КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

ОТДЕЛЕНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАСЫ”

темасы буенча индивидуль эшләр һәм методик күрсәтмәләр

А.И. Галимова, Ф.Ш. Зарипов

КАЗАН 2017

Печатается по решению учебно-методической комиссии Института Математики и Механики им. Н.И. Лобачевского

УДК 372.851

Индивидульные задания по теме “Системы линейных уравнений” и методические указания к их выполнению на татарском языке. Казань: КФУ, ИМиМ, 2017. - 46 с.

Методическое пособие предназначено для студентов Института Математики и Механики им. Н.И. Лобачевского КФУ, обучающихся по профилю «математика, информатика и информационные технологии в билингвальной татарско-русской среде», направления «Педагогическое образование», а также студентов других ВУЗов, желающих изучать математику на татарском языке.

Работа состоит из пяти заданий и методических указаний к их выполнению. В работе приведены основные типовые задачи по теме “Системы линейных уравнений” , необходимые теоретические сведения, образцы решений всех задач, предназначенных для самостоятельной работы студентов, а также знакомство с областью CAS программы GeoGebra и решение задач с помощью программы.

Авторы, разработчики: А.И. Галимова – студент магистратуры,

Ф.Ш. Зарипов – к. физ.-мат.наук, доцент КФУ.

Рецензенты: д.п.н, профессор Л.Л. Салехова,

к.ф.-м.н., доц. А. Ф. Галимянов.

©Галимова А. И. , Зарипов Ф. Ш., 2017

© Казанский университет, 2017

Кереш сүз

Сызыкча тигезләмәләр системасы теориясе алгебра курсында төп бүлекләрнең берсе булып тора. Әлеге методик кулланма, татар телендә белем алучы студентлар өчен сызыкча алгебра һәм аналитик геометрия курсына ярдәмлек вазифасын үтәүче материал буларак тәкъдим ителә. Кулланмада сызыкча тигезләмәләр системасын тикшергәндә, чишкәндә кулланыла торган төп билгеләмәләр, теоремалар китерелә. Теорема, билгеләмәләрне куллана белү һәм сызыкча тигезләмәләр системасын чишү алымнарын өйрәнү мисаллар чишү үрнәкләре рәвешендә күрсәтелә.

Мөстәкыйль эш өчен 25 варианттан торган мисаллар һәр студентның индивидуаль эшен тәэмин итә. Шулай ук, студентлар укытучыга мөстәкыйль эшләрен тапшырганда, җавап бирә белергә тиешле йомгаклау сораулар китерелә. Әлеге ярдәмлекнең үзенчәлеге, өйрәнеләчәк курсның информацион технологияләр белән үрелеп баруы. Моның өчен GeoGebra математик программасы кулланыла. Мисаллар эшләү өчен командалар һәм үрнәкләр китерелә.

Бирелгән мисаллар студентларга лекцияләрдә алган теоретик белемнәрен кулланырга һәм тирәнтенрәк аңларга, мисалның чишү алгоритмын сайлап дөрес чишәргә, фәнара бәйләнеш булдырырга, GeoGebra программасында эшләү күнекмәләрен тирәнәйтергә мөмкинлек бирә.

1.Төп аңлатмалар һәм Гаусс методы

n билгесездән торган m сызыкча тигезләмәләр системасы дип түбәндәге m бәйләнешләр куплеге атала

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \quad \text{монда } a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,...m; \quad j = 1,...,n.$$

Системаның кыскача язылышы:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i \ .$$

Әлеге системаның чишелеше дип, координаталары системаның һәр тигезләмәсен канәгатьләндерерлек, арифметик n үлчәмле $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ векторы атала.

Билгесезләр алдындагы коэффициентлардан төзелгән түбәндәге матрица, бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасының **төп матрицасы** булып тора:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Төп матрицага ирекле буынлы баганаы өстәгәннән соң барлыкка килгән матрицаны **киңәйтелгән матрица** дип атыйлар. Бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасының киңәйтелгән матрицасы түбәндәге рәвештә була:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Сызыкча тигезләмәләр системаның чишелеше булмаса, ул каршылыклы (чишелешсез, р.т. **несовместный)**, ә чишелеше булса каршылыксыз (чишелешле, р.т. **совместный**) дип атала.

Сызыкча тигезләмәләр системасы **билгеләнгән (определенный**) дип атала, әгәр аның бердәнбер чишелеше булса һәм **билгеләнмәгән (неопределенный**) дип атала, әгәр аның бердән артык чишелеше булса.

Ике сызыкча тигезләмәләр системасы **тигез хокуклы** була, әгәр аларның чишелешләр күплеге чагышса.

Сызыкча тигезләмәләр системасының **элементар үзгәртүләре**:

1) системаның ике тигезләмәсенең урыннарын алыштыру;

2) системаның теләсә кайсы тигезләмәсен $\lambda \neq 0$ санына тапкырлау;

3) системаның теләсә кайсы тигезләмәсенә, λ санына тапкырланган башка тигезләмәсен кушу;

4) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ тибындагы тигезләмәне юк итү.

Сызыкча тигезләмәләр системалары өчен түбәндәге теоремалар дөрес:

Теорема 1 (Кронекер-Капелли теоремасы).

Бериш булмаган сызыкча тигезләмәләр системасы чишелешле (совместна) булсын өчен, кирәкле һәм җитәрлек шарт, аның төп матрицасының рангасы киңәйтелгән матрицасының рангасы белән туры килү.

Теорема 2.

Төп матрицаның рангасы билгесезләр саны белән туры килгәндә һәм бары шул чагында гына чишелешле сызыкча тигезләмәләр системасы билгеләнгән була.

Теорема 3.

Элементар үзгәртүләр вакытында сызыкча тигезләмәләр системасы тигез хокуклыга әйләнә.

Соңгы теорема, сызыкча тигезләмәләр системасын чишүнең төп ысулы – Гаусс ысулы нигезендә ята. Әлеге ысул вакытында, сызыкча тигезләмәләр системасы элементар үзгәртүләр ярдәмендә баскыч (ступенчатый) төргә китерелә. Аннан системаның чишелеше табыла.

Сызыкча тигезләмәләр системасының чишелешле булуын тикшерүгә мисаллар карыйк.

Чишелешле булган очракта Гаусс ысулы ярдәмендә чишәргә.

Мисал 1.1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4 \end{cases}$$

Чишелеше:

Системаның төп һәм киңәйтелгән матрицасын языйк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -11 & -4 \end{array}\right).$$

Матрицаны баскыч төргә китереп рангасын табыйк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -11 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 6 \end{array}\right).$$

Моннан төп матрицаның рангасы киңәйтелгән матрицаның рангасына тигез икәне күренә, ягъни $r(A) = r(\bar{A}) = r = 3.$ 1 нче теорема буенча бу система чишелешле була.

Билгесезләр саны $n = 4$ һәм $r < n$, 2нче теорема буенча, тигезләмәләр системасы билгеләнмәгән.

3нче теорема буенча табылган матрицага туры килгән түбәндәге сызыкча тигезләмәләр системасы бирелештәге системага тигез.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 14x_4 = 6 \end{cases}.$$

