Совместное распределение (дискретный случай)

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть X принимает значения $a_1, a_2, a_3, \dots$, а Y принимает значения $b_1, b_2, b_3, \dots$. Пусть $\{X = a_i, Y = b_j\} = \{\omega : X(\omega) = a_i, Y(\omega) = b_j\}$.

Опр. Говорят, что задано совместное распределение случайных величин X и Y, если задан набор векторов (a_i, b_j) вместе с соответствующими вероятностями

$$P\{\omega : X(\omega) = a_i,\ Y(\omega) = b_j\}.$$

Пусть $f(x, y)$ — любая функция двух переменных.

Теорема. $$Mf(X,Y) = \sum_{a_i, b_j} f(a_i, b_j)\, P(X = a_i, Y = b_j).$$

Доказательство.

$$Mf(X,Y) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega), Y(\omega))\, P(\omega) = \sum_{a_i, b_j} \Big(\sum_{\substack{\omega : X(\omega) = a_i, \\ Y(\omega) = b_j}} f(X(\omega), Y(\omega))\, P(\omega) \Big) =$$

$$= \sum_{a_i, b_j} f(a_i, b_j) \Big(\sum_{\substack{X(\omega) = a_i, \\ Y(\omega) = b_j}} P(\omega) \Big) = \sum_{a_i, b_j} f(a_i, b_j)\, P(X = a_i, Y = b_j).$$

Замечание. Распределение случайной величины X получается из совместного распределения путём суммирования по значениям второй случайной величины, т.е.

$$P(X = a_i) = \sum_{b_j} P(X = a_i, Y = b_j) \quad \text{или}$$

$$P(Y = b_j) = \sum_{a_i} P(X = a_i, Y = b_j).$$

Напомним определение независимости двух случайных величин.

Опр. Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых двух числовых множеств A и B случайные события $(X \in A)$, $(Y \in B)$ являются независимыми.

Совместное распределение.

Теорема. Для независимости случайных величин необходимо и достаточно, чтобы события $\{X=a_i\}$ и $\{Y=b_j\}$ были независимы при любых a_i и b_j, т.е. чтобы.

$$P(\omega: X(\omega)=a_i, Y(\omega)=b_j) = P(X=a_i, Y=b_j) =$$

$$= P(\omega: X(\omega)=a_i)\cdot P(\omega: Y(\omega=b_j) = P(X=a_i)\,P(Y=b_j) =$$

$$= p_i \cdot q_j. \qquad (*)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть верно условие $(*)$. Тогда для $A, B \subset \mathbb{R}$, имеем:

$$P(X\in A, Y\in B) = \sum_{a_i\in A, b_j\in B} P(X=a_i, Y=b_j) = (\text{по } (*)) =$$

$$= \sum_{a_i\in A, b_j\in B} P(X=a_i)\cdot P(Y=b_j) = \sum_{a_i\in A} P(X=a_i)\cdot \sum_{b_j\in B} P(Y=b_j) =$$

$$= P(X\in A)\cdot P(Y\in B).$$ Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть случайные величины X и Y независимы. Точки $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ являются подмножествами $\mathbb{R}$, и поэтому $P(X=a_i, Y=b_j) = P(X=a_i)\,P(Y=b_j)$.

Необходимость доказана.

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы и существуют MX и MY, то существует MXY и

$$MXY = MX\cdot MY.$$

Доказательство. Имеем

$$MXY = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)Y(\omega)P(\omega) = \sum_{a_i, b_j} \sum_{\substack{X(\omega)=a_i,\\ Y(\omega)=b_j}} X(\omega)Y(\omega)P(\omega) =$$

$$= \sum_{a_i, b_j} a_i b_j \sum_{\substack{X(\omega)=a_i\\ Y(\omega)=b_j}} P(\omega) = \sum_{a_i, b_j} a_i b_j\, P(X=a_i, Y=b_j) = (\text{в силу}$$

независимости X и Y $= \sum_{a_i, b_j} a_i b_j P(X=a_i) P(Y=b_j) =$

$= (\sum_{a_i} a_i P(X=a_i)) \cdot (\sum_{b_j} b_j P(Y=b_j)) = MX \cdot MY.$

Числовые характеристики двух случайных величин.

Рассмотрим систему двух случайных величин (X, Y). Для описания системы используются математические ожидания MX, MY и дисперсии DX, DY, а также корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Опр. 1. Корреляционным моментом μXY случайных величин X и Y называется величина $\mu XY = M(X-MX)(Y-MY)$.

Если X и Y имеют дискретное распределение, т.е. $P(X=x_i, Y=y_j) = p(x_i, y_j)$, причём $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, то

$$\mu XY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [x_i - MX] \cdot [y_j - MY] \cdot p(x_i, y_j)$$

Здесь $MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$, где $p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$;

$MY = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j)$, где $p(y_j) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_j)$.

Корреляционный момент служит для характеристики связи между X и Y. Если X и Y независимы, то $\mu XY = 0$.

Действительно, $\mu XY = M(X-MX)(Y-MY)$. Т.к. X и Y независимы, то и $X-MX$ и $Y-MY$ также независимы. и поэтому $M(X-MX) \cdot (Y-MY) = M(X-MX) \cdot M(Y-MY)$.

Из свойств математического ожидания $\Rightarrow M(X-MX) = MX - MX = 0$ и $M(Y-MY) = MY - MY = 0$. и следовательно

$\mu XY = M(X-MX) \cdot (Y-MY) = 0.$

Из определения μXY следует, что μXY имеет размерность равную произведению размерностей величин X и Y. Другими словами, величина μXY зависит от единиц измерения X и Y. Всё это является недостатком для этой числовой характеристики. Для устранения указанного недостатка, вводят новую числовую характеристику коэффициент корреляции

Опр. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется

$$r_{XY} = \frac{\mu XY}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \text{ где } \sigma_X = \sqrt{DX}, \ \sigma_Y = \sqrt{DY}.$$

Очевидно, что r_{XY} безразмерная величина.

Можно доказать $|\mu XY| \le \sqrt{DX \cdot DY}$ (принимаем без доказательства). Тогда $|r_{XY}| \le 1$.

Опр. Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если $r_{XY} = 0$ и X, Y называются коррелированными, если $r_{XY} \neq 0$

Замечание 1. Две коррелированные случайные величины также и зависимы.

Доказательство. Пусть $r_{XY} \neq 0$, но X и Y независимы. $\Rightarrow$ $\mu XY = 0 \Rightarrow r_{XY} = 0$, что противоречит условию $r_{XY} \neq 0$.

Замечание 2. Утверждение обратное утверждению Замечания 1 не всегда имеют место, т.е. X и Y зависимы, но они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Данное утверждение принимаем без доказательства.