КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра высшей математики и математического моделирования

НИГМЕДЗЯНОВА А.М., ЖУКОВА С.А.

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2020

Печатается по решению учебно – методического совета Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского протокол №9 от 30.06.2020.

Рекомендовано на заседании кафедры высшей математики и математического моделирования протокол №12 от 19.06.2020.

УДК 514.1

ББК 22.151.2

Нигмедзянова А.М., Жукова С.А.

Геометрия треугольника: учебно-методическое пособие / Нигмедзянова А.М., Жукова С.А. – Казань: Казанский федеральный университет, 2020. – 73 с.

В данном учебном пособии рассматриваются геометрия треугольника в трех аксиоматиках(геометрия Евклида, геометрия Лобачевского и геометрия Римана). В первой главе приведена историческая справка о зарождении неевкидовой геометрии,во второй главе пособия содержатся необходимые теоретические сведения (основные определения, свойства, теоремы и их доказательства), а так же задания для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов,обучающихся по направлению подготовки Педагогическое образование (математика, информатика, ИТ) и школьников, увлеченных математикой.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неевклидовы геометрии – это необычный, интересный раздел современной геометрии. Он дает материал для размышлений, развивает фантазию и пространственное воображение. Изучение геометрии Лобачевского и геометрии Римана способствует: более глубокому познанию действительности, формированию представлений о месте математики в современной цивилизации и способах описания на математическом языке явлений реального мира, пониманию возможности аксиоматического построения математических теорий, формированию представлений о роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений.

Данное учебное пособие содержит теоретический материал, исторические сведения, основные понятия и теоремы по теме «Геометрия треугольника» в трех геометриях (Евклида, Лобачевского, Римана), а также подборку вопросов и задач для самостоятельного решения. Весь материал распределен по двум главам.

В первой главе рассматривается история зарождения геометрии, возникновение неевклидовых геометрий. В ней рассказывается история создания «Начал» Евклида, неочевидность V постулата, предпосылки к созданию геометрии Лобачевского и возникновение геометрии Римана, рассматриваются аксиомы абсолютной геометрии.

Вторая глава посвящена треугольникам. Формулируются основные свойства треугольника, выписаны основные формулы, в частности, формулы площади треугольника, тригонометрические формулы. Каждая тема рассмоотрена с точки зрения всех трех геометрий: Евклида, Лобачевского и Римана. Что позволяет более наглядно провести анализ зависимости формулировки теоремы от выбранной геометрии. В конце каждой темы предложены вопросы и упражнения для самостоятельной работы учащихся.

1 Три «великих геометрии»

1.1 Геометрия Евклида

1.1.1 Развитие геометрии в Древней Греции

Геометрия берет свои истоки в Египте и древнем Вавилоне. Применение геометрических правил и знаний изначально носило только практический характер и было связаны с измерением разнообразных площадей домов или садов, сравнение длины предметов, применяемых в хозяйстве, вычисление периметров поверхности участков и предметов, а также измерение объемов простых фигур (сложные фигуры сводили к простым, либо с сильной погрешностью, либо разбиением сложной фигуры на простые).

В VII в. до н.э. дальнейшее серьезное развитие и продвижение геометрии перенеслось в Древнюю Грецию. Египтяне поделились знаниями и первыми наблюдениями с греками, и уже греки дали имя этой науке – «геометрия», что в Греции значит «землемерие». Первым ученым, так сказать, отцом геометрии в Греции стал Фалес. Ему принадлежат такие открытия как: свойства вертикальных углов, доказательства свойств углов при основании равнобедренного треугольника, теорема Фалеса и некоторые другие теоремы. Далее в Греции были такие ученые и первопроходцы, как Пифагор, живший в период с VI до V в до н.э., Демокрит с V по IV в. до н.э., Платон с IV по III в. до н.э.

Каждый из этих ученых преподавал в своей математической школе, сумев многократно усилить интерес к геометрии среди своих учеников.

Платон в своей школе советовал ученикам, прежде чем заниматься популярной в то время философией, изучить и понять основные принципы и смыслы геометрии.

Школа Демокрита открыла сложнейшие по тем временам теоремы об объемах пирамиды и конуса.

Евдокс (живший с V по IV в. до н.э) создал теорию пропорций, которая смогла заменить грекам теорию иррациональных чисел, в то время даже не существующую.

Последователь школы Евдокса, грек Менехм сумел открыть конические сечения, которые после обстоятельно изучил в своих трудах Апполоний.

Аристотель (живший с IV по III в. до н.э) – основатель и первооткрыватель формальной логики, придумал и описал правила вывода.

На основании этих фактов можно заключить, что к началу III в. до н.э. греки имели огромный резерв геометрических данных, правил, формулировок, теорем и методов их доказательства. Возникла необходимость объединить это геометрическое многообразие и классифицировать его в правильном последовательном порядке. Этим озадачились многие греческие ученые (Гиппокрит, Федий и др.), однако их сочинения не сохранились, и даже не учитывалась после обнаружение великого труда Евклида – «Начала».

1.1.2 История создания геометрии Евклида

Великий учёный Евклид жил в III в. до н.э, был учеником школы Платона, а после и сам стал преподавателем и обучал математике в городе Александрия. Именно там он положил основу своим «Началам», в которых дает структурированное положение основных понятий геометрии, известных в то время. В своем труде Евклид применил новый для того времени метод повествования геометрии – аксиоматический метод. Его труды «Начала» содержат в себе 13 книг (или глав). Книги с I по IV, а также книга VI описывают планиметрию, книги с XI по XIII рассказывают о стереометрии, остальные же содержат основы теории чисел и геометрически изложенной арифметики.

Евклид одним из первых поставил задачу строгого и сухого объяснения геометрии, иначе говоря, систематического перечисления определений и аксиом, опираясь на которые можно было бы развивать геометрию строго логическим путем. Это является заслугой Евклида перед всей будущей наукой. Труды «Начала» являлись эталоном научного повествования на протяжении 2000 лет. И уже со времен Евклида все последующие ученики изучали геометрию только по его «Началам». Настоящие школьные учебники, практически все до единого представляли из себя, по существу, переосмысленное и перефразированное изложение «Начал».

Но, как и с любым трудом человека того времени, с точки зрения современной науки «Начала» Евклида имеют и свои недостатки.

Евклид определяет все свои понятия, у него попросту нет неопределенных понятий. Но как оказалось, ни одно из определений с 1 по 5 не используется в доказательстве его теорем.

Список постулатов и аксиом, который вводит Евклид, нельзя назвать до конца полным. Так, к примеру, в его списке нет аксиом, которые определяют понятие «лежать между». Несмотря на отсутствие аксиомы движения и аксиомы непрерывности, равенство фигур Евклидом определяется через движение.

Также система аксиом Евклида не является независимой. К примеру, IV постулат доказывается как теорема.

Геометрия, построенная на пяти постулатах Евклида, получила название «евклидова геометрия». Однако, на протяжение многих веков большое количество ученых пыталось доказать или опровергнуть правильность данных постулатов. Наибольший же интерес у ученых вызывал V постулат или, как иначе его называют, аксиома параллельности, очевидность которой ставилась под сомнение самим Евклидом. Работы ученых в отношении V постулата принесли свои плоды только в начале XIX века, в результате чего был создан целый класс геометрии под названием «неевклидова геометрия». Основная заслуга в этом принадлежит знаменитому русскому ученому Николаю Ивановичу Лобачевскому.

Вопросы к параграфу

1. Дайте характеристику «Начал» Евклида.
2. В чем состоит проблема пятого постулата Евклида?
3. Где находит применение геометрия Евклида?

1.2 Геометрия Лобачевского

1.2.1 История создания геометрии Лобачевского

Ученый Николай Иванович Лобачевский появился на свет 2 декабря 1792 года в городе Горький, на тот момент называвшемся Нижним Новгородом. Сначала поступил в гимназию при Казанском университете, успешно окончив ее перешел и в сам Казанский университет, и после чего остался там преподавать науки. В 1816 г. Н. И. Лобачевский был повышен до должности профессора Казанского университета, а в 1827 г. и вплоть до 1846 г. стал самим ректором Казанского университета. Далее его карьера вновь пошла вверх, хотя, казалось бы, куда уж дальше: с 1846 по 1855 гг. включительно Лобачевский работал помощником попечителя Казанского учебного округа. 24 февраля 1856 г Н. И. Лобачевский скончался, его возраст на этот момент составлял 63 года.

Первые годы своей работы в качестве преподавателя Н.И. Лобачевский настойчиво пытался доказать как теорему V постулат Евклида. Однако он все время сталкивался с различными трудностями, и в конечном итоге Н.И. Лобачевский сделал вывод, что V постулат не зависит от первых четырех. Для того, чтобы доказать свою гипотезу, Н.И. Лобачевский построил целую логическую теорию, в которой, оставив без изменения первые четыре постулата, совершенно отверг заключительный пятый, заменив его на противоположное утверждение. Неожиданным результатом стало открытие новой геометрии, основанной на логической цепочке, придуманной Н.И, Лобачевским.

Аксиома параллельности, сформулированная Н.И. Лобачевским, гласит:

$\mathrm{V_Л}$. Существует прямая a_0 и точка A_0, не лежащая на ней, такие, что через точку A_0 проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a_0 [3].

Исходя из вышесказанного, в 1826 году Н.И. Лобачевский представляет вниманию публики Казаннского университета свои мысли пои поводу неоднозначности V постулата в своей работе «Рассуждения о принципах геометрии». Впервые о новой геометрии Н.И. Лобачевский заявил в 1829 году в своей статье «О началах геометрии».

В последующие годы своей жизни Н.И. Лобачевский работает над развитием,созданной им геометрии, на плоскости и в пространстве, а также выводит формулы тригонометрии. Сам же Лобачевский называл новую геометрию «воображаемой». После его смерти эту геометрию стали называть «геометрией Лобачевского» или «гиперболической геометрией».

Однако новая геометрия вызвала непонимание и непринятие со стороны современников, по всей вероятности, результаты Лобачевского оказались слишком необычными и непривычными для математиков, которые вдохновлялись и учились на идеях геометрии Евклида. «Воображаемая» геометрия Лобачевского была принята математикам только после смерти великого немецкого математика Гаусса, когда были опубликованы его переписки с друзьями-математиками, в которых Гаусс восторгался исследованиями Лобачевского. В 1868 году была опубликована работа Бельтрами «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии», с указанием поверхностей, на которых в малом осуществляется двумерная геометрия Лобачевского.

В 1871 г. знаменитый немецкий математик Ф. Клейн (живший с 1849 по 1925 годы) в своей работе «О так называемой неевклидовой геометрии» сумел впервые доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского, тем самым развеяв сомнения в ее правильности и актуальности для будущего геометрии.

Исследования Лобачевского получили признания широких масс только после его смерти. Как оказалось, работы Лобачевского по новой геометрии представили собой новый этап в развитии естествознания (английский математик XIX в. Клиффорд даже называл Лобачевского «Коперником геометрии»), а также целого ряда наук. До открытий Лобачевского геометрию Евклида считали единственно возможным и непоколебимым учением о пространстве. Работы Лобачевского полностью опровергли эту мысль, привели к популяризации геометрии, стали очень важным дополнением в разнообразных разделах математики, механики, физики и астрономии.

1.2.2 Модели геометрии Лобачевского

Рассмотрим три основные модели геометрии Лобачевского.

1. Модель Пуанкаре. Возьмем некоторую плоскость E и зафиксируем на ней горизонтальную прямую x. Назовем эту прямую «абсолютом». В таком случае за точки плоскости Лобачевского будем принимать такие точки, которые лежат выше абсолюта x. Таким образом, плоскость Лобачевского

в модели Пуанкаре – это полуплоскость L, лежащая выше абсолюта.

За прямые в модели Пуакаре принимаются полуокружности с центрами на абсолюте, а также лучи, перпендикулярные x, вершины которых лежат на абсолюте.

Прямыми плоскости Лобачевского в данной модели являются

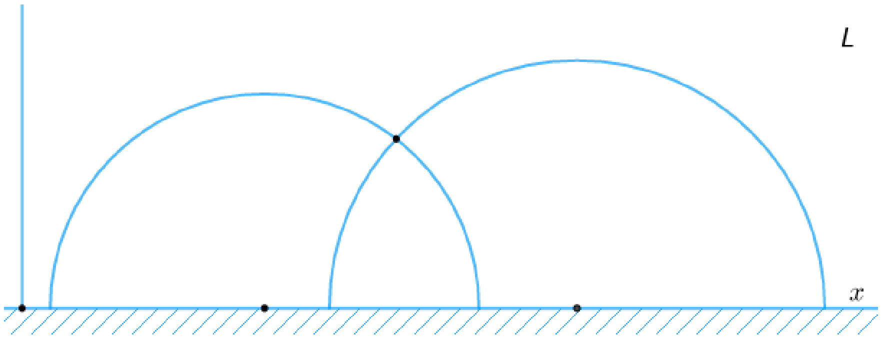


Рис. 1: Модель Пуанкаре

2. Модель Клейна. В данной модели за плоскость принимается некоторый круг. Точками здесь являются точки, лежащие внутри круга, а прямыми – хорды (с исключением концов, т.к. плоскостью является только внутренняя часть круга).

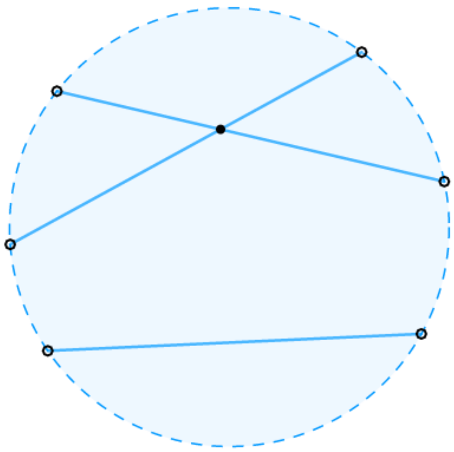


Рис. 2: Модель Клейна

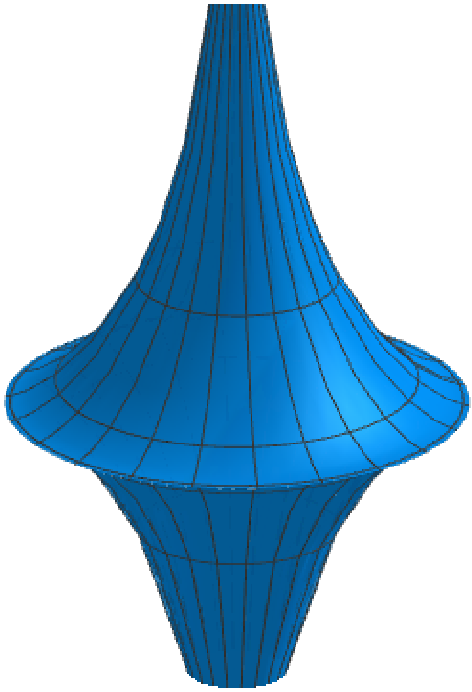


Рис. 3: Модель Бельтрами

3. Отображение геометрии Лобачевского на псевдосфере. Как было ска-

зано выше, в работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии», написанной в 1868 году, Э. Бельтрами показал поверхность, названную им псевдосферой, на которой частично осуществляется геометрия Лобачевского. Данная поверхность получена путем вращения траектрисы вокруг своей оси. Основное отличие модели Бельтрами от предыдущих моделей в том, что псевдосфера является поверхностью обыкновенного реального пространства. На этой поверхности выполняются аксиомы и теоремы геометрии Лобачевского.