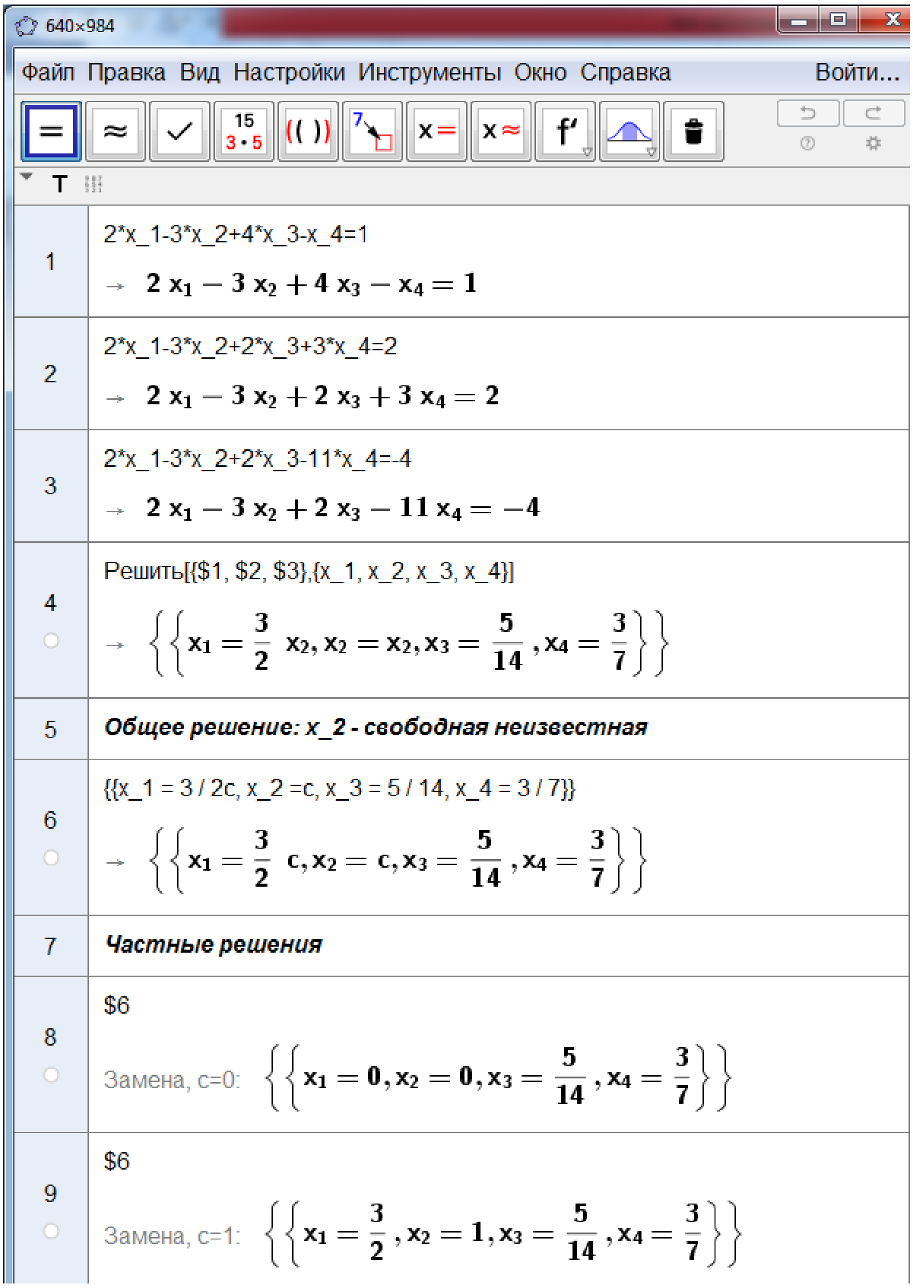
$r = 3, n = 4$ булгач , 3 билгесез төп, ә $n - r = 4 - 3 = 1$ билгесез – ирекле. Төп билгесезләр итеп баскыч тибына китерелгән матрицаның диагоналендә торган саннарны алырга мөмкин. Безнең мисалда бу билгесезләр x_1, x_3, x_4.

$x_2 = c$, $c \in \mathbb{R}$. $x_4 = \frac{3}{7}$, $x_3 = \frac{5}{14}$, $x_1 = \frac{3c}{2}$. Ул чагында гомуми чишелеш

$\left(\frac{3c}{2}, c, \frac{5}{14}, \frac{3}{7}\right)$, $c \in \mathbb{R}$. c төрле кыйммәтләр алганда гомуми чишелештән аерым чишелешләр табарга мөмкин, алар чиксез күп. $c=0$ булса, аерым чишелеш булып арифметик 4 үлчәмле вектор тора $\left(0, 0, \frac{5}{14}, \frac{3}{7}\right)$. $c=1$ булса, $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{14}, \frac{3}{7}\right)$.

GeoGebra[1] программасында эшләү

1 ысул: Программаның гади мөмкинлекләрен кулланып:



[1] тулырак 37 биттән кара

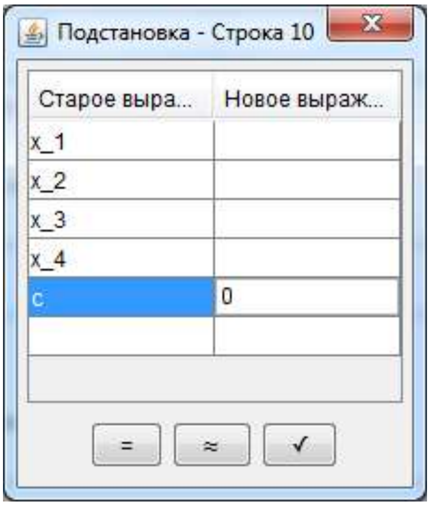
1-3 юл – тигезләмәләрне кертәбез (x_n билгесезен x_n рәвешендә язабыз).

4 юл - **Решить[<тигезләмәләр>, <үзгәрешлеләр>]**, ягъни **Решить[{$1, $2, $3},{x_1, x_2, x_3, x_4}]** командасы ярдәмендә, тигезләмәләр системасының чишелешен табабыз. Килеп чыккан җавапка тычканның сул төймәсе белән бассак, ул яңа юлга кучереп языла.

4 нче юл номерына тычканның уң төймәсе белән басып “аска яңа юл” өстибез. Ул юлны “текст юлы” дип билгеләп, кирәкле текстны яза алабыз.

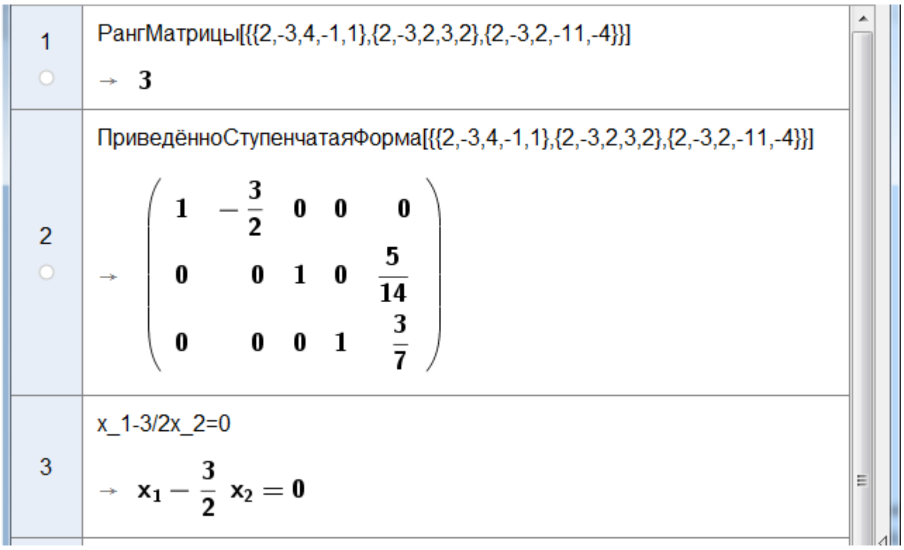
Гомуми очракта әлеге тигезләмәнең чишелешен x_2 ирекле сан булганда таба алабыз, шуңа күрә 6 нчы юлда $x_2 = c,\ c \in \mathbb{R}$ дип үзгәртик.

