal{E}$: обратно, каждый элемент из $\mathcal{E}'$ есть обобщенная функция с ограниченным носителем.

Отметим некоторые важные свойства.

1) Величина $<F,\ \varphi>$ зависит только от значений $\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\varphi^{(k)}(x)$, захваченных носителем $S=\operatorname{supp}F$, где k есть порядок обобщенной функции F.

2) Любая обобщенная функция с ограниченным носителем имеет бесконечно много представлений как конечная сумма обобщенных производных от непрерывных функций, где носитель каждой функции лежит в произвольной открытой окрестности носителя $S=\operatorname{supp}F$.

3) Каждая обобщенная функция в $\mathcal{D}'$ равна (на открытом ограниченном множестве U) обобщенной функции, имеющей носитель в ограниченной окрестности множества U.

3.2. Ограниченность.

1) Любое распределение $f \in \mathcal{D}'$ и любой конечный отрезок I определяют неотрицательное целое k и положительную константу M, такие, что

$$|< F,\ \varphi >| \leq M \sup_{x\in I} |\varphi^{(k)}(x)|,\quad \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

2) Свойство 1) не имеет место для всех $F \in \mathcal{D}'$, если интервал I будет бесконечным. Однако все распределения обладают свойством 1), если $F \in \mathcal{S}'$, то есть существуют целое $k \geq 0$, вещественное число p и константа $M > 0$, такие, что для любого $\varphi \in \mathcal{S}$ имеет место оценка

$$|< F,\ \varphi >| \leq M \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(k)}(x)|,$$

где $k,\ M,\ p$ зависят только от F.

3.3. Сходимость.

Если каждое значение ν параметра определяет обобщенную функцию F_ν в Φ', то F_ν сходится при $\nu \to \nu_0$, если числовая функция $< F_\nu,\ \varphi >$ сходится при любом $\varphi \in \Phi$.

Из данного определения вытекают следующие утверждения.

1) Пусть $F_1,\ F_2,\ldots$ в Φ' — бесконечная последовательность обобщенных функций. Тогда эта последовательность сходится при $n \to \infty$, если числовая последовательность $< F_n,\ \varphi >$ сходится для любого $\varphi \in \Phi$. В частности, последовательность $\{\delta(x - 1/n)\}$ сходится при $n \to \infty$.

2) Ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} F_j$$

сходится (на Φ), если для любого $\varphi \in \Phi$ числовой ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} < F_j,\ \varphi >$$

сходится.

Примеры.

1) Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta(x-j)$$

сходится на $\mathcal{D}$, так как

$$\sum_{j=0}^{\infty} < \delta(x-j), \varphi >= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j)$$

сходится. Эта сумма имеет лишь конечное число неравных нулю членов, так как φ имеет компактный носитель.

2) Если $h > 1$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} h^{-j}\delta(2-j)$$

сходится на $\mathcal{S}$ (и на $\mathcal{D}$) так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} < h^{-j}\delta(2-j),\ \varphi >= \sum_{j=1}^{\infty} h^{-j}\varphi(j)$$

для ограниченных φ. Этот ряд не сходится на $\mathcal{E}$.

3) Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta^{(j)}(z-a)/j!$$

сходится на $\mathbf{Z}(\mathbb{C})$.

3.3.1. Полнота и предел.

С понятием сходимости связано понятие полноты. Так пространства $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathbf{Z}'$ являются полными: если семейство F_ν принадлежит соответственно к $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathbf{Z}'$ и F_ν сходится при $\nu \to \nu_0$, то это семейство имеет предел принадлежащий соответственно $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathbf{Z}'$ и выполняется равенство

$$\lim_{\nu\to\nu_0} < F_\nu,\ \varphi >=< F,\ \varphi > .$$

Доказательство имеется в [2].

Однако, $(\mathcal{D}^k)'$ не полно, k — целое положительное число.

3.3.2. Частные случаи сходимости в $\mathcal{D}'$.

Пусть бесконечная последовательность $\{f_n(x)\}$ локально суммируемых функций сходится к функции $f(x)$ почти всюду. Если все $|f_n(x)|$ ограничены одной и той же положительной локально интегрируемой функцией, то $f(x)$ есть также локально интегрируемая и регулярная функция и обобщенные функции $f_n(x) \in \mathcal{D}'$ сходятся к регулярной обобщенной функции $f(x)$. Это есть теорема Лебега о мажорированной сходимости. Таким образом, сходимость обобщенных функций (распределений) обобщает сходимость функций.

Определение.

Говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в смысле распределений (или в $\mathcal{D}'$), если последовательность распределений $\{f_n(x)\}$ (которая отождествляется с последовательностью функций) сходится.

Если функции $f(\nu;\ x)$, которые локально суммируемы относительно x, сходятся равномерно на каждом ограниченном интервале вещественной оси $\mathbb{R}$ к предельной функции $f(x)$ при $\nu \to \nu_0$, то функции $f(\nu;\ x)$ также сходятся к $f(x)$ в смысле распределений при $\nu \to \nu_0$.

3.3.3. Сходимость в $\mathcal{S}'$.

Сходимость в $\mathcal{S}'$ аналогична сходимости в $\mathcal{D}'$, если заменить $\mathcal{D}'$ на $\mathcal{S}'$ и заменить „локально суммируемые функции“на „функции медленного роста“.

3.3.4. Сходимость к $\delta(x)$.

Пусть переменная ν, целая или не целая, имеет предел ν_0, конечный или бесконечный, и пусть каждое значение ν определяет функцию $f_\nu(x)$. Тогда регулярная обобщенная функция $f_\nu(x)$ при $\nu \to \nu_0$ имеет предел $\delta(x)$, если

1) $\int_{-c}^{c} f_\nu(x)\mathrm{d}x \to 1\ \forall c > 0$,

2) $f_\nu(x) \rightrightarrows 0$ равномерно на каждом множестве $0 < \varepsilon \le |x| \le 1/|c|$,

3) $\int_{-b}^{b} |f_\nu(x)|\mathrm{d}x$ для некоторого положительного числа b ограничен независимо от ν.

3.4. Аппроксимация распределения регулярными функциями.

Обобщенная функция $\delta(x)$, как следует из предыдущих рассуждений, есть предел очень регулярных (на самом деле бесконечно дифференцируемых) функций. Этот результат позволяет показать, что все другие обобщенные функции могут быть аппроксимированы регулярными функциями.

Пусть $F \in \mathcal{D}$ и пусть $\{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, бесконечная последовательность функций, носители которых равномерно стремятся к началу координат и которые удовлетворяют условию

$$\int_{\mathbb{R}} r_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Если положить

$$\varphi_n(x) =< F_t,\ r_n(x-t) >,$$

то имеем следующий результат

1) φ_n имеет бесконечно много непрерывных производных,

2) φ_n при $n \to \infty$ сходится к F в смысле распределений.

Эти φ_n называются регуляризирующими обобщенной функции F.

Можно записать

$$\varphi_n = r_n * F \to \delta * F = F$$

при $n \to \infty$.

В самом деле, любая обобщенная функция F удовлетворяет соотношению

$$r_n * F = \varphi_n.$$

Если можно это равенство формально разделить на $r_n(x)$, то можно выразить F как сверточное частное. Это замечание подтверждает конструкция Микусинского [7].

3.5. Распределения от нескольких переменных.

Прежде всего сформулируем структуру функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $X = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

Функционал T_X на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ есть оператор, который присваевает вещественное или комплексное число каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Это число обозначается символом

$$< T_X,\ \varphi >,$$

$$T_X : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

$$\varphi \mapsto < T_X,\ \varphi > .$$

Дуальное пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ есть пространство функционалов T_X на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, которые являются линейными и секвенциально непрерывными, где последнее означает, что

$$< T_X,\ \varphi_n >\to 0, \quad n \to \infty,$$

для каждой бесконечной последовательности $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится к нулю при $n \to \infty$ в смысле $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Элементы из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называются обобщенными функциями от n переменных.

Носитель обобщенной функции в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Обобщенная функция T_X из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ равна нулю в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если

$$< T_X,\ \varphi >= 0$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в Ω.

Носитель обобщенной функции T_X есть дополнение для наибольшего открытого множества Ω, где T_X равна нулю.

Примеры обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, которая идентична обобщенной функции T_X. Тогда полагают

$$< T_X,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Здесь T_X есть регулярная обобщенная функция, соответствующая функции f. В самом деле, интеграл существует по области интегрирования, которая не является пространством $\mathbb{R}^n$, а есть носитель функции φ. На этом носителе f суммируемая и φ непрерывная, так что $f\,\varphi$ суммируемая. Следовательно, интеграл есть линейный функционал от φ, непрерывный на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Пример 2. Распределение Дирака $\delta(x)$ определяется формулой

$$< \delta(x),\ \varphi(x) >= \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Точечное распределение δ_c в точке $x = c \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$< \delta(x_1 - c_1,\ x_2 - c_2, \ldots, x_n - c_n),\ \varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) >= \varphi(c_1,\ c_2, \ldots, c_n),$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad c = (c_1,\ c_2, \ldots, c_n).$$

Пример 3. Пространство $\mathbb{R}^n$ допускает поверхностное распределение (обобщенную функцию), определение кооторого может быть сформулировано в следующем виде.

Пусть S — регулярная поверхность и $K(x)$ — кусочно непрерывная функция на S. Тогда поверхностную обобщенную функцию обозначают $K\delta_S$ и определяют формулой

$$< K\delta_S,\ \varphi(x) >:= \int_S K(x)\varphi(x)\mathrm{d}S. \tag{3.5.1}$$

Этим равенством определяют и обобщенную функцию простого слоя $K\delta_S$ с плотностью $K(x)$.

Поверхностная обобщенная функция $\delta_{S_n(a;\ R)}$ на сфере $S(a;\ R)$, имеющей уравнение

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = R^2,$$

определяется формулой

$$< \delta_{S_n(a;\ R)}(x),\ \varphi(x) >= \frac{1}{A_n(R)} \int_{S_n(a;\ R)} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}S, \qquad (3.5.2),$$

где $A_n(R)$ есть площадь сферы и для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Имеет место формула (в смысле обобщенных функций)

$$\delta(x - a) = \lim_{R \to 0} \delta_{S_n(a;\ R)}.$$

Глава 4. Операции над обобщенными функциями (распределениями).

4.1. Транспонированная операция к стандартной операции.

Пусть A есть отображение основного пространства Φ в себя, которое секвенциально непрерывно в Φ. Это означает, что если $\{\varphi_n(x)\} \to 0$ при $n \to \infty$ в смысле пространства Φ, то последовательность $\{A\varphi_n(x)\}$ также сходится к нулю в смысле пространства Φ.

Отображению A соответствует операция, определенная на дуальном пространстве Φ' к пространству Φ.

Эта операция называется транспонированной операцией к операции A и будет обозначаться через A'. Таким образом, A' определяется формулой

$$< A'(F), \varphi >:=< F,\ A\varphi > \qquad (4.1.1)$$

для любых $F \in \Phi',\ \varphi \in \Phi$.

Если $a,\ b \in \mathbb{C}$, то согласно (4.1.1) имеем

$$< A'(aF_1 + bF_2),\ \varphi >=< aF_1 + bF_2,\ A\varphi >= a < F_1,\ A\varphi > +b < F_2,\ A\varphi >=$$

$$< aA'F_1 + bA'F_2,\ \varphi >,\ \forall F_1,\ F_2 \in \Phi',\ \varphi \in \Phi.$$

Таким образом,

$$A'(aF_1 + bF_2) = aA'F_1 + bA'F_2.$$

Следовательно, A' — линейная операция.

Также A' является непрерывной операцией по сходимости в Φ', то есть если последовательность $\{F_n\}$ сходится в Φ', то последовательность $\{A'F_n\}$ также сходится в Φ'.

К тому же, если A есть автоморфизм на Φ, обратный автоморфизм A^{-1} к которому также секвенциально непрерывен, A' также является автоморфизмом на Φ' и $(A')^{-1}$ является транспонированным автоморфизмом для A^{-1} [8].

4.2. Операция сдвига.

Пусть τ_c — оператор сдвига, где c есть вещественное число, определяемый формулой

$$\tau_c\varphi(x) := \varphi(x-c),\ \ \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.2.1}$$

Очевидно, если последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к нулю в $\mathcal{D}$, то последовательность сдвигов $\{\tau_c\varphi_n\}$ также сходится к нулю в $\mathcal{D}$. В качестве A возьмем τ_{-c}. Транспонированная операция A' есть τ_c, которая также называется операцией сдвига. Согласно (4.1.1) имеем

$$< \tau_c F,\ \varphi >=< F,\ \tau_{-c}\varphi > \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.2.2}$$

Обычно пишут F_{x-c} вместо $\tau_c F$.

Примеры.

1) Согласно (4.2.2) для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$< \tau_{-c}\delta,\ \varphi >=< \delta(x),\ \varphi(x+c) >= \varphi(c) =< \delta(x-c),\ \varphi >$$

то есть

$$\tau_{-c}\delta = \delta_c.$$

2) Если $F = f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, то имеем, согласно (4.2.2) для любого $\varphi \in \mathcal{D}$

$$< \tau_c f(x),\ \varphi(x) >=< f(x),\ \tau_{-c}\varphi(x) >=$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+c)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x-c)\varphi(x)\mathrm{d}x =< f(x-c),\ \varphi(x) >,$$

то есть $\tau_c f(x) = F_{x-c}$.

Приведенные примеры показывают, что операция сдвига в $\mathcal{D}'$ обобщает операцию сдвига τ_c в $\mathcal{D}$.

Если для каждого целого n имеем

$$< F_x,\ \varphi(x+np) >=< F_x,\ \varphi(x) > \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D},$$

то

$$F_{x-np} = F_x,$$

то есть обобщенная функция F_x есть периодическая обобщенная функция с периодом p.

Отражение для F_x есть $\check{F}_x$, то есть

$$< \check{F}_x,\ \varphi(x) >:=< F_x,\ \varphi(-x) >,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Обобщенная функция F_x называется симметричной (четной), если $F_{-x} = F_x$.

Тогда F_x называется антисимметричной (нечетной), если $F_{-x} = -F_x$.

Как и для функций можно сказать, что F_x симметрична или антисимметрична относительно точки $x = c \neq 0$, если

$$F_x = F_{2c-x} \text{ или } F_x = -F_{2c-x}.$$

Применяя эти определения к периодическим обобщенным функциям, получаем периодические симметричные и антисимметричные распределения (обобщенные функции).

