

В.Т. Д у б р о в и н

**ЛЕКЦИИ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

часть II

Казань-2009

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Глава I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

§1.1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДЕЙСТВИЯ С РЯДАМИ.

Пусть задана числовая последовательность (x_n) .

1⁰. Выражение $x_1 + x_2 + \dots$ (или короче $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_k x_k$, $\sum x_k$) называется рядом (числовым).

2⁰. Числа x_k называются членами ряда.

3⁰. Числа $S_n = x_1 + \dots + x_n$, $n = 1, 2, \dots$, называются частичными суммами ряда $\sum x_k$.

4⁰. Ряд $x_1 + x_2 + \dots$ называется сходящимся, если сходится последовательность (S_n) его частичных сумм (в противном случае ряд называется расходящимся); число $S = \lim S_n$ называется суммой ряда, при этом используется запись $S = x_1 + x_2 + \dots = \sum x_k$.

Примеры. 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ называется гармоническим. Он расходится, так как для последовательности $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, не существует $\lim S_n$. Действительно, для (S_n) нарушается условие критерия Коши сходимости числовых последовательностей: пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, N -произвольно, $n = N + 1$, $m = 2N + 2$, тогда

$$|S_{N+1} - S_{2N+2}| = \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2}.$$

2. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ - расходится, так как его частичные суммы S_n будут принимать только два значения попеременно 1 и 0.

Теорема. Если ряды $\sum x_k$ и $\sum y_k$ сходятся, то сходятся ряды $\sum (x_k \pm y_k)$, $\sum \lambda x_k$ (здесь $\lambda \in \mathbf{R}$), причем $\sum \lambda x_k = \lambda \sum x_k$, $\sum (x_k \pm y_k) = \sum x_k \pm \sum y_k$.

Доказательство 1. $\sum \lambda x_k = \lim_n \left(\sum_1^n \lambda x_k \right) = \lambda \lim_n \sum_1^n x_k = \lambda \sum x_k$.

2. $\sum (x_k \pm y_k) = \lim_n \left(\sum_1^n (x_k \pm y_k) \right) = \lim_n \sum_1^n x_k \pm \lim_n \sum_1^n y_k = \sum x_k \pm \sum y_k$.

Замечание. 1. Из сходимости ряда $\sum (x_k \pm y_k)$, вообще говоря, не следует сходимость рядов $\sum x_k$, $\sum y_k$. Например, ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ сходится (все члены равны 0), но выражение $\sum_1^\infty 1 - \sum_1^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

2. Из сходимости ряда $\sum \lambda x_k$, $\lambda \neq 0$, следует сходимость ряда $\sum x_k$. Действительно, если сходится ряд $\sum \lambda x_k$, то существует $\lim_n \sum_1^n \lambda x_k = S \Rightarrow$

$\lim_n \sum_1^n \lambda x_k = \lambda \lim_n \sum_1^n x_k = S \Rightarrow$ Должен существовать $\lim_n \sum_1^n x_k$, т.е. ряд $\sum x_k$ - сходится. Таким образом, ряды $\sum x_k$, $\sum \lambda x_k$ ведут себя одинаково.

§1.2 НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Теорема 1 (Критерий Коши). Ряд $\sum x_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N \forall p \in \mathbf{N} (|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon)$.

Доказательство. Для сходимости ряда нужно, чтобы сходилась последовательность его частичных сумм (S_n) . По критерию Коши для числовых последовательностей для этого необходимо и достаточно $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N \forall p \in \mathbf{N} (|S_n - S_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N \forall p \in \mathbf{N} (|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon)$.

Теорема доказана.

Замечание к критерию Коши. 1. Из критерия Коши (если ряд $\sum x_k$ сходится) следует при $p = 1$, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall k > N (|x_k| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_k x_k = 0$. Заметим также, что условие $\lim_k x_k = 0$ является необходимым, но не достаточным (пример - гармонический ряд).

2. Изменение конечного числа членов ряда $\sum x_k$ не влияет на его сходимость, хотя сумма его может и изменяться. Справедливость данного

замечания следует из того, что для рядов $\sum_1^\infty x_k$ и $\sum_n^\infty x_k$ условие критерия Коши формулируется одинаково.

Теорема 2. Ряд $\sum x_k$ с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство. Пусть ряд $\sum x_k$ сходится $\Rightarrow$ существует $\lim_n \sum_1^n x_k$.
 $\Rightarrow$ последовательность $(S_n) = (\sum_1^n x_k)$ - ограничена. Обратно, пусть последовательность (S_n) - ограничена. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей числовой последовательностью. Таким образом, последовательность (S_n) - ограничена и монотонна. $\Rightarrow$ Существует $\lim_n S_n$, т.е. ряд $\sum x_k$ сходится. Теорема доказана.