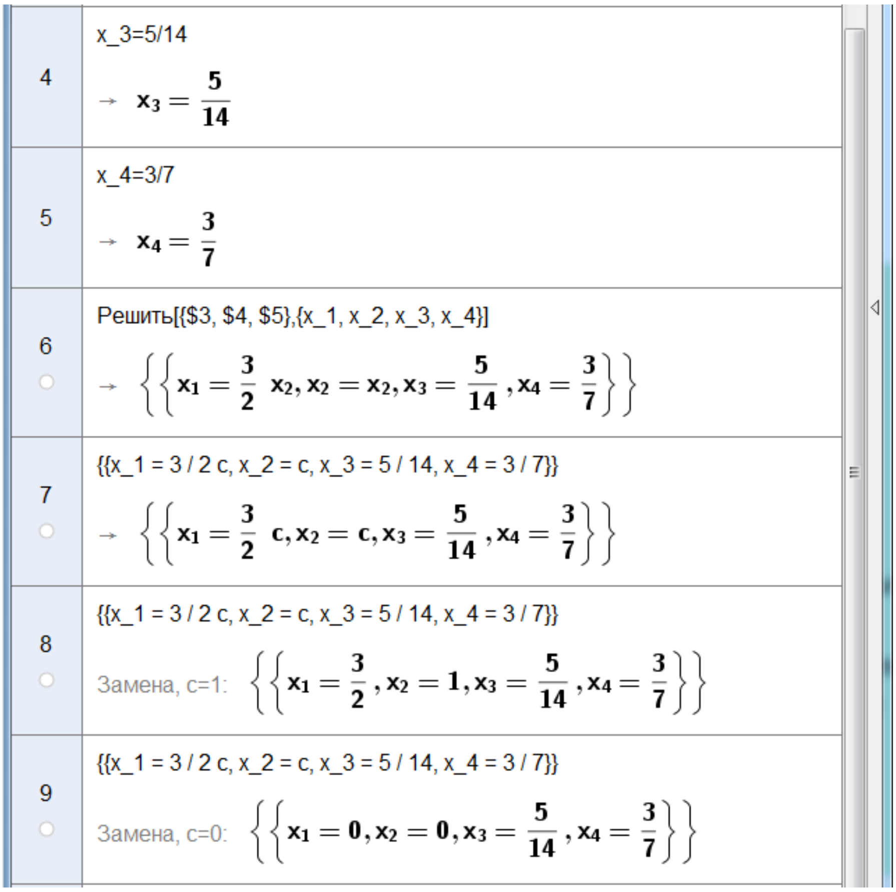
8 нче юлда $6 дип язып алмаштыру (замена) төймәсенә басабыз.



Килеп чыккан тәрәздә c үзгәрешлесе каршына кирәкле кыйммәтне куеп, = төймәсенә басабыз һәм аерым чишелешне табабыз.

2 ысул:Системаны тикшерү һәм Гаусс методы белән чишү.





Мисал 1.2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Чишелеше:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(\overline{A}) = r = 2, \quad n = 5, \quad r < n.$

Димәк , бу тигезләмәләр системасы чишелешле һәм билгеләнмәгән.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \quad -5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Монда x_1, x_2 - төп, x_3, x_4, x_5 - ирекле билгесезләр. $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$ дип алсак, икенче тигезләмәдән $x_2 = \dfrac{4c_1 - 3c_2 + c_3}{5}$, беренче тигезләмәдән $x_1 = \dfrac{-3c_1 + c_2 - 7c_3 + 5}{5}$ табабыз.

Шулай итеп, гомуми чишелеш

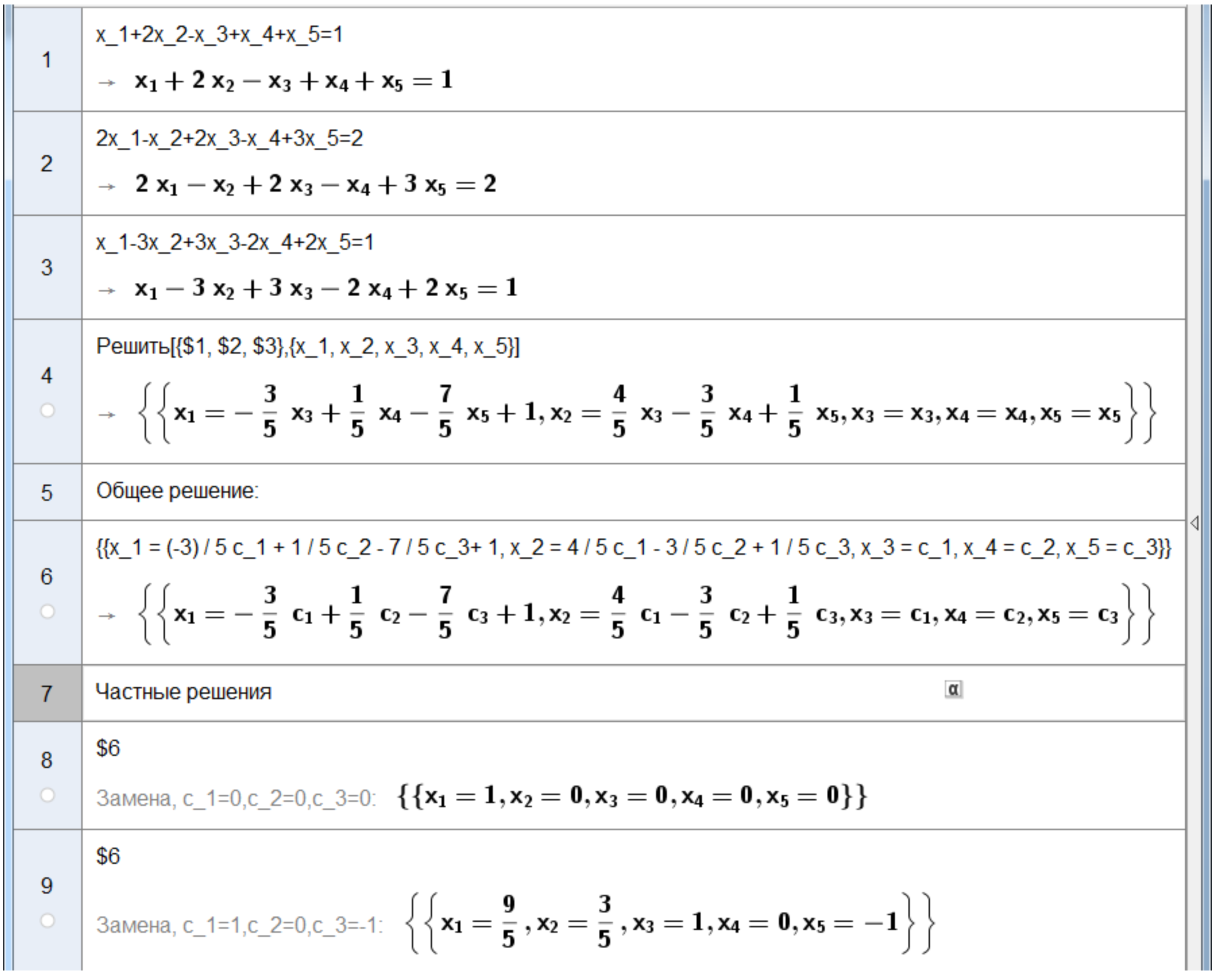
$$\left(\frac{-3c_1 + c_2 - 7c_3 + 5}{5}, \frac{4c_1 - 3c_2 + c_3}{5}, c_1, c_2, c_3\right),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

c_1, c_2, c_3кә конкрет саннар куйсак, аерым чишелеш табабыз.

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ булса, $(1,0,0,0,0)$. $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$ булса, $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0, -1\right)$.

GeoGebra программасында эшләү

1 ысул: Программаның гади мөмкинлекләрен кулланып. (1.1. мисалына аналогик рәвештә эшләнелә)



2 ысул: Системаны тикшерү һәм Гаусс методы белән чишү.

1	РангМатрицы[{{1,2,-1,1,1,1},{2,-1,2,-1,3,2},{1,-3,3,-2,2,1}}] → 2
2	A:=ПриведённоСтупенчатаяФорма[{{1,2,-1,1,1,1},{2,-1,2,-1,3,2},{1,-3,3,-2,2,1}}] → $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	A*5 → $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	x_1*5+3x_3-x_4+7x_5=5 → $5x_1 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 = 5$
5	2x_2-4x_3+3x_4-x_5=0 → $2x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0$
6	{$4, $5} Решить: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{7}{5}x_5 + 1, x_2 = 2x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right\}\right\}$
7	{{x_1 = (-3) / 5 x_3 + 1 / 5 x_4 - 7 / 5 x_5 + 1, x_2 = 2x_3 - 3 / 2 x_4 + 1 / 2 x_5}} Замена, x_3=0,x_4=0,x_5=0: $\{\{x_1 = 1, x_2 = 0\}\}$
8	{{x_1 = (-3) / 5 x_3 + 1 / 5 x_4 - 7 / 5 x_5 + 1, x_2 = 2x_3 - 3 / 2 x_4 + 1 / 2 x_5}} Замена, x_3=1,x_4=0,x_5=-1: $\left\{\left\{x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{3}{2}\right\}\right\}$

Мисал 1.3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Чишелеше.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -7 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$r(A)=2, r(\bar{A})=3, \quad r(A)\neq r(\bar{A})$. Беренче теорема буенча сызыкча тигезләмәләр системасы чишелешсез.