Вопросы к параграфу

1. Кем и каким образом была решена проблема пятого постулата Евклида?
2. Назовите модели геометрии Лобачевского и их элементы.
3. Где находит применение геометрия Лобачевского?

1.3 Геометрия Римана

1.3.1 История создания геометрии Римана

Геометрия Римана – это одна из неевклидовых геометрий, иначе говоря, геометрическая теория, построенная на аксиомах, требования которых отличаются от требований аксиом геометрии Евклида. Словосочетание «неевклидова геометрия» обычно связывают с именем первопроходца в этой области геометрии, русского ученого Н.И. Лобачевского, но существуют и другие неевклидовы геометрии, одна из которых носит имя выдающегося немецкого математика Георга Фридриха Бернхарда Римана (жившего с 1826 по 1866 годы).

Геометрия Римана является одной из трёх «великих геометрий». Туда входят геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

Развитие неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским поспособствовало более глубокому познанию действительности и расширению границ устоявшихся наук. Таким образом, в основе фундаментального физического принципа, принципа относительности, лежит геометрия Римана. Исходя из исторической хронологии, геометрия Римана появилась после двух других геометрий (в 1854 г.), что вполне закономерно, ведь ее принципы берут истоки из первых двух.

Изначально Риман полностью пересмотрел базовые принципы и основы геометрии Евклида, и вместо них создал собственные самостоятельные принципы построения геометрии. Отсюда, исходя из логических рассуждений, возникла возможность существования целого ряда неевклидовых геометрий самой разнообразной пространственной структуры (а не только «плоской геометрии Евклида») и открылась возможность для постижения большего количества измерений (не только трех, что ранее казалось абсолютом в количестве измерений пространства).

В отличие от своего предшественника, Риман дал только основополагающие идеи, в то время как в гиперболической геометрии всё основное было сделано Лобачевским. Следующее поколение ученых развивало её приложения к механике и физике, а также вело непрерывные поиски моделей, в которых она смогла бы обрести некоторую более привычную наглядность для понимания ее сути в трехмерном измерении, в котором мы и живем.

1.3.2 Содержание геометрии Римана

Если рассматривать переход от геометрии Евклида к геометрии Римана, то процесс будет гораздо сложнее, нежели чем к геометрии Лобачевского. При переходе к геометрии Лобачевского требовалось изменить только аксиому о параллельных прямых, все остальные аксиомы остаются неизменными. При переходе к геометрии Римана потребуются более глубокие и масштабные изменения в системе аксиом. К примеру, в геометрии Римана прямая – это замкнутая линия, следовательно, с помощью понятия «лежать между» никак нельзя рассматривать вопросы о расположении точек на прямой.

Несмотря на этот факт, основным отличием в системах аксиом геометрий Римана, Лобачевского и Евклида является содержание аксиомы параллельности. В геометрии Римана она звучит следующим образом:

V_P. Через точку, не лежащую на прямой, нельзя провести прямую, параллельную данной. Все прямые пересекаются.

Основные элементы трёхмерной геометрии Римана – точки, прямые и плоскости. Основными понятиями в геометрии Римана выступают понятия принадлежности (точки прямой, точки плоскости), порядка (точек на прямой, прямых, проходящих через данную точку в данной плоскости, и. т.д.) и равенства (фигур) [12]. Требования аксиом, которые содержат в себе отношения принадлежности и порядка, совпадают с требованиями, выдвигаемыми аксиомами проективной геометрии. Аналогично, свойства, касающиеся расположения элементов на плоскости Римана и в пространстве Римана, полностью совпадают со свойствами расположения элементов на проективной плоскости и в проективном пространстве.

Геометрия Римана отличается от проективной геометрии тем, что в ней есть способы рассмотрения равенства фигур и вместе с тем измерения геометрических величин, таких как длина, угол, площадь, объём. Исходя из этого, можно сделать вывод, что геометрия Римана является метрической.

Однако не стоит забывать, что есть существенная разница между сферической геометрией и геометрией на плоскости. В отличие от второй в геометрии Римана сферические прямые имеют две диаметрально противоположные точки пересечения.

В связи с чем «точкой» в геометрии Римана принято называть две диаметрально противоположные точки сферы. Если же взять множество пар таких точек, то образуется сфера или, по другому, неевклидова плоскость Римана. Прямыми в такой плоскости являются большие окружности сферы.

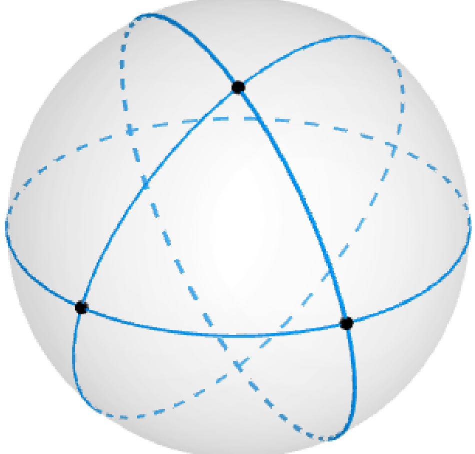


Рис. 4: Плоскcть Римана

Обратим внимание на тот факт, что на плоскости Римана нельзя выполнить аксиомы порядка геометрии Евклида. Это связано с тем, что случае плоскости Римана каждую из трёх точек прямой можно принять как лежащую между двумя другими.

Знаменитую лекцию Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», написанную еще в 1854 году, впервые напечатали только в 1868 году. Эта работа серьёзно изменила представления о геометрической науке и указала на её прямую связь с физикой, однако, при жизни Римана она напечатана еще не была и лишь через несколько лет после смерти ученого оказалась в центре внимания. Через 50 лет после публикации статьи идеи Римана воплотились в работах Эйнштейна о теории относительности. Главная заслуга Римана заключается в том, что он установил возможность другой неевклидовой геометрии, которую до тех пор отрицали в силу допущения о бесконечности прямой, признавая бесконечность её неотъемлемым свойством.

Вопросы к параграфу

1. Какое решение проблемы пятого постулата нашел Риман?
2. Назовите основные отличительные черты геометрии Римана от геометрии Евклида.
3. Где находит применение геометрия Римана?

1.4 Аксиомы абсолютной геометрии

Абсолютная геометрия – это теория, построенная на основе системы аксиом, состоящей из всех аксиом геометрии Евклида, за исключением аксиомы параллельности.

Абсолютная геометрия содержит в себе все теоремы, доказательства которых не зависят от аксиомы параллельности. Соответственно теоремы и следствия абсолютной геометрии справедливы как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии Лобачевского. Сам термин «абсолютная геометрия» был введен одним из первооткрывателей гиперболической геометрии – Яношем Больяи.

Аксиомы абсолютной геометрии учебнику Атанасяна Л.С. [3] можно разделить на четыре группы, а именно:

- аксиомы принадлежности;
- аксиомы порядка;
- аксиомы наложения;
- аксиомы непрерывности.

Группа I. Аксиомы принадлежности

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки [3].

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой [3].

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна [3].

Группа II. Аксиомы порядка

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C - три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A [3].

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими [3].

II_2. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества [3].

II_4. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a [3].

Группа III. Аксиомы наложения

III_1. Каждая фигура равна самой себе [3].

III_2. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ [3].

III_3. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3 [3].

III_4. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$ [3].

III_5. На любом луче от его начала можно можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один [3].

III_6. Если hk - неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k - в луч k' [3].

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один [3].

Группа IV. Аксиомы непрерывности

IV_1. Аксиома существования длин отрезков. При произвольно выбранном единичном отрезке PQ существует соответствие, удовлетворяющее следующим условиям:

- равным отрезкам соответствует одно и то же число;
- если точка B лежит на отрезке AC и отрезкам AC и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a + b$;
- некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число 1 [3].

IV_2. Аксиома существования отрезка данной длины. для любого положительного числа существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна данному числу [3].

Группа V. Аксиома параллельности

Как было замечено ранее, система аксиом абсолютной геометрии не содержит в себе аксиому параллельности. Если же добавить пятую группу аксиом, то можно получить разные виды геометрии.

Геометрия Евклида	Геометрия Лобачевского
$V_{\text{Е}}$. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной [2].	$V_{\text{Л}}$. Существует прямая a_0 и точка A_0, не лежащая на ней, такие, что через точку A_0 проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a_0 [3].

Вопросы к параграфу

1. Приведите определение абсолютной геометрии.

2. Как связаны абсолютная геометрия, евклидова геометрия и геометрия Лобачевского?

3. Как связаны абсолютная геометрия, евклидова геометрия и геометрия Римана?

2 Геометрия треугольника

Геометрия треугольника – это раздел планиметрии, который изучает свойства треугольника и связанные с ним объекты.

Как было замечено ранее, все определения, понятия и теоремы, которые основаны на аксиомах абсолютной геометрии, имеют место и в геометрии Лобачевского. Приведем некоторые из основных определений и следствий из этих аксиом.

2.1 Обзор основных следствий из аксиом абсолютной геометрии

Основными понятиями в планиметрии Евклида, точно также как и в планиметрии Лобачевского, являются точки и прямые – это основные объекты, а основными отношениями являются: принадлежность точки прямой и отношение «лежать между» для точек одной прямой.

Введем обозначения.

Запись $A - B - C$ означает, что точка B лежит между точками A и C. Запись ABC говорит о том, что точка A не лежит между точками B и C.

С использованием групп I-II аксиом абсолютной геометрии вводятся основные простейшие понятия планиметрии, а также доказывается ряд теорем. Приведем некоторые из этих утверждений и теорем, которые будем использовать в дальнейшей работе.

1.1°. Предложение Паша. Если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком [3].

1.2°. Внутренний луч неразвернутого угла пересекает отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла [3].

1.3°. Если углы hk_1 и hk_2 с общей стороной h отложены от этого луча в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из лучей k_1 и k_2 является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом [3].

Рассмотрим теорему о перпендикулярных прямых, а также следствия из неё, которые пригодятся для дальнейшего изучения темы.

Теорема 1. Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна [3].

Следствие 1. Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются [3].

Следствие 2. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести один и только один перпендикуляр к этой прямой [3].

Введем лемму о прямых, которые при пересечении с секущей образуют равные соответственные или равные накрест лежащие углы.

Лемма. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, то данные прямые не пересекаются [3].

С использование данной леммы доказывается одна из важнейших теорем абсолютной геометрии, а именно – теорема о внешнем угле треугольника. В геометрии Лобачевского эта теорема играет существенную роль.

Теорема 2. Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним [3].

Немаловажным является предложение Архимеда, которое можно доказать опираясь на аксиомы абсолютной геометрии.

Предложение Архимеда. Если AB и CD - произвольные отрезки, то на луче AB существует n точек, таких, что $AA_1 = AA_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит между точками A и A_1 [3].

Введем также некоторые свойства измерения углов:

2.1°. Если при некотором выборе единицы измерения углов прямой угол имеет меру d, то: а) сумма мер любых двух смежных углов равна $2d$; б) мера α любого неразвернутого угла заключена в пределах $0 < \alpha < 2d$, а мера развернутого угла равна $2d$ [3].

2.2°. Какого бы ни было число α, такое что $0 < \alpha \leq 2d$, существует угол, мера которого равна α [3].

2.3°. Для любого неразвернутого угла существует n лучей, которые делят его на $n + 1$ равных частей, где n – любое натуральное число [3].

На основе свойства 2.2° вводится градусная мера угла. Для этого обыкновенно за единицу измерения углов принимается угол, равный $\frac{1}{90}$ части прямого угла.

Стоит обратить внимание на следующую теорему.

Теорема 3. В абсолютной геометрии сумма мер углов треугольника не больше $2d$ [3].

Вопросы и задачи к параграфу

1. Доказать предложение Паша: если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.

2. Доказать, что внутренний луч неразвернутого угла пересекает отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.

3. Доказать, что угол, смежный с острым углом, является тупым, а угол, смежный с тупым, – острым.

4. Доказать, что через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

5. Доказать, что биссектриса угла есть луч, состоящий из всех внутренних точек угла, каждая из которых равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

2.2 Теорема о сумме углов треугольника

Доказательство теоремы о сумме углов треугольника напрямую зависит от аксиомы параллельности, в связи с чем формулировка теоремы меняется исходя из выбора геометрии, в которой эта теорема изучается.

Геометрия Евклида

В геометрии Евклида, как известно из школьного курса геометрии, эта теорема звучит следующим образом:

Теорема 1. Сумма углов треугольника равна 180° [2].

Приведем доказательство этой теоремы.

⟦ Пусть ABC произвольный треугольник, докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Проведем прямую a через вершину B так, что $a \parallel AC$ (Рис. 5).

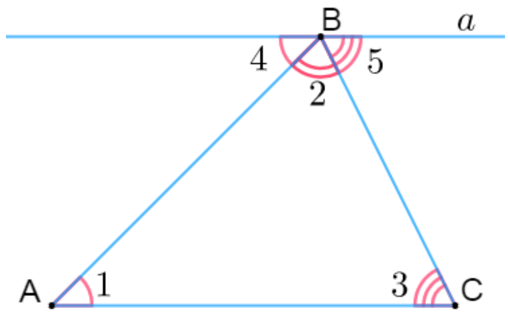


Рис. 5

$\angle 1 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей. Аналогично, $\angle 3 = \angle 5$.

Исходя из чертежа очевидно, что $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$.

Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ или $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. ⟧

Геометрия Лобачевского

До того как будет сформулирована теорема о сумме углов треугольника в геометрии Лобачевского, рассмотрим понятие дефекта треугольника.

Определение. Дефектом треугольника ABC называется число

$$\delta(ABC) = 2d - \sigma(ABC),$$

где $\sigma(ABC)$ – сумма мер углов треугольника ABC [3].

В геометрии Евклида дефект любого треугольника равен нулю, что следует из теоремы о сумме углов треугольника.

Дефект треугольника обладает некоторыми свойствами в абсолютной геометрии. Иными словами, эти свойства можно доказать без использования аксиомы Лобачевского.

3.1°. В абсолютной геометрии дефект любого треугольника есть неотрицательное число [3].

Это свойство напрямую следует из теоремы о сумме мер углов треугольника, приведенной ранее.

3.2°. Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC)$ [3].

Доказательство свойства 3.2° опирается на свойство 3.1° и на очевидное равенство $\sigma(ABC) = \sigma(ABD) + \sigma(ADC) - 2d$.

Из свойств 3.1° и 3.2° следует третье свойство.

3.3°. Если точки B' и C' лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC и $\delta(ABC) = 0$, то $\delta(AB'C') = 0$ [3] .

Перейдем непосредственно к теореме о сумме углов треугольника на плоскости Лобачевского и её доказательству.

Теорема 2. На плоскости Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше $2d$ [3].

⟦ Докажем теорему, воспользовавшись методом от противного.

Пусть BCD - треугольник, такой, что $\sigma(BCD) \geq 0$, и, следовательно, $\delta(BCD) \leq 0$. Тогда по свойству 3.1° $\delta(BCD) = 0$.

Не нарушая общности, можем считать, что углы B и D острые. В таком случае, если CA высота треугольника, то $B - A - D$. Отсюда следует, что $\delta(ABC) = 0$, по свойству 3.2°.

Через точку C проведем прямую CE такую, что $CE \perp CA$. По лемме из предыдущего параграфа прямая CE не пересекает прямую AB.