4.3. Мультипликативное произведение на функцию.

В общем случае произведение двух локально суммируемых функций не является локально суммируемой функцией. Поэтому невозможно дать определение произведения FT двух обобщенных функций F и T.

Однако, если $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $a(x) \in C(\mathbb{R})$, то мультипликативное произведение $a(x)f(x)$ есть локально суммируемая функция.

N.B. Далее увидим, что понятие транспонирования играет важную роль в обобщении таких ограничений на мультипликативное произведение.

4.3.1.Пространство $M(\Phi)$ и обобщенное определение произведения.

Пусть a — функция, такая, что $a\,\varphi \in \Phi$ всякий раз, когда $\varphi \in \Phi$ и $a\,\varphi_n \to 0$ в смысле Φ всякий раз, когда $\varphi_n \to 0$ в смысле Φ. Тогда a называется мультипликатором для Φ.

Ясно, что такие мультипликаторы образуют векторное пространство $M(\Phi)$. Мультипликативное произведение обобщенной функции $F \in \Phi'$ на функцию $a(x) \in M(\Phi)$ есть элемент из Φ', обозначаемый через $a(x)F$, который определяется согласно формуле (4.1.1):

$$< aF,\ \varphi >:=< F,\ a\,\varphi > \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{4.3.1}$$

4.3.2. Распределения, принадлежащие $\mathcal{D}'$ или $\mathcal{E}'$.

Из определения пространства $M(\Phi)$ непосредственно следует, что $M(\mathcal{D}) = \mathcal{E}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, имеющих произвольные носители. Следовательно, если $F \in \mathcal{D}'$ (соответственно $\mathcal{E}'$) и если $a(x) \in \mathcal{E}$, то $a(x)F \in \mathcal{D}'$ (соответственно $\mathcal{E}'$), где согласно (4.3.1)

$$< aF,\ \varphi >=< F,\ a\,\varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \ \ (\text{соответственно } \mathcal{E}). \tag{4.3.2}$$

Примеры.

1) Произведение регулярной обобщенной функции f на функцию $a \in \mathcal{E}$ есть регулярная обобщенная функция $a\,f \in \mathcal{D}'$, определяемая формулой

$$< a\,f,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}} a(x) f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.3.3}$$

Следовательно, произведение, определяемое формулой (4.3.2), должным образом обобщает произведение функций.

2) Согласно (4.3.2) для любого $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$< x\,\delta(x),\ \varphi(x) >=< \delta(x),\ x\,\varphi(x) >= x\,\varphi(x)|_{x=0} = 0$$

и, следовательно, имеем тождество

$$x\,\delta(x) = 0 \tag{4.3.4}$$

Аналогично, если $a(x) \in \mathcal{E}$, то

$$< a(x)\delta(x-c),\ \varphi(x) >=< \delta(x-c),\ a(x)\varphi(x) >= a(c) < \delta(x-c),\ \varphi(x) >,$$

то есть

$$a(x)\delta(x-c) = a(c)\delta(x-c), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4.3.5}$$

Распределения конечного порядка.

Через $M(\mathcal{D}^k)$ обозначают пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций. Если $a(x) \in M(\mathcal{D}^k)$ и $\delta(x-c) \in (\mathcal{D}^k)'(\mathbb{R})$, то $a(x)\delta(x-c) \in (\mathcal{D}^k)'$ и в соответствии с (4.3.5) имеем

$$a(x)\delta(x-c) = a(c)\delta(x-c).$$

Это соотношение также справедливо, если $a(x)$ только непрерывная.

4.3.3. Распределения медленного (умеренного) роста.

Через $M(\mathcal{S})$ обозначают пространство бесконечно дифференцируемых функций медленного роста, так что

$$|a^{(k)}(x)| < A|x|^h, \quad x \to \infty,$$

где $h,\ A$ — положительные числа, зависящие от k.

Если $F \in \mathcal{S}'$ и если $a(x) \in M(\mathcal{S})$, то произведение $a(x)F$ также принадлежит $\mathcal{S}'$ и согласно (4.3.1)

$$< a(x)F,\ \varphi >:=< F,\ a(x)\varphi(x) >, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{4.3.6}$$

Отметим различие между формулами (4.3.2) и (4.3.6). Заметим, что $\mathrm{e}^x \in \mathcal{E}$, но $\mathrm{e}^x \notin M(\mathcal{S})$. Таким образом, если $F \in \mathcal{S}'$, то $\mathrm{e}^x F \in \mathcal{D}'$, но $\mathrm{e}^x F \notin \mathcal{S}'$.

4.3.4. Ультрараспределения.

Через $M(\mathbf{Z})$ обозначим пространство целых аналитических функций на $\mathbb{C},\ z = x + \mathrm{i}y$, модули которых ограничены величиной $A|z|^h \mathrm{e}^{a|y|}$ при $|z| \to \infty$, где $A > 0$ и a — вещественные константы и h целое число.

Если $F \in \mathbf{Z}'(\mathbb{C})$ и $a(x) \in M(\mathbf{Z})$, то произведение aF также принадлежит $\mathbf{Z}'(\mathbb{C})$ и согласно (4.3.1) имеем

$$< aF, \varphi >=< F,\ a(z)\varphi(z) >, \quad \varphi \in \mathbf{Z}.$$

4.4. Дифференцирование.

4.4.1. Связь операции сдвига с дифференцированием.

Покажем, что операция дифференцирования связана с операцией сдвига. Дифференцирование функции:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x) = \lim_{c\to 0}\frac{\varphi(x+c)-\varphi(x)}{c} = \lim_{c\to 0}\frac{\tau_{-c}\varphi(x)-\varphi(x)}{c}.$$

Аналогично имеем:

$$DF := \lim_{c\to 0}\frac{\tau_{-c}F - F}{c}. \tag{$*$}$$

Действительно,

$$\lim_{c\to 0}\left\langle \frac{\tau_{-c}F - F}{c},\ \varphi \right\rangle = \lim_{c\to 0}\left\langle F,\ \frac{\varphi(x-c)-\varphi(x)}{c} \right\rangle =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left\langle F,\ \frac{-a\varphi'(x) + c^2\varphi(x)}{c} \right\rangle =$$

$$= \lim_{c \to 0} < F,\ -\varphi'(x) >=< DF,\ \varphi >$$

то есть (∗)!

В частности, имеем

$$\delta'(x) = D\delta(x).$$

Это выражение представляет собой диполь, так как

$$D\delta(x) = \lim_{c \to 0} \frac{\delta(x+c) - \delta(x)}{c}.$$

4.4.2. дифференцирование обобщенных функций конечного порядка, имеющих ограниченный носитель.

Если F — распределение конечного порядка $\leq k$, имеющее ограниченный носитель, то существует

1) непрерывная функция $h(x)$ и целое число $p \leq k+2$, такое, что

$$F = D^p h(x),$$

2) регулярная обобщенная функция $f(x)$ и целое $q \leq k+1$, такая, что

$$F = D^q f(x),$$

3) мера m и целое $\tau \leq k$, такое, что

$$F = D^\tau m.$$

Доказательство можно найти в [2].

4.4.3. Производные распределения Дирака.

Имеем

$$< D^h\delta(x-c),\ \varphi(x) >= (-1)^h < \delta(x-c),\ \varphi^{(h)}(x) >=$$

$$= (-1)^h \varphi^{(h)}(c) =< \delta^{(h)}(x-c),\ \varphi(x) >$$

то есть

$$D^h\delta(x-c) = \delta^{(h)}(x-c). \qquad (*)$$

Обычно $\delta^{(1)}(x-c)$ обозначается через $\delta'(x-c)$.

Последний результат (∗) верен для любого φ из $\mathcal{D},\ \mathcal{E},\ \mathcal{S}$.

4.4.4. Дифференцирование регулярного распределения.

Пусть $f(x)$ есть функция, такая, что $f(x)$ имеет локально суммируемую производную (в классическом смысле) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$, исключая изолированные точки c_j, где f имеет конечные левый и правый пределы, то есть $f(c_j - 0)$ и $f(c_j + 0)$.

Тогда имеем

$$Df(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \sum_j [f(c_j + 0) - f(c_j - 0)]\delta(x - c_j), \tag{4.4.3}$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ рассматривается как регулярная обобщенная функция (показать!).

4.4.5. Дифференцирование ультраобобщенных функций (ультрараспределений в Z).

Если $f(z)$ есть аналитическая функция и ab есть путь из точки a в точку b, который избегает особенностей $f(z)$, то согласно (4.4.1) имеем для любого $\varphi \in \mathbf{Z}$

$$< Df(z)_{ab},\ \varphi(z) >= - < f(z)_{ab},\ \varphi'(z) >= - \int_{ab} f(z)\varphi'(z)\mathrm{d}z =$$

$$= f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(b) + \int_{ab} f'(z)\varphi(z)\mathrm{d}z =$$

$$< f(a)\delta(z - a) - f(b)\delta(z - b),\ \varphi(z) > + < f'(z)\varphi(z) >,$$

то есть

$$Df(z)_{ab} = f'(z) + f(a)\delta(z - a) - f(b)\delta(z - b), \tag{4.4.5}$$

где путь ab должен лежать на одном листе римановой поверхности.

Если $f(z)$ есть мероморфная функция и Γ есть замкнутый путь не проходящий через полюсы ζ_k функции $f(z)$, то имеем

$$Df(z)_\Gamma = f'(z)_\Gamma.$$

Напомним, что в этом случае $f(z)_\Gamma$ равно линейной комбинации $\delta^{(k)}(z - \zeta_n)$ для полюсов, расположенных в конечной области, ограниченной кривой Γ.

Задача. (ряды Тейлора).

Если $F \in \mathbf{Z}$, показать, что

$$\tau_{-a}F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} D^n F.$$

4.5. Дифференцирование мультипликативного произведения.

Для любого $\varphi \in \Phi$ имеем

$$< D(aF),\ \varphi >=< aF,\ -\varphi'(x) >=< F,\ -a\varphi' >=$$

$$= \left\langle F,\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a\varphi) + a'\varphi \right\rangle =< aDf + a'F,\ \varphi >,$$

то есть

$$D(aF) = aDF + a'F. \tag{4.5.1}$$

Дифференцируя снова, имеем

$$D^2(aF) = aD^2F + 2a'DF + a''F. \tag{4.5.2}$$

И далее имеем

$$D^n(aF) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a^{(n-j)} D^j F. \tag{4.5.3}$$

Примеры.

Для любого $\varphi \in \Phi$ имеем

$$< aD\delta,\ \varphi >=< D\delta,\ a\varphi >= -(a\varphi)'|_{x=0} =$$

$$= -a(0)\varphi'(0) - a'(0)\varphi(0) =< a(0)\delta' - a'(0)\delta,\ \varphi >,$$

то есть

$$a\delta' = a(0)\delta' - a'(0)\delta. \tag{4.5.4}$$

В частности, имеем

$$x\delta' = -\delta, \quad x^2\delta' = 0, \ldots.$$

Если j — целое положительное число, то имеем

$$< D^k(x^j\delta(x)),\ \varphi(x) >= (-1)^k < x^j\delta(x),\ \varphi^{(k)}(x) >=$$

$$= (-1)^k < \delta(x),\ x^j\varphi^{(k)}(x) >= 0$$

и, следовательно,

$$D^k(x^j\delta(x)) = 0. \tag{4.5.5}$$

Задача. Доказать, что

$$(i)\ \ x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x), \quad m = 1,\ 2, \ldots,$$

$$(ii)\quad x^j\delta^{(k)}(x)=\begin{cases}\frac{(-1)^j k!}{(k-j)!}\delta^{(k-j)}(x), & k\ge j,\\ \qquad 0, & k<j,\ j>0\end{cases},$$

где k — любое натуральное число.

4.6. Дифференцирование пределов и рядов.

Пусть $F_\nu \to F$ в Φ' при $\nu\to\nu_0$. Тогда имеем

$$< D^n F_\nu,\ \varphi >=< F_\nu,\ (-1)^n\varphi^{(n)} >\to< F,\ (-1)^n\varphi^{(n)} >=< D^n F,\ \varphi >,$$

то есть

$$D^n F_\nu \to D^n F. \tag{4.6.1}$$

Пример.

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ nx, & 0<x\le \frac{1}{n},\\ 1, & x\ge\frac{1}{n}.\end{cases}$$

Очевидно, $u_n(x)\to u$ (функция Хевисайда).

Имеем

$$Du_n\to Du=\delta(x) \text{ в } \mathcal{D}'.$$

Заметим, что производная от $u_n(x)$ не существует в обычном смысле.

Учитывая результаты о дифференцирования предела обобщенных функций, определим дифференцирование рядов.

Сходящийся ряд в Φ' может быть продифференцирован почленно любое число раз, и полученный таким образом ряд сходится в Φ', так что

$$D^h\sum_{n=0}^{\infty}F_n=\sum_{n=0}^{\infty}D^hF_n,\quad F_n\in\Phi'.$$

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

сходится в обычном смысле. Следовательно, продифференцированные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

сходятся в смысле обобщенных функций.

Критерий сходимости тригонометрических рядов.

Если числа a_n такие, что для $|n|$ достаточно больших $|a_n| \le A|n|^\lambda$, где A и λ фиксированы, то ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\omega x$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega x$$

сходятся в смысле обобщенных функций.

В самом деле, для натуральных $n \ge \lambda + 2$ ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x} = D^h S,$$

где

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega n)^{-h} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

есть ряд, сходящийся в обычном смысле.

4.7. Дифференцирование в случае нескольких переменных.

Интерес к этому случаю возникает, когда T_X отождествляется с локально суммируемой функцией $f(x)$, но является разрывной на поверхности S. В этом случае имеем

$$< D_1 f,\ \varphi >= - < f,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} >= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1.$$

Далее, следуя процедуре (4.4.3) имеем

$$< D_1 f,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \varphi(x) \mathrm{d}x_1 + S_{x_1}(x_p)\varphi(x_p),$$

где $\partial f(x)/\partial x_1$ есть обычная частная производная функции $f(x)$, а $S_{x_1}(x_p)$ есть скачок функции $f(x)$, когда S пересекается в точке x_p, оцениваемый в точке пересечения S с линией, параллельной оси x_1 с координатами $x_2,\ x_3, \ldots, x_n$, проходящей через x_p; функция φ в произведении $S_{x_1}(x_p)\varphi(x_p)$ оцениваемая в той же самой точке.