GeoGebra программасында эшләү

1нче ысул буенча да(1-4 юл), 2нче ысул буенча да(5,6 юл) әлеге тигезләмәләр системасының чишелеше булмавын курәбез.

1	x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2 → $x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2$
2	2x_1-x_2+x_3-3*x_4=1 → $2x_1-x_2+x_3-3x_4=1$
3	3x_1+x_2-2*x_3-x_4=1 → $3x_1+x_2-2x_3-x_4=1$
4	Решить[{$1, $2, $3},{x_1, x_2, x_3, x_4}] → {}
5	A:=РангМатрицы[{{1,2,-3,2,2},{2,-1,1,-3,1},{3,1,-2,-1,1}}] → A := 3
6	A_1:=РангМатрицы[{{1,2,-3,2},{2,-1,1,-3},{3,1,-2,-1}}] → A_1 := 2

Мисал 1.4.

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1 \\ 2x+x_2+3x_3=-4 \\ 2x_1+x_2+4x_3=-4 \end{cases}.$$

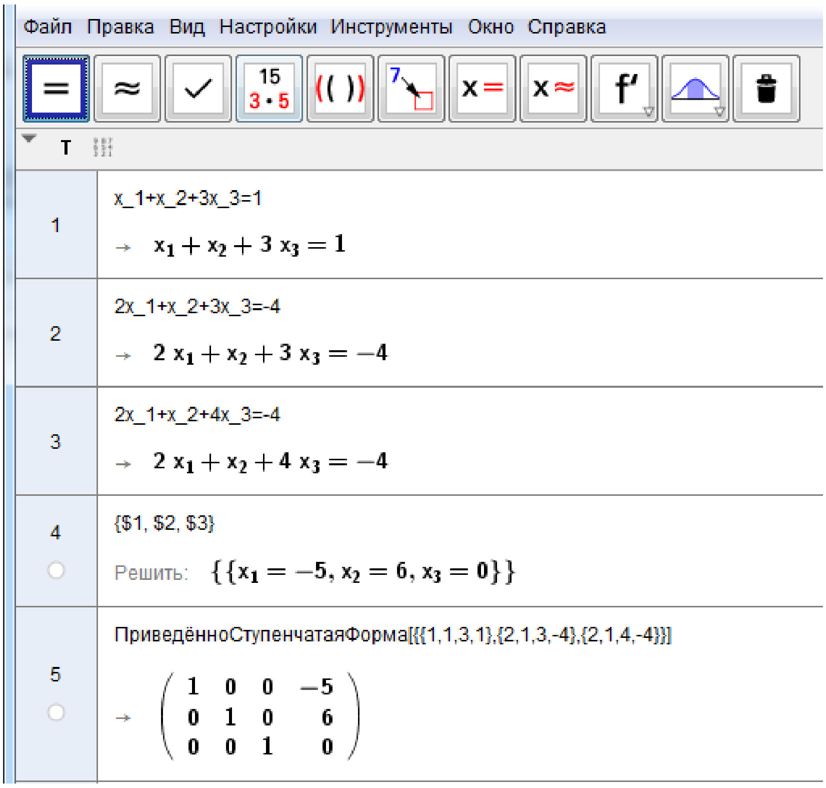
Чишелеше. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$r(A)=r(\bar{A})=r=3, \quad n=3, \quad r=n$. 2нче теорема буенча сызыкча тигезләмәләр системасы билгеләнгән. Аның бердәнбер чишелешен табыйк. Системаның соңгы тигеләмәсеннән: $x_3=0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Икенче тигезләмәдән $x_2 = 6$, беренчедән $x_1 = -5$ икәнен табабыз. Шулай итеп, бердәнбер чишелеш табылды: $(-5, 6, 0)$.

GeoGebra программасында эшләү



Берничә юлны бергә чишү өчен кирәкле юлларны өзлексез Ctrl төймәсенә һәм тычканның сул төймәсенә басып сайлыйбыз һәм “x=” төймәсенә басабыз. (**Искәрмә**: тигезләмәләр саны билгесезләр санына тигез яки күбрәк булганда гына уңайлы, башка очракларда җавапны чыгармаска да мөмкин. Ул чагында **Решить[<тигезләмәләр>, <үзгәрешлеләр>]** командасын кулланабыз.

Мөстәкыйль эш өчен 1нче бирем

Тигезләмәләр системасының чишелешле булуын тикшерергә. Чишелешле булса, аны Гаусс методы ярдәмендә чишәргә.

Вариант 1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3-3x_4-3x_5=3 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4+x_5=4 \\ 5x_1+7x_2-3x_3 \quad -2x_5=7 \\ x_1+x_2+x_3-6x_4-4x_5=-1 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} 2x_1 \quad -x_3+x_4-2x_5=-3 \\ -x_1+2x_2+3x_3-3x_4+3x_5=1 \\ x_1+2x_2+2x_3-2x_4+x_5=-2 \\ 3x_1-2x_2-4x_3+4x_4-5x_5=-4 \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 2x_1 \quad +3x_3+3x_4+3x_5=-1 \\ x_1-x_2+3x_3 \quad -2x_5=1 \\ 3x_1-x_2+6x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2 \quad +3x_4+5x_5=-2 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-3x_4 \quad =-1 \\ x_1+3x_2 \quad -x_4-2x_5=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3-4x_4-2x_5=1 \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4+2x_5=-3 \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+3x_4-x_5=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+2x_4-2x_5=3 \\ 3x_1-5x_2-2x_3+5x_4-3x_5=6 \\ -x_1+x_2-4x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+3x_3+3x_4-x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4-2x_5=4 \\ 7x_1+5x_2+4x_3+7x_4-3x_5=7 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 7x_5 = 6 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 9x_5 = -9 \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 3 \\ -5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ -x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 5 \\ 9x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \\ -5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 7 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - 7x_5 = -5 \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 9x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_5 = -1 \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 4 \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 7 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 6x_5 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad - 4x_5 = 0 \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

Вариант 16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

Вариант 17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$

Вариант 18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 \qquad = -1 \end{cases}$

Вариант 19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$

Вариант 20. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \qquad + 4x_4 - 3x_5 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$

Вариант 21. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -2 \end{cases}$

Вариант 22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ -5x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 5x_5 = 2 \end{cases}$

Вариант 23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7 \end{cases}$

Вариант 24. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

2. Сызыкча бериш тигезләмәләр системасы

$\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i$, $(i = \overline{1,m})$ тигезләмәләр системасы бирелсен.

Әгәр барлык b^i саннары 0 гә тигез булса, система **бериш** (однородная) була. b^i саннары арасында берсе генә булса да 0 гә тигез булмаса, система **бериш булмаган система** (неоднородная) дип атала.

Бериш тигезләмәләр системасын карыйк:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = 0 \ ,(i = \overline{1,m}).$$

Бу системаның һәрвакыт чишелеше бар $x^1 = x^2 = ... = x^n = 0,$ бу чишелеш **тривиаль, гади чишелеш** дип атала. Бу системаның тривиаль булмаган чишелешләре барлыгын карыйк.

Теорема. Бериш системаның тривиаль булмаган чишелеше булсын өчен кирәкле һәм җитәрлек шарт булып $rangA < n$ тора.

Әгәр $r < n$ булса, системаның чишелеше чиксез куп һәм алар $(n-r)$ үлчәмле арифметик пространство барлыкка китерәләр. Теләсә нинди чишелеш аерым чишелешләрнең сызыкча комбинациясе итеп күрсәтелә ала. Алар **фундаменталь чишелешләр җыелмасын** барлыкка китерә.

Бериш сызыкча тигезләмәләр системасының аерым чишелешләр күплеге **фундаменталь чишелешләр җыелмасы** дип атала, әгәр:

1) ул сызыкча бәйсез булса,

2) теләсә кайсы чишелеш аның аша сызыкча комбинация кебек күрсәтелсә.

Бирелгән бериш сызыкча тигезләмәләр системасының фундаменталь чишелешләр җыелмасын табарга һәм гомуми чишелешне фундаменталь чишелешләр җыелмасы аша күрсәтергә.