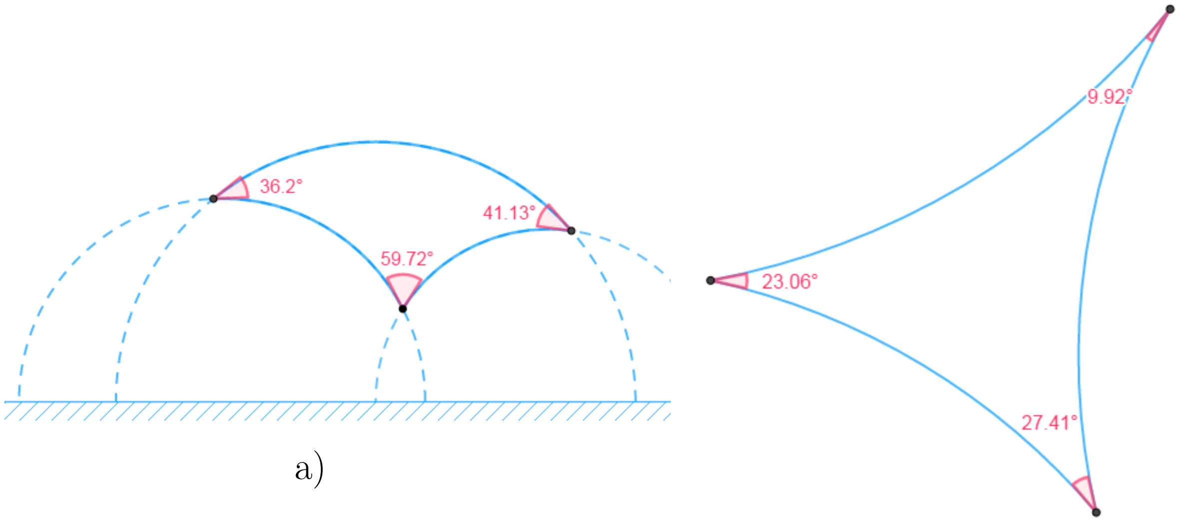
По аксиоме $V_{Л}$ существует некоторая прямая CM, отличная от CE, которая также не пересекает прямую AB.

Однако, исходя из вышесказанных фактов, возникает противоречие выбору прямой CM. Следовательно, исходное предположение о том, что $\sigma(BCD) \geq 0$, неверно, и сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского меньше $2d$. ⟧

Следствие 1. На плоскости Лобачевского дефект любого треугольника есть положительное число [3].

Введем без доказательства теорему о сумме углов выпуклого четырехугольника на плоскости Лобачевского.

Теорема 3. На плоскости Лобачевского сумма углов выпуклого четырехугольника меньше $4d$ [3].



а) б)

Рис. 6

Геометрия Римана

Определение. Сферическим треугольником называется часть сферы, ограниченная тремя взаимно пересекающимися дугами больших кругов [8].

Несмотря на неочевидность этого факта, многие свойства сферических треугольников треугольников совпадают со свойствами обычных треугольников в геометрии Евклида. К примеру, неравенство треугольника или три признака равенства треугольника. Следствия из этих теорем точно также остаются справедливыми для сферического треугольника.

Однако теорема о сумме углов треугольника в геометрии Римана имеет собственную формулировку и смысл.

Теорема 4. Сумма углов любого сферического треугольника всегда больше 180° [1].

Но до того как будет проведено доказательство этой теоремы, введем формулу для нахождения площади сферического треугольника, доказательство которой будет приведено в пункте 2.6:

$$S = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi),$$

где R – радиус сферы, углы A, B и C – углы треугольника ABC.

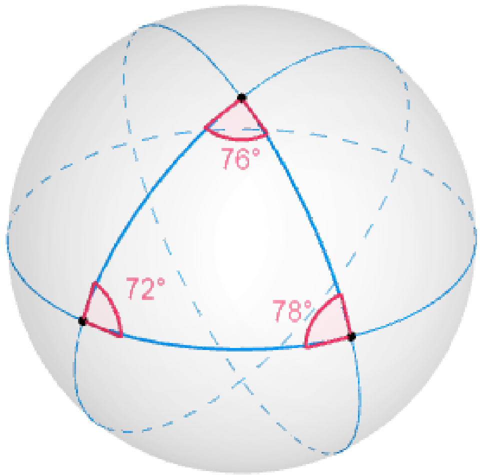


Рис. 7

⟦ Пусть дан треугольник ABC. Рассмотрим формулу нахождения площади этого треугольника, выразим из нее сумму углов A, B и C.

$$\frac{S}{R^2} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi,$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \frac{S}{R^2} + \pi.$$

Так как S является площадью треугольника, а R – радиусом сферы, то обе эти величины являются положительными. Из чего следует, что

$$\pi + \frac{S}{R^2} > 180^\circ.$$

Значит, $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$. ⟧

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AC треугольника ABC. Доказать, что $\delta(ABC) = \delta(ABE) + \delta(BDE) + \delta(DCE)$.

2. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, дефект которого равен нулю. Доказать, что $\delta(ABD) = \delta(ACD) = 0$.

3. Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC, дефект которого равен нулю, в точках D и E. Доказать, что $\delta(ADE) = 0$.

Геометрия Римана

1. Доказать, что сумма углов сферического треугольника всегда меньше 3π и больше π.

2. Доказать, что сумма всех сторон сферического треугольника всегда меньше $2\pi R$, где R – радиус сферы.

3. Доказать, что в сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

2.3 Признаки равенства треугольников

Известные из школьного курса геометрии признаки равенства треугольников относятся к аксиомам абсолютной геометрии, в связи с чем они имеют место быть как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского. Однако в последней можно выделить еще один признак равенства треугольников, не имеющий места в геометрии Евклида.

Геометрия Лобачевского

Теорема 1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ [3], [8].

⟦ Для доказательства данной теоремы необходимо доказать, что $AB = A_1B_1$. В этом случае, по второму признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Воспользуемся методом от противного. Пусть $AB \neq A_1B_1$ и $AB < A_1B_1$.

Отложим на лучах A_1B_1 и A_1C_1 отрезки A_1B' и A_1C'. Тогда по первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B'C'$ (Рис. 8). Из чего можно сделать вывод, что $\angle A_1B'C' = \angle B_1$ и $\angle A_1C'B' = \angle C_1$.

По вышеупомянутой лемме прямые B_1C_1 и $B'C'$ не пересекаются. Исходя из того, что $A_1B' = AB < A_1B_1$, можно сделать вывод о расположении точек на прямой, а именно: $A_1 - B' - B_1$ и $A_1 - C' - C_1$ по предложению Паша.

Четырехугольник $B_1C_1C'B'$ является выпуклым. $\sigma(B_1C_1C'B') = \angle B_1 + \angle C_1 + \angle 2 + \angle 1 = \angle B_1 + \angle C_1 + (2d - \angle A_1C'B') + (2d - \angle C'B'A) = 4d + \angle B_1 + \angle C_1 - \angle C_1 - \angle B_1 = 4d$. Противоречие теореме о сумме углов четырехугольника на плоскости Лобачевского. Следовательно, $AB = A_1B_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.]]

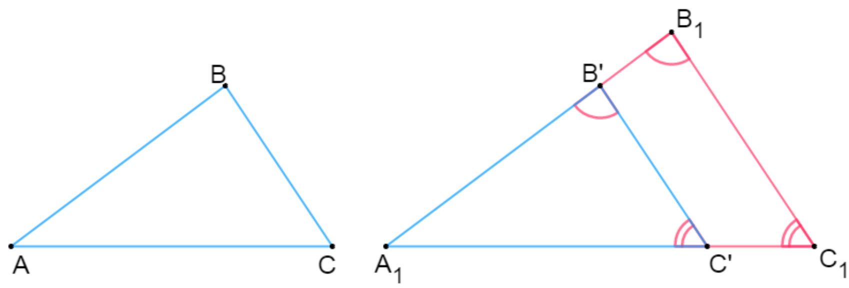


Рис. 8

Следствие. Два прямоугольных треугольника равны, если острые углы одного треугольника соответственно равны острым углам другого [3].

Из последней теоремы и ее следствия можно сделать важнейший вывод, что в геометрии Лобачевского не существует подобных фигур и самого понятия подобия.

Геометрия Римана

Признаки равенства треугольников в геометрии Римана полностью совпадают с признаками равенства треугольников в геометрии Лобачевского. А именно, здесь действуют три признака равенства абсолютной геометрии (что было отмечено в предыдущем пункте) и четвертый признак, введенный в геометрии Лобачевского: Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ [3], [8].

Однако доказательство четвертого признака равенства треугольников в геометрии Римана отличается от доказательства этой же теоремы в геометрии Лобачевского. Но прежде чем перейти к доказательству, введем понятие полярного треугольника и теорему о двух полярных относительно друг друга треугольниках.

Определение. Два сферических треугольника, лежащие на одной и той же сфере, называются полярными, если вершины одного из них являются полюсами сторон другого [8].

Замечание. Если один сферический треугольник полярен относительно другого, то и второй треугольник полярен относительно первого [8].

Теорема 2. Стороны и углы двух полярных относительно друг друга треугольников попарно взаимно дополняют друг друга до 180° [8].

Перейдем к доказательству четвертого признака равенства сферических треугольников.

⟦ Пусть даны два сферических треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причем $A = A_1$, $B = B_1$ и $C = C_1$.

Построим для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ полярные им сферические треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ соответственно. По теореме 2:

$$A + a' = 180^\circ, \quad A_1 + a_1' = 180^\circ,$$

$$B + b' = 180^\circ, \quad B_1 + b_1' = 180^\circ,$$

$$C + c' = 180^\circ, \quad C_1 + c_1' = 180^\circ,$$

где a', b' и c' стороны треугольника $A'B'C'$, лежащие напротив углов A', B' и C' соответственно. Аналогично и с другими треугольниками.

Так как по условию $A = A_1$, $B = B_1$ и $C = C_1$, то справедливы равенства $a' = a_1'$, $b' = b_1'$ и $c' = c_1'$, что означает, что треугольник $A'B'C'$ равен треугольнику $A_1'B_1'C_1'$ по трем сторонам (третий признак).

Из равенства полярных треугольников следует, что $A' = A_1'$, $B' = B_1'$ и $C' = C_1'$. По теореме 2, опираясь на замечание, запишем следующие соотношения:

$$A' + a = 180^\circ, \quad A_1' + a_1 = 180^\circ,$$

$$B' + b = 180^\circ, \quad B_1' + b_1 = 180^\circ,$$

$$C' + c = 180^\circ, \quad C_1' + c_1 = 180^\circ.$$

Из вышесказанного следует, что $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = c_1$, следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам. ⟧

Из доказанной теоремы аналогично геометрии Лобачевского можно сделать вывод о том, что в геометрии Римана также не существует подобных фигур.

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. Доказать, что если две стороны и угол между ними одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Доказать, что если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника, соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Доказать, что если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Геометрия Римана

1. Доказать, что если две стороны и угол между ними одного сферического треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого сферического треугольника, то такие треугольники равны.

2. Доказать, что если сторона и два прилежащих к ней угла одного сферического треугольника, соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого сферического треугольника, то такие треугольники равны.

3. Доказать, что если три стороны одного сферического треугольника соответственно равны трем сторонам другого сферического треугольника, то такие треугольники равны.

2.4 Замечательные точки и прямые треугольника

Замечательные прямые треугольника – это прямые, которые содержат биссектрисы, высоты, медианы треугольника, а также прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника [3].

Замечательные точки треугольника – это точки пересечения соответствующих групп замечательных прямых [3].

Отметим тот факт, что понятия биссектрис, высот и медиан треугольника относятся к абсолютной геометрии. из чего следует, что эти понятия также являются понятиями геометрии Лобачевского и геометрии Римана.

Некоторые свойства замечательных прямых и замечательных точек наряду с геометрией Евклида имеют место и в геометрии Лобачевского и в геометрии Римана. Однако некоторые свойства о расположении замечательных прямых, их формулировка и содержание напрямую зависят от выбора геометрии.

2.4.1 Биссектрисы треугольника

Вспомним, знакомую из школьного курса геометрии, теорему о точке пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке [2].

Доказательство этой теоремы основывается на свойстве 1.2° и на теореме о биссектрисе угла. Доказательство этой теоремы не содержит в себе аксиому параллельности или следствия из нее, следовательно, эта теорема является теоремой абсолютной геометрии, а значит и теоремой геометрии Лобачевского. Стоит отметить, что эта теорема также верна для геометрии Римана.

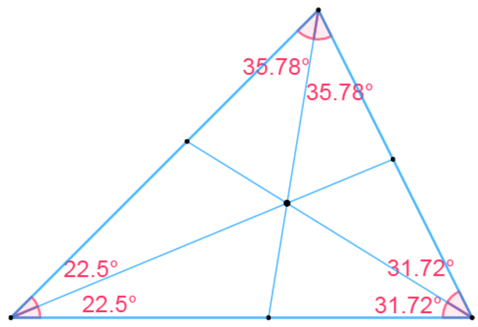
Опираясь на теорему 1, можно легко доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема 2. В любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность [2].

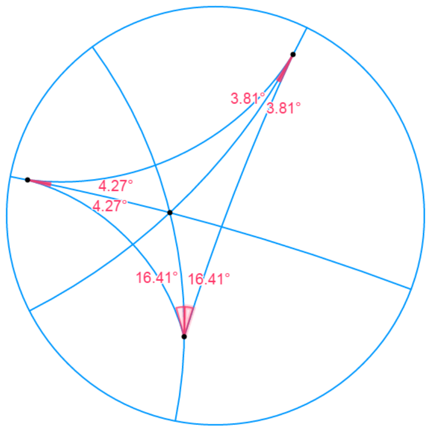
Нетрудно догадаться, что эта теорема также верна в геометрии Лобачевского и в геометрии Римана.

Геометрия Евклида

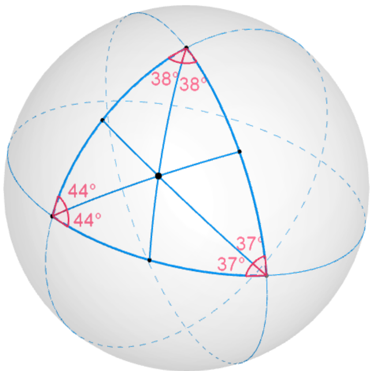
Наряду с вышеупомянутыми теоремами в геометрии Евклида существует еще одна теорема о биссектрисах угла и внешних углов треугольника.



а)



б)



в)

Рис. 9

Теорема 3. Три прямые, одна из которых содержит биссектрису данного угла треугольника, а две другие – биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с данным, пересекаются в одной точке [2].