Следовательно,

$$< D_1 f,\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_S S_{x_1}(x_p)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Поскольку функция $S_{x_1}(x_p)$ равна нулю вне S, то интеграл по поверхности эквивалентен интегралу

$$\int_S S_{x_1}(x)\cos\theta_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}S,$$

где θ_1 — угол между осью x_1 и нормалью к S, направленной в сторону увеличения x_1.

Следовательно имеем

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + S_{x_1}\cos\theta_1\delta_S, \tag{4.7.1}$$

где, очевидно, можно заменить индекс 1 на индексы $1,\ 2,\ldots,n$.

Дифференцируя еще раз, имеем

$$D_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + D_i(S_{x_i}\cos\theta_i\cdot\delta_S) + S_{x_i}^{(1)}\cos\theta_i\cdot\delta_S, \tag{4.7.2}$$

где $S_{x_i}^{(1)}(x)$ означает скачок функции $\partial f/\partial x_i(x)$ на S.

4.7.1. Обобщение $\delta'(x)$.

Пусть S — регулярная поверхность и пусть ν — нормаль к S в точке x_1. Также пусть $K(x)$ — непрерывная функция на S. Тогда обобщенная функция

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(K\delta_S)$$

действует по формуле

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\nu}(K\delta_S),\ \varphi\right\rangle = -\int_S K(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(x)\mathrm{d}S,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Это представление обобщенной функции — „двойной слой “ с пространственной плотностью зарядов, которые образуют диполи, направленные вдоль нормали ν с поверхностной плотностью момента $K(x)$.

4.7.2. Лапласиан.

Дифференциальный лапласиан есть оператор вида

$$\Delta_d = \sum_{i=1}^{d} D_i^2.$$

Можно подсчитать $\Delta_d f(x)$, который для любой обобщенной функции T_x имеет вид

$$< \Delta_d T_x,\ \varphi >=< T_x,\ \Delta_d \varphi > . \tag{4.7.3}$$

Это формула интегрирования при использовании формулы Грина. Например, если $f(x)$ определена в области V, которая ограничена регулярной поверхностью S и если $f(x)$ дифференцируема на S, а также дважды дифференцируема внутри V, то формула Грина дает

$$\int_V (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\mathrm{d}x + \int_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i} - \varphi\frac{\partial f}{\partial\nu_i} \right) \mathrm{d}S = 0,$$

где ν_i означает внутреннюю нормаль к S.

Отсюда

$$\int_V f\Delta\varphi \mathrm{d}x = \int_V (\Delta f)\varphi \mathrm{d}x + \int_S \frac{\partial f}{\partial\nu_i}\varphi \mathrm{d}S - \int_S f\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\mathrm{d}S.$$

Или имеем

$$\Delta_d f = \Delta f + \frac{\partial f}{\partial\nu_i}\delta_S + \frac{\partial}{\partial\nu_i}(f\delta_S). \tag{4.7.4}$$

Таким образом, дифференциальный лапласиан функции $f(x)$ равен классическому лапласиану, увеличенному на обобщенную функцию простого слоя и обобщенную функцию двойного слоя.

К тому же формула Грина ведет к следующему результату. Полагая

$$r = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

имеем

$$\begin{cases} \Delta_d \left(\log\frac{1}{r}\right) = -2\pi\delta(x), & n = 2, \\ \Delta_d \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x), & n = 3, \\ \Delta_d \left(\frac{1}{r^{n-1}}\right) = -2(n-2)\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta(x), & n \geq 3. \end{cases} \tag{4.7.5}$$

Эта формула , после умножения на некоторый множитель, дает фундаментальное решение уравнения $\Delta_d T_X = B_X$, то есть обобщенную функцию E_X, такую, что

$$\Delta_d E_X = \delta(x).$$

4.8. Свертка.

В классическом анализе свертка двух функций f_1 и f_2 определяется формулой

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y)\mathrm{d}y, \tag{4.8.1}$$

если интеграл существует.

В частности, если $f_1 = f$, где $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, а $f_2 = \varphi \in \mathcal{D}$, имеем

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y =< f(y),\ \varphi(x-y) > .$$

Обобщим это определение свертки на случай, когда $F \in \mathcal{D}'$

$$(F * \varphi)(x) =< F_y,\ \varphi(x-y) > .$$

4.8.1. Свертка в $\mathcal{D}'$.

Пусть $\check{F}$ обозначает отражение обобщенной функции F, то есть

$$< \check{F},\ \varphi >=< F,\ \check{\varphi} >=< F_t,\ \varphi(-t) >,\ \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Пусть $G \in \mathcal{E}'$. Тогда $\check{G} * \varphi =< G_y,\ \varphi(x+y) >$ есть функция по x, которая принадлежит $\mathcal{D}$, ибо бесконечно дифференцируема и с компактным носителем. Следовательно, отображение

$$\varphi \to \check{G} * \varphi$$

есть отображение $\mathcal{D}$ в себя.

Можно убедиться, что это отображение является непрерывным для последовательностей (то есть секвенциально непрерывным).

Следовательно, этот оператор имеет транспонированный оператор в $\mathcal{D}'$, который определяют как свертка с G.

Ясно, что свертка $F \in \mathcal{D}'$ с G есть элемент из $\mathcal{D}'$, обозначаемый $G * F$ и определяемый по формуле

$$< F * G,\ \varphi >=< F,\ \check{G}\varphi >=< F_x,\ < G_y,\ \varphi(x+y) >>,\ \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Аналогично можно показать, что $\check{F} * \varphi \in \mathcal{E}$.

Поскольку $G \in \mathcal{E}'$, то можно определить:

$$< F * G,\ \varphi >=< G,\ \check{F} * \varphi >=$$

$$=< G_x,\ < F_y,\ \varphi(x+y) >>=< G_y,\ < F_x,\ \varphi(x+y) >> .$$

Тогда, согласно обобщению теоремы Фубини, имеем

$$< G_y,\ < F_x,\ \varphi(x+y) >>=< G_x,\ < F_y,\ \varphi(x+y) >>=$$

$$=< F_x \bigotimes G_y,\ \varphi(x+y) >, \tag{4.8.4}$$

где $F_x \bigotimes G_y$ — прямое (или тензорное) произведение обобщенных функций F_x и G_y.

N.B. Иногда это соотношение используют в качестве определения свертки без применения транспонирования.

Ассоциативность. Свертка трех и более обобщенных функций обладает свойством ассоциативности, когда носитель всех этих обобщенных функций, исключая один, являются ограниченными.

Непрерывность. Если семейство G_ν сходится к G при $\nu \to \nu_0$, то имеем:

$$G_\nu * F \to G * F \quad \text{в } \mathcal{D}'. \tag{4.8.5}$$

Примеры.

1) Если $F = f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $G = h(x) \in L^1_{\mathrm{compact}}$, то имеем

$$< h(x) * f(x),\ \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} f(x)h(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} h(y)f(x-y)\mathrm{d}y \right] \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Следовательно,

$$h(x) * f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(y)f(x-y)\mathrm{d}y,$$

то есть возвращаемся к формуле (4.8.1).

2) Если $F \in \mathcal{D}'$, то

$$< \delta(x) * F,\ \varphi >=< F,\ \check{\delta}(x) * \varphi >=< F,\ \varphi >$$

то есть

$$\delta(x) * F = F. \tag{4.8.6}$$

N.B. Эта формула и (4.8.5) служат цели регуляризации (см. предыдущий материал).

4.8.2. Свертка в $\mathcal{S}'_+$.

Если обобщенные функции принадлежат $\mathcal{S}'_+$, то их свертка также принадлежит $\mathcal{S}'_+$.

$\mathcal{S}'_+$ есть сверточная алгебра и $\delta(x)$ является единицей в этой алгебре, не имеющей делителей нуля.

4.8.3. Уравнения сверток.

Уравнение вида

$$A * X = B \tag{4.8.6.1}$$

известно как уравнение сверток. В этом уравнении A и B — заданные обобщенные функции и X — искомая обобщенная функция.

Пример. Уравнение в конечных разностях

$$\sum_j a_j \tau_{c_j} X = B$$

может быть представлено в виде

$$\left[\sum_j a_j \delta(x - c_j)\right] * X = B.$$

Интегральное уравнение

$$f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) \mathrm{d}t = g(x),$$

где $K(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, может быть записано в следующем виде

$$[\delta(x) + K(x)] * f(x) = g(x).$$

4.8.4. Фундаментальное (элементарное) решение.

Решение E уравнения (4.8.6.1) называется фундаментальным (элементарным) решением, если E есть обобщенная функция, являющаяся решением уравнения

$$A * E = \delta(x). \tag{4.8.6.2}$$

Это решение не всегда единственное. Если существует одно, то существует и бесконечно много решений. Разность между любыми элементарными решениями является решением уравнения $A * X = 0$.

Если свертка $A*E*B$ ассоциативна, то $X = E*B$ есть решение уравнения $A*X = B$.

Фундаментальное решение связано с изучением функции Грина.

4.9. Преобразование переменной.

Пусть $U(x)$ — монотонная функция на всей оси $\mathbb{R}$ и пусть $V(x)$ будет к ней обратная, такая, что $V(x) = 0$ для всех x вне $U(\mathbb{R})$.

Для любой функции $\varphi(x)$, принадлежащей к подходящему основному пространству Φ, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f[U(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)|V'(x)|\varphi[V(x)]\mathrm{d}x,$$

или

$$< f[U(x)],\ \varphi(x) >=< f(x),\ |V'(x)|.\varphi[V(x)] >, \quad \varphi \in \Phi.$$

4.9.1. Определение $T_U(x)$.

Пусть T_X — обобщенная функция, принадлежащая пространству Φ' и пусть S — ограниченный или неограниченный носитель обобщенной функции T_X. Также пусть $U(x)$ — однозначная вещественная функция, определенная на $\mathbb{R}$ или части $\mathbb{R}$, где она непрерывно дифференцируема достаточное число раз и обладающая следующими свойствами:

1) Существует N ($N > 1$) замкнутых интервалов X_n, которые удовлетворяют двум условиям

$C1:$ $U(X_n)$ содержат S,

$C2:$ $U'(x)$ не обращается в нуль на X_n (то есть $U(x)$ строго монотонна на X_n).

2) Существует также взаимно однозначное соответствие между X_n и $U(X_n)$. Следовательно, каждому $x \in S$ соответствует только одно $x' \in X_n$, которое обозначается через $V_n(x)$, так что $U(x') = U(V_n(x)) = x$, когда $V_n(x) = U_n^{-1}(x)$, где $U_n^{-1}(x)$ — обращение монотонной ветки, описываемой через $U(x)$, когда $x \in X_n$.

Вне $U(X_n)$ $V_n(x)$ продолжена до функции, принадлежащей Φ.

Пусть $\alpha_S \in \Phi$ равна 1 на S и нулю вне интервала, содержащего S.

Полагаем

$$A\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_S(x)|V_n'(x)||\varphi(V_n(x))|. \tag{4.9.1}$$

Из предварительно наложенныхусловий на $U(x)$ можно сделать вывод, что отображение

$$\varphi(x) \to A\varphi(x)$$

является секвенциально непрерывным отображением Φ в себя.

Путем транспонирования получаем обобщенную функцию $A'T_X \in \Phi'$, которая обозначается $T_{U(x)}$ и определяется формулой

$$< T_{U(x)},\ \varphi(x) >= \left\langle T_X,\ \sum_{n=1}^{N} V_n'(x)\varphi(V_n(x)) \right\rangle,\ \varphi \in \Phi. \tag{4.9.2}$$

Носитель $T_{U(x)}$ есть

$$S_U = \bigcup V_n(S) = \bigcup \{x \in X_n | U(x) \in S\}. \tag{4.9.3}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{U'(V_n(x))}$$

можно отнести к $V_n'(x)$ в (4.9.2)

Если имеется счетное бесконечное число X_n (если $U(x)$ имеет счетное множество монотонных ветвей, как например, $U(x) = \sin x$), то формула (4.9.2) все еще имеет место, если сходимость ряда имеет место для каждой $\varphi \in \Phi$.

Если требовать, чтобы формула (4.9.2) была справедлива для всех обобщенных функций, имеющих произвольные носители, то $U(x)$ должна быть бесконечно непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ и ее производная $U'(x)$ не должна обращаться в нуль на $\mathbb{R}$.

Путь $D_X(T_{U(x)})$ обозначает производную от обобщенной функции $T_{U(x)}$ и пусть $(DT)_{U(x)}$ обозначает производную от обобщенной функции при замене x на $U(x)$ в производной DT_X. Тогда имеем для любого $\varphi \in \Phi$

$$\begin{aligned} &< D_x(T_{U(x)},\ \varphi) >=< T_{U(x)},\ \varphi'(x) >= \\ &= - < T_y,\ |V'(y)|\varphi'(V(y)) > . \end{aligned} \tag{4.9.4}$$

Также

$$\begin{aligned} &< D_x(T_{U(x)},\ \varphi) >=< DT_y,\ |V'(y)|\varphi(V(y)) >= \\ &= - < T_y,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}|V'(y)|\varphi(V(y)) >= \\ &= - < T_y,\ \frac{|V'(y)|}{U'(x)}\varphi'(V(y)) > . \end{aligned} \tag{4.9.4$'$}$$

Из (4.9.4) и (4.9.4′) заключаем

$$(DT)_{U(x)} = \frac{1}{U'(x)} D_x T_{U(x)}. \tag{4.9.5}$$

Примеры.

1) Если $T_x = f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и если $U(x)$ имеет не обращающуюся в нуль производную на $\mathbb{R}$, то (4.9.2) вместе с $V(x) = U^{-1}(x)$ и $\varphi \in \mathcal{D}$, дает

$$< T_{U(x)},\ \varphi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(x)|V'(x)|\varphi'(V(x))\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(U(x))\mathrm{d}x =< f(U(x)),\ \varphi(x) > .$$

Отсюда получаем

$$T_{U(x)} = f(U(x)),$$

как и ожидалось.