§1.3 ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И СРАВНЕНИЯ РЯДОВ

Теорема 1. Для сходимости ряда $\sum x_k$ достаточно сходимости ряда $\sum |x_k|$.

Доказательство. Если ряд $\sum |x_k|$ сходится, то для него выполняется условие критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N \forall p \in \mathbf{N} (|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon). \quad (1)$$

Так как $|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}|$, то из (1) следует справедливость условия критерия Коши для ряда $\sum x_k$, а следовательно ряд $\sum x_k$ сходится.

Теорема 2. Пусть $\sum x_k, \sum y_k$ - ряды с неотрицательными членами.

1. Если $x_k \leq y_k, k \in \mathbf{N}$, то из сходимости $\sum y_k$ следует сходимость $\sum x_k$, а из расходимости $\sum x_k$ следует расходимость $\sum y_k$.
2. Если $\lim_k (x_k/y_k) = A > 0$, то оба ряда $\sum x_k, \sum y_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Очевидно, $S'_n = \sum_1^n y_k \geq \sum_1^n x_k = S_n$ для любого $n = 1, 2, \dots$. По условию (S'_n) сходится, следовательно, последовательность (S_n) ограничена сверху и, кроме этого, является неубывающей. $\Rightarrow$ По теореме 2 предыдущего раздела мы получаем сходимость $\sum x_k$. Если же ряд $\sum x_k$ расходится, то, значит, последовательность его частичных сумм расходится (т.к. члены x_k неотрицательны) и, следовательно, последовательность (S_n) не ограничена сверху. $\Rightarrow$ Последовательность (S_n) расходится, т.е. ряд $\sum y_k$ расходится.

2. Пусть $\lim_k \frac{x_k}{y_k} = A > 0 \Rightarrow$ существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что $A - \varepsilon < \frac{x_k}{y_k} < A + \varepsilon$ для любых $k > N$. Отсюда, так как $y_k > 0$, следует

$$(A - \varepsilon)y_k < x_k < (A + \varepsilon)y_k, \quad (2)$$

для любых $k > N$. Если ряд $\sum_0^\infty y_k$ сходится, то сходится ряд $\sum_{N+1}^\infty y_k \Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{N+1}^\infty (A + \varepsilon)y_k \Rightarrow$ (в силу неравенства (2)) $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{N+1}^\infty x_k \Rightarrow$ ряд $\sum_1^\infty x_k$ сходится.

Если же ряд $\sum_1^\infty y_k$ расходится, то расходится ряд $\sum_{N+1}^\infty y_k \Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{N+1}^\infty (A - \varepsilon)y_k \Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{N+1}^\infty x_k \Rightarrow$ расходится ряд $\sum_1^\infty x_k$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (интегральный признак). Пусть функция $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и не возрастает. Ряд $\sum_1^\infty f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ограничена.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ опреде-

лена для любого $x > 0$ (см. [8], §7.4 теорема 2). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится.

Тогда существует $K > 0$ такое, что $\sum_{k=1}^n f(k) \leq K$ при всех n , и для

$$\text{любого } x > 0: F(x) = \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{[x]+1} f(t)dt = \int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{[x]}^{[x]+1} \leq$$

$$f(0) + \sum_{k=1}^{[x]} f(k) \leq f(0) + K. \text{ Обратно, если } F(x) \leq K, x > 0, \text{ то } \sum_{k=1}^n f(k) =$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) \int_{k-1}^k dt \leq \int_0^n f(t)dt = F(n) \leq K. \text{ Теорема доказана.}$$

Пример. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1] \\ \frac{1}{t^p}, & \text{если } t > 1 \end{cases}$ Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

$$\text{Используем теорему 3. } F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^x \frac{dt}{t^p} = 1 + \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Очевидно, $F(x) = 1 - \frac{1}{1-p} + \frac{x^{1-p}}{1-p}$ будет ограниченной, если $p > 1$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

Замечание. Условие "функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ограничена" равносильно

условию: "несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ сходится". Поэтому инте-

гральный признак можно сформулировать так: Пусть $f(x) \geq 0$ при $x > 0$ и не возрастает. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда инте-

грал $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ сходится.

Теорема 4 (Признак Даламбера). Пусть $\sum x_k$ - ряд с положительными членами.

1. Если $x_{k+1}/x_k \leq q < 1$, начиная с некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum x_k$

сходится;

если $x_{k+1}/x_k \geq 1$ для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$ расходится.