Мисал 2.1.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

Чишелеше:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Моннан $r=3$ икәне килеп чыга.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3=0 \\ 8x_3-4x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

Монда x_1,x_2,x_3- төп, x_4,x_5 - ирекле билгесезләр.

Ирекле билгесезләр урынына 1,0, аннан соң 0,1 не куйсак бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасының $n-r=5-3=2$ аерым чишелешен табабыз

$$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right),\left(\frac{7}{8},\frac{5}{8},-\frac{5}{8},0,1\right).$$

Әлеге чишелешләр стандарт фундаменталь чишелешләр җыелмасын барлыкка китерә. Вакланмалы саннардан котылу өчен билгесезләр урынына сызыкча бәйсез векторлар координаталарын (2,0) һәм (0,8) куя алабыз.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	-1	1	2	0
7	5	-5	0	8

Фундаменталь чишелешләр җыелмасы:

$$(-1,-1,1,2,0),(7,5,-5,0,8).$$

Ул чагында гомуми чишелеш түбәндәге рәвештә була:

$$x = c_1(-1,-1,1,2,0) + c_2(7,5,-5,8,0) =$$
$$= (-c_1 + 7c_2, -c_1 + 5c_2, c_1 - 5c_2, 2c_1, 8c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Бу гомуми чишелешне Гаусс ысулы ярдәмендә дә табарга мөмкин.

GeoGebra программасында эшләү

Түбәндә мисалны билгеләмәләргә нигезләнеп чиштек. (1.1. мисалына аналогик рәвештә эшләсәк тә дөрес чыгар иде.)

1	РангМатрицы[{{1,-2,1,-1,1},{2,1,-1,2,-3},{3,-2,-1,1,-2},{2,-5,1,-2,2} }] → 3
2	ПриведённоСтупенчатаяФорма[{{1,-2,1,-1,1},{2,1,-1,2,-3},{3,-2,-1,1,-2},{2,-5,1,-2,2} }] → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	x_1+1/2*x_4-7/8*x_5=0 → $x_1 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{7}{8} x_5 = 0$
4	x_2+1/2*x_4-5/8*x_5=0 → $x_2 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{5}{8} x_5 = 0$
5	x_3-1/2*x_4+8/5*x_5=0 → $x_3 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{8}{5} x_5 = 0$
6	{$3, $4, $5} Решить: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{1}{2} x_4 + \frac{7}{8} x_5, x_2 = -\frac{1}{2} x_4 + \frac{5}{8} x_5, x_3 = \frac{1}{2} x_4 - \frac{8}{5} x_5\right\}\right\}$
7	{{x_1 = (-1) / 2 x_4 + 7 / 8 x_5, x_2 = (-1) / 2 x_4 + 5 / 8 x_5, x_3 = 1 / 2 x_4 - 8 / 5 x_5}} Замена, x_4=1,x_5=0: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}\right\}\right\}$
8	{{x_1 = (-1) / 2 x_4 + 7 / 8 x_5, x_2 = (-1) / 2 x_4 + 5 / 8 x_5, x_3 = 1 / 2 x_4 - 8 / 5 x_5}} Замена, x_4=0,x_5=1: $\left\{\left\{x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{5}{8}, x_3 = -\frac{8}{5}\right\}\right\}$

. **Мисал 2.2.**

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

Чишелеше: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -14 & -2 \\ 0 & 14 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Шулай итеп: $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 7x_2+x_3=0 \end{cases}$, x_1, x_2 - төп билгесезләр, x_3 - ирекле билгесез.

Бу мисалда фундаменталь чишелешләр җыелмасы $n-r=3-2=1$ чишелештән тора, аны $x_3=1$ булганда табарга мөмкин. $x_2=-\frac{1}{7}$, $x_1=-\frac{11}{7}$.

Димәк стандарт фундаменталь чишелешләр җыелмасы түбәндәге рәвештә языла: $\left(-\frac{11}{7},-\frac{1}{7},1\right)$, ә гомуми чишелеш $x=c\left(-\frac{11}{7},-\frac{1}{7},1\right)$, $c\in\mathbb{R}$. c ка конкрет саннар куеп чиксез күп аерым чишелешләр табарга мөмкин.

Фундаменталь чишелешләр җыелмасы итеп $(-11,-1,7)$ векторын ала алабыз, ул чагында гомуми чишелешне болай язарга була: $x=c(-11,-1,7)$, $c\in\mathbb{R}$.

GeoGebra программасында эшләү

Түбәндә мисал программаның гади мөмкинлекләрен (1 ысул 1-7 юл) һәм Гаусс методын кулланып (2 ысул 9-14 юллар) чишелде.

1 ысул:

1	x_1+3x_2+2x_3=0 → $x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0$
2	2x_1-x_2+3x_3=0 → $2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 0$
3	3x_1-5x_2+4x_3=0 → $3\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 = 0$
4	x_1+17x_2+4x_3=0 → $x_1 + 17\,x_2 + 4\,x_3 = 0$
5	{$1, $2, $3, $4} Решить: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{11}{7}\,x_3, x_2 = -\frac{1}{7}\,x_3, x_3 = x_3\right\}\right\}$
6	{{x_1 = (-11) / 7 c, x_2 = (-1) / 7c, x_3 = c}} → $\left\{\left\{x_1 = -\frac{11}{7}\,c, x_2 = -\frac{1}{7}\,c, x_3 = c\right\}\right\}$
7	$6 Замена, c=1: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{11}{7}, x_2 = -\frac{1}{7}, x_3 = 1\right\}\right\}$

2 ысул:

9	A:=ПриведённоСтупенчатаяФорма[{{1,3,2},{2,-1,3},{3,-5,4},{1,17,4}}] → $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
10	A*7 → $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 11 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11	7x_1+11x_3=0 → $7\,x_1 + 11\,x_3 = 0$
12	7x_2+x_3=0 → $7\,x_2 + x_3 = 0$
13	{$11, $12} Решить: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{11}{7}\,x_3, x_2 = -\frac{1}{7}\,x_3\right\}\right\}$
14	{{x_1 = (-11) / 7 x_3, x_2 = (-1) / 7 x_3}} Замена, x_3=1: $\left\{\left\{x_1 = -\frac{11}{7}, x_2 = -\frac{1}{7}\right\}\right\}$

Мисал 2.3.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Чишелеше.
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Бу мисалда матрицаның рангасы $n = 4$. Бу исә системаның билгеләнгән булуын аңлата, димәк аның бердәнбер нуль чишелеше $(0,0,0,0)$ бар.

GeoGebra программасында эшләү

1	2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 → $2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + 5\,x_4 = 0$
2	3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0 → $3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 7\,x_4 = 0$
3	4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 → $4\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 + 6\,x_4 = 0$
4	x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 → $x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 - 7\,x_4 = 0$
5	{$1, $2, $3, $4} Решить: $\{\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0\}\}$

Мөстәкыйль эш өчен 2 нче бирем

Бирелгән бериш сызыкча тигезләмәләр системасының фундаменталь чишелешләр җыелмасын табарга һәм гомуми чишелешне фундаменталь чишелешләр җыелмасы аша күрсәтергә.

Вариант 1.