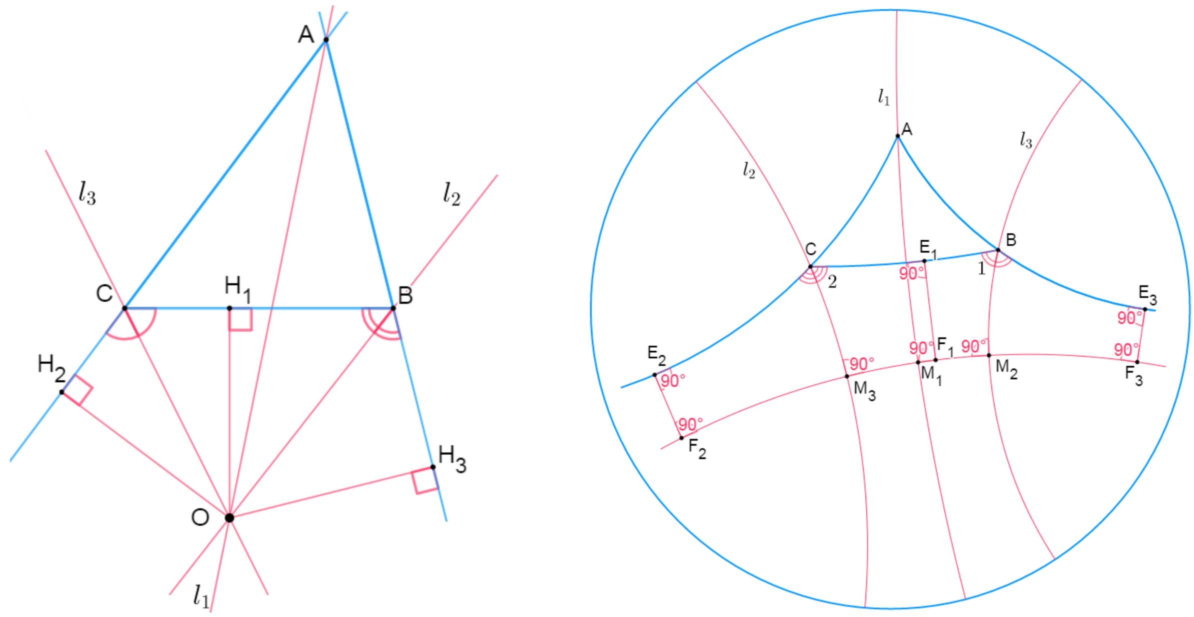
⟦ Пусть дан треугольник ABC, l_1 – прямая, которая содержит биссектрису угла A, l_2 и l_3 – прямые, которые содержат биссектрисы внешних углов при вершинах B и C (Рис. 10, а).

Необходимо доказать, что прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

Пусть O – точка пересечения прямых l_2 и l_3. Проведем из точки O к прямым BC, AC и AB перпендикуляры OH_1, OH_2 и OH_3 соответственно.

По теореме о биссектрисе угла $OH_1 = OH_2$ и $OH_1 = OH_3$. По этой же теореме точка O лежит на прямой l_1.

Следовательно, прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке, точке O. ⟧



а) б)

Рис. 10

Геометрия Лобачевского

В геометрии Лобачевского эта теорема выполняется не для любого треугольника. В связи с чем была введена аналогичная теорема для неевклидовой геометрии Лобачевского.

Теорема 4. Прямая, содержащая биссектрису данного угла треугольника, и две другие прямые, которые содержат биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с данным, принадлежат одному пучку [3].

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4, дадим введем определения расходящихся прямых и двупрямоугольника.

Определение. Расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского — это прямые, которые не пересекаются и не параллельны [3].

Определение. Двупрямоугольник — это выпуклый четырехугольник, у которого два угла, прилежащие к одной стороне, прямые [3].

⟦ Пусть дан треугольник ABC, l_1 — прямая, которая содержит биссектрису угла A, l_2 и l_3 — прямые, которые содержат биссектрисы внешних углов при вершинах B и C.

Необходимо доказать, что прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку.

Существует три возможных случая.

а) Пусть O — точка пересечения прямых l_2 и l_3. Проведем из точки O к прямым BC, AC и AB перпендикуляры OH_1, OH_2 и OH_3 соответственно.

По теореме о биссектрисе угла $OH_1 = OH_2$ и $OH_1 = OH_3$. По этой же теореме точка O лежит на прямой l_1.

Вывод: прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром в точке O.

б) Пусть l_2 и l_3 – расходящиеся прямые, h_2 и h_3 – лучи этих прямых, они берут начало в точках B и C, а также являются сторонами острых углов 1 и 2 (Рис. 10, б). В таком случае, общий перпендикуляр прямых l_2 и l_2 пересекает лучи h_2 и h_3 в некоторых точках M_2 и M_3. Отметим, что M_2M_3 и BC – расходящиеся прямые.

Прямые AC и BC являются симметричными относительно прямой l_3, следовательно, прямые AC и M_2M_3 также расходящиеся прямые. Аналогично, AB и M_2M_3 – расходящиеся прямые. Это означает, что каждая из прямых, содержащих стороны треугольника ABC, расходится с прямой M_2M_3, следовательно все эти прямые лежат в одной полуплоскости с границей M_2M_3.

Построим E_2F_2, E_2F_2 и E_2F_2 такие, что они будут являться общими перпендикулярами для пар расходящихся прямых M_2M_3, BC; M_2M_3, AC и M_2M_3, AB, соответственно (Рис. 10, б).

При симметрии относительно прямой l_3 расходящиеся прямые BC и M_2M_3 переходят соответственно в прямые AC и M_2M_3, откуда следует, что общий перпендикуляр E_1F_1 переходит в общий перпендикуляр E_2F_2. Следовательно, $E_1F_1 = E_2F_2$. Аналогично приводится доказательство того, что $E_1F_1 = E_3F_3$. А значит, $E_2F_2 = E_3F_4$.

Прямая l_1 не пересекает отрезки BM_2 и CM_3, иначе точка пересечения принадлежала бы всем трем прямым l_1, l_2, l_3, что противоречит заданным параметрам. Учитывая, что прямая l_1 пересекает отрезок BC, можно сделать вывод, что l_1 пересекает отрезок M_2M_3 в некоторой точке M_1.

Двупрямоугольники $AM_1F_2E_2$ и $AM_1F_3E_3$ равны, так как у них: общая сторона AM_1, равны основания F_2E_2 и F_3E_3 и $\angle AM_1F_2 = \angle AM_1F_3$. Так как эти углы смежные, то из этого следует, что они прямые, т.е. $l_1 \perp M_2M_3$.

Вывод: прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку расходящихся прямых с базой M_2M_3.

в) Пусть l_2 и l_3 – параллельные прямые. Прямая l_1 пересекает отрезок BC и не пересекает ни одну из прямых l_2 и l_3, что было отмечено в пункте б).

Вывод: прямые l_1 принадлежит пучку параллельных прямых, определяемому прямыми l_2 и l_3. ⟧

Геометрия Римана

Рассмотрим теорему о точке пересечения биссектрис треугольника и ее доказательство для сферического треугольника.

Теорема 5. Биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке [8].

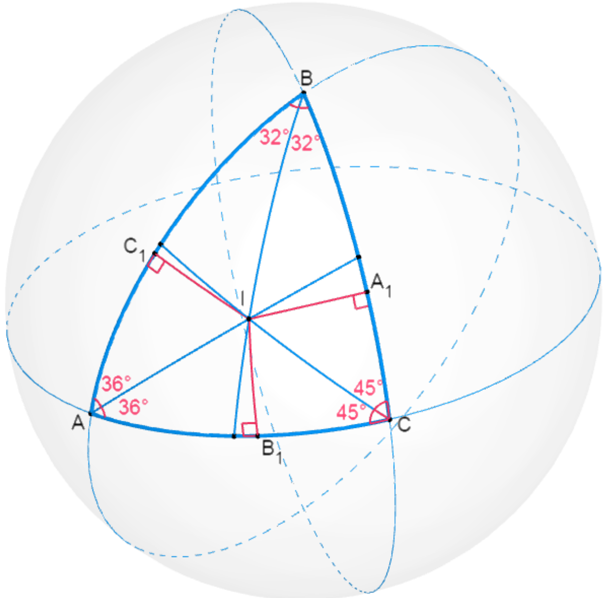


Рис. 11

⟦ Рассмотрим треугольник ABC. Пусть I – точка пересечения биссектрис углов A и C.

В таком случае, опираясь на теорему о биссектрисе угла, точка I является равноудаленной от сторон AC и AB. Иными словами, $IC_1 = IB_1$, где C_1 и B_1 – основания перпендикуляров из I на стороны AC и AB (Рис. 11).

Аналогично точка I равноудалена от сторон CA и CB. То есть $IB_1 = IA_1$, где A_1 – основание перпендикуляра из I на BC.

Из вышесказанного следует, что точка I является равноудаленной от сторон CA и CB, по причине того, что $IC_1 = IB_1 = IA_1$. Это означает, что по теореме о биссектрисе угла можно сделать вывод о том, что точка I лежит на биссектрисе угла B.

Следовательно, AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку I. ⟧

2.4.2 Медианы треугольника

Теорема 6. Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке [2].

Приведем доказательство этой теоремы в геометрии Евклида.

⟦ Пусть ABC – произвольный треугольник, O – точка пересечения медиан AA_1 и BB_1.

Проведем среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (Рис. 12).

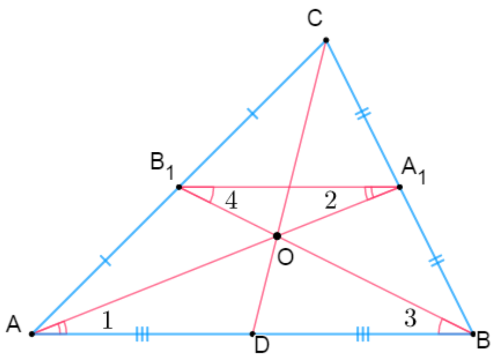


Рис. 12

$AA_1 \parallel AB$, значит, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущих.

Отсюда следует, что треугольник AOB подобен треугольнику A_1OB_1 по двум углам. Что означает, что стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

При этом $AB = 2A_1B_1$, следовательно $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медианAA_1 и BB_1 делит каждую из них в соотношении $2:1$, считая от вершины.

Аналогично можно доказать, что точка пересечения медиан AA_1 и CC_1 делит каждую из них в соотношении $2:1$, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O. ⟧

Обратим внимание, что доказательство теоремы опирается на теорию подобия, иными словами, при доказательстве важную роль играет аксиома параллельности. В связи с чем это доказательство нельзя перенести на плоскость Лобачевского. Однако, несмотря на вышеизложенный факт, теорема о точке пересечения медиан имеет место и в геометрии Лобачевского. Но в отличие от довольного простого доказательства теоремы в геометрии Евклида, аналогичная теорема в геометрии Лобачевского имеет более сложное доказательство, которое опирается либо на тригонометрические формулы, либо на теоремы стереометрии.

Теорема 6 также остается верной и в геометрии Римана, но при этом она несет в себе другое доказательство, исходя из выбранной геометрии. Рассмотрим доказательство теоремы 6 для сферического треугольника.

⟦ Пусть ABC – данный сферический треугольник; AD, BE и CF – его медианы; S – центр сферы (Рис. 13).

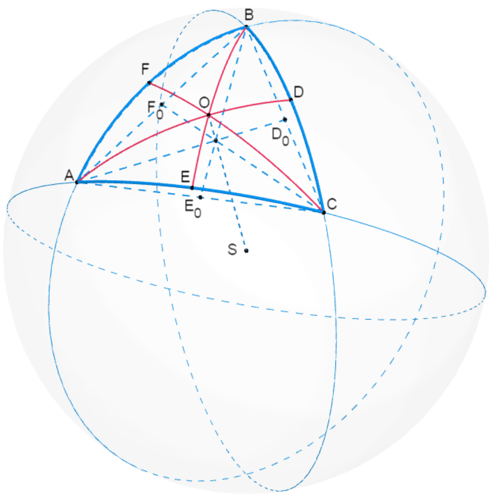


Рис. 13

Прямая SD делит дугу BC пополам, что означает, что она делит и хорду BC пополам, следовательно, $D_0B = D_0C$. Аналогично прямые SE и SF делят хорды AC и AB пополам в точках E_0 и F_0.

Прямые AD_0, BE_0 и CF_0 пересекаются в одной точке, так как являются медианами прямолинейного треугольника ABC. Следовательно, плоскости ASD_0, BSE_0 и CSF_0 проходят через одну прямую SO. А лежащие в этих плоскостях дуги AD, BE и CF – через одну точку O. ⟧

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Доказать, в любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность. Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.

3. Доказать, что средняя линия треугольника, содержащая середины боковых сторон, меньше половины основания треугольника и прямые, содержащие среднюю линию и основание, расходятся.

Геометрия Римана

1. Доказать, что точка пересечения биссектрис сферического треугольника есть центр вписанной в треугольник окружности.

2. Доказать, что биссектрисы углов, смежных с плоскими углами трехгранного угла, лежат в одной плоскости.

3. Доказать, что две внешние и одна внутренняя медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

2.5 Взаимное расположение прямых, содержащих высоты треугольника

Понятие высоты треугольника относится к абсолютной геометрии. Рассмотрим некоторые свойства высот треугольника в рамках этой геометрии.

4.1°. Если в треугольнике ABC углы B и C острые, то основание H высоты AH треугольника лежит на стороне BC, а если один из этих углов тупой, то H не принадлежит отрезку BC [3].

⟦ Рассмотрим два случая.

а) Пусть углы B и C острые. Очевидно, что точка H не совпадает ни с одной из точек B и C. Поэтому сделаем предположение, что точка H не принадлежит отрезку BC, например $H - B - C$, тогда по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABC$ тупой. Возникает противоречие. Следовательно, точка H лежит на отрезке BC.

б) Пусть $\angle B$ тупой, а $\angle c$ острый. Тогда точка H не может лежать на отрезке BC, потому как при этом предположении в треугольнике ABH $\angle ABH$ оказывается острым, что противоречит условию. Следовательно, точка H не принадлежит отрезку BC. ⟧

Из свойства 4.1° непосредственно следует следующее свойство:

4.2°. В остроугольном треугольнике основания всех высот лежат на соответствующих сторонах треугольника, а в тупоугольном треугольнике основание высоту, проведенной из вершины тупого угла, лежит на противоположной стороне, а основания двух других высот не принадлежат сторонам треугольника [3].

Исходя из свойства 4.2° и предложения Паша, получаем:

4.3°. Основания трех высот остроугольного или тупоугольного треугольника не лежат на одной прямой [3].

4.4°. Если в треугольнике ABC с высотами AH_1, BH_2 углы A и B острые, угол C не прямой, то отрезок H_1H_2 не имеет общих точек с прямой AB [3].

Все эти свойства имеют место быть как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

Геометрия Евклида

Вспомним, известную из школьного курса геометрии теорему о точке пересечения прямых,содержащих высоты треугольника.

Теорема 1. Прямые, содержащие высоты любого треугольника, пересекаются в одной точке [2].

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, вспомним тот факт, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

⟦ Пусть дан треугольник ABC; AA_1, BB_1 и CC_1 – прямые, содержащие высоты этого треугольника (Рис. 14). Докажем, что эти прямые пересекаются в одной точке.

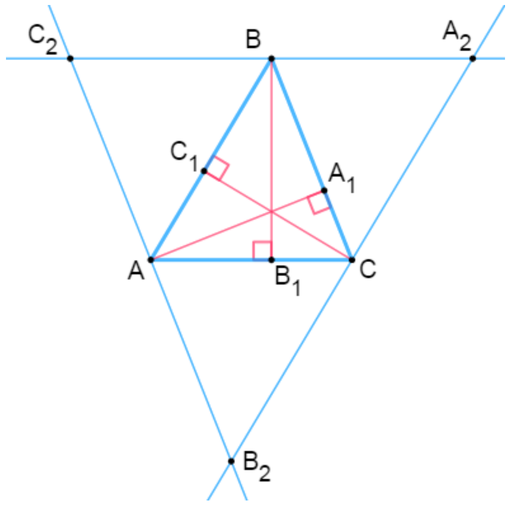


Рис. 14

Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Таким образом получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C – середины сторон этого треугольника. Так как $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, из чего следует, что $A_2C = CB_2$.

Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$.

Из построения следует, что $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Это означает, что AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке. ⟧

Доказательство теоремы, как можно было заметить, опирается на аксиому параллельности, что означает, что эта теорема не принадлежит абсолютной геометрии.