2. Если $\overline{\lim}_k \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$, то ряд $\sum x_k$ сходится;

если $\underline{\lim}_k \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то ряд $\sum x_k$ расходится.

Доказательство. Будем считать, что $k_0 = 1$ (такое допущение не ограничивает общности доказательства, так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость). Имеем

$$x_{k+1} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \dots \cdot \frac{x_{k+1}}{x_k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому из условия $x_{k+1}/x_k \leq q < 1$ следует, что

$$x_{k+1} \leq x_1 q^k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

а так как ряд $\sum x_1 q^k$ сходится (он является бесконечно убывающей геометрической прогрессией), то вместе с ним сходится и ряд $\sum x_k$. Из условия $x_{k+1}/x_k \geq 1$ следует $x_{k+1} \geq x_1, k = 0, 1, 2, \dots$, а так как ряд $x_1 + x_1 \dots$ расходится, то ряд $\sum x_k$ расходится. Пункт 1. доказан. Перейдем к доказательству пункта 2. Пусть выполняется условие $\overline{\lim}_k \frac{x_{k+1}}{x_k} = q < 1$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $q + \varepsilon < 1$. По определению верхнего предела существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q + \varepsilon$ для $k \geq N$. Так как $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q + \varepsilon < 1$ для $k \geq N$, то утверждение пункта 1 следует из пункта 2. Если $\underline{\lim}_k \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то из определения нижнего предела следует, что $\frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$ для всех $k \geq N$, и тогда в силу пункта 1 ряд $\sum x_k$ расходится. Теорема доказана.

Теорема 5 (Признак Коши). Пусть $x_k > 0, k \in \mathbf{N}$.

1. Если $\sqrt[k]{x_k} \leq q < 1$, для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$ сходится;

если $\sqrt[k]{x_k} \geq 1$, для $k \geq k_0$, то ряд $\sum x_k$ расходится.

2. Если $\overline{\lim}_k \sqrt[k]{x_k} < 1$, то $\sum x_k$ сходится;

если $\underline{\lim}_k \sqrt[k]{x_k} > 1$, то $\sum x_k$ расходится.

Доказательство. 1. Из условия $\sqrt[k]{x_k} \leq q < 1, k = 1, 2, \dots$ (здесь мы считаем, без ограничения общности, что $k_0 = 1$) следует, что $x_k \leq q^k (q < 1), k = 1, 2, \dots$. Ряд $\sum q^k$ - сходится, поэтому сходится и ряд $\sum x_k$. Из условия $\sqrt[k]{x_k} \geq 1$ следует, что $x_k \geq 1, k = 1, 2, \dots$. Ряд $1 + 1 + \dots$ расходится,

поэтому расходится и ряд $\sum x_k$.

2. Из условия $\overline{\lim} \sqrt[k]{x_k} = q < 1$ следует $\sqrt[k]{x_k} < q + \varepsilon < 1$, для всех $k \geq N$.

$\Rightarrow x_k \leq (q + \varepsilon)^k$, $k \geq N$. Ряд $\sum_N^{+\infty} (q + \varepsilon)^k$ сходится, поэтому сходится и

ряд $\sum_N^{+\infty} x_k$, а вместе с ним и ряд $\sum x_k$.

Если $\underline{\lim} \sqrt[k]{x_k} = q > 1$, то $\sqrt[k]{x_k} > 1$, для всех $k \geq N \Rightarrow$ Ряд $\sum x_k$ расходится.

Замечание. 1. Иногда пункты 2 в признаках Даламбера и Коши формулируются в менее общей форме:

Если $\lim_k \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1$, то $\sum x_k$ сходится; если $\lim_k \frac{x_{k+1}}{x_k} > 1$, то $\sum x_k$ расходится.

Если $\lim_k \sqrt[k]{x_k} < 1$ то $\sum x_k$ сходится; если $\lim_k \sqrt[k]{x_k} > 1$ то $\sum x_k$ расходится. Что делает их более удобными для использования на практике.

2. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками:

$$\lim_k \frac{x_{k+1}}{x_k} = 1, \quad (*)$$

$$\lim_k \sqrt[k]{x_k} = 1. \quad (**)$$

Например, ряд с общим членом $x_k = k^{-p}$, $p > 0$, сходится при $p > 1$ и расходится для $p \leq 1$ (см. интегральный признак сходимости числовых рядов), при этом

$$\lim_k \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lim_k \frac{k^p}{(k+1)^p} = 1,$$

$$\lim_k \sqrt[k]{x_k} = \lim_k \sqrt[k]{k^p} = 1.$$

Пример. 1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$, $a > 0$. Этот ряд сходится при любом $a > 0$, так как $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, $a > 0$. Этот ряд сходится при $0 < a < 1$ и расходится для $a > 1$, так как для него $\frac{x_{k+1}}{x_k} = a \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$.