2) Пусть $T_x = f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ с носителем $S = [c,\ c']$ и пусть $U(x) = x^2 + b$, где $b < c$. Следовательно, условия $c1,\ c2$ выполняются двумя X_n:

$$x_1 = [-H,\ -\eta],\quad X_2 = [\eta,\ H],$$

где η и H такие, что

$$0 < \eta < \gamma = \sqrt{c-b},\quad H > \gamma' = \sqrt{c'-b}.$$

Тогда имеем

$$V_1(x) = -\sqrt{x-b},\quad V_2(x) = \sqrt{x-b}$$

и (4.9.2) выполнено.

$$< T_{U(x)},\ \varphi(x) >= \int_c^{c'} f(x)[\varphi(-\sqrt{x-b}) + \varphi(\sqrt{x-b})]|\mathrm{d}\sqrt{x-b}| =$$

$$= \int_\gamma^{\gamma'} f(x^2+b)[\varphi(-x)+\varphi(x)]\mathrm{d}x = \int_{-\gamma'}^{-\gamma} f(x^2+b)\varphi(x)\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_\gamma^{\gamma'} f(x^2+c)\varphi(x)\mathrm{d}x =< f_1(x^2+b),\ \varphi(x) >,$$

где

$$f_1(x^2+b) = \begin{cases} f(x^2+b), & \sqrt{c-b} \le |x| \le \sqrt{c'-b}, \\ 0, & \text{вне этого отрезка} \end{cases}$$

Следовательно, заключаем, что

$$T_{U(x)} = f_1(x^2 + b).$$

Это соотношение можно получить непосредственно. С другой стороны, если $b > c$, то $T_{U(x)}$ не существует, так как не существует X_n, удовлетворяющее условиям $c1$, $c2$. Следует заметить, что примеры 1) и 2) демонстрируют, что формула (4.9.2) обобщает формулу замены переменной в теории функций.

Глава 5. Преобразования Фурье.

Используем следующие обозначения и термины.

$$g(x) = \mathcal{F}_x(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xt}, \tag{5.0.1}$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье.

$$\mathcal{F}_t^{-1}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x, \tag{5.0.2}$$

где $\mathcal{F}_t^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

5.1. Преобразование Фурье на $\mathbf{Z}$.

Определение 5.1.1. Пусть $\psi \in \mathbf{Z}$. Тогда преобразование Фурье определяют соотношением

$$\mathcal{F}_x(\psi(z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz}\psi(z)\mathrm{d}z, \tag{5.1.1}$$

где интеграл берется вдоль пути в комплексной плоскости, идущего из $-\infty$ к $+\infty$, в частности вдоль вещественной оси.

Вообще говоря это преобразование называется преобразованием Фурье-Лапласа. В дальнейшем будем говорить: преобразование Фурье на $\mathbf{Z}(\mathbb{C})$.

Теорема 5.1.1. Если $\psi \in \mathbf{Z}$, то преобразование Фурье функции комплексного переменного z является функцией вещественной переменной x, принадлежащей пространству $\mathcal{D}$, которую обозначают так: $\mathcal{F}_x\psi(z) = \varphi(x) \in \mathcal{D}$.

Доказательство.

Чтобы показать, что $\varphi \in \mathcal{D}$, напомним, что $\forall z \in \mathbb{C}$ (см. (1.6.1))

$$|\varphi(z)| \le C|z|^{-2}\mathrm{e}^{a|\eta|}, \quad \eta = \operatorname{Im} z, \quad a \ge 0. \tag{5.1.2}$$

Если $\gamma_-(R)$ — полуокружность $|z| = R,\ \eta < 0$, то, используя оценку (5.1.2) при $x \geq a$ имеем

$$|\varphi(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xz}\mathrm{d}z\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z)||\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xz}||\mathrm{d}z| \leq$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_-(R)} CR^{-2}\mathrm{e}^{a|\eta|}\mathrm{e}^{-xR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta \leq$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} CR^{-1}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(x-a)R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

Аналогично можно получить тот же результат для $x \leq -a$ на полуокружности $|z| = R,\ \eta \leq 0$.

Из этих результатов можно заключить, что $\varphi(x)$ имеет носитель в $[-a,\ a]$, то есть $\varphi(x)$ имеет ограниченный носитель. Далее, согласно (5.1.1) и свойствам $\psi(z)$, очевидно, что $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема.

В дальнейшем будут полезны связывающие формулы:

$$\mathcal{F}_x\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \psi(z)\right) = (2\pi \mathrm{i} x)^k \mathcal{F}_x\psi(z), \tag{5.1.3}$$

$$\mathcal{F}_x(z^k\psi(z)) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathcal{F}_x\psi(z). \tag{5.1.4}$$

Также $\psi(z)$ называется обратным преобразованием для $\varphi(x) = \mathcal{F}_x(\psi(z))$ и обозначается

$$\psi(z) = \mathcal{F}_z^{-1}\varphi(x).$$

Исходя из формулы (5.0.2) можно сделать вывод:

$$\mathcal{F}_z^{-1}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} zx}\mathrm{d}x.$$

5.2. Преобразование Фурье на $\mathcal{D}$.

Теорема 5.2.1. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Тогда преобразование Фурье для функции вещественной переменной x является функцией комплексной переменной z, принадлежащей пространству $\mathbf{Z}$, и определяется формулой

$$\psi(z) = \mathcal{F}_z\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} zx}\mathrm{d}x.$$

Доказательство.

Так как $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, то она имеет компактный носитель. Пусть $\operatorname{supp}\varphi(x) = [-b,\ b]$. Тогда, согласно (5.2.1),

$$\psi(z) = \int_{-b}^{b} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x z} \mathrm{d}x.$$

Очевидно, что $\psi(z)$ является бесконечно дифференцируемой и аналитической.

Также имеем

$$(2\pi\mathrm{i})^j z^j \psi(z) = \int_{-b}^{b} \varphi^{(j)}(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x z} \mathrm{d}x.$$

Далее, используя (5.2.2), имеем для $\eta = \operatorname{Im} z$

$$|z^j \psi(z)| < (2\pi)^{-j} \int_{-b}^{b} |\varphi^{(j)}(x)| \mathrm{e}^{2\pi\eta x} \mathrm{d}x <$$

$$< (2\pi)^{-j} \mathrm{e}^{2\pi b\eta} \int_{-b}^{b} |\varphi^{(j)}(x)| \mathrm{d}x.$$

Если положить $a = 2\pi b$ и

$$c_j = (2\pi)^{-j} \int_{-b}^{b} |\varphi^{(j)}(x)| \mathrm{d}x,$$

то имеем

$$|z^j \psi(z)| < c_j \mathrm{e}^{a|\eta|}.$$

Следовательно, $\psi(z) \in \mathbf{Z}$. Также можно сделать вывод, что $\mathcal{F}_z$ отображает $\mathcal{D}$ в $\mathbf{Z}$.

Вывод. Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathbf{Z}$ могут отображаться одно в другое посредством преобразования Фурье.

Замечание. Сравнивая (5.1.5) и (5.2.1) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^{-1}\varphi(x) &= \mathcal{F}_{-z}\varphi(x) = \mathcal{F}_z\varphi(-x), \\ \mathcal{F}_x^{-1}\psi(z) &= \mathcal{F}_{-x}\psi(z) = \mathcal{F}_x\psi(-z). \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Из полученных выше результатов можно сделать вывод, что преобразование Фурье есть изоморфизм пространства $\mathbf{Z}$ (или $\mathcal{D}$) на $\mathcal{D}$ (или $\mathbf{Z}$).

5.3. Преобразование Фурье на $\mathcal{D}'$ и $\mathbf{Z}'$.

Теорема 5.3.1. Пусть $T_x \in \mathcal{D}'$. Тогда преобразование Фурье для обобщенной функции T_x есть ультраобобщенная функция в $\mathbf{Z}'$, которую обозначают $\mathcal{F}_z T_x$ и определяют по формуле

$$< \mathcal{F}_z T_x,\ \psi(z) >:=< T_x,\ \mathcal{F}_x \psi(z) >, \quad \psi \in \mathbf{Z}. \tag{5.2.1}$$

Обратно,

Теорема 5.3.2. Пусть $U_z \in \mathbf{Z}'$. тогда преобразование Фурье для $U_z \in \mathbf{Z}'$ есть $\mathcal{F}_x U_z \in \mathcal{D}'$, которое определяется формулой

$$< \mathcal{F}_x U_z,\ \varphi(x) >:=< U_z,\ \mathcal{F}_z \varphi >, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{5.3.2}$$

Из этих результатолв вытекает, что пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$, $\mathbf{Z}'$ могут быть преобразованы одно в другое посредством преобразования Фурье.

5.4. Обращение и сходимость.

5.4.1. Обращение.

Теорема 5.4.1. Пусть $U_z \in \mathbf{Z}'$. Тогда она имеет антипреобразование $\mathcal{F}_x^{-1}(U_z)$ на $\mathcal{D}'$, которое равно $(\mathcal{F}_x U_z)\check{}$.

Доказательство. В силу (5.2.3)

$$\mathcal{F}_z \varphi(-x) = \mathcal{F}_z^{-1} \varphi(x) = \psi(z),$$

где $\psi(z) = \mathcal{F}_z \varphi$.

Также в силу (5.2.3)

$$\mathcal{F}_{-x} \psi(z) = (\mathcal{F}_x \varphi)\check{}, \quad \mathcal{F}_{-z} \varphi = (\mathcal{F}_z \varphi)\check{}.$$

Более того, согласно теореме 5.3.2, $\mathcal{F}_x U_z \in \mathcal{D}'$. Следовательно, его отражение $(\mathcal{F}_x \check{U}_z)$ также принадлежит $\mathcal{D}'$. Применяя указанные соотношения, имеем для любого $\psi \in \mathbf{Z}$

$$< \mathcal{F}_z (\mathcal{F}_x U_z)\check{},\ \psi(z) > = < (\mathcal{F}_x U_z)\check{},\ \mathcal{F}_x \psi(z) > =$$

$$= < (\mathcal{F}_x U_z)\check{},\ \varphi(x) > = < \mathcal{F}_x U_z,\ \varphi(-x) > =$$

$$= < U_z,\ \mathcal{F}_z \varphi(-x) > = < U_z,\ \psi(z) >,$$

то есть

$$\mathcal{F}_z (\mathcal{F}_x U_z)\check{} = U_z.$$

Это соотношение можно также записать в виде

$$\mathcal{F}_x^{-1}\mathcal{F}_z(\mathcal{F}_x U_z)\check{} = \mathcal{F}_x^{-1}U_z.$$

Так как $\mathcal{F}_x^{-1}\mathcal{F}_z\check{}$ дает тождество, окончательно имеем

$$(\mathcal{F}_x U_z)\check{} = \mathcal{F}_x^{-1}U_z.$$

Аналогично имеем

Теорема 5.4.2. Пусть $T_x \in \mathcal{D}'$. Тогда она имеет антипреобразование

$$\mathcal{F}_z^{-1}T_x = (\mathcal{F}_z T_x)\check{} \text{ на } \mathbf{Z}.$$

5.4.2. Сходимость.

1) Очевидно, что

$$T_x = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_z T_x = 0,$$

$$U_z = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_x U_z = 0.$$

2) В силу теорем 5.3.1 и 5.4.1, если $T_{x,\ \nu}$ есть бесконечное семейство, зависящее от параметра ν, то

$$T_{x,\ \nu} \to T_x \text{ в } \mathcal{D}' \text{ при } \nu \to \nu_0,$$

то

$$\mathcal{F}_z T_{x,\ \nu} \to \mathcal{F}_z T_x \text{ в } \mathbf{Z}' \text{ при } \nu \to \nu_0,$$

N.B. Имеется аналогичный результат для $U_{z,\ \nu} \to U_z$ в $\mathbf{Z}'$, в силу теоремы 5.4.2.

Из этих результатов вытекает, что преобразование Фурье есть топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{D}'$ и $\mathbf{Z}'$.

5.5. Правила.

1) Согласно формуле (5.3.1) для $T_x \in \mathcal{D}'$

$$< \mathcal{F}_z\mathcal{D}^k T_x,\ \psi(z) > = < T_x,\ (2\pi \mathrm{i} z)^k \mathcal{F}_x\psi > =$$

$$< (2\pi \mathrm{i} z)^k \mathcal{F}_z T_x,\ \psi(z) >,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

то есть

$$\mathcal{F}_z\mathcal{D}^k T_x = (2\pi \mathrm{i} z)^k \mathcal{F}_z T_x. \tag{5.5.1}$$

Используя формулы (5.3.1) и (5.1.3) имеем для любого $T_x \in \mathcal{D}'$

$$< \mathcal{F}_z x^k T_x,\ \psi(z) > = < x^k T_x,\ \mathcal{F}_x\psi(z) > = < T_x,\ x^k \mathcal{F}_x\psi(z) > =$$

$$= (2\pi\mathrm{i})^{-k} < T_x,\ \mathcal{F}_x\psi^{(k)}(z) >=$$
$$= (2\pi\mathrm{i})^{-k} < \mathcal{F}_z T_x,\ \psi^{(k)}(z) >=$$
$$= (2\pi\mathrm{i})^{-k}(-1)^k < \mathcal{D}^k\mathcal{F}_z T_x,\ \psi(z) >,$$

то есть

$$\mathcal{F}_z x^k T_x = \frac{\mathrm{i}^k}{(2\pi)^k}\mathcal{D}^k\mathcal{F}_z T_x. \tag{5.5.2}$$

Существуют также аналогичные формулы для $\mathcal{F}_x$, действующего в $\mathbf{Z}'$.

5.6. Преобразование Фурье в $\mathcal{E}'$.

Если $T_x = f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, то, применяя теорему Фубини к (5.3.1), имеем

$$\mathcal{F}_z f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}zx}\mathrm{d}x. \tag{5.6.1}$$

Этот результат, так же как и в 5.5, показывает, что имеем обобщение обычного преобразования Фурье.

Далее, пусть T_x — обобщенная функция с компактным носителем. Тогда, согласно (5.1.1) и (5.3.1), а также по теореме Фубини, имеем

$$< T_x \bigotimes \psi(z),\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz} >=< T_x,\ < \psi(z),\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz} >>=$$
$$=< T_x,\ \mathcal{F}_x\psi(z),\ >=< \mathcal{F}_z T_x,\ \psi(z) > . \tag{5.6.2}$$

Также имеем

$$< T_x \bigotimes \psi(z),\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz} >=<< T_x,\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz} >,\ \psi(z) > . \tag{5.6.3}$$

где $\bigotimes$ – тензорное произведение обобщенных функций.

Сравнивая (5.6.2) и (5.6.3), имеем

$$\mathcal{F}_z T_x =< T_x,\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xz} > . \tag{5.6.4}$$

Этот результат есть существенное обобщение теоремы Пэли-Винера.