Геометрия Лобачевского

В геометрии Лобачевского имеет место другая теорема о прямых, содержащих высоты треугольника.

Теорема 2. Три прямые, содержащие высоты треугольника, принадлежат одному пучку. При этом если треугольник остроугольный, то сами высоты треугольника пересекаются в одной точке [3].

⟦ Пусть дан треугольник ABC; AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты этого треугольника.

Если $\triangle\, ABC$ прямоугольный, с прямым углом C, то точки H_1 и H_2 совпадают с точкой C, следовательно, прямые AH_1, BH_2 и CH_3 имеют общую точку C, иными словами, принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Общий случай: углы A, B и C не являются прямыми. Допусти, что $\angle A$ и $\angle B$ острые. В таком случае, по свойству 4.4° отрезок H_1H_2 и прямая AB не имеют общих точек. Существуют два случая:

а) Пусть угол C острый, то есть треугольник ABC остроугольный.

В этом случае по свойству 4.2° $B - H_1 - C$ и $A - H_2 - C$, следовательно, высоты AH_1 и BH_2 пересекаются в некоторой точке H и углы HH_1H_2 и HH_2H_1 острые (Рис. 15).

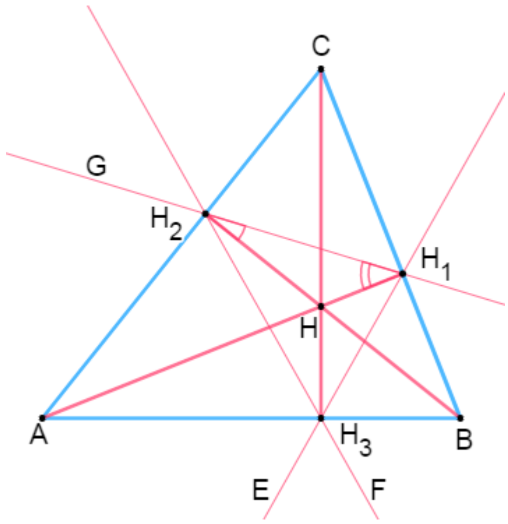


Рис. 15

Проведем относительно прямой AH_1 прямую. H_1E, симметричную прямой H_1H_2 и другую прямую H_2F, симметричную прямой H_1H_2 относительно прямой BH_2.

Точка A лежит на биссектрисе угла H_2H_1E, следовательно, она равноудалена от прямых H_1H_2 и H_1E по теореме о биссектрисе угла. С другой стороны, так как H_2B – ось симметрии прямых H_1H_2 и H_1E, то перпендикулярная к ней прямая AH_2 или AC – ось симметрии тех же прямых, следовательно, точка A равноудалена от прямых H_1H_2 и H_2F. Это значит, что точка A равноудалена от прямых H_2F и H_1E.

Аналогично можно показать, что точка B равноудалена от прямых H_2F и H_1E. Из чего следует, что AB – ось симметрии прямых H_2F и H_1E. H_3 – точка пересечения этих прямых, так как иначе прямая AB должна пересечь отрезок H_1H_2, что вызывает противоречие. Точка H_3 лежит на оси симметрии прямых H_2F и H_1E, иными словами, H_3 – точка прямой AB.

Очевидно, что точки H_1, H_2 и H_3 не принадлежат одной прямой, в таком случае $H_1H_2H_3$ – это некоторый треугольник, причем лучи H_1H и H_2H являются биссектрисами углов H_1 и H_2 образованного треугольника. По теореме 1 (п. 2.4) луч H_3H является биссектрисой угла H этого же треугольника. Из чего можно сделать вывод, что H_3H – ось симметрии прямых H_1H_3 и H_2H_3, следовательно $AB \perp H_3H$.

Также отметим, что точка C является равноудаленной от прямых H_2H_3 и H_2H_1, потому что она лежит на прямой AH_2, которая, в свою очередь, является осью симметрии этих прямых. Отсюда следует, что точка C является также равноудаленной от прямых H_2H_3 и H_1H_3, а значит она принадлежит оси симметрии этих прямых, то есть прямой H_3H (Рис. 15). Из чего следует, что CH_3 – высота треугольника ABC.

Вывод: H – общая точка высот треугольника ABC.

б) Пусть угол C тупой, то есть треугольник ABC тупоугольный.

В этом случае по свойству 4.2° точка C лежит между точками H_1 и B, а также между точками A и H_2, в связи с чем, высоты AH_1 и BH_2 не имеют общих точек, и углы CH_1H_2 и CH_2H_1 являются острыми (Рис. 16).

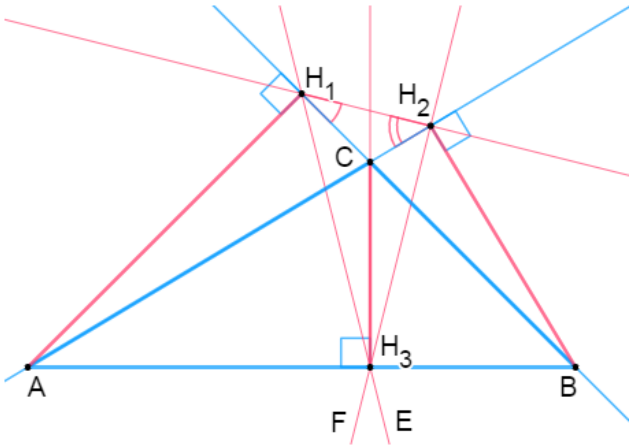


Рис. 16

Проведем прямые H_1E и H_2F, симметричные H_1H_2 относительно прямых BH_1 и AH_2, аналогично случаю а). Отсюда следует, что прямая AB будет являться осью симметрии для прямых H_1E и H_2F, а также что эти прямые пересекаются в некоторой точке H_3, которая лежит на отрезке AB.

По построению H_1A и H_2B являются биссектрисами внешних углов при вершинах H_1 и H_2 треугольника $H_1H_2H_3$ и $H_1C \perp H_1A$, $H_2C \perp H_2B$, поэтому H_1C и H_2C – биссектрисы углов H_1 и H_2 этого треугольника.

По теореме 1 (п. 2.4) H_3C – биссектриса угла H_3 треугольника $H_1H_2H_3$. Следовательно, $H_3C \perp AB$, то есть H_3C – высота треугольника ABC.

Вывод: по теореме 4 (п. 2.4) прямые AH_1, BH_2 и CH_3 являются прямыми одного пучка. $\rrbracket$

Во время доказательства данной теоремы были установлены следующие свойства треугольника $H_1H_2H_3$.

Следствие 1. Если AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC, то лучи H_1A, H_2B и H_3C являются биссектрисами углов треугольника $H_1H_2H_3$ [3].

Следствие 2. Если AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC, у которого угол C тупой, то лучи H_1A и H_2B являются биссектрисами внешних углов при вершинах $H - 1$ и H_2 треугольника $H_1H_2H_3$, а луч H_3C – биссектрисой угла H_3 этого треугольника [3].

Геометрия Римана

В геометрии Римана также имеет место быть теорема о точке пересечения высот, однако в случае сферического треугольника на теорему накладываются некоторые условия.

Теорема 3. В сферическом треугольнике, все углы которого отличны от прямого, сферические прямые, на которых лежат высоты, пересекаются в одной точке [8].

$\llbracket$ Пусть ABC – данный сферический треугольник; AP, BT и CR – высоты этого треугольника; S – центр сферы (Рис. 17).

Проведем через прямую SA плоскость перпендикулярную плоскости BSC. так как эта плоскость перпендикулярна, по предположению, плоскости BSC, то она перпендикулярна стороне BC треугольника ABC и пересекает ее в точке P. Следовательно, плоскость ASP пересекает треугольник ABC по прямой, перпендикулярной к BC, то есть по высоте AP треугольника ABC.

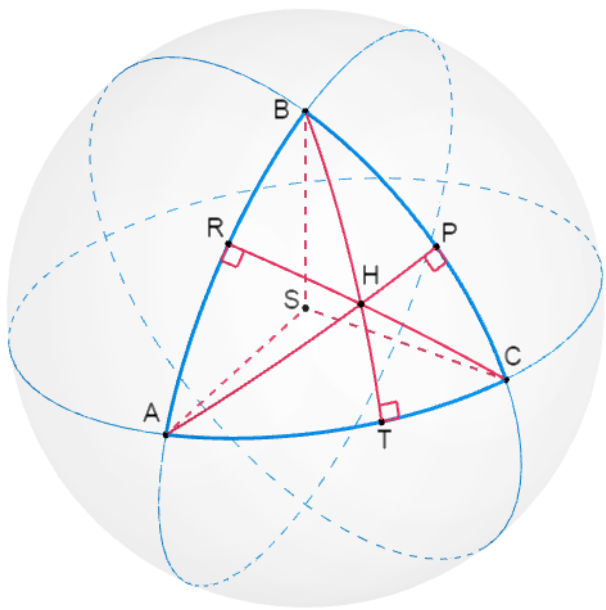


Рис. 17

Проведем аналогично плоскость через прямую SB перпендикулярно плоскости CSA. Она будет пересекать плоскость ABC по прямой BT, перпендикулярной AC.

Аналогично плоскость, проходящая через прямую SC и перпендикулярная плоскости ASB, пересекает треугольник ABC по сферической прямой CR, перпендикулярной к AB.

Итак, все три плоскости ASP, BST и CSR пересекают плоскость треугольника ABC по его высотам и проходят через одну прямую SH, где H – точка пересечения высот AP, BT и CR. $\rrbracket$

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. При каких условиях прямые, содержащие высоты треугольника: а) пересекаются в одной точке; б) параллельны; в) расходятся?

Геометрия Римана

1. Высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке. Верно ли это утверждение? Примеры.

2.6 Площадь треугольника

Геометрия Евклида

В геометрии Евклида существует несколько формул нахождения площади треугольника, выбор которых зависит от входных данных каждой конкретной задачи.

Приведем примеры некоторых формул.

1. Формула нахождения площади треугольника, если известны сторона a (основание) и высота h_a, проведенная к этой стороне.

$$\frac{1}{2}ah_a.$$

2. Формула нахождения площади треугольника, если известны две стороны a и b и синус угла γ между ними.

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

3. Формула Герона. Формула нахождения площади, если известны все три стороны a, b и c треугольника.

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр.

Приведем доказательство первой формулы.

⟦ Пусть S – площадь некоторого треугольника ABC. Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Необходимо доказать, что

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CH.$$

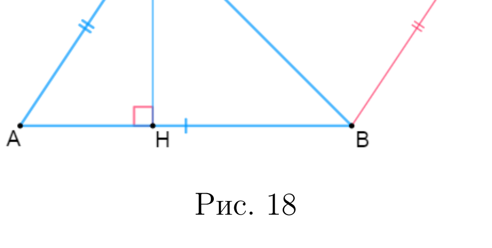


Рис. 18

Достроим до параллелограмма $ABCD$ треугольник ABC (Рис. 18).

$\triangle\ ABC = \triangle\ DCB$ по трем сторонам (DC – общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма ABC), поэтому равны их площади.

Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, иными словами: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$.]]

Геометрия Лобачевского

Очевидно, что в геометрии Лобачевского вычисление площади треугольника происходит иначе, чем в геометрии Евклида. Но прежде чем вводить формулу вычисления площади треугольника, рассмотрим формулу нахождения площади многоугольника, из которой будет выведена формула для треугольника.

$$S(F) = k\delta(F),$$

здесь F – некоторый многоугольник, k – произвольное положительное число, а $\delta(F)$ – дефект многоугольника.

Из формулы следует, что числовое значение площади многоугольника зависит от нескольких факторов:

а) от выбора единицы измерения углов или же, другими словами, от числового значения дефекта $\delta(ABC)$ треугольника;

б) от выбора постоянной величины – числа k.

Число k может быть выбрано произвольно. Однако при выбранной единице измерения углов коэффициент k определяется однозначно [3], при условии, что выбран какой-нибудь многоугольник в качестве единицы измерения.

Из вышесказанного следует, что если выбраны единицы измерения площади и единицы измерения углов, то площадь треугольника будет иметь определенное числовое значение.

В случае, когда угол измеряется радианной мерой, дефект треугольника ABC равен:

$$\delta(ABC) = \pi - \angle A - \angle B - \angle C,$$

следовательно,

$$S(ABC) = k(\pi - \angle A - \angle B - \angle C).$$

Если же взять в качестве единицы измерения площадей треугольник $A_0B_0C_0$ такой, что $\delta(A_0B_0C_0) = 1$, то по формуле нахождения площади многоугольника число k будет равно 1. В таком случае формула нахождения площади треугольника примет следующий вид:

$$S(ABC) = \pi - \angle A - \angle B - \angle C.$$

Такой выбор единиц измерения площадей и углов называется каноническим.

Из полученной формулы следует, что площадь треугольника на плоскости Лобачевского меньше π $(S(ABC) < \pi)$.

Можно сделать вывод, что в геометрии Лобачевского площадь любого треугольника при данном выборе единиц измерения площадей и углов имеет предельное значение.

Геометрия Римана

Аналогично геометрии Лобачевского в геометрии Римана существует своя формула для вычисления площади треугольника. Однако прежде рассмотрим без доказательства формулу нахождения площади двуугольника.

Определение. Двуугольник - это многоугольник с двумя углами [1].

Для вычислления площади двуугольника необходимо использовать его углы, а также радиус сферы. В таком случае, примем за Q некоторый двуугольник на сфере с радиусом R, вершинами этого двуугольника являются точки A и A', α – угол двуугольника Q, причем такой, что $\alpha < \pi$ (Рис. 19). Следовательно, величина α равняется величине двугранного угла. Ребром двугранного угла является прямая AA', в гранях этого угла которого лежат стороны двуугольника Q.

Очевидно, что площадь $S(Q)$ равна величине той части площади всей сферы, которую занимает его угол от 2π, иными словами,

$$\frac{S(Q)}{4\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

где $4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы.

Откуда следует, что $S(Q) = 2\alpha R^2$.

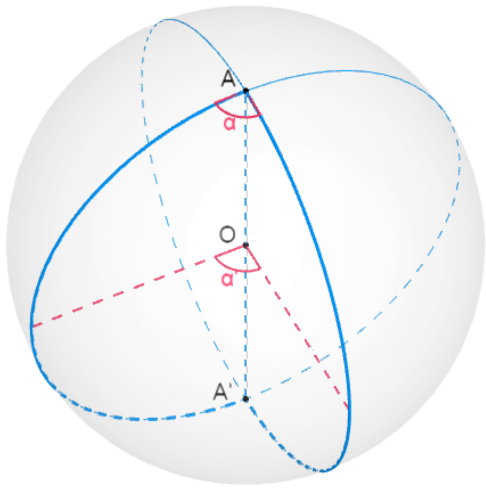


Рис. 19

Перейдем к формуле, с помощью которой можно вычислить площадь сферического треугольника. Пусть дан некоторый треугольник T, лежащий на сфере радиуса R. Обратим внимание, что площадь сферического треугольника выражается через углы α, β и γ этого треугольника.

Проведем большие окружности, на которых лежат стороны треугольника T. Эти окружности образуют на сфере три пары двуугольников с углами α, β и γ. Эти шесть двуугольников покрывают всю сферу. Отметим, что при этом треугольник T и диаметрально противоположный ему треугольник T' покрываются три раза (двуугольником из каждой пары), а остальная часть сферы покрывается двуугольниками без перекрытий. Следовательно, сумма площадей всех шести двуугольников больше площади S сферы на $2S(T)$ и $2S(T')$, то есть на $4S(T)$, так как $S(T) = S(T')$.