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3+2x_5=0 \\ -x_1+2x_2+4x_3+3x_4+x_5=0 \\ -3x_1+5x_2+5x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} -5x_1-5x_2+3x_3+2x_4-x_5=0 \\ 6x_1+6x_2-4x_3-8x_4+6x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3-6x_4+5x_5=0 \\ -4x_1-4x_2+2x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_2-3x_4-3x_5=0 \\ -2x_1+2x_2-x_3-2x_4-3x_5=0 \\ -4x_1+3x_2-2x_3-x_4-3x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+3x_4+2x_5=0 \\ -x_1+2x_2+x_3+3x_4+2x_5=0 \\ x_2+6x_4+4x_5=0 \\ x_1-x_3+9x_4+6x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-2x_2-x_3+3x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 7x_1-14x_2-2x_3-x_4-x_5=0 \\ -2x_1+4x_2+x_3-7x_4+2x_5=0 \\ 5x_1-10x_2-x_3-8x_4+x_5=0 \\ 12x_1-24x_2-3x_3-9x_4=0 \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5=0 \\ 4x_1-x_2+2x_3+x_4-3x_5=0 \\ 6x_1-3x_2+5x_3+4x_4-4x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 2x_1-2x_3-3x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3+3x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4-2x_5=0 \\ 5x_1-x_2-x_3+3x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+4x_3-3x_4+3x_5=0 \\ 4x_1+6x_2+7x_3-3x_4+6x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 2x_1+x_3+2x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4+3x_5=0 \\ 4x_1-3x_2+5x_4+x_5=0 \\ 6x_1-3x_2+x_3+7x_4-x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 19x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 11x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 0 \\ 7x_1 - 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ 9x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 13x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 + 10x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} -8x_1+16x_2+3x_3 \qquad +2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+4x_3+2x_4+x_5=0 \\ -6x_1+11x_2+7x_3+2x_4+3x_5=0 \\ -14x_1+27x_2+10x_3+2x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2+6x_3+2x_4+x_5=0 \\ 4x_1 \qquad +8x_3+x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2 \qquad -4x_4+x_5=0 \\ 4x_1+3x_2-x_3-6x_4+x_5=0 \\ 6x_1+5x_2-2x_3-8x_4+x_5=0 \end{cases}$$

3. Крамер кагыйдәсе

Сызыкча тигезләмәләр системасын чишүнең тагын бер ысулын карыйк. Ул ысул түбәндәге шартлар үтәлгәндә кулланыла:

1) m тигезләмәләр саны n билгесезләр саны белән туры килә ,

2) төп A матрицасы үзенчәлексез, т.е. $\det A \neq 0$.

Әлеге шартларны канәгатьләндерүче тигезләмәләр системасын карыйк:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad \text{монда } a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}.$$

$\mathrm{D} = \det A$ дип билгелик, монда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$\mathrm{D}_1 = \det A_1, A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{D}_2 = \det A_2, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \mathrm{D}_n = \det A_n, A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Ул чакта, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \alpha_1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \alpha_2, ..., x_n = \frac{D_n}{D} = \alpha_n$, һәм әлеге сызыкча тигезләмәләр системасының бердәнбер чишелеше арифметик n үлчәмле $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ вектор була. Бу ысул **Крамер кагыйдәсе** дип атала. Игътибар итик, $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ матрицасы төп матрицадан i баганасын иректе буыннардан торган баганага алыштырудан килеп чыга.

Крамер кагыйдәсе ярдәмендә бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасын чишәргә.

Мисал 3.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Чишелеше.

Әлеге мисалда $m = n = 3$.

$$\mathrm{D} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -4 + 8 + 4 + 8 - 8 - 2 = 6 \neq 0,$$

$$\mathrm{D}_1 = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 - 8 - 4 + 16 + 2 = 6,$$

$$\mathrm{D}_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -16 - 8 - 8 + 32 + 8 + 4 = 12,$$

$$\mathrm{D}_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 16 - 2 - 4 + 4 + 4 = -12.$$

Ул чагында $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{6} = 1,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{12}{6} = 2,\quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-12}{6} = -2$, ягъни системаның бердәнбер чишелеше $(1, 2, -2)$.

Тикшереп карыйк:

$1 + 2 + 2 \cdot (-2) = -1$

$2 - 2 + 2 \cdot (-2) = -4$

$4 + 2 + 4 \cdot (-2) = -2$

GeoGebra программасында эшләү

1 ысул: программа мөмкинлекләрен кулланып чишү.

1	x_1+x_2+2x_3=-1 → $x_1 + x_2 + 2\,x_3 = -1$
2	2x_1-x_2+2x_3=-4 → $2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = -4$
3	4x_1+x_2+4x_3=-2 → $4\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 = -2$
4	{$1, $2, $3} Решить: $\{\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2\}\}$

2 ысул: Крамер кагыйдәсен кулланып чишү.

5	D:=Определитель[{{1,1,2},{2,-1,2},{4,1,4}}] → $D := 6$
6	D_1:=Определитель[{{-1,1,2},{-4,-1,2},{-2,1,4}}] → $D_1 := 6$
7	D_2:=Определитель[{{1,-1,2},{2,-4,2},{4,-2,4}}] → $D_2 := 12$
8	D_3:=Определитель[{{1,1,-1},{2,-1,-4},{4,1,-2}}] → $D_3 := -12$

9	x_1:=D_1/D → $x_1 := 1$
10	x_2:=D_2/D → $x_2 := 2$
11	x_3:=D_3/D → $x_3 := -2$

Мөстәкыйль эшләү өчен 3нче бирем

Бирелгән системаны Крамер кагыйдәсе ярдәмендә чишәргә.

Вариант 1. $\begin{cases} 2x+3y+5z=-3 \\ 5x+5y+11z=5 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} x-y+z=-5 \\ x+z=0 \\ x+2y+2z=-3 \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 5x+4y+11z=5 \\ x+y+3z=3 \\ 5x+4y+10z=-3 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 4x+5y+9z=5 \\ x+y+z=-1 \\ 6x+7y+12z=-4 \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} -2x-y-3z=4 \\ x+y+3z=1 \\ -2x-y-4z=4 \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} -2x-3y-3z=3 \\ -4x-4y-9z=3 \\ 5x+6y+10z=1 \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+4y+9z=1 \\ -5x-4y-10z=5 \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} 5x+6y+11z=-3 \\ x+y+3z=4 \\ 5x+6y+10z=4 \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 5x+6y+9z=0 \\ -4x-4y-9z=3 \\ 8x+9y+16z=2 \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} 3x+4y+5z=1 \\ 2x+2y+5z=4 \\ 4x+5y+8z=2 \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} -x-z=2 \\ 4x+4y+7z=-1 \\ 4x+5y+8z=-5 \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} -5x-4y-9z=3 \\ y-z=1 \\ 4x+3y+7z=0 \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} -y+z=2 \\ 4x+4y+7z=3 \\ 5x+4y+10z=1 \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} 2x+y-5z=-5 \\ 3x-3y+7z=4 \\ x-z=-5 \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} 2x+y+5z=-2 \\ 4x+4y+9z=4 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

Вариант 16. $\begin{cases} -3x-4y-5z=3 \\ 4x+4y+7z=1 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$

Вариант 17. $\begin{cases} x+3z=1 \\ 4x+4y+9z=5 \\ -2x-3y-4z=3 \end{cases}$

Вариант 18. $\begin{cases} 3x+4y+6z=-3 \\ y-z=5 \\ 4x+5y+8z=1 \end{cases}$

Вариант 19. $\begin{cases} -2x-3y-3z=1 \\ 5x+5y+9z=4 \\ 4x+3y+8z=-2 \end{cases}$

Вариант 20. $\begin{cases} 2x+y+5z=-2 \\ 4x+4y+9z=4 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

Вариант 21. $\begin{cases} 3x+2y+7z=3 \\ x+y+3z=0 \\ 3x+2y+6z=-2 \end{cases}$

Вариант 22. $\begin{cases} 4x+3y+9z=2 \\ 3x+3y+5z=2 \\ 8x+7y+16z=-5 \end{cases}$

Вариант 23. $\begin{cases} 3x+4y+5z=2 \\ 3x+3y+7z=4 \\ 5x+6y+10z=5 \end{cases}$

Вариант 24. $\begin{cases} -4x-3y-7z=1 \\ 2x+2y+3z=2 \\ x+2z=0 \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} 3x+4y+7z=-1 \\ 5x+5y+9z=3 \\ 9x+10y+18z=2 \end{cases}$

Вариант 26. $\begin{cases} 4x+5y+9z=1 \\ -x-y-3z=1 \\ 4x+5y+8z=0 \end{cases}$

4. Параметр кергән сызыкча тигезләмәләр системасы

Гаусс методы һәм Крамер кагыйдәсе параметр кергән сызыкча тигезләмәләр системасын тикшергәндә уңышлы кулланыла ала.

Сызыкча тигезләмәләр системасының чишелеше барлыгын һәм билгеләнгән булуын тикшерик.

Мисал 4.1.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda \end{cases}$$

Чишелеше.

Башта Гаусс методын кулланыйк, ягъни бу системага туры килгән матрицаны баскыч рәвешенә китерик.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1) & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{array}\right)$$

Монда $\lambda = -2$ булса, әлеге матрица түбәндәге рәвештә була:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Димәк, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, ягъни бу тигезләмәләр системасы чишелешсез.