Следующие утверждения эквивалентны:

$$T_x \in \mathcal{E}' \text{ с компактным носителем в } [-c,\ c]$$

и

$\mathcal{F}_z T_x$ есть целая аналитическая функция, такая, что существует неотрицательное целое m такое, что $|\mathcal{F}_z T_x|\cdot|z|^m\mathrm{e}^{-2\pi c|\eta|}$ ограничено при $|z| \to \infty$, где $\eta = \mathrm{Im}\,z$.

Доказательство этого результата смотри в Л. Шварц [2].

5.7. Примеры.

1) Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Тогда, согласно (5.6.4), имеем

$$\mathcal{F}_z \delta^{(k)}(x-c) =< \delta^{(k)}(x-c),\ \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z x} >=$$

$$< \delta(x-c),\ (-D)^k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z x} >,$$

откуда

$$\mathcal{F}_z \delta^{(k)}(x-c) = (2\pi \mathrm{i} z)^k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} c z}. \tag{5.7.1}$$

2) В силу (5.7.1) имеем: $\mathcal{F}_z \delta = 1$. И далее, в силу (5.5.2), получаем

$$\mathcal{F}_x z^k = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k \delta^{(k)}(x),\ k = 0,\ 1, \ldots. \tag{5.7.2}$$

3) Согласно (5.3.2), имеем

$$< \mathcal{F}_x \delta(z - \mathrm{i}c),\ \varphi(x) >= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi c x} \varphi(x) \mathrm{d}x,$$

то есть

$$\mathcal{F}_x \delta(z - \mathrm{i}c) = \mathrm{e}^{2\pi c x} \text{ в } \mathcal{D}'. \tag{5.7.3}$$

Более общий результат, если $\zeta \in \mathbb{C}$, то

$$\mathcal{F}_x \delta(z - \zeta) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \zeta x}.$$

4) Пусть ξ — точка в комплексной плоскости и пусть γ_ξ — замкнутый путь, окружающий точку ξ в положительном направлении. Согласно (5.3.2) и теореме о вычетах, получаем

$$\left\langle \mathcal{F}_x \left. \frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z-\xi)} \right|_\gamma,\ \varphi(x) \right\rangle = \int_\gamma \frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z-\xi)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z x} \varphi(x) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x z}}{2\pi \mathrm{i}(z-\xi)} \mathrm{d}z\right] \varphi(x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Итак, имеем

$$\mathcal{F}_x \left. \frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z-\xi)} \right|_\gamma = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \ \text{ в } \ \mathcal{D}'. \tag{5.6.7}$$

5.8. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Для любого $x \in \mathbb{R}$ преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{S}$ определяется формулой

$$\mathcal{F}_x\varphi(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{5.8.1}$$

и его сопряженное — формулой

$$\overline{\mathcal{F}}_x\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{5.8.2}$$

Нетрудно установить следующие результаты:

1) $\mathcal{F}_x\varphi$ и $\overline{\mathcal{F}}_x\varphi$ есть функции от x, принадлежащие $\mathcal{S}$.

2) Если последовательность $\{\varphi_n\} \to 0$ в смысле $\mathcal{S}$, то $\mathcal{F}_x\varphi_n \to 0$ и $\overline{\mathcal{F}}_x\varphi_n \to 0$ в смысле $\mathcal{S}$.

3) $\overline{\mathcal{F}_x}$ есть антипреобразование для φ, то есть, если $\overline{\mathcal{F}}_x\varphi = \psi$, то имеем

$$\mathcal{F}_x\psi = \varphi \quad \text{или} \quad \mathcal{F}_x\overline{\mathcal{F}}_x\varphi = \varphi,$$

то есть $\mathcal{F}_x^{-1} = \overline{\mathcal{F}}_x$.

Из этих результатов вытекает, что $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ суть взаимно обратные автоморфизмы на $\mathcal{S}$.

В силу транспонирования, преобразование Фурье обобщенной функции $T_x \in \mathcal{S}'$ является элементом из $\mathcal{S}'$, который обозначается символом $\mathcal{F}_xT_x$ (или $\mathcal{F}_xT$ или просто $\mathcal{F}T$) и определяется формулой

$$< \mathcal{F}_xT_x,\ \varphi >:=< T_x,\ \mathcal{F}_x\varphi >, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.8.3}$$

Аналогично определяют сопряженное к нему преобразование $\overline{\mathcal{F}}T$ формулой

$$< \overline{\mathcal{F}}T,\ \varphi(x) >:=< T,\ \overline{\mathcal{F}}_x\varphi(x) >, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.8.4}$$

Подстановка $\overline{\mathcal{F}}T$ вместо T_x в формулу (5.8.3) дает

$$< \mathcal{F}_x(\overline{\mathcal{F}}_xT),\ \varphi(x) >=< \overline{\mathcal{F}}_xT,\ \mathcal{F}_x\varphi(x) >=< T,\ \varphi > .$$

Следовательно, $\mathcal{F}_x\overline{\mathcal{F}}_xT = T$ и

$$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}. \tag{5.8.5}$$

Также

$$\overline{\mathcal{F}}^{-1} = \mathcal{F}. \tag{5.8.6}$$

Далее имеем

$$T = 0 \Rightarrow \mathcal{F}\, T = 0,$$

$$T = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{F}}\, T = 0,$$

Легко показать, что если $T_{x,\ \nu}$ есть бесконечное семейство, принадлежащее $\mathcal{S}'$, то

$$T_{x,\ \nu} \overset{\mathcal{S}'}{\to} T_x, \quad \nu \to \nu_0$$

равносильно соотношениям

$$\mathcal{F}_x T_{x,\ \nu} \overset{\mathcal{S}'}{\to} \mathcal{F}_x T_x,$$

$$\mathcal{F}_x^{-1} T_{x,\ \nu} \overset{\mathcal{S}'}{\to} \mathcal{F}_x^{-1} T_x.$$

Таким образом, $\mathcal{F}\ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ являются взаимно обратными топологическими автоморфизмами на $\mathcal{S}'$.

5.9. Частные случаи.

Известно, что если $T \in \mathcal{E}'$, то

$$\mathcal{F}_x T =< T_\xi,\ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} >, \tag{5.9.1}$$

и если $T = f \in L^1(\mathbb{R})$, то снова имеет место обычное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}_x f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{5.9.2}$$

Обозначают эту функцию символом $\hat{f}(x)$.

Поскольку $|\hat{f}(x)|$ ограничен, то полагаем $\mathcal{F}_x \varphi = \hat{\varphi}(x)$. Тогда (5.8.3) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, соотношение (5.8.3) есть обобщение формулы Планшереля-Парсеваля.

5.10. Примеры.

Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Тогда, согласно (5.9.1), имеем

$$\mathcal{F}\delta^{(k)}(x-c) =< \delta^{(k)}(x-c),\ \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xz} >=$$

$$= (2\pi \mathrm{i} z)^k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} cx},$$

то есть

$$\mathcal{F}\delta^{(k)}(x-c) = (2\pi \mathrm{i} x)^k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} c x}. \tag{5.10.1}$$

Из (5.10.1) также вытекает, что

$$(-2\pi \mathrm{i} x)^k = \overline{\mathcal{F}}\delta^{(k)}(x) = \mathcal{F}^{-1}\delta^{(k)}(x).$$

Далее, применяя преобразование $\mathcal{F}$ к обеим частям последнего равенства и используя формулу (5.8.6), находим

$$\mathcal{F}x^k = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k \delta^{(k)}(x). \tag{5.10.2}$$

5.11. Преобразование Фурье в пространстве $C(\mathcal{S}')$ и $M(\mathcal{S})$.

Пусть $C(\mathcal{S}')$ — пространство обобщенных функций быстрого убывания, то есть пространство обобщенных функций вида

$$\sum_{k=0}^{K} D^k f_k(x),$$

где K — натуральное число и $f_k(x)$ — непрерывные функции на $\mathbb{R}$, такие, что

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^n f_k(x) = 0, \ \forall n > 0.$$

Тогда $C(\mathcal{S}')$ содержится в $\mathcal{S}'$, и имеют место следующие результаты.

Теорема 5.11.1. Пусть $T \in \mathcal{S}$ и $U \in C(\mathcal{S}')$. Тогда свертка $T * U \in \mathcal{S}'$.

Теорема 5.11.2. Если $U \in C(\mathcal{S}')$, то $\mathcal{F}U$ и $\overline{\mathcal{F}}U$ принадлежат пространству $M(\mathcal{S})$.

Теорема 5.11.3. Если функция $\alpha \in M(\mathcal{S})$, то $\mathcal{F}(\alpha)$, $\overline{\mathcal{F}}(\alpha) \in C(\mathcal{S}')$.
Отсюда следует, что $C(\mathcal{S}')$ и $M(\mathcal{S})$ изоморфны при преобразовании $\mathcal{F}$.

5.12. Преобразование Фурье свертки и мультипликативного произведения.

Основное свойство преобразования Фурье дается в следующей теореме.

Теорема 5.12.1 (теорема о перестановке).

Если $T \in \mathcal{S}'$, $U \in C(\mathcal{S}')$, $\alpha \in M(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{F}_x(U * T) = (\mathcal{F}_x U)(\mathcal{F}_x T), \tag{5.12.1}$$

$$\mathcal{F}_x(\alpha(x) * T) = (\mathcal{F}_x \alpha)(\mathcal{F}_x T), \tag{5.12.2}$$

Из этих результатов следует, что преобразование Фурье переставляет свертку и мультипликативное произведение.

5.13. Приложения.

1) Используя формулу

$$D^k T = \delta^{(k)}(x) * T,$$

получаем

$$\mathcal{F} D^k T = (2\pi \mathrm{i} x)^k \mathcal{F} T. \tag{5.13.1}$$

Более того, согласно (5.12.2), имеем

$$\mathcal{F}_\xi(x^k T_x) = \mathcal{F}_\xi x^k * \mathcal{F}_\xi T_x =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k \delta^{(k)} * \mathcal{F} T_x = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^k D^k \mathcal{F} T_x. \tag{5.13.2}$$

2) Пусть τ_c — сдвиг в точку c. Тогда

$$\tau_c T = \delta(x - c) T.$$

Следовательно,

$$\mathcal{F} \tau_c T = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} c x} \mathcal{F} T. \tag{5.13.3}$$

Дифференциальные уравнения.

Пусть $P(D)$ — дифференциальный полином степени d и пусть A — обобщенная функция, определяемая уравнением

$$P(D) X = A. \tag{5.13.4}$$

Пусть $\hat{X}_\xi = \mathcal{F}_\xi X$, $\hat{A}_\xi = \mathcal{F}_\xi A$. Применяя преобразование Фурье к (5.13.4), получаем алгебраическое уравнение

$$P(2\pi \mathrm{i} \xi) \hat{X}_\xi = \hat{A}_\xi. \tag{5.13.5}$$

Если B_ξ есть частное решение уравнения (5.13.5), то есть

$$P(2\pi \mathrm{i} \xi) B_\xi = \hat{A}_\xi,$$

то общее решение уравнения (5.13.5) может быть записано в виде

$$\hat{X}_\xi = B_\xi + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \delta^{(k)}(\xi),$$

где a_k — произвольные числа.

Путь X_x — антипреобразование для $\hat{X}_\xi$ и $\overline{\mathcal{F}_x} B_\xi$ — антипреобразование для B_ξ. Также антипреобразованием для

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k \delta^{(k)}(\xi)$$

будет полином $P_1(x)$ степени $d-1$. Тогда имеем

$$X_x = \overline{F}_x B_\xi + P_1(x).$$

Уравнения сверток (схема).

Пусть

$$Q * X = A, \tag{5.13.7}$$

где A и Q — известные обобщенные функции, такие, что $A \in \mathcal{S}'$, $Q \in C(\mathcal{S}')$, а X — искомая обобщенная функция.

Применяя преобразование Фурье к (5.13.7), имеем

$$\mathcal{F}(Q * X) = \mathcal{F}A = \hat{A},$$

или

$$q(x)\hat{X} = \hat{A},$$

где $q(x) = \mathcal{F}Q$, $\hat{X} = \mathcal{F}X$.

Если Y такое, что

$$q(x)Y = \hat{A},$$

то полагая $\hat{X} = Y$, имеем

$$X = \overline{\mathcal{F}}Y.$$

Глава 6. Преобразование Лапласа.

6.1. Обозначения.

Напомним, что $\mathcal{D}'_+$ обозначает пространство обобщенных функций с носителем, ограниченным слева. То есть, если $T_x \in \mathcal{D}'_+$, то существует вещественное число c, такое, что носитель T_x содержится в $[c,\ \infty]$.

Через $\mathcal{S}' \bigcap \mathcal{D}'_+$ обозначают пространство обобщенных функций умеренного роста с носителем, ограниченным слева, а через $\mathcal{S}'_+$ пространство обобщенных функций, принадлежащих пространству $\mathcal{S}$ с носителем, ограниченным слева.

Пусть $x,\ \xi,\ \eta$ — вещественные числа и пусть $z = \xi + \mathrm{i}\eta$.

Лемма 6.1.1. Пусть $T_x \in \mathcal{D}'_+$. Если существует вещественное число ξ', такое, что $\mathrm{e}^{-\xi' x} T_x \in \mathcal{S}' \bigcap \mathcal{D}'_+$, то для каждого z такого, что $\mathrm{Re}\, z > \xi'$ имеет место включение

$$\mathrm{e}^{-zx} T_x \in \mathcal{S}'.$$

Доказательство. Для каждого $\varphi \in \mathcal{S}$ выражение $< \mathrm{e}^{-\xi' x} T_x,\ \varphi(x) >$ существует и равно $< \mathrm{e}^{-\xi' x} T_x,\ \varphi_1(x) >$ где $\varphi_1 \in \mathcal{S}_+$ и равно φ на носителе T_x.

Поскольку

$$\mathrm{e}^{-(z-\xi')x} \in \mathcal{S}_+,$$

то имеем

$$< \mathrm{e}^{-\xi' x} T_x,\ \mathrm{e}^{-(z-\xi')x} \varphi_1(x) > = < \mathrm{e}^{-zx} T_x,\ \varphi_1(x) > =$$
$$= < \mathrm{e}^{-zx} T_x,\ \varphi(x) >$$

Определение 6.1.1. Обобщенная функция $T \in \mathcal{D}'_+$ называется трансформируемой по Лапласу для $\mathrm{Re}\, z > \xi'$, если $\mathrm{e}^{-\xi' x} T_x \in \mathcal{S}'$.