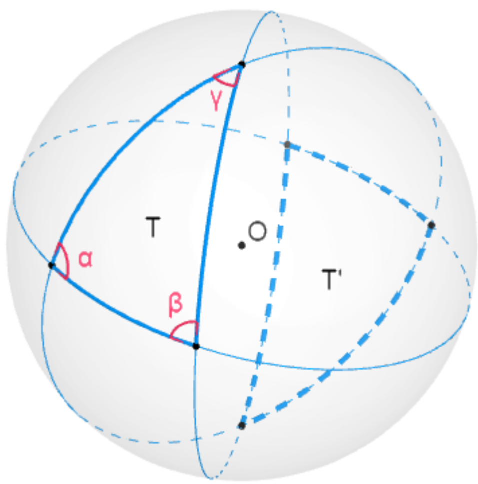


Рис. 20

Из этого факта и из формулы площади двуугольника следует, что

$$4\pi R^2 = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4S(T).$$

Преобразуем данное выражение и выразим площадь треугольника $S(T)$:

$$S(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Здесь $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется избытком треугольника и обозначается $\delta(T)$. В таком случае формула приобретает вид:

$$S(T) = \delta(T)R^2.$$

Из этой формулы можно сделать вывод, что площадь треугольника пропорциональна его избытку.

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. Доказать, что все треугольники, имеющие общее основание и одну и ту же сумму внутренних углов, равновелики, т.е. имеют одинаковую площадь.

2. Доказать, что два треугольника, у которых общее основание, а средние линии, соответствующие этим основаниям, лежат на одной прямой, равновелики.

3. Верно ли утверждение, что если два треугольника имеют равные основания и равные высоты, проведенные к этим основаниям, то они равновелики? Ответ обосновать.

Геометрия Римана

1. Доказать, что сумма сторон сферического треугольника меньше длины большой окружности.

2. Доказать, что площадь сферического треугольника равна произведению его углового избытка на квадрат радиуса сферы.

3. Найти (в квадратных метрах) площадь сферического треугольника, углы которого 90°, 60°, 45°, если этот треугольник лежит на шаре, радиус которого равен 10 м.

2.7 Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Геометрия Евклида

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C. Катет BC является противолежащим углу A, а катет AC – прилежащим к этому углу. Обозначим: $c = AB$, $a = BC$, $b = AC$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$.

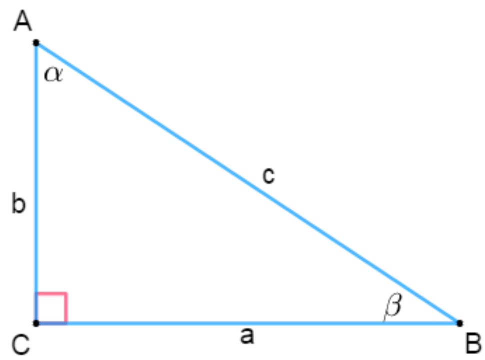


Рис. 21

Введем определения:

Определение. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе [2].

Определение. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе [2].

Определение. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету [2].

Синус, косинус и тангенс угла α обозначаются символами: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$. Приведенные ранее определения можно записать в виде формул в следующем виде:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Также можно ввести следующую формулу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

⟦ Из формул синуса и косинуса угла получаем: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$. Следовательно, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$. ⟧

Из последней формулы следует, что тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла [2].

Введем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

⟦ Из формул синуса и косинуса угла получаем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c}.$$

По теореме Пифагора: $a^2+b^2 = c^2$. Следовательно, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$. ⟧

Рассмотрим некоторые правила нахождения катета через другие элементы:

1. Правило нахождения катета через гипотенузу и острый угол.

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta;$$

$$b = c \cdot \cos\alpha = c \cdot \sin\beta.$$

1. Правило нахождения катета через второй катет и острый угол.

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \operatorname{ctg}\beta;$$

$$b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha = a \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются с помощью натуральной показательной функции e^x следующим образом [3]:

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ – гиперболический синус;

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ – гиперболический косинус;

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – гиперболический тангенс;

$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x})$ – гиперболический котангенс.

Гиперболические функции имеют те же свойства, что что и тригонометрические функции. Введем некоторые формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1;$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Геометрия Лобачевского

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C, гипотенузой $c = AB$, катетами $b = AC$, $a = BC$ и острыми углами $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$. Величины a, b, c, α и β называются элементами этого треугольника. Обратим внимание, что в отличие от геометрии Евклида, в геометрии Лобачевского, если знать два элемента прямоугольного треугольника, то можно найти остальные три.

Произведем вывод формул, с помощью которых можно, опираясь на два известный элемента прямоугольного треугольника, найти остальные три элемента.

Выполним дополнительные построения, для того чтобы вывести тригонометрические соотношения между элементами. Присоединим к прямоугольному треугольнику ABC с прямым углом C некоторую орисферу так, чтобы плоскость ABC стала касательной плоскостью для этой орисферы в точке A.

Определение. Орисферой (или предельной плоскостью), заданной лучом AA_1, называется фигура, состоящая из точки A и всех точек пространства, каждая из которых симметрична точке A относительно направленной прямой, параллельной прямой AA_1 [3].

Проведем луч AA' перпендикулярно к плоскости треугольника и рассмотрим заданную лучом AA' орисферу γ. Назовем ее орисферой, присоединенной к прямоугольному треугольнику ABC в точке A. В таком случае, плоскость ABC является касательной плоскостью к этой орисфере.

Проведем у орисферы γ оси BB' и CC'. Плоскости ABA',ACC' и BCC' пересекают орисферу γ по орициклам, которые при пересечении образуют треугольник AB_1C_1.

Определение. Орициклом (или предельной линией), заданным лучом AA_1, называется фигура, состоящая из точки A и всех точек плоскости,

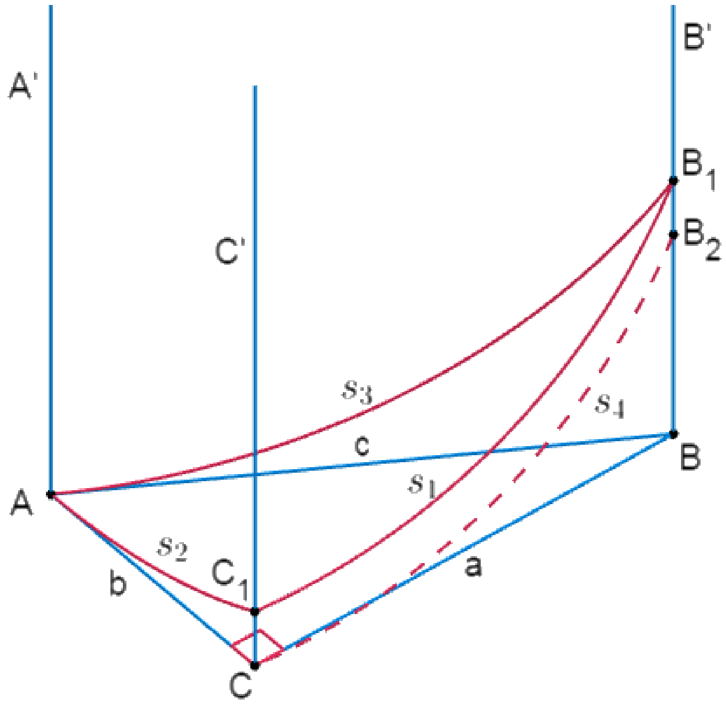


Рис. 22: Орициклический треугольник

каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой направленной прямой, параллельной AA_1 [3].

Определение. Дугой орицикла γ с концами A и B называется фигура, состоящая из точек A и B и всех точек орицикла γ, лежащих между точками A и B. Обозначается: $\smile AB/\gamma$ [3].

Так как $AA' \perp ABC$, то $ACA' \perp ABC$, из чего следует, что прямая BC, которая перпендикулярна к прямой AC, также перпендикулярна и к плоскости ACA'.

Отсюда можно сделать вывод, что $ACC' \perp BCC'$, следовательно, у орициклического треугольника AB_1C_1 угол C_1 прямой, иными словами, $\triangle\ AB_1C_1$ прямоугольный.

Проведем дугу $\smile CB_2$ орицикла, концентрическую с дугой $\smile C_1B_1$ (Рис. 22). Так как угол BCC' прямой, то прямая BC – касательная к дуге $\smile CB_2$ в точке C. При данном построении были образованы три трехвершинника $\smile AB_1/B$, $\smile AC_1/C$ и $\smile CB_2/B$.

Определение. Дуги $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ орициклов называются концентрическими дугами, если они лежат в одной плоскости и орициклы γ_1 и γ_2 являются траекториями одного и того же пучка параллельных прямых, которому принадлежат прямые A_1A_2 и B_1B_2 [3].

Определение. Трехвершинник - плоская фигура, образованная дугой $\smile AB/\gamma$ орицикла и двумя отрезками AC и BC, где AC – касательная к орициклу γ в точке A, а CB – ось этого орицикла [3].

Так как орициклический треугольник ABC является прямоугольным, то его углы: $\angle A$, равный α, и угол B, а также дуги $\smile AC_1$, $\smile C_1B_1$ и $\smile AB_1$ удовлетворяют обычным тригонометрическим соотношениям прямоугольного треугольника на плоскости Евклида.

Опираясь на этот факт, а также применив теорему о соотношениях между длинами сторон и дуги трехвершинника к трехвершенникам $\smile AB_1/B$, $\smile AC_1/C$ и $\smile CB_2/B$, выведем все основные тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

Теорема 1. (О соотношениях между длинами сторон и дуги трехвершинника). В трехвершиннике $\smile AB/C$ длины сторон $AC = u$, $BC = v$ и длина дуги $AB = s$ удовлетворяют равенствам:

$$e^{\frac{v}{k}} = \operatorname{ch}\frac{u}{k}, \tag{1}$$

$$s = \sigma \operatorname{th}\frac{u}{k}. \tag{2}$$

Здесь k – постоянная величина, σ – длина абсолютной дуги орицикла [3].

Рассмотрим также некоторые свойства концентрических дуг и основную теорему, связанную с ними:

5.1°. Отрезки, соединяющие соответствующие точки двух концентрических дуг орициклов, равны между собой [3].

5.2°. Если $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ – концентрические дуги орициклов, а A_1A_2 и B_1B_2 – общие оси орициклов γ_1 и γ_2, то $\smile A_1B_1/\gamma_1 \ > \smile A_2B_2/\gamma_2$ [3].

5.3°. Если расстояние между концентрическими дугами $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ равно расстоянию между концентрическими дугами $\smile A_1'B_1'/\gamma_1'$ и $\smile A_2'B_2'/\gamma_2'$ и $\smile A_1B_1/\gamma_1 \ = \smile A_1'B_1'/\gamma_1'$, то $\smile A_2B_2/\gamma_2 \ = \smile A_2'B_2'/\gamma_2'$. Здесь A_1A_2 и $A_1'A_2'$ – оси соответствующих орициклов [3].

Теорема 2. Отношение длин ρ_1 и ρ_2 концентрических дуг орициклов ($\rho_1 > \rho_2$) выражается показательной функцией от расстояния x между ними, то есть

$$\rho_1 : \rho_2 = e^{\frac{x}{k}}, \tag{3}$$

где k – некоторое положительное число [3].

Теорема о соотношении между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника

В первую очередь приведем доказательство теоремы, устанавливавшей связь между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника. Эта теорема является аналогом теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника в геометрии Евклида, а также она является основной теоремой.

Теорема 3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$ и катетами $a = BC$, $b = AC$ выполняется равенство

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}, \tag{4}$$

где k – радиус кривизны пространства [3].

⟦ В точке A к треугольнику ABC присоединим орисферу и воспользуемся построением, которое выполнено на рисунке 22.

В таком случае, дуги $\smile CB_2$ и $\smile C_1B_1$ – это концентрические дуги орициклов, а угол BCC' прямой, по той причине, что $ACC' \perp BCC'$. Из этого можно сделать вывод, что CB является касательной к дуге $\smile CB_2$ в точке касания C.

Следовательно, $B - B_2 - B_1$, то есть $BB_1 = BB_2 + B_2B_1$.

По свойству 5.1° $B_2B_1 = CC_1$, поэтому $BB_1 = BB_2 + \mathrm{CC}_1$.

Применим к трехвершинникам $\smile AB_1/B$, $\smile AC_1/C$ и $\smile CB_2/C$ формулу (1) теоремы о соотношениях между длинами сторон и дуги трехвершинника:

$$e^{\frac{BB_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}, \quad e^{\frac{CC_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}, \quad e^{\frac{BB_2}{k}} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}.$$

Но $e^{\frac{BB_1}{k}} = e^{\frac{CC_1}{k}+\frac{BB_2}{k}} = \frac{CC_1}{k}\cdot\frac{B_2B}{k}$. Подставив в эту формулу значения $\frac{BB_1}{k}$, $\frac{CC_1}{k}$ и $\frac{B_2B}{k}$, выведенные в предыдущих соотношениях, получаем четвертое (4) равенство. ⟧

Теоремы о соотношениях между сторонами и углами прямоугольного треугольника

В первую очередь докажем теорему о соотношениях между одним из острых углов и сторонами прямоугольного треугольника.

Теорема 4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетами $a = BC$, $b = AC$ и острым углом $\alpha = \angle A$ выполняются равенства

$$\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos\alpha, \tag{5}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

$$\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k}, \tag{8}$$

где k – радиус кривизны пространства. [3]

⟦ Для доказательства приведенных в теореме равенств необходимо воспользоваться тем фактом, что на орисфере γ, которая присоединена к треугольнику ABC в точке A, имеет место геометрия Евклида, следовательно, в орициклическом треугольнике AB_1C_1 (Рис. 22), у которого $\angle C_1$ прямой, $\angle A = \alpha$, $\smile AB_1 = s_3$, $\smile AC = s_2$, $\smile B_1C_1 = s_1$, действительны обычные тригонометрические соотношения. А именно:

$$s_2 = s_3\cos\alpha, \quad s_1 = s_3\sin\alpha, \quad s_1 = s_2\operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$

а) Доказательство равенства (5). Применим формулу (2) теоремы 1 (п. 3.7) к трехвершинникам $\smile AC_1/C$ и $\smile AB_1/B$. Таким образом получим, что $s_2 = \sigma\operatorname{th}\frac{b}{k}$, $s_3 = \sigma\operatorname{th}\frac{c}{k}$. Подставим эти значения в первое из равенств (9), получим равенство (5): $\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos\alpha$.

б) Доказательство равенства (6). В связи с тем, что дуги $s_1 =\smile B_1C_1$ и $s_4 =\smile CB_2$ являются концентрическими, по теореме 2 (п. 2.7) $s_4 : s_1 = e^{\frac{CC_1}{k}}$. Применим формулы (1) и (2) теоремы 1 (п. 3.7) к трехвершинникам $\smile AC_1/C$ и $\smile CB_2/B$, в результате чего получается, что: $e^{\frac{CC_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $s_4 = \sigma\operatorname{th}\frac{a}{k}$, поэтому

$$\frac{s_4}{s_1} = \frac{\sigma\operatorname{th}\frac{a}{k}}{s_1} = e^{\frac{CC_1}{k}}.$$

Поэтому, опираясь на предыдущую теорему:

$$s_1 = \sigma \operatorname{th}\frac{a}{k} : \operatorname{ch}\frac{b}{k} = \frac{\sigma \operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = \frac{\sigma \operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{c}{k}}.$$

Применим формулу (2) теоремы 1 (п. 3.7) к трехвершиннику $\smile AB_1/B$, в результате чего получим: $s_3 = \sigma \operatorname{th}\frac{c}{k}$.