§1.4 АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ. РЯД ЛЕЙБНИЦА

1. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. Говорят, что $\sum x_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum |x_k|$. Заметим, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Теорема. Если ряд $\sum x_k$ сходится абсолютно и ряд $\sum x'_k$ получен из ряда $\sum x_k$ какой-либо перестановкой его членов, то $\sum x'_k$ сходится и $\sum x_k = \sum x'_k$.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда $x_k \geq 0 (k \in \mathbf{N})$. Пусть $S = \sum x_k$ и пусть $S'_n = \sum_1^n x'_k$ - частичная сумма ряда $\sum x'_k$. Ее члены находятся в ряде $\sum x_k$ под некоторыми номерами $k_0, \dots, k_n$. Пусть $N = \max\{k_0, \dots, k_n\}$, а $S_N = \sum_1^N x_k$. Очевидно $S'_n \leq S_N \leq S$, т.е. последовательность (S'_n) - ограничена, а следовательно ряд $\sum x'_k$ сходится и имеет сумму $S' \leq S$. Приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв местами ряды $\sum x_k$ и $\sum x'_k$ и получить, что $S' \leq S$. Таким образом, $S = S'$.

Перейдем к доказательству общего случая. Пусть ряд сходится абсолютно. Положим $x_k^+ = \begin{cases} x_k, & \text{если } x_k \geq 0 \\ 0, & \text{если } x_k < 0 \end{cases}$, $x_k^- = \begin{cases} -x_k, & \text{если } x_k < 0 \\ 0, & \text{если } x_k \geq 0 \end{cases}$.
(*)

Очевидно числа x_k^+, x_k^- - неотрицательны и $x_k = x_k^+ - x_k^-$. Рассмотрим ряды с неотрицательными членами $\sum x_k^+, \sum x_k^-$. Оба ряда сходятся, так как $x_k^+ \leq |x_k|, x_k^- \leq |x_k|, k \in \mathbf{N}$. Тогда $\sum x_k = \sum (x_k^+ - x_k^-) = \sum x_k^+ - \sum x_k^- =^1 \sum x_k^{+'} - \sum x_k^{-'} =^2 \sum (x_k^{+'} - x_k^{-'}) = \sum x'_k$.

Равенство 1 вытекает из случая, рассмотренного выше (когда $x_k \geq 0$). Равенство 2 справедливо в силу сходимости рядов $\sum x_k^{+'}$ и $\sum x_k^{-'}$. Заметим также, что ряды получены по принципу (*) из ряда $\sum x'_k$, полученного после перестановки членов исходного ряда $\sum x_k$. Теорема доказана.

2. РЯД ЛЕЙБНИЦА

Определение. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots, x_k > 0$, причем $x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда ряд $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots$ называется рядом Лейбница.

Теорема. Ряд Лейбница сходится и его сумма $\leq x_1$.

Доказательство. $S_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - \dots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n} \leq x_1$,
 $S_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \dots + (x_{2n-1} - x_{2n})$.

Из первого равенства следует, что последовательность (S_{2n}) ограничена сверху; из второго равенства следует, что последовательность (S_{2n}) не убывает. Таким образом, существует $\lim_n S_{2n} \leq x_1$. Так как $\lim_n S_{2n+1} = \lim_n (S_{2n} + x_{2n+1}) = \lim_n S_{2n} + \lim_n x_{2n+1} = \lim_n S_{2n}$, то теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ является, очевидно, рядом Лейбница. Следовательно, он сходится и его сумма S не превышает 1.

§1.5 УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Из теоремы для абсолютно сходящихся рядов следует, что слагаемые абсолютно сходящихся рядов можно переставлять произвольным образом, не нарушая суммы ряда. Обладают ли подобным свойством ряды другого вида? Ответ на данный вопрос отрицательный. Более того, имеет место результат, который носит название "теорема Римана". Но прежде, чем сформулировать теорему, приведем определение.

Определение. Ряд, сходящийся не абсолютно (т.е. ряд $\sum x_k$ сходится, а ряд $\sum |x_k|$ расходится), называется условно сходящимся.

Теорема (Римана). Пусть $\sum x_k$ сходится условно и a - произвольное число. Тогда можно так переставить члены ряда $\sum x_k$, что вновь полученный ряд будет сходиться к a .

Доказательство. Прежде всего докажем вспомогательное утверждение:

Лемма. Если ряд $\sum x_k$ сходится условно, то ряды $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ являются расходящимися (определение рядов $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ см. в §1.4 тема: "Абсолютно сходящиеся ряды").