Тогда, в силу леммы 6.1.1, $\mathrm{e}^{-zx} T_x \in \mathcal{S}'\ \forall z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, z > \xi'$.

Число $\xi(T)$ обозначает нижнюю грань числа ξ' и называется абсциссой сходимости.

Таким образом, для всех $\mathrm{Re}\, z > \xi(T)$ имеем $\mathrm{e}^{-zx} T_x \in \mathcal{S}'$.

Если для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^{-\xi' x} T_x \in \mathcal{S}' \quad \forall \xi' \in \mathbb{R},$$

то $\xi(T) = -\infty$.

Примеры.

1) $T = \mathrm{e}_+^{x^2} := Y(x)\mathrm{e}^{x^2}$ не является трансформируемой по Лапласу для любых $\xi' \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{e}^{-\xi' x} T \notin \mathcal{S}'$.

2) $\delta(x-c)$ трансформируема по Лапласу для любого $z \in \mathbb{C}$.

Задача 6.1.1.

Если $T = Y(x+c)x^\nu \mathrm{e}^{ax}$ трансформируема по Лапласу для $\mathrm{Re}\, \nu > -1$, где

$$Y(x+c) = \begin{cases} 1, & x > -c, \\ 0, & x < -c, \end{cases}$$

то найти их абсциссы сходимости.

Если $\xi < \operatorname{Re} a$, то $\mathrm{e}^{-\xi x} T \in \mathcal{S}'$ или нет?

Имеет место

Теорема 6.1.1. Всякая обобщенная функция с компактным носителем является трансформируемой по Лапласу для всякого z потому что она есть обобщенная функция умеренного роста.

6.2. Преобразование Лапласа.

Определение 6.2.1. Пусть $T \in \mathcal{D}'_+$ — трансформируема по Лапласу для $\operatorname{Re} z > \xi(T)$. Тогда ее преобразование Лапласа есть функция комплексного переменного z, определенная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \xi(T)$ и обозначаемая так:

$$\mathcal{L}T = \hat{T}(z) =< T_x,\ \mathrm{e}^{-zx} >, \tag{6.2.1}$$

где $\mathcal{L}$ — преобразование Лапласа. Таким образом, (6.2.1) равно

$$< \mathrm{e}^{-\xi' T} T_x,\ \mathrm{e}^{-(z-\xi')x} >,\ \operatorname{Re} z > \xi' > \xi(T). \tag{6.2.2}$$

Существование (6.2.2) может быть обосновано, поскольку

$$\mathrm{e}^{-\xi' x} T_x \in \mathcal{S}' \bigcap \mathcal{D}'_+,$$

и в силу того, что мы можем также найти функции, принадлежащие $\mathcal{S}$, и которые равны $\mathrm{e}^{-(z-\xi')x}$ на носителе функции T. Более того, (6.2.2) не зависит от выбора ξ' в интервале $]\xi(T,\ \operatorname{Re} z)[$. Действительно, если $\xi' < \xi'' < \operatorname{Re} z$, мы имеем

$$< \mathrm{e}^{-\xi'' x} T_x,\ \mathrm{e}^{-(z-\xi'')x} >=< \mathrm{e}^{-(\xi''-\xi')x} \mathrm{e}^{-\xi' x} T_x,\ \mathrm{e}^{(\xi''-\xi')x} \mathrm{e}^{-(z-\xi')x} > .$$

Поскольку $\mathrm{e}^{(\xi''-\xi')x}$ есть мультипликатор в $\mathcal{S}_+$, получаем

$$< \mathrm{e}^{-\xi'' x} T_x,\ \mathrm{e}^{-(z-\xi'')x} >=< \mathrm{e}^{-\xi' x} T_x,\ \mathrm{e}^{-(z-\xi')x} > .$$

Эта независимость от ξ' обосновывает обозначение (6.2.1). Кроме того, обычно на практике $< T_x,\ \mathrm{e}^{-zx} >$ вполне определено без использования разложения (6.2.2).

Следовательно, если $T \in \mathcal{E}'$, имеем по теореме 6.1.1.

$$\mathcal{L}T = \hat{T}(z) =< T_x,\ \mathrm{e}^{-zx} >, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.2.3}$$

Примеры.

$$\mathcal{L}\delta(x) = 1,$$
$$\mathcal{L}\delta^{(k)}(x) = z^k,$$
$$\mathcal{L}\delta^{(k)}(x-c) = z^k \mathrm{e}^{-cz},$$

где c есть вещественная константа, а k — натуральное число.

6.2.1. Случай функций.

Если $T = f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, имеющая точку c в качестве нижней границы для носителя $f(x)$ и такая, что для некоторой $\xi' \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\xi x} f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то формула (6.2.1) влечет

$$\mathcal{L}f(z) = \int_c^\infty f(x)\mathrm{e}^{-zx}\mathrm{d}x, \quad \operatorname{Re} z > \xi(f),$$

где $\xi(f)$ — нижняя грань для ξ'. Таким образом получаем определение преобразования Лапласа и его абсциссы сходимости в обычном смысле.

6.3. Характеристики преобразования Лапласа.

Здесь мы покажем, чем характеризуется преобразование Лапласа. С этой целью имеем

Теорема 6.3.1. Пусть $T \in \mathcal{D}'_+$ и c — нижняя грань носителя T и T преобразуема по Лапласу при $\operatorname{Re} z > \xi(T)$ (соответственно любого $z \in \mathbb{C}$). Тогда

1) функция $\hat{T}(z)$ аналитична в $\operatorname{Re} z > \xi(T)$ (соответственно во всей плоскости $\mathbb{C}$);

2) существует неотрицательное целое k, такое, что

$$|\hat{T}(z)||z|^{-k}\mathrm{e}^{c\operatorname{Re} z}$$

ограничено при $z \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \xi(T)$ (соответственно во всей плоскости $\mathbb{C}$)

(без доказательства).

Теорема 6.3.2. Если $T_x \in \mathcal{E}'$, то $\hat{T}(z)$ есть целая аналитическая функция и если T_x имеет носитель, содержащийся в ограниченном интервале $[-b,\ b]$, то существует неотрицательное целое k, такое, что

$$|\hat{T}(z)||z|^{-k}\mathrm{e}^{-b\operatorname{Re} z}$$

ограничено при $z \to \infty$

(без доказательства) смотри [6], [7].

Теорема 6.3.3. Пусть $T = D^k s(x)$, где $s(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, такая, что точка c есть нижняя грань носителя $s(x)$ и для которой $\mathrm{e}^{-\xi x}s(x)$ ограничена при $x \to \infty$. Тогда

1) $\hat{T}(z)$ является аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > c$,

2) $\hat{T}(z)z^{-k}\mathrm{e}^{cz} \to 0$, при $\mathrm{Re}\, z \to \infty$.

(без доказательства).

6.4. Связь с преобразованием Фурье.

Теорема 6.4.1. Пусть $T \in \mathcal{D}'_+$ трансформируема по Лапласу при $\mathrm{Re}\, z > \xi(T)$ и пусть $F(\xi,\ x)$ — преобразование Фурье для $\mathrm{e}^{-\xi x}T_x$ при $\xi > \xi(T)$. Тогда имеет место равенство:

$$\hat{T}(z) = F(\xi,\ \eta/2\pi), \tag{6.4.1}$$

если $z = \xi + \mathrm{i}\eta$.

Доказательство. Согласно теореме 6.3.1 для фиксированного $\xi > \xi(T)$ $\hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta)$ есть непрерывная функция вещественной переменной η и ее модуль мажорируется степенью $|\eta|$ при $|\eta| \to \infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta)\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

существует для любого $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Итак, рассмотрим функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$< \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta),\ \varphi(\eta) >= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta)\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{6.4.2}$$

который можно рассматривать как тензорное произведение обобщенных функций:

$$< \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta),\ \varphi(\eta) >=< \mathrm{e}^{-\xi x}T_x \bigotimes \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\eta x}, \varphi(\eta) >$$

Тогда (так как $\mathrm{e}^{-\xi x}T_x \in \mathcal{S}'$) применяя применяя формулы дуальности [7], аналог теоремы Фубини имеем:

$$< \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta),\ \varphi(\eta) >=< \mathrm{e}^{-\xi x}T_x,\ < \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\eta x}, \varphi(\eta) >>=$$

$$=< \mathrm{e}^{-\xi x}T_x,\ \mathcal{F}_x\varphi >=< F(\xi,\ \eta),\ \varphi(\eta) > .$$

Итак, имеем

$$= \hat{T}(\xi + 2\pi\mathrm{i}\eta) = F(\xi,\ \eta)$$

откуда следует утверждение теоремы.

6.5. Основные правила для преобразования Лапласа.

N.B. Каждое из следующих правил имеет место для z принадлежащих $\operatorname{Re} z > \xi$, где правая часть есть аналитическая функция.

1) Сложение

$$\mathcal{L}(T + aU)(z) = \hat{T}(z) + a\hat{U}(z),\ a \in \mathbb{C}. \tag{6.5.1}$$

2) Перенос (сдвиг)

$$\mathcal{L}\tau_c T_x = \mathcal{L}(T_{x-c}) = \mathrm{e}^{cz}\hat{T}(z), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{6.5.2}$$

3) Изменение масштаба (гомотетия).

$$\mathcal{L}T_{bx} = \frac{1}{b}\hat{T}\left(\frac{z}{b}\right), \quad b > 0. \tag{6.5.3}$$

4) Умножение на $x^k,\ k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(x^k T_x) = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\hat{T}(z) \tag{6.5.4}$$

в смысле обычного умножения.

5) Умножение на $\mathrm{e}^{ax},\ a \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{ax} T_x) = \hat{T}(z - a). \tag{6.5.5}$$

6) Дифференцирование.

$$\mathcal{L}(D^k T_x) = z^k \hat{T}(z). \tag{6.5.6}$$

7) Антидифференцирование.

$$\mathcal{L}(D^{-k} T_x) = z^{-k} \hat{T}(z). \tag{6.5.7}$$

Здесь $D^{-k}T$ есть обобщенная функция в $\mathcal{D}'_+$ такая, что $D^k(D^{-k}T) = T$. Если $T = f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, имеющая c в качестве нижней грани своего носителя, и если положить

$$F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t,$$

то имеем

$$\mathcal{L}F(z) = z^{-1}\mathcal{L}f(z).$$

8) Свертка.

$$\mathcal{L}(T_x * U_x) = \hat{T}(z)\hat{U}(z). \tag{6.5.8}$$

9) Умножение на функцию $\alpha(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L}(\alpha(x)T_x) = V\left(\frac{\xi + \mathrm{i}\eta}{2\pi}\right) = V\left(\frac{z}{2\pi}\right),$$

где

$$V(\xi + \mathrm{i}\eta) = \hat{T}[2\pi(\xi + \mathrm{i}\eta)] \underset{\eta}{*} A_\eta,$$

где A_x — преобразование Фурье для $\alpha(x)$.

10) Деление на x^k.

Для $T_x \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, имеющего ограниченный носитель в $[b, \ \infty[, \ \ b > 0$, имеем

$$\mathcal{L}(x^{-k}T_x) = W_k(z),$$

где $x^{-k}T$ есть частное, имеющее носитель в $[b, \ \infty[$ и $W_k(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}W_k(z) = \hat{T}(z)$$

с условием $W_k(z) \to 0, \quad \operatorname{Re} z \to \infty$.

6.5.1. Случай функций.

Если T и U идентичны функциям, преобразуемым по Лапласу, то снова получаем указанные правила для обычного преобразования Лапласа.

6.6. Сходимость и ряды.

Теорема 6.6.1. Пусть $T_{x,\ \nu}$ — бесконечное семейство обобщенных функций, принадлежащих $\mathcal{D}'_+$, зависящих от параметра ν и имеющих носители в одном и том же интервале $[c, \ \infty[$. Если существует число ξ', такое, что

$$\forall \xi > \xi' \quad \mathrm{e}^{-\xi x}T_{x,\ \nu} \to \mathrm{e}^{-\xi x}T_{x,\ \nu'}$$

в смысле $\mathcal{S}'$ при $\nu \to \nu'$, то

$$\hat{T}_\nu(z) \to \hat{T}_{\nu'}(z),$$

для $\operatorname{Re} z > \xi'$, где ξ' может быть и бесконечным.

Доказательство. Действительно,

$$\mathcal{F}\mathrm{e}^{-\xi x}T_{x,\ \nu} \to \mathcal{F}\mathrm{e}^{-\xi x}T_{x,\ \nu'},$$

и, используя теорему 6.4.1, приходим к утверждению теоремы 6.6.1.

Следствие 6.6.1.

Пусть $T_{x,\ n},\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ ,$ — последовательность обобщенных функций, принадлежащих $\mathcal{D}'_+$ и имеющих носители в одном и том же интервале $[c,\ \infty[$. Если существует число ξ', такое, что для всех $\xi > \xi'$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-xix} T_{x,\ n}$$

сходится в $\mathcal{S}'$, то

$$\mathcal{L}\sum T_{x,\ n} = \sum \hat{T}_n(z)$$

для $\operatorname{Re} z > \xi'$.

Более полезен следующий результат.

Следствие 6.6.2.

Пусть $T_{x,\ n},\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$ — последовательность обобщенных функций таких, что $T_{x,\ n} = (a_0 + a_1 D + \cdots + a_k D^k) f_n(x)$, где a_k — константы, K — конечное и $f_n(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, имеют носители в $[c,\ \infty[$. Если ряд $\sum |f_n(x)|$ сходится равномерно на каждом конечном интервале и допускает мажорацию вида $x^m \mathrm{e}^{\xi' x}$ (m — неотрицательное целое) при $x \to \infty$, то имеем

$$\mathcal{L}\sum T_{x,\ n} = \sum \hat{T}_n(z)$$

для $\operatorname{Re} z > \xi'$.

Примеры. 6.6.3.

Согласно следствию 6.6.1, имеем

1)

$$\mathcal{L}\sum_{n=0}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nz} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-z}}.$$

Более общий результат:

$$\mathcal{L}\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(k)}(x-n) = \frac{z^k}{1-\mathrm{e}^{-z}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

6.7. Обращение преобразования Лапласа.

Определение 6.7.1.