После подстановки значений s_1 и s_2 во второе из равенств (9), получим равенство (6): $\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha$.

в) Доказательство равенства (7). Обратим внимание на тот факт, что при выводе формул (2) и (3) было установлено, что

$$s_2 = \sigma \operatorname{th}\frac{b}{k}, \quad s_1 = \sigma\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{c}{k}}.$$

После подстановки этих значений в третье из равенств (9), получим равенства

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha$$

или

$$th\frac{a}{k} = \frac{ch\frac{c}{k}}{ch\frac{a}{k}} \cdot \frac{sh\frac{b}{k}}{ch\frac{b}{k}} \cdot tg\alpha.$$

Исходя из вышесказанного, учитывая теорему 3, получим равенство (7): $\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha$.

г) Доказательство равенства (8). Запишем формулу (5) в следующем виде: $\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha$. По теореме 3 $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$. Подставим это значение в левую часть предыдущего равенства, тем самым получим искомое соотношение (8): $\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k}$.]]

Следствие. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетами $a = BC$, $b = AC$ и острым углом $\beta = \angle B$ выполняются равенства [3]

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos\beta, \quad \operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta, \quad \operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\beta.$$

формулы из следствия можно получить из равенств (5), (6) и (7), если в них произвести замену катетов a, b и угла α соответственно на b, a и угол β.

Перейдем к доказательству теоремы о соотношениях между двумя острыми углами и стороной прямоугольного треугольника.

Теорема 5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетом $a = BC$ и острыми углами $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$ выполняются равенства

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \tag{10}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta, \tag{11}$$

где k – радиус кривизны пространства [3].

⟦ а)Доказательство равенства (10). Произведем почленное умножение равенства (7) на третье из равенств следствия из теоремы 4, таким образом получим:

$$\operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно, опираясь на теорему 3, получим равенство (10): $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

б)Доказательство равенства (11). Произведем почленное умножение равенства (7) на второе из равенств следствия из теоремы 4. Сократим соответствующие члены и получим:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{a}{k}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta.$$

Следовательно, опираясь на равенство (6), получим равенство (11): $\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta$. ⟧

Формулы (4)–(11) – это основные формулы тригонометрии прямоугольного треугольника геометрии Лобачевского. Соотношение (4) соответствует теореме Пифагора в геометрии Евклида; соотношения (5) и (6) соответствуют известным теоремам обычной тригонометрии.

Геометрия Римана

Сферический треугольник по своим свойствам сильно отличается от плоского, следовательно, применить к нему обычные формулы тригонометрии (на плоскости) нельзя.

Рассмотрим формулы тригонометрии, применимые для сферического прямоугольного треугольника. И прежде всего отметим, что прямоугольным называется такой сферический треугольник, у которого хотя бы один угол равен 90°. Сторона, противолежащая углу равному 90°, называется гипотенузой.

Теорема Пифагора для сферического треугольника

Теорема 6. Косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов.

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}.$$

⟦ Докажем данную теорему при помощи трехгранного угла $OA_1B_1C_1$ со сторонами OA_1, OB_1 и OC_1 и вершиной в точке O (Рис. 23).

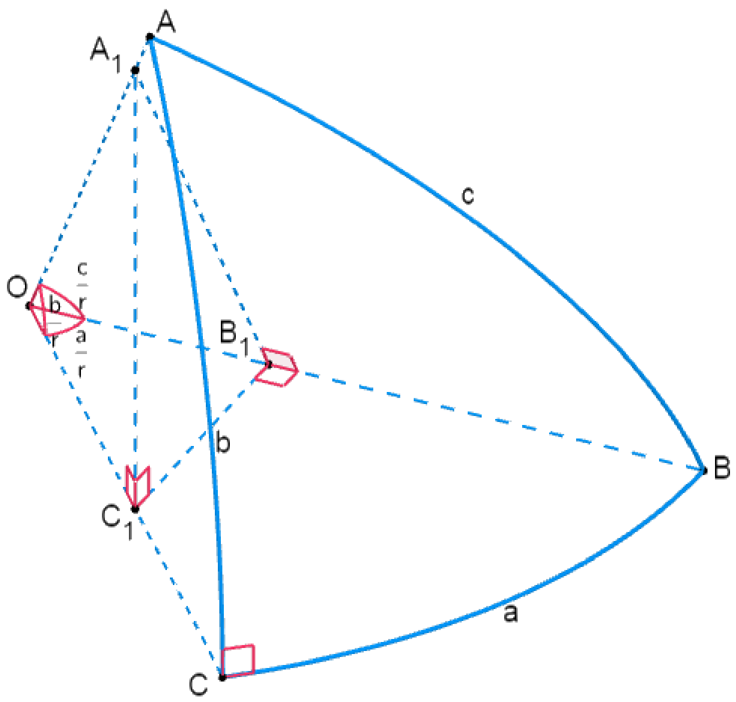


Рис. 23

Плоские углы этого угла равны сторонам сферического треугольника, а именно:

$$A_1OC_1 = b, \quad C_1OB_1 = a, \quad A_1OB_1 = c.$$

Двугранный угол между гранями A_1OC_1 и C_1OB_1 равен 90°.

Пересечем этот трехгранный угол плоскостью $A_1B_1C_1$ перпендикулярно OB_1. Тогда углы A_1C_1O и $A_1C_1B_1$ будут прямыми.

Заметим, что
$$\frac{OB_1}{OA_1} = \cos\angle A_1OC_1 = \cos\frac{c}{r},$$
$$\frac{OC_1}{OA_1} = \cos\angle A_1OB_1 = \cos\frac{b}{r},$$
$$\frac{OB_1}{OC_1} = \cos\angle C_1OB_1 = \cos\frac{a}{r}.$$
Отсюда
$$\cos\frac{c}{r} = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_1}{OC_1}\cdot\frac{OC_1}{OA_1} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}.$$
Теорема доказана. ⟧

Правило Непра для прямоугольного треугольника

Прямоугольный сферический треугольник, если исключить из него прямой угол, состоит из пяти частей: двух катетов, гипотенузы и двух оставшихся углов.

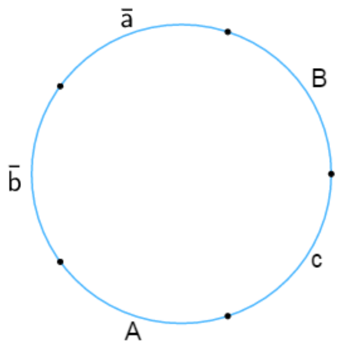


Рис. 24

Расположим эти части по кругу (Рис. 24), где катеты запишем в виде $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Такая запись означает дополнение угла a и угла b до прямого угла. Любую из этих частей можно назвать «средняя часть», тогда две другие соседние части будут называться «смежные части», а две оставшиеся – «противоположные части».

Правило Непра 1. Косинус любой средней части равен произведению котангенсов смежных частей [8].

Приведем несколько примеров, предварительно отметив, что $\bar{a} = 90° - a$, $\bar{b} = 90° - b$. Тогда
$$\cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} A;$$

$$\cos A = \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} \bar{b} = \operatorname{ctg} c \operatorname{tg} b;$$

$$\cos B = \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} \bar{a} = \operatorname{ctg} c \operatorname{tg} a;$$

$$\cos \bar{a} = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} \bar{b} \quad \Rightarrow \quad \sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B;$$

$$\cos \bar{b} = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} A.$$

Замечание. Здесь и далее для удобства радиус сферы $r = 1$.

⟦ Произведем доказательство третьего равенства Правила Непра 1, а именно $\cos B = \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} \bar{a}$.

При доказательстве будем использовать трехгранный угол с рисунка 23. Заметим, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1O} = \operatorname{tg} \angle A_1OB_1 = \cos c,$$

$$\frac{C_1B_1}{B_1O} = \operatorname{tg} \angle B_1OC_1 = \cos a,$$

$$\frac{C_1B_1}{A_1B_1} = \cos \angle A_1B_1C_1 = \cos B.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} a = \frac{C_1B_1}{B_1O} = \frac{A_1B_1}{B_1O} \cdot \frac{C_1B_1}{A_1B_1} = \operatorname{tg} c \cos B.$$

Следовательно,

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \operatorname{ctg}(90^\circ - a) \operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} \mathrm{c} \operatorname{ctg} \bar{a}.$$

Аналогично доказываются остальные формулы. ⟧

Правило Непра 2. Косинус любой средней части равен произведению синусов противоположных частей [8].

Приведем примеры

$$\cos c = \sin \bar{a} \sin \bar{b} = \cos a \cos b;$$

$$\cos A = \sin B \sin \bar{a} = \sin B \cos a;$$

$$\cos B = \sin A \sin \bar{b} = \sin A \cos b;$$

$$\cos \bar{a} = \sin c \sin A \quad \Rightarrow \quad \sin a = \sin c \sin A;$$

$$\cos \bar{b} = \sin c \sin B \quad \Rightarrow \quad \sin b = \sin c \sin B.$$

⟦ Докажем, что $\cos \bar{b} = \sin c \sin B$.

Для доказательство используем тот же трехгранный угол, что и при доказательстве теоремы 6 (Рис. 23). Заметим, что

$$\frac{A_1C_1}{OA_1} = \sin\angle A_1OC_1 = \sin b,$$

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \sin\angle A_1OB_1 = \sin c,$$

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \sin\angle A_1B_1C_1 = \sin B.$$

Отсюда

$$\sin B = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{A_1C_1}{OA_1}\cdot\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{A_1C_1}{OA_1} : \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\cos\bar{b}}{\sin c}.$$

Следовательно,

$$\cos\bar{b} = \sin c\sin B.$$

Аналогично доказываются остальные 4 формулы. ⟧

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A = 30°$, $\beta = \angle B = 30°$. Найти a, b, c.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $a = \frac{1}{2}k$, $b = \frac{1}{2}k$. Найти c, α, β.

3. На стороне k угла hk с вершиной O отмечена точка A и проведен луч AB, параллельный лучу h. Доказать, что на луче k существует одна точка, для которой $\angle OAB = 90°$.

Геометрия Римана

1. Доказать, что $\cos\bar{b} = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg}\bar{a}$.

2. Доказать, что отношение тангенса одного катета прямоугольного сферического треугольника к тангенсу противолежащего угла равно синусу другого катета.

3. Доказать, что, когда стороны треугольника малы по сравнению с радиусом окружности, сферическая теорема Пифагора переходит в обычную.

2.8 Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике

Геометрия Евклида

Прежде чем перейти к знакомым из школьного курса геометрии теоремам синусов и косинусов , введем теорему о нахождении площади треугольника по двум сторонам и синусу угла между ними.

Теорема 1. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними [2].

⟦ Пусть в треугольнике ABC, $BC = a$, $CA = b$ и S − площадь этого треугольника. Необходимо доказать, что $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

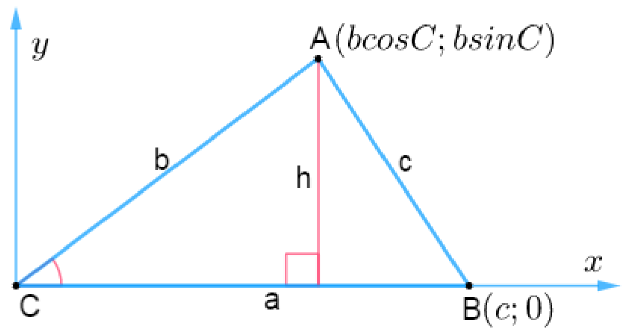


Рис. 25

Введем с началом в точке C систему координат так, чтобы точка B лежала на положительной полуоси Cx, а точка A имела положительную ординату (Рис. 25).

Площадь треугольника ABC вычисляется по формуле $S - \frac{1}{2}ah$, где h является высотой треугольника, проведенной к стороне a. Однако при этом длина h равна ординате точки A, что значит, что $h = b\sin C$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. ⟧

Теоремы синусов и косинусов

Теорема 2 (теорема синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов [2].

⟦ Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Произведем доказательство выражения:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Опираясь на теорему о площади треугольника, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, $S = \frac{1}{2}ac\sin B$.

Из первых двух равенств получаем $S = \frac{1}{2}ab\sin C = S = \frac{1}{2}ab\sin C$, откуда $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

Точно также из второго и третьего равенств следует, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Следовательно, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. ⟧

Замечание. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности [2].

Иными словами, для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Теорема 3 (теорема косинусов). Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними [2].

⟦ Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Необходимо доказать, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Введем систему координат такую, что A будет являться началом координат, а точка B лежать при этом на положительной полуоси Ax, в свою очередь точка C должна иметь положительную ординату (Рис. 26).

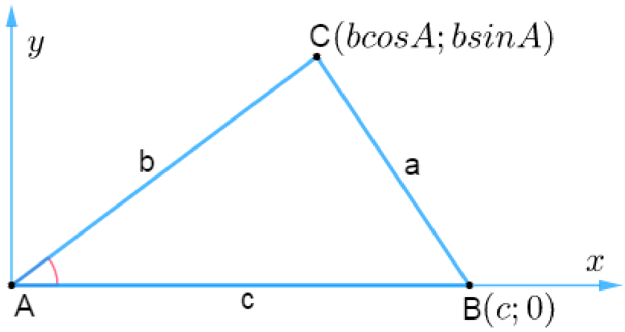


Рис. 26

В таком случае, точка B будет иметь координаты $(c;0)$, а точка C – координаты $(b\cos A; b\sin A)$. Опираясь на формулу формуле расстояния между двумя точками, получаем:

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A =$$

$$= b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Теорема доказана. ⟧

Геометрия Лобачевского

Теоремы синусов и косинусов

Наряду с теоремами косинусов и синусов геометрии Евклида в геометрии Лобачевского существуют аналоги этих теорем. Приведем доказательство каждой из них.

Теорема 4 (теорема косинусов). В произвольном треугольнике ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ и углом $\alpha = \angle A$ выполняется соотношение [3]

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha. \tag{12}$$

⟦ При $\alpha = 90^\circ$ равенство (12) напрямую следует из теоремы 4 (п. 2.8), поэтому приведем доказательство этой теоремы при условии, что $\alpha \neq 90^\circ$.

Проведем в треугольнике ABC высоту CH и введем обозначения: $AH = d$, $CH = h$. В таком случае возможны два случая:

а) Пусть точка H принадлежит лучу AB. Если точка H совпадает с точкой B, то $\angle B = 90°$, следовательно, треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой $AC = c$.

Произведем преобразование первой части равенства (12), путем подстановки в него значения $\operatorname{ch}\frac{c}{k}$ из теоремы 3 (п. 3.7) и значения $\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha$ из формулы (8) теоремы 4 (п. 3.7):

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}(\operatorname{ch}^2\frac{b}{k} - \operatorname{sh}^2\frac{b}{k}) = \operatorname{ch}\frac{a}{k}.$$

Таким образом, если совпадают точки B и H, то равенство (12) выполняется.

Пусть точки B и H не совпадают. Применим теорему 3 (п. 2.7) к треугольнику BCH: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d-c}{k}$, если точка H лежит между точками A и B (Рис. 27, а), и $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c-d}{k}$, если точка B лежит между точками A и H (Рис. 27, б). Но $\operatorname{ch}\frac{d-c}{k} = \operatorname{ch}\frac{c-d}{k}$ по формуле (2), в связи с чем второе равенство полностью совпадает с первым. Воспользуемся формулой (4), тогда первое равенство примет вид: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} - \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}$. При этом по теореме 3 $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, а согласно формуле (8) теоремы 4 (п. 2.7) имеет место следующее соотношение: $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\alpha$. При подстановке полученных значений в правую часть предыдущего равенства, можно получить соотношение (12).