Доказательство. Если ряды $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ сходятся, то частичные суммы этих рядов $S_n^+ = \sum_1^n x_k^+$ и $S_n^- = \sum_1^n x_k^-$ имеют пределы при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, и $S_n^+ + S_n^- = \sum_1^n |x_k|$ также имеет предел при $n \rightarrow \infty$, т.е. ряд $\sum x_k$ сходится абсолютно. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием леммы.

Допустим, что один из рядов $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ (например $\sum x_k^+$) расходится, а другой - сходится. Тогда мы имеем $S_n^+ \rightarrow \infty$, $S_n^- \rightarrow c$, где c - некоторое число. Отсюда вытекает, что $S_n = S_n^+ - S_n^- \rightarrow \infty$, т.е. ряд $\sum x_k$ расходится, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть для определенности $a > 0$. Будем располагать члены ряда $\sum x_k$ в следующем порядке: сначала будем брать члены суммы $\sum x_k^+$ в их естественном порядке; при этом сумма взятых членов будет возрастать; как только эта сумма превзойдет a , мы назовем ее поворотной суммой и начнем присоединять к ней последовательно члены ряда $\sum x_k^-$, взятые со знаком минус; при этом сумма взятых членов будет уменьшаться; как только она сделается меньше a , мы снова назовем полученную сумму поворотной и опять начнем ее увеличивать, прибавляя следующие по порядку члены ряда $\sum x_k^+$ и т.д. Продолжая этот процесс неограниченно, мы тем самым расположим члены ряда $\sum x_k$ в некотором определенном порядке, т.е. получим новый ряд, имеющий вид:

$$x_1^+ + \dots + x_{n_1}^+ - x_1^- - \dots - x_{n_2}^- + x_{n_1+1}^+ + \dots + x_{n_3}^+ - x_{n_2+1}^- - \dots - x_{n_4}^- + \dots, (\star)$$

$$n_1 \text{ определено условием } \sum_1^{n_1-1} x_k^+ \leq a, \sum_1^{n_1} x_k^+ > a;$$

$$n_2 \text{ определено условием } \sum_1^{n_1} x_k^+ - \sum_1^{n_2-1} x_k^- \geq a, \sum_1^{n_1} x_k^+ - \sum_1^{n_2} x_k^- < a;$$

$$n_3 \text{ определено условием } \sum_1^{n_1} x_k^+ - \sum_1^{n_2} x_k^- + \sum_{n_1+1}^{n_3-1} x_k^+ \leq a, \sum_1^{n_1} x_k^+ - \sum_1^{n_2} x_k^- +$$

$$\sum_{n_1+1}^{n_3} x_k^+ > a, \text{ и т.д.}$$

Заметим, что числа n_k существуют в нашем случае всегда, так как по лемме ряды $\sum x_k^+, \sum x_k^-$ - расходятся и, следовательно, увеличением числа членов можно всегда добиться нужной величины поворотной суммы. Докажем, что образованный ряд (*) имеет сумму, равную a . Обозначим поворотные суммы через S_{n_k} . Ясно, что каждая поворотная сумма отстоит от a не более, чем на абсолютную величину своего последнего члена, т.е. величину, заведомо стремящуюся к нулю, как член нашего первоначального (сходящегося ряда) $\sum x_k$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbf{N} \forall k > N_1 (|S_{n_k} - a| < \varepsilon)$. Далее, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому, если мы возьмем две последовательные поворотные суммы $S_{n_k}, S_{n_{k+1}}$, то все частичные суммы t_n ряда (*), начиная с некоторого номера N_2 , будут заключены между ними:

$$\forall n > N_2 \in \mathbf{N} (S_{n_k} \leq t_n \leq S_{n_{k+1}}).$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Выберем $k > N$. Тогда $\forall n > N : |t_n - a| \leq |t_n - S_{n_k}| + |S_{n_k} - a| < 2\varepsilon$. Так как ε произвольное число > 0 , то $t_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

Теорема доказана.

§1.6 ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ

1. ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

Изучение двойных рядов начнем с понятия двойной числовой последовательности.

Определение 1. Двойной последовательностью чисел называется отображение $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, где $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ - множество возможных пар натуральных чисел. Элемент $f(k, l)$, $k \in \mathbf{N}, l \in \mathbf{N}$, обозначается - x_{kl} , а сама последовательность через (x_{kl}) .

Определение 2. Число $a \in \mathbf{R}$ называется пределом двойной последовательности x_{kl} (пишется: $a = \lim_{k, l \rightarrow \infty} x_{kl}$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n$,