Пусть $V(z)$ — функция комплексного переменного z. Тогда обобщенную функцию T_x называют антипреобразованием Лапласа (или обратным преобразованием Лапласа для $V(z)$), если $\mathcal{L}_z T_x = V(z)$ и обозначают $\mathcal{L}_x^{-1}V(z)$.

Имеет место

Теорема 6.7.1 (теорема существования).

Если $V(z)$ — аналитическая в $\operatorname{Re} z > \xi' > 0$ и если существуют неотрицательное целое k и вещественное число c', такое, что

$$|V(z)||z^{-k}|\mathrm{e}^{c' \operatorname{Re} z}$$

ограничено при $z \to \infty$, то в $\mathcal{D}'_+$ существует $\mathcal{L}_x^{-1}V(z)$ и имеет носитель, содержащийся в $[c' \, \infty[$. Более того, $\mathcal{L}_x^{-1}V(z)$ единственно и удовлетворяет условию

$$\mathcal{L}_x^{-1}V(z) = D^{k+2}W(x), \tag{6.7.2}$$

где $D^{k+2}W(x)$ есть обобщенная производная от функции

$$W(x) = \mathcal{L}_x^{-1}\{V(z)z^{-k-2}\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\xi-\mathrm{i}\infty}^{\xi+\mathrm{i}\infty} V(z)z^{-k-2}\mathrm{e}^{xz}\mathrm{d}z, \ \xi > \xi', \tag{6.7.3}$$

а интеграл берется в комплексной плоскости вдоль прямой линии, параллельной мнимой оси, проходящей через ξ или вдоль любого эквивалентного пути.

(без доказательства).

Пример. Возьмем $V(z) = z^k\mathrm{e}^{cz}, \ k \in \mathbb{N}, \ \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно (6.7.3), имеем

$$W(x) = \mathcal{L}_x^{-1}[V(z)z^{-k-2}] = \mathcal{L}_x^{-1}(z^{-2}\mathrm{e}^{cz}) = \begin{cases} 0, & x < -c, \\ x + c, & x > -c, \end{cases}$$

то есть $W(x) = Y(x+c), \ D^2W(x) = \delta(x+c)$ и окончательно в силу (6.7.2) имеем

$$\mathcal{L}_x^{-1}[z^k\mathrm{e}^{cz}] = \delta^{(k)}(x+c).$$

Глава 7. Применение преобразования Лапласа.

7.1. Уравнения сверток.

Пусть U_x и V_x — две заданные обобщенные функции, принадлежащие пространству $\mathcal{D}'_+$. Ищется обобщенная функция $X_x \in \mathcal{D}'_+$, удовлетворяющая уравнению

$$U_x * X_x = V_x. \tag{7.1.1}$$

Более того, предполагается, что эти три обобщенные функции трансформируемы по Лапласу.

Полагая

$$\hat{U}(z) = \mathcal{L}U_x,\ \hat{V}(z) = \mathcal{L}V_x,\ \hat{X}(z) = \mathcal{L}X_x,$$

получаем

$$\hat{U}(z)\hat{X}(z) = \hat{V}(z), \tag{7.1.2}$$

откуда

$$\hat{X}(z) = \hat{V}(z)/\hat{U}(z)$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \xi$.

Следовательно, путем обращения преобразования Лапласа, имеем

$$X_x = \mathcal{L}^{-1}[\hat{V}(z)/\hat{U}(z)], \tag{7.1.3}$$

учитывая, что

$$\hat{V}(z)/\hat{U}(z)$$

имеет обратное преобразование Лапласа.

Далее, в силу того, что в $\mathcal{D}'_+$ нет делителей нуля, заключаем, что X_x единственно в $\mathcal{D}'_+$.

Фундаментальное (элементарное) решение.

Если

$$E_x = \mathcal{L}^{-1}[1/\hat{U}(z)], \tag{7.1.4}$$

то формула (7.1.3) может быть записана в виде

$$X_x = E_x * V_x, \tag{7.1.3$'$}$$

которая не требует, чтобы V_x была преобразуемой по Лапласу или принадлежащей $\mathcal{D}'_+$.

7.2. Уравнение в конечных разностях.

$$X_{x-a} - kX_{x-b} = V_x,\ b > a,\ k > 0, \tag{7.2.1}$$

может быть записано в виде уравнения сверток

$$[\delta(x-a)-k\delta(x-b)]*X_x=V_x.$$

Его решение, согласно формуле (7.1.3′), имеет вид

$$X_x=E*V_x,$$

где фундаментальное решение E дается формулой (7.1.4):

$$E=\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-az}-k\mathrm{e}^{-bz})^{-1}.$$

Но

$$[\mathrm{e}^{-az}-k\mathrm{e}^{-bz}]^{-1}=\mathrm{e}^{az}(1-k\mathrm{e}^{-(b-a)z})^{-1}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}k^j\mathrm{e}^{-[jb-(j+1)a]z}.$$

Этот ряд сходится равномерно в

$$\operatorname{Re}z>\frac{\log k}{b-a}.$$

Обращая, имеем

$$E=\sum_{j=0}^{\infty}k^j\delta[x-(jb-(j+1)a)]$$

ряд, сходящийся в D'_+. Следовательно, можем утверждать, что уравнение (7.2.1) имеет решение, если $V\in\mathcal{D}'_+$, которое имеет вид

$$X_x=E*V_x=\sum_{j=0}^{\infty}k^jV_{x+(j+1)a-jb}.$$

7.3. Дифференциально – разностное уравнение

$$X_{x-a}-kDX_{x-b}=V_x,\ b>a, \tag{7.3.1}$$

также является уравнением в свертках в $\mathcal{D}'_+$:

$$[\delta(x-a)-k\delta'(x-v)]*X_x=V_x.$$

Его фундаментальное решение, в силу (7.1.4), имеет вид

$$E=\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-az}-kz\mathrm{e}^{-bz})^{-1}.$$

Положим

$$(\mathrm{e}^{-az} - kz\mathrm{e}^{-bz})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} k^j z^j \mathrm{e}^{(jb-(j+1)a)z},$$

учитывая, что

$$|z|\mathrm{e}^{-(b-a)\operatorname{Re} z} < \frac{1}{|k|}.$$

Обращая почленно члены ряда, имеем

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} k^j \delta^{(j)}[x - (jb - a(j+1))].$$

Следовательно,

$$X_x = E * V_x.$$

7.4. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

В пространстве распределений производная должна заменяться обобщенной производной. Следовательно, дифференциальное уравнение заменяется уравнением в обобщенных производных.

7.4.1. Обобщенное решение дифференциального уравнения.

Пусть V_x — заданная обобщенная функция, принадлежащая $\mathcal{D}'_+$ и пусть c_0. $c_1, \dots,\ c_n$ — заданные постоянные, где $c_n \neq 0,\ n \geq 1$.

Обобщенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$c_n D^n X_x + \dots + c_1 D X_x + c_0 X_x = V_x. \tag{7.4.1}$$

Оно имеет единственное решение в $\mathcal{D}'_+$, определяемое формулой

$$X_x = E(x) * V_x, \tag{7.4.2}$$

где

$$E(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(z)}\right],\ P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j.$$

Таким образом, уравнение (7.4.1) имеет много решений в $\mathcal{D}'_+$ и эти решения имеют вид

$$X_x = X'_x + h(x), \tag{7.4.3}$$

где $h(x)$ есть любое решение уравнения

$$c_n h^{(n)}(x) + \cdots + c_1 h'(x) + c_0 h(x) = 0. \tag{7.4.4}$$

Чтобы обосновать вид (7.4.3) заметим, что уравнение (7.4.1) можно представить в виде

$$\left[\sum_{j=0}^{n} c_j \delta^{(j)}(x)\right] * X = V.$$

Очевидно, что уравнение (7.4.1) имеет много решений, которые имеют тот же носитель, что и V. Одно из них обозначим через X'. Следовательно, $X' \in \mathcal{D}'_+$ и удовлетворяет уравнению

$$\left[\sum_{j=0}^{n} c_j \delta^{(j)}(x)\right] * X' = V.$$

Но сверточная алгебра не имеет делителей нуля. Следовательно, X' — единственное решение, которое имеет вид

$$X' = E(x) * V.$$

Итак, формулы (7.2.2) и (7.2.3) установлены.

Пусть, как обычно, $\hat{V}(z) = \mathcal{L}V$. Тогда, согласно (7.1.3), X' можно записать в виде

$$X' = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\hat{V}(z)}{P(z)}\right].$$

Поскольку $P(z)$ есть полином, то фундаментальное решение есть функция, и это оправдывает обозначение $E(x)$.

Далее, $E(x)$ имеет непрерывные производные до $(n-2)$-го порядка, а производная порядка $(n-1)$ разрывная в точке $x = 0$. Действительно, если $0 \le q \le n-1$, то имеем [6]

$$E^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\xi - \mathrm{i}\infty}^{\xi + \mathrm{i}\infty} \frac{z^q \mathrm{e}^{xz}}{P(z)} \mathrm{d}z, \quad \xi > 0.$$

Вычисление $E(x)$.

Если полином $P(z)$ имеет n различных корней (вещественных или комплексных) $r_k,\ k = 1,\ 2, \ldots, n$, и если

$$a_k = c_n^{-1} \prod_{j \neq k} (r_k - r_j)^{-1},$$

то имеем

$$\frac{1}{P(z)} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - r_k)\right]^{-1}$$

и

$$E(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(z)}\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}_{+}^{r_k x}.$$

Следовательно, имеем

$$X' = \sum_{k=1}^{n} a_k V_x * \mathrm{e}_{+}^{r_k x}.$$

Если $V(x)$ представляет собой некоторую локально суммируемую функцию и некоторое вещественное число α есть нижняя грань ее носителя, то имеем

$$X' = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{r_k x} \int_{\alpha}^{x} V(t)\mathrm{e}^{-r_k t}\mathrm{d}t, \quad x > \alpha,$$

и

$$X' = 0, \quad x < \alpha.$$

Так можно рассматривать и другие случаи.

7.4.2. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пусть $f^{(j)}(x)$ обозначает обычную производную порядка j. И пусть $f(x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению

$$c_n f^{(n)}(x) + \cdots + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = g(x), \quad x > \alpha, \tag{7.2}$$

и условиям

$$f(x) = 0, \; x < \alpha, \tag{7.2.2.2}$$

$$f(\alpha_+) = \omega_0, \; f^{(j)}(\alpha_+) = \omega_j, \; j = 1, \; 2, \ldots, n-1, \tag{7.2.2.3}$$

где c_j, α, ω_j — заданные числа и функция $g(x)$ имеет носитель, содержащийся в $[a, \; \infty[$.

Тогда эта задача имеет единственное решение

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} E(x-t)g(t)\mathrm{d}t + \sum_{q=0}^{n-1} \Omega_q E^{(q)}(x - \alpha),$$

где $E(x)$ — фундаментальное решение оператора

$$c_n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n + \cdots + c_0,$$

принадлежащее $\mathcal{D}'_+$,

$$\Omega_q = \sum_{j=q+1}^{n} c_j \omega_{j-q-1}.$$

(проверить самим!)

Рассмотреть примеры.

1) Решить уравнение

$$f''(x) + \lambda^2 f(x) = \mathrm{e}_+^{-\nu x},\ x > 0,\ \lambda > 0,$$

с условиями

$$f(x) = 0,\ x < 0,\quad f(0+) = \omega_0,\ f'(0+) = \omega_1.$$

2) Решить уравнение

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = x,\ x > 0,$$

с условиями

$$f(x) = 0,\ x < 0,\ f(0+) = \omega_0,\ f'(0+) = \omega_1.$$

7.5. Интегральные уравнения.

Различают два типа хорошо известных линейных интегральных уравнений.

Уравнение Фредгольма имеет вид

$$f(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,\ y) f(y) \mathrm{d}y,$$

где F и K — заданные функции, λ, a, b — конечные константы, $f(x)$ — неизвестная функция.

Если верхний предел равен переменной x, то уравнение примет вид

$$f(x) = F(x) + \lambda \int_a^x K(x,\ y) f(y) \mathrm{d}y$$

и называется уравнением Вольтерра второго рода.

7.5.1. Специальное уравнение Вольтерра.

Задача. Найти функцию f, такую, что

$$\int_{\alpha}^{x} K(x-t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda f(x) = h(x),\ \alpha > 0, \tag{7.1.4}$$

$$f(x) = 0,\ x < \alpha, \tag{7.4.2}$$

где α и λ заданы, $K(x) = 0$, если $x < 0$ и преобразуема по Лапласу, а функция (или обобщенная функция) h имеет носитель в $[\alpha,\ \infty[$.

Заметим, что уравнение (7.4.1) может быть записано в виде

$$[K(x) + \lambda\delta(x)] * f(x) = g(x)$$

в $\mathcal{D}'_+$.

В силу (7.1) уравнение имеет единственное решение

$$f(x) = E * h(x),$$

где

$$E = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{K(z) + \lambda}\right]$$

с $K(z) = \mathcal{L}K(x)$.

Если $h(x)$ преобразуема по Лапласу и если

$$H(z) = \mathcal{L}h(x), \tag{7.4.3}$$

то

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(z)}{\lambda + K(z)}\right].$$

Заметим, что фундаментальное решение не обязательно представимо через функцию.

Примеры.

1) Решить уравнение

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \lambda f(x) = h(x),\ x > \alpha,$$

$$f(x) = 0,\ x < \alpha.$$

Решение. Здесь $K(x) = Y(x)$ — функция Хевисайда, $K(z) = 1/z$ и

$$E = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{1+\lambda z}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{z + 1/\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}\delta(x) - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}_+^{-x/\lambda}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \lambda^{-1}h(x) - \lambda^{-2}\mathrm{e}_{+}^{-x/\lambda} * h(x);$$

и далее, если $h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, носитель которой ограничен снизу, то имеем

$$f(x) = \lambda^{-1}h(x) - \lambda^{-2}\mathrm{e}_{+}^{-x/\lambda} \int_{\alpha}^{x} h(t)\mathrm{e}^{t/\lambda}\mathrm{d}t.$$

2) Решить (самим!).

$$\int_{\alpha}^{x} (x-t)\mathrm{e}^{-\nu t} f(t)\mathrm{d}t + \omega^{-2}\mathrm{e}^{-\nu x} f(x) = h(x),\ x > \alpha$$

$$f(x) = 0,\ x < \alpha.$$

7.6. Интегродифференциальное уравнение.