$\lambda = 1$ булса, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. $r(A) = r(\bar{A}) = 1$, $r < n$, $n = 3$- билгесезләр саны.

Димәк, тигезләмәләр системасы чишелешле һәм билгеләнмәгән, ягъни чиксез күп чишелешләре бар. Бирелгән тигезләмәләр системасы бер тигезләмәдән тора

$x_1+x_2+x_3=1$. Иректе буыннар урынына $x_2=c_1$, $x_3=c_2$ саннарын алсак, $x_1=1-c_1-c_2$ була һәм гомуми чишелешне табабыз $(1-c_1-c_2,c_1,c_2)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Әгәр дә $\lambda\neq1$, $\lambda\neq-2$ булса, ул чагында $r(A)=r(\bar{A})=3=n$ була, ягъни система чишелешле һәм билгеләнгән. Аның бердәнбер чишелешен түбәндәге системадан табабыз:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda \\ (\lambda-1)x_2-(\lambda-1)x_3=-(\lambda-1) \\ (\lambda+2)(\lambda-1)x_3=(\lambda-1)(\lambda+1) \end{cases}$$

$\lambda-1\neq0$ исәпкә алсак:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda \\ x_2-x_3=-1 \\ (\lambda+2)x_3=\lambda+1 \end{cases}$$

Ул чагында

$$x_3=\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\quad x_2=x_3-1=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}-1=-\frac{1}{\lambda+2},$$
$$x_1=-x_2-\lambda x_3+\lambda=\frac{1}{\lambda+2}-\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda+2}+\lambda=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}.$$

Шулай итеп , бердәнбер чишелеш табылды: $\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+2},-\frac{1}{\lambda+2},\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$.

Шушы ук мисалны Крамер кагыйдәсен кулланып тикшерик.

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$$\mathrm{D}_1=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\mathrm{D}_2=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda-1=-(\lambda-1)^2$$

$$\mathrm{D}_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Әгәр $D \neq 0$, ягъни $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ булса, тигезләмәләр системасының бердәнбер чишелеше бар:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = -\frac{1}{\lambda+2},,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}.$$

Димәк, бу очракта чишелеш булып $\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, -\frac{1}{\lambda+2}, \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$ векторы тора.

Әгәр $D = 0$, ләкин $D_1 \neq 0,\ D_2 \neq 0,\ D_3 \neq 0$ булса, $0 \cdot x_1 = D_1,\ 0 \cdot x_2 = D_2,\ 0 \cdot x_3 = D_3$ тигезлекләре тигезләмәләр системасының чишелеше булмавын күрсәтә. Бу $\lambda = -2$ булганда гына мөмкин.

Әгәр $\lambda = 1$ булса, $D = 0$, $D_1 = 0,\ D_2 = 0,\ D_3 = 0$ һәм $0 \cdot x_1 = 0,\ 0 \cdot x_2 = 0,\ 0 \cdot x_3 = 0$ тигезлекләрен табабыз, димәк тигезләмәләр системасының чиксез күп чишелешләре бар.

GeoGebra программасында эшләү

Гаусс методы (1 юл) һәм Крамер кагыйдәсе(2-8 юллар) ярдәмендә чишү.

1	ПриведённоСтупенчатаяФорма[{{λ,1,1,λ},{1,λ,1,1},{1,1,λ,λ}}] $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$
2	D:=Определитель[{{λ,1,1},{1,λ,1},{1,1,λ}}] $\rightarrow D := \lambda^3 - 3\lambda + 2$
3	D_1:=Определитель[{{λ,1,1},{1,λ,1},{λ,1,λ}}] $\rightarrow D_1 := \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$
4	D_2:=Определитель[{{λ,λ,1},{1,1,1},{1,λ,λ}}] $\rightarrow D_2 := -\lambda^2 + 2\lambda - 1$
5	D_3:=Определитель[{{λ,1,λ},{1,λ,1},{1,1,λ}}] $\rightarrow D_3 := \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$
6	x_1=D_1/D $\rightarrow x_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}$
7	x_2=D_2/D $\rightarrow x_2 = -\frac{1}{\lambda+2}$
8	x_3=D_3/D $\rightarrow x_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}$

Мөстәкыйль эш өчен 4 нче бирем

Бирелгән тигезләмәләр системасын тикшерергә, Гаусс ысулы һәм Крамер кагыйдәсе ярдәмендә чишәргә.

Вариант 1.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1) x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1) x_3 = \lambda \\ (\lambda+1) x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3) x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda-1) x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3) x_3 = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 2x_1 + (\lambda+1) x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2(\lambda+1) x_2 + x_3 = \lambda + 1 \\ x_1 + (\lambda+1) x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = -\lambda \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 - (1-\lambda) x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1) x_3 = \lambda \\ (1-\lambda) x_1 - \lambda x_2 + (3-2\lambda) x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - (2\lambda+1) x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - \lambda x_2 + (3-\lambda) x_3 = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2\lambda x_2 + x_3 = 2\lambda \\ x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 4\lambda^2 \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + (2\lambda+1) x_3 = 2\lambda \\ 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + (2\lambda-1) x_3 = 2\lambda \\ (2\lambda+1) x_1 + 2\lambda x_2 + (4\lambda+3) x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} x_1 + 2\lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (4\lambda-1) x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2\lambda x_2 + (2\lambda+3) x_3 = 4\lambda - 1 \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} -2\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = -2\lambda \\ x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 4\lambda^2 \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 - (1-2\lambda) x_3 = 2\lambda \\ 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + (1+2\lambda) x_3 = 2\lambda \\ (1-2\lambda) x_1 - 2\lambda x_2 + (3-4\lambda) x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} x_1 - 2\lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - (4\lambda + 1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + (3 - 2\lambda)x_3 = -1 - 4\lambda \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = \lambda - 1 \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 1)x_3 = (\lambda - 1)^2 \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + (\lambda + 1)x_2 + (\lambda + 2)x_3 = \lambda + 1 \\ (\lambda + 1)x_1 + (\lambda + 1)x_2 + \lambda x_3 = \lambda + 1 \\ (\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 1)x_2 + (2\lambda + 5)x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda + 1)x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda + 1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + (\lambda + 4)\lambda x_3 = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \\ (\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 = \lambda - 1 \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (2\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \\ (\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 = \lambda - 1 \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (2\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda - 1)x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda - 3)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 2\lambda - 3 \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda - 2)x_2 + x_3 = \lambda - 2 \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 2)x_3 = (\lambda - 2)^2 \end{cases}$$

Вариант 21.

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (\lambda + 3)x_3 = \lambda + 2 \\ (\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda + 2 \\ (\lambda + 3)x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (2\lambda + 5)x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 22.

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda + 3)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 2)x_2 + (\lambda + 5)x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

Вариант 23.

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 2)x_2 + x_3 = \lambda + 2 \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 2)x_3 = (\lambda + 2)^2 \end{cases}$$

Вариант 24.

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x_1 + (\lambda - 2)x_2 + (\lambda - 1)x_3 = \lambda - 2 \\ (\lambda - 2)x_1 + (\lambda - 2)x_2 + (\lambda - 3)x_3 = \lambda - 2 \\ (\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 2)x_2 + (2\lambda - 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 25.

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda - 2)x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + (2\lambda - 5)x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda - 2)x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 2\lambda - 5 \end{cases}$$

5. Матрица формасында сызыкча тигезләмәләр системасын чишү

n билгесезле n сызыкча тигезләмәләр системасын матрица рәвешендә языйк, ягъни $AX = B$, монда A -системаның төп матрицасы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - билгесезләрдән төзелгән багана, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - ирекле буыннардан төзелгән багана.

Әгәр A үзенчәлексез матрица булса (ягъни $\det A \neq 0$ яки $r(A) = n$), A^{-1} кире матрица була. Ул чагында матрицалы тигезләмәнең ике ягын да сулдан A^{-1} гә тапкырласак $A^{-1}AX = A^{-1}B$, ягъни $X = A^{-1}B$ тигезлеген табабыз. Димәк, бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасының бердәнбер чишелеш бар. Мисал карыйк.

Бирелгән сызыкча тигезләмәләр системасын матрица рәвешендә чишәргә.