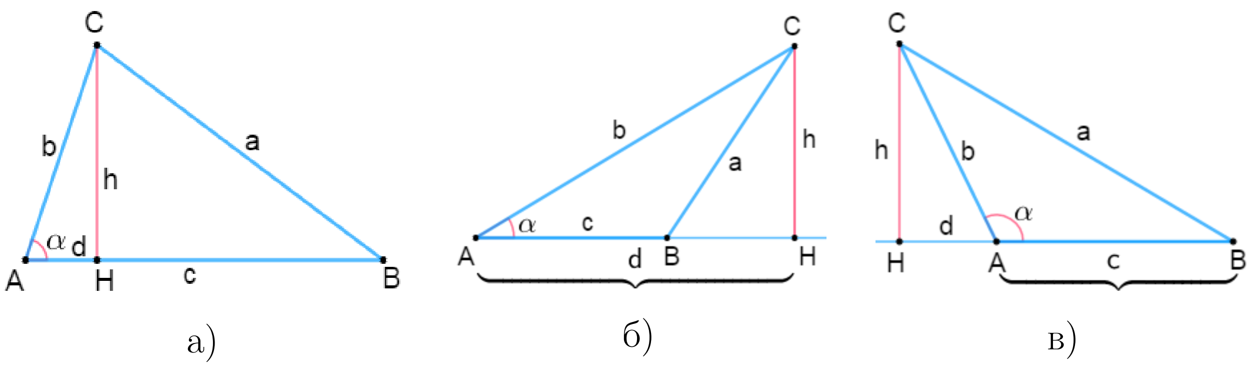


Рис. 27

б) Пусть точка H принадлежит продолжению луча AB. В таком случае, в прямоугольном треугольнике BCH $BH = c+d$, $CH = h$, $BC = a$, в связи с чем согласно теореме 3 (п. 3.7) $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c+d}{k}$.

Воспользуемся формулой (4), запишем равенство в виде:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} + \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}.$$

Аналогично предыдущему пункту имеем равенства: $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos(180^\circ - \alpha)$.

При подстановке полученных значений в правую часть предыдущего равенства, можно получить соотношение (12). ⟧

Теорема 5 (теорема синусов). В произвольном треугольнике ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ и углами $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$ выполняются соотношения [3]

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}. \tag{13}$$

⟦ Рассмотрим два случая.

а) Первый случай, когда один из углов A или B прямой, к примеру, $\beta = 90^\circ$. По формуле (6) теоремы 4 (п. 3.7) $\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\alpha$. Но $\sin\beta = 1$, поэтому $\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta}$.

б) Второй случай, когда $\alpha \neq 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$. Проведем высоту $CH = h$ в треугольнике ABC и применим формулу (6) теоремы 4 (п. 3.7) к треугольниками AHC и BHC (Рис. 27): $\operatorname{sh}\frac{h}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\alpha$, $\operatorname{sh}\frac{h}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin\beta$. Отсюда, исключив $\operatorname{sh}\frac{h}{k}$, получаем искомое равенство: $\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta}$.

Доказательство второго равенства $\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}$ происходит аналогичным образом. ⟧

Тригонометрические соотношения между сторонами и углами треугольника

Приведем доказательство еще одной теоремы, позволяющей, наряду с теоремами синусов и косинусов, решить произвольный треугольник.

Теорема 6. В произвольном треугольнике ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$ и углами $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$ выполняются соотношения [3]

$$\operatorname{cth}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\cos\gamma + \operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma, \tag{14}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma. \tag{15}$$

⟦Доказательство равенства (14). Исходя из теоремы косинусов,

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}-\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\gamma.$$

А исходя из теоремы синусов $\operatorname{sh}\frac{c}{k}=\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Произведем подстановку этих значений в равенство (12). Проведем группировку членов и применим формулу $\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1$, таким образом получим следующую формулу:

$$-\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{sh}^2\frac{b}{k}=-\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\gamma-\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma.$$

После деления последнего равенства на $\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}$, получим соотношение (14). ⟧

Тригонометрические соотношения в абсолютной единице длин отрезков

Напомним определение радиуса кривизны пространства Лобачевского – это отрезок, длина которого равна длине абсолютной дуги орицикла [3]. Если радиус кривизны пространства принять за единицу измерения длины, то его принято называть абсолютной единицей длин отрезков [3]. Исходя из теоремы о выборе единицы измерения, произведем выбор этой единицы измерения, к примеру, $k=1$. Благодаря такому выбору единицы измерения, все тригонометрические формулы из неевклидовой геометрии Лобачевского заметно упрощаются. А именно:

1. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Пусть ABC – прямоугольный треугольник, $c=AB$ – гипотенуза, $b=AC$ и $a=BC$ – катеты, $\alpha=\angle A$ и $\beta=\angle B$ – острые углы. Опираясь на теоремы 3, 4 и 5 (п. 2.7) получаем.

$$\operatorname{ch}c=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b, \tag{16}$$

$$\operatorname{th}b=\operatorname{th}c\cos\alpha, \tag{17}$$

$$\operatorname{sh}a=\operatorname{sh}c\sin\alpha, \tag{18}$$

$$\operatorname{th}a=\operatorname{sh}b\operatorname{tg}\alpha, \tag{19}$$

$$\operatorname{sh}c\cos\alpha=\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a, \tag{20}$$

$$\operatorname{ch}c=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \tag{21}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta. \tag{22}$$

2. Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике

Пусть ABC – произвольный треугольник, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$. Опираясь на теоремы 4 (косинусов) и 5 (синусов), получаем.

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha, \tag{23}$$

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}. \tag{24}$$

Согласно теореме 6

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos\gamma + \operatorname{ctg}\alpha \sin\gamma, \tag{25}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma. \tag{26}$$

Геометрия Римана

Основные теоремы произвольного сферического треугольника

Рассмотрим теоремы синусов и косинусов сферического треугольника. а также приведем их доказательства.

Теорема 7 (теорема косинусов). Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других его сторон плюс произведение синусов тех же сторон на косинус угла между ними [8].

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A. \tag{27}$$

⟦ Рассмотрим сферический треугольник ABC, образованный на сфере радиуса r, с центром в точке O (Рис. 28).

Проведем из вершины A к сторонам b и с касательные AD и AE до их пересечения с продолжениями радиусов OC и OB, лежащих в одной плоскости с соответствующей касательной. Соединим точки пересечения D и E. Таким образом, получим два плоских треугольника ADE и ODE с общей стороной DE.

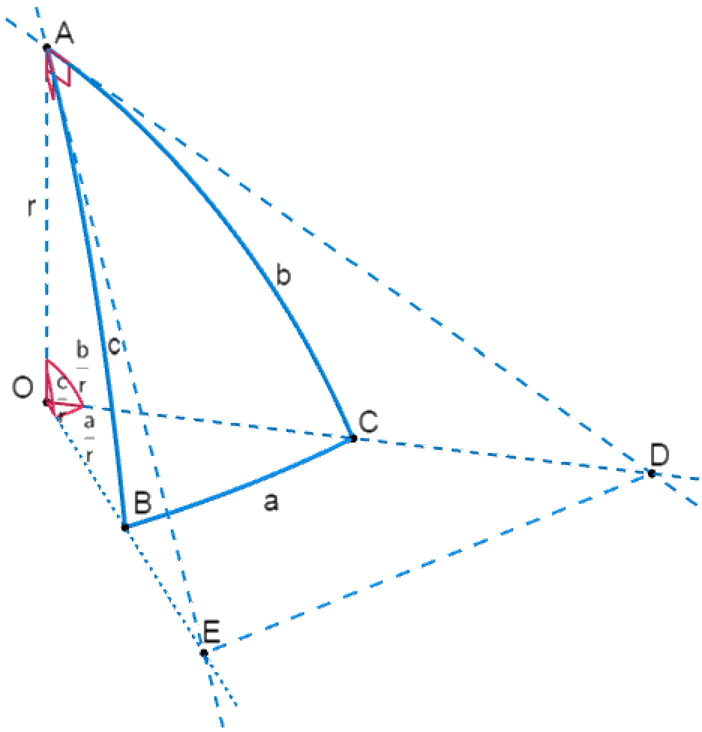


Рис. 28

Применим к этим треугольникам теорему косинусов из геометрии Евклида:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos\frac{a}{r};$$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A.$$

Вычтем из второго равенства первой и получим:

$$2OD \cdot OE \cos\frac{a}{r} = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 + 2AD \cdot AE \cos A. \qquad (28)$$

Из плоских прямоугольных треугольников OAE и OAD следует, что:

$$OD^2 - AD^2 = r^2, \quad OE^2 - AE^2 = r^2.$$

$$AD = r \operatorname{tg}\frac{b}{r}, \quad AE = r \operatorname{tg}\frac{c}{r}.$$

Следовательно,

$$OD = \frac{r}{\cos\frac{b}{r}}, \quad OE = \frac{r}{\cos\frac{c}{r}}.$$

Подставим эти соотношения в формулу (28) и произведем соответствующие преобразования.

$$\frac{2r^2\cos\frac{a}{r}}{\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}} = 2r^2 + 2r^2 \operatorname{tg}\frac{b}{r}\operatorname{tg}\frac{c}{r}\cos A;$$

$$\frac{\cos\frac{a}{r}}{\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}} = 1 + \operatorname{tg}\frac{b}{r}\operatorname{tg}\frac{c}{r}\cos A;$$

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{b}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A.$$

Теорема доказана. ⟧

Рассмотрим далее теорему синусов для сферического треугольника геометрии Римана.

Теорема 8 (теорема синусов). Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов; или отношение синуса стороны сферического треугольника к синусу противолежащего угла есть величина постоянная [8].

⟦ Используем теорему косинусов, из формулы (27) выразим $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Возведем обе части получившегося выражения в квадрат, а также вычтем каждую часть из единицы.

$$1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r} - (\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r})^2}{\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}.$$

Следовательно,

$$\sin^2 A = \frac{(1 - \cos^2\frac{b}{r})(1 - \cos^2\frac{c}{r}) - (\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r})^2}{\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}.$$

Раскроем скобки и разделим обе части последнего выражения на $\sin^2\frac{a}{r}$:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\frac{a}{r}} = \frac{1 - \cos^2\frac{a}{r} - \cos^2\frac{b}{r} - \cos^2\frac{c}{r} + 2\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}.$$

Последнее равенство относительно a, B и с является абсолютно симметричным . В связи с чем можем произвести замену A на B, a на b и A на C, a на c:

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2\frac{b}{r}} = \frac{1 - \cos^2\frac{a}{r} - \cos^2\frac{b}{r} - \cos^2\frac{c}{r} + 2\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}.$$

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2\frac{c}{r}} = \frac{1 - \cos^2\frac{a}{r} - \cos^2\frac{b}{r} - \cos^2\frac{c}{r} + 2\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}.$$

Из вышесказанного можно сделать вывод, что

$$\frac{\sin^2 \frac{a}{r}}{\sin^2 A} = \frac{\sin \frac{b}{r}}{\sin^2 B} = \frac{\sin \frac{c}{r}}{\sin^2 C} = const.$$

Теорема доказана. ⟧

Приведем формулу, которую называют формулой пяти элементов.

Теорема 9. Произведение синуса стороны на косинус прилежащего угла равняется произведению синуса другой стороны, ограничивающей прилежащий угол, на косинус третьей стороны минус произведение косинуса стороны, ограничивающей прилежащий угол, на косинус третьей стороны и на косинус угла, противолежащего первой стороне [8].

$$\sin \frac{a}{r} \cos B = \sin \frac{c}{r} \cos \frac{b}{r} - \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \cos A.$$

⟦ Воспользуемся теоремой косинусов.

$$\cos \frac{b}{r} = \cos \frac{c}{r} \cos \frac{a}{r} + \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A.$$

Подставим в первое равенство вместо $\cos \frac{a}{r}$ правую часть второго равенства.

$$\cos \frac{b}{r} = \cos \frac{c}{r} (\cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A) + \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

Раскроем скобки произведем преобразования:

$$\cos \frac{b}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos^2 \frac{c}{r} + \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A + \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

$$\cos \frac{b}{r} (1 - \cos^2 \frac{c}{r}) = \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A + \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

$$\cos \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} = \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A + \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

Сократим все выражение на $\sin \frac{c}{r}$:

$$\cos \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} = \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \cos A + \sin \frac{a}{r} \cos B.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \frac{a}{r} \cos B = \sin \frac{c}{r} \cos \frac{b}{r} - \cos \frac{c}{r} \sin \frac{b}{r} \cos A.$$

Теорема доказана. ⟧

Теоремы 7, 8 и 9 для сторон и углов сферического треугольника являются основными. Из этих теорем можно получить другие формулы сферического треугольника.

Вопросы и задачи к параграфу

Геометрия Лобачевского

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC даны углы $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$. Найти стороны треугольника.

2. Доказать, что две стороны треугольника равны тогда и только тогда, когда противолежащие углы равны.

3. Доказать, что против большей стороны треугольника лежит больший угол и обратно: против большего угла лежит большая сторона.

Геометрия Римана

1. Доказать, что $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r}$ (вторая теорема косинусов).

2. Доказать, что $\operatorname{ctg} B = \sin\frac{c}{r}\operatorname{ctg}\frac{b}{r}$.

3. Доказать, что отношение синуса стороны сферического треугольника к синусу противолежащего угла есть величина постоянная.

Список литературы

[1] Александров А.Д. Стереометрия. геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – Висагинас: Alfa, 1998. – 576 с.

[2] Атанасян Л.С. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атансян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – 10-е изд. – Москва: Просвещение, 2019. – 383 с.:ил.

[3] Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: учебное пособие / Л.С. Атанасян. – 3-е изд.– Москва: Лаборатория знаний, 2017. – 467 с.

[4] Атанасян С.Л. Геометрия 2 : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — эл. изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2015. — 547 с.

[5] Атанасян С.Л. Элективные курсы по математике и организация самостоятельной деятельности учащихся. / С.Л. Атанасян, Н.Н. Кузуб // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. – 2014. – № 4. – С. 150-156.

[6] Захаров В.Д. Тяготение: от Аристотеля до Эйнштейна: учебное пособие / В.Д. Захаров. – 3-е изд. (эл.) – Москва: Лаборатория знаний, 2015. – 281 с.

[7] Макеев Н.Н. Творец неевклидовой геометрии (к 185-летию открытия геометрии Лобачевского) / Н.Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 92-101.

[8] Мордовцев С.М. Конспект лекций по курсу «Сферическая геометрия и тригонометрия» / С.М. Мордовцев, А.И. Колосов, А.В. Якунин; Харьков нац. ун-т гор. хоз-ва им. А.Н. Бекетова. – Харьков: ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2016. – 79 с.

[9] Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского: учебное пособие / В.В. Прасолов – 4-е изд. – Москва: МЦНМО, 2014. – 88 с.

[10] Совертков П.И. Справочник по элементарной математике: учебное пособие / П.И. Совертков. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 404 с.

[11] Сосинский А.Б. Геометрии / Перевод с англ. Б.Р. Френкина. – Москва: МЦНМО, 2017. – 263 с.

[12] Старова О.А. Геометрия Римана / О.А. Старова // Математика. Все для учителя! – 2012. – № 12. – С. 28-30.

[13] Шафаревич И.Р. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие / И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с.