Найти функцию $f(x)$ такую, что

$$\int_{\alpha}^{x} K(x-t)f(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{n} c_j f^{(j)}(x) = g(x),\ x > \alpha, \tag{7.5.1}$$

$$f(x) = 0,\ x < \alpha, \tag{7.5.2}$$

$$f(\alpha_+) = \omega_0,\ f^{(j)}(\alpha_+) = \omega_j,\ 1 \le j \le n-1, \tag{7.5.3}$$

$\alpha,\ \omega_j,\ c_j,\ (c_n \neq 0),\ n > 1,$ — заданные числа, функция $K(x)_+$ преобразуемая по Лапласу и $g(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ с носителем в $[\alpha,\ \infty[$.

Эта задача имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} E(x-t)g(t)\mathrm{d}t + \sum_{q=0}^{n-1} \Omega_q E^{(q)}(x-\alpha),\ x > \alpha,$$

где

$$E(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{K(z)+P(z)}\right],$$

$$K(z) = \mathcal{L}K(x_+),\quad P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j,$$

$$\Omega_Q = \sum_{j=q+1}^{n} c_j \omega_{j-q-1}.$$

N.B. Показать самостоятельно!

Пример. Рассмотрим уравнение

$$a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + cf(x) + f'(x) = g(x),$$

где $g(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, равная нулю для $x < 0$, но $f(x)$ удовлетворяющая условиям

$$f(x) = 0,\ x < 0,\ f(0+) = \omega.$$

Решить самостоятельно!

7.7. Уравнения в частных производных.

Пусть преобразование Лапласа суммируемой функции $f(t)$ является функцией комплексной переменной p, определяемой формулой:

$$\mathcal{L}_p(f) := \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t$$

7.7.1. Распространение тепла в бесконечном стержне.

Стержень рассматривается однородный без радиации.

Температура в точке x в момент времени t обозначается через $u(x,\ t)$. Температура в начальный момент является непрерывной ограниченной функцией $a(x)$, которая задается. Функция температуры $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,\ t) - k\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} = S(x,\ t),\ t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (7.7.1)$$

и начальному условию

$$u(x,\ 0) = a(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

где $S(x,\ t)$ есть функция (и обычно обобщенная функция), которая характеризует источник тепла и удовлетворяет определенным условиям.

Пусть $\overline{u}(x,\ t)$ и $\overline{S}(x,\ t)$ равны соответственно $u(x,\ t)$ и $S(x,\ t)$ для $t > 0$ и нулю для $t < 0$.

Обозначим преобразование Лапласа по t через

$$\hat{u}(x,\ p) = \mathcal{L}_p(\overline{u}(x,\ t)).$$

Применяя преобразование Лапласа к (7.7.1), имеем

$$p\,\hat{u}(x,\ p) - k\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\hat{u}(x,\ p) = a(x) + \mathcal{L}_p(\overline{S}(x,\ t)). \qquad (7.7.2)$$

Предполагается, что $u(x,\ t)$ и $\partial u(x,\ t)/\partial x$ непрерывны по x. Следовательно, $\hat{u}(x,\ p)$ и $\partial\hat{u}(x,\ p)/\partial x$ также непрерывны по x.

Исходя из физического смысла очевидно, что $u(x,\ t)$ ограничена при $|x|\to\infty$. Откуда следует, что $\hat{u}(x,\ p)$ трансформируема по Фурье в смысле обобщенных функций $\mathcal{S}'$ и из (7.7.2) получаем

$$\mathcal{F}_y\hat{u}(x,\ p)=(4\pi^2ky^2+p)^{-1}\mathcal{F}_y[a(x)+\mathcal{L}_p\overline{S}(x,\ t)].$$

Следовательно, обращая преобразование Фурье, имеем

$$\hat{u}(x,\ p)=\frac{1}{2\sqrt{kp}}\mathrm{e}^{-|x|\sqrt{p/k}}\underset{(x)}{*}[a(x)+\mathcal{L}_p\overline{S}(x,\ t)].$$

Тогда, обращая преобразование Лапласа, имеем

$$\overline{u}(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}U(t)\,\mathrm{e}^{-x^2/4kt}\underset{(x)}{*}\underset{(t)}{*}[a(x)\delta(t)+\overline{S}(x,\ t)] \tag{7.7.3}$$

с условием, что $S(x,\ t)$ позволяет свертку по x.

Таким образом, заключаем, что если $a(x)$ имеет носитель в $(\alpha,\ \beta)$ и если $S(x,\ t)$ есть подходящая функция, то

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_\alpha^\beta\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4kt}a(\xi)\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t\mathrm{d}\omega\left[\int_{\mathbb{R}}\omega^{-1/2}\mathrm{e}^{-\xi^2/4k\omega}\overline{S}(\xi-x,\ \omega-t)\mathrm{d}\xi\right],\ t>0. \tag{7.7.4}$$

Заметим, что формула (7.7.3) иллюстрирует теоретический случай, где начальная температура равна нулю $a(x)=0$ и источник тепла находится в точке X. В этом случае $S(x,\ t)$ имеет вид $S(t)\bigotimes\delta(x-X)$ и

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t\omega^{-1/2}\mathrm{e}^{-(x-X)^2/(4k\omega)}\overline{S}(\omega-t)\mathrm{d}\omega,\ t>0,$$

где $\overline{S}(t)=U(t)S(t),$ и $U(t)$ — функция Хевисайда.

7.7.2. Охлаждение стержня конечной длины.

Концы стержня длины L поддерживаются при температуре 0 и нет радиации. Тогда $u(x,\ t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,\ t)-k\frac{\partial^2u(x,\ t)}{\partial x^2}=0,\ 0<x<L,\ t>0, \tag{I}$$

$$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0, \tag{II}$$

$$u(x,\ 0)=a(x),\ 0<x<L, \qquad (III)$$

где начальная температура $a(x)$ есть непрерывная функция с ограниченной вариацией в интервале $(0,\ L)$.

Пусть $\overline{a}(x)$ — любая ограниченная функция, продолжающая $a(x)$ на $\mathbb{R}$. Тогда, в силу формулы (7.7.4), имеем функцию

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2/4kt}\overline{a}(x-\xi)\mathrm{d}\xi,\ t>0, \qquad (IV)$$

которая удовлетворяет условиям (I) и (III). Для того, чтобы $u(x,\ t)$ удовлетворяла условию (II), достаточно, чтобы

$$\overline{a}(-\xi)=-\overline{a}(\xi),\quad \overline{a}(L-\xi)=-\overline{a}(L+\xi).$$

Следовательно, $\overline{a}(x)$ должна быть антисимметричной с периодом $2L$ и равной $a(x)$ на полупериоде $(0,\ L)$. Такая функция $\overline{a}(x)$ имеет разложение Фурье

$$\overline{a}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^L a(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x. \qquad (V)$$

Подставляя (V) в (IV), получаем

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2/4kt}\cos\frac{\pi n\xi}{L}\mathrm{d}\xi-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2/4kt}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\mathrm{d}\xi\right). \qquad (VI)$$

Последний интеграл равен нулю в силу антисимметрии подинтегральной функции.

Далее имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2/4kt}\cos\frac{\pi n\xi}{L}\mathrm{d}\xi=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/4kt}\cos\frac{\pi n x^{1/2}}{L}\cdot x^{-1/2}\mathrm{d}x=$$

$$=\mathcal{L}_{1/4kt}\left(x^{-1/2}\cos\frac{n\pi x^{1/2}}{L}\right)=2(\pi kt)^{1/2}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2L^{-2}kt},$$

и формула (VI) примет вид

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 L^{-2} kt} \sin \frac{\pi kx}{L}, \quad t > 0.$$

Это известное решение Фурье.

7.7.3. Колебание конечной струны.

Решить самостоятельно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \tag{I}$$

$$u(x,\ 0) = a(x), \quad u_t(x,\ 0) = b(x), \tag{II}$$

$$u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0,\ t > 0. \tag{III}$$

7.7.4. Дифференцирования и анти-дифференцирования комплексного порядка.

Пусть $T_x \in \mathcal{D}'_+$ преобразуемая по Лапласу. Тогда, если $n \in \mathbb{N}$ и $\hat{T}(z) = \mathcal{L}T_x$, то имеем: $\mathcal{L}^{-1}(z^n \hat{T}(z))$ есть производная $D^n T_x$ порядка n от T_x, $\mathcal{L}^{-1}(z^{-n}\hat{T}(z))$ есть антипроизводная (в $\mathcal{D}'_+$) $D^{-n}T_x$ порядка n от T_x.

Обобщим эти результаты определяя дифференцирование комплексного порядка ν.

Определения.

$$D^\nu T_x = \mathcal{L}^{-1}(z^\nu \hat{T}(z)),\ \nu \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Когда $\nu = -\nu'$, где $\operatorname{Re}\nu' > 0$, мы должны сказать, что $D^{-\nu'}T_x$ есть антипроизводная (примитивная или первообразная) в $\mathcal{D}'_+$ порядка ν'.

Из формулы (1) имеем

$$D^0 T = T, \quad D^\lambda D^\nu T = D^{\lambda+\nu} T, \quad D^{-\nu} D^\nu T = T, \tag{2}$$

и

$$D^\nu (T * S) = D^\nu T * S = T * D^\nu S, \tag{3}$$

которые являются основными соотношениями дифференцирования.

Для того, чтобы установить эти соотношения, достаточно заметить, что

$$D^\lambda D^\nu T = \mathcal{L}^{-1}[z^\lambda z^\nu \hat{T}(z)] = \mathcal{L}^{-1}[z^{\lambda+\nu}\hat{T}(z)]$$

и

$$D^\nu (T * S) = \mathcal{L}^{-1}[z^\nu \hat{T}(z)\hat{S}(z)] = [\mathcal{L}^{-1}(z^\nu \hat{T}(z))] * S.$$

Чтобы выразить $D^\nu T_x$, положим

$$\delta_+^{(\nu)}(x) := \mathcal{L}^{-1} z^\nu.$$

Тогда имеем

$$\delta^{(\nu)}(x) = \begin{cases} \delta^{(n)}(x), & \nu = n \in \mathbb{N}, \\ F_p x_+^{-\nu-1}/\Gamma(-\nu), & \nu > 0,\ \nu \neq \mathbb{N}, \\ x_+^{-\nu-1}/\Gamma(-\nu), & \operatorname{Re}\nu < 0, \end{cases} \tag{4}$$

и формулу (1) можно получить с помощью свертки

$$D^\nu T_x = \delta_+^{(\nu)}(x) * T_x, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Если $\nu \notin \mathbb{N}$ и $\operatorname{Re}\nu > 0$, то можно записать $\nu = n+\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le \alpha < 1$ и, согласно (2), $D^\nu T = D^{\alpha-1} D^{n+1} T$ (здесь $D^{\alpha-1}$ играет роль D^ν и $D^{n+1}T$ играет роль T). Следовательно, в силу (5), имеем

$$D^\nu T = D^{\alpha-1} D^{n+1} T = \delta_+^{(\alpha-1)}(x) * D^{n+1} T,$$

что дает требуемый результат в силу (4):

$$D^\nu T = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x_+^{-\alpha} * D^{n+1} T_x. \tag{6}$$

Если T представляется через достаточно регулярную функцию $f(x)$, имеющую носитель в $[a,\ \infty[$, то имеем примитивную порядка ν':

$$f^{(-\nu')}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu')} \int_a^x (x-u)^{\nu'-1} f(u) \mathrm{d}u, \quad \operatorname{Re}\nu' > 0. \tag{7}$$

С другой стороны, если $f(x)$ непрерывная и такая, что ее первые n производных непрерывны, то имеем согласно (6), производные порядка $n+\alpha$:

$$f(n+\alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-u)^{-\alpha} f^{(n+1)}(u) \mathrm{d}u, \quad 0 \le \operatorname{Re}\alpha < 1. \tag{8}$$

Другое выражение для $\delta_+^{(\nu)}(x)$ может быть получено следующим образом. Так как для $\operatorname{Re} z > 0$ и $h > 0$

$$z^\nu = \lim_{h\to 0} h^{-\nu}(1-\mathrm{e}^{-hz})^\nu = \lim_{h\to 0} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\nu}{p} \mathrm{e}^{-phz},$$

где

$$\binom{\nu}{p} = \frac{(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-p+1)}{p!} = \frac{\nu+1}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu-p+1)},$$

имеем в силу того, что $\delta_+^{(\nu)}(x) = \mathcal{L}^{-1}(z^\nu)$,

$$\delta_+^{(\nu)}(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\nu}{p} \delta(x - ph). \tag{9}$$

Также, согласно (5), имеем

$$D^\nu(T_x) = \lim_{h\to 0} h^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p T_{x-ph},\ T_x \in \mathcal{D}'_+. \tag{10}$$

Более того, для $\operatorname{Re} z > 0$, имеем

$$z^\nu = \lim_{h\to 0} h^{-\nu}(\mathrm{e}^{hz} - 1) = \lim_{h\to 0} h^{-\nu} \mathrm{e}^{\nu hz}(1 - \mathrm{e}^{-h\nu z})^\nu =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\nu}{p} \mathrm{e}^{(\nu-p)hz}.$$

Следовательно, заключаем

$$\delta_+^{(\nu)}(x) = \lim_{h\to 0} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\nu}{p} \delta(x - (\nu - p)h).$$

И, согласно (5), имеем

$$D^\nu T_x = \lim_{h\to 0} h^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\nu}{p} T_{x+(\nu-p)h}. \tag{11}$$

Оглавление

Глава 1. Основные функциональные пространства

Глава 2. Определение обобщенных функций (распределений).

Глава 3. Свойства обобщенных функций (распределений).

Глава 4. Операции над обобщенными функциями (распределениями)

Литература:

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. 1999

2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Вып. 2, М.1958

3. Рихтмайер Т. Принципы современной математической физики. Т.2, «Мир» М. 1984

4. Бремерман Г. Распределения комплексных переменных и преобразования Фурье. «Мир» М.1968

5. Misra O.P., Lavoine J.L. Transform analysis of generalized functions. «NH», 1986

6. Салехов Л. Г., Обносов Ю.В., Никононенкова Т.В. Ультраобобщенные функции на вещественной оси и аналитические функционалы на комплексной плоскости. Уч. пособие. КФУ 2015

7. Vo-Khac-Khoan Distribution Analyse de Fourier, Operaterns aux derivees particlles. Vol 1, 2. Vuibert, Paris, 1972