Мисал 5.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Чишелеше. Әгәр $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ булса, ул чагында тигезләмәләр системасы $AX = B$ рәвешендә язылa. Моннан $X = A^{-1}B$ табабыз.

Димәк, беренчедән A^{-1} кире матрицасын табарга кирәк. Аны ике төрле ысул белән табарга мөмкин:

-элементар үзгәртүләр ярдәмендә,

-формула буенча.

Без A^{-1} не элементар үзгәртүләр ярдәмендә табыйк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Моннан табабыз:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тикшереп карыйк:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Шулай итеп, бирелгән системаның бердәнбер чишелеше табылды $(1,\ \ 2,\ \ -2)$.

GeoGebra программасында эшләү

1	A:={{1,1,2},{2,-1,2},{4,1,4}} → $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2	B:={{-1},{-4},{-2}} → $B := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
3	A*X=B
4	X=A_1*B
5	A_1:=ОбратнаяМатрица[A] → $A_1 := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
6	X:=A_1*B → $X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Мөстәкыйль эш өчен 5нче бирем

3нче биремдә бирелгән тигезләмәләр системасын матрица рәвешендә чишәргә.

Йомгаклау өчен сораулар

1. Сызыкча тигезләмәләр системасы дип нәрсәне атыйлар?

2.Чишелешле һәм чишелешсез сызыкча тигезләмәләр системасы.

3.Билгеләнгән, билгеләнмәгән сызыкча тигезләмәләр системасы.

4.Тигезләмәләр системасын матрицалар рәвешендә язу.

5.Нинди элементар үзгәртүләр беләсез?

6.Гаусс методы.

7. Бериш, бериш булмаган сызыкча тигезләмәләр системасы.

8. Крамер кагыйдәсе.

9.Нәрсә ул фундаменталь чишелеш, аерым чишелеш, гомуми чишелеш.

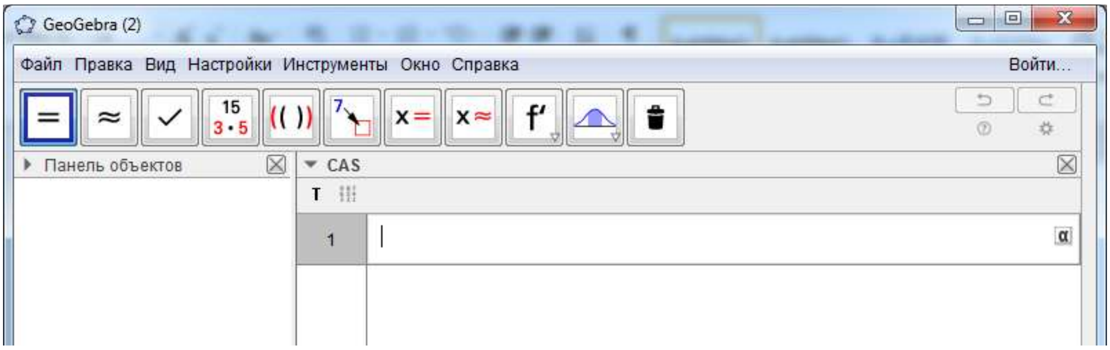
GeoGebra. Компьютерлашкан алгебра күренеше (CAS)

GeoGebra — ул үз эченә геометрия, алгебра, таблицалар, графлар, статистика һәм арифметиканы берләштергән, белем бирүнең төрле этапларында ирекле кулланып була торган динамик математик программа.

Компьютерлашкан алгебра күренеше (CAS)

Компьютерлашкан алгебра куренешен ачу өчен, экранның уң ягындагы укка тычкан белән чиертеп, CAS юлын сайларга яисә Ctrl+Shift+K төймәләре берләшмәсенә басарга кирәк.

CAS тәрәзе:

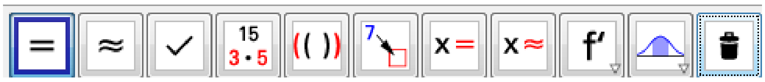


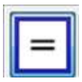
Әлеге тәрәздә мәгълүмат кертү юлы һәм аның астында ук нәтиҗә чыгару юлы бар.

Төп кертү юлыннан аермалы буларак, монда:

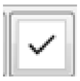
- билгеләнмәгән үзгәрешлеләр белән эшләргә мөмкин, мәсәлән: $(a+b)^2$ дип язып Enter төймәсенә бассак, киләсе юлда $a^2+2ab+b^2$ аңлатмасы чыгачак;
- тигезлек билгесе (=) тигезләмәләрдә, ә := аңлатмага кыйммәт бирү өчен кулланыла.

CAS тәрәзендәге инструментлар панеле.



 Исәпләргә - төймә аңлатманың кыйммәтен таба.

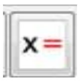
Унарлы вакланма рәвешендә күрсәтү.

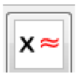
 Язганны беркетеп кую. Саклый һәм тикшерә.

Факторизация. Тапкырлаучыларга тарката.

Җәяләрне ачу.

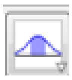
Аңлатманың бер өлешен алыштыру.

 Чишү. Бер яки берничә чишелешне таба.

 Якынча чишелешне таба.

Беренче чыгарылмасын таба.

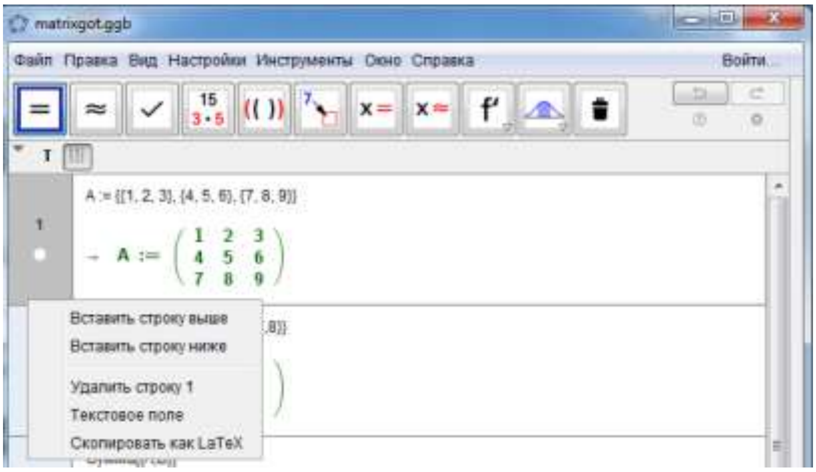
Интеграл исәпли.

 Ихтималлык исәпли.

Функцияне тикшерү.

Сайланган объектны бетереп ату.

Юл санына тычканның уң төймәсе белән бассак, кечкенә меню чыга:



1. Өскә юл өстәү.
2. Аска юл өстәү.
3. Юлны бетереп ату.
4. Текст юлына әйләндерү.
5. LaTeX күчермәсен ясау.

ЭЧТӘЛЕК

Кереш сүз 3

1.Төп аңлатмалар һәм Гаусс методы 4

Мөстәкыйль эш өчен 1нче бирем 14

2. Сызыкча бериш тигезләмәләр системасы 18

Мөстәкыйль эш өчен 2 нче бирем 24

3. Крамер кагыйдәсе 27

Мөстәкыйль эшләү өчен 3нче бирем 30

4. Параметр кергән сызыкча тигезләмәләр системасы 32

Мөстәкыйль эш өчен 4 нче бирем 36

5. Матрица формасында сызыкча тигезләмәләр системасын чишү 38

Мөстәкыйль эш өчен 5нче бирем 40

Йомгаклау өчен сораулар 41

GeoGebra. Компьютерлашкан алгебра күренеше (CAS) 42

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ 45

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ

1. Галиева Л.И., Хуснетдинов М.З. “Системы линейных уравнений”-Казань: ТГГПУ,2011г
2. Кайгородов В.Р. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- Казань, Изд-во КГУ, 1985г. - 120с.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.-М.:Высшая школа, 1979.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.-М.:Наука,1971.-
5. www.geogebra.org
6. Introduction to GeoGebra. Last modified: November 23, 2013.Written for GeoGebra 4.4
7. http://www.geogebra.org/cms/
8. http://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf

«Издание, осуществлено в рамках мероприятия 3.5.4 Государственной программы «Сохранение, изучение и развитие государственных языков Республики Татарстан и других языков в Республике Татарстан на 2014-2020 годы».