Л. И. Гафиятуллина, Аналоги неравенств Полиа—Сеге и Макаи для евклидова момента инерции выпуклой области, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 176, 70–79

DOI: 10.36535/0233-6723-2020-176-70-79

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 176 (2020). С. 70–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-176-70-79

УДК 514.8

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ ПОЛИА—СЕГЕ И МАКАИ ДЛЯ ЕВКЛИДОВА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

© 2020 г. **Л. И. ГАФИЯТУЛЛИНА**

Аннотация. В статье получены двусторонние оценки для евклидова момента инерции $\mathrm{I}_2(G)$ выпуклой области G на плоскости через геометрические характеристики данной области, аналогичные неравенствам Полиа—Сеге и Макаи для жесткости кручения.

Ключевые слова: жесткость кручения, евклидов момент области относительно границы, изопериметрическое неравенство, функция расстояния, граница области, выпуклая область.

ANALOGS OF THE PÓLYA–SZEGŐ AND MACAI INEQUALITIES FOR THE EUCLIDEAN MOMENT OF INERTIA OF A CONVEX DOMAIN

© 2020 **L. I. GAFIYATULLINA**

Abstract. In this paper, we obtain two-sided estimates for the Euclidean moment of inertia $\mathrm{I}_2(G)$ of a convex domain G on the plane in terms of geometric characteristics of this domain similar to the Pólya–Szegő and Makai inequalities for the torsional rigidity.

Keywords and phrases: torsional rigidity, Euclidean moment of a domian relative to the boundary, isoperimetric inequality, distance function, boundary of a domain, convex domain.

AMS Subject Classification: 51K05

1. Введение. Пусть G — односвязная область на плоскости. Обозначим через ∂G границу области G, а через $\mathrm{A}(G)$ — площадь области G. Рассмотрим функцию напряжений $u(x,G)$, которая удовлетворяет уравнению $\Delta u = -2$ внутри области G и граничному условию $u = 0$ на границе области ∂G. Хорошо известно, что для широкого класса областей такая функция существует и определяется единственным образом. Физический функционал

$$\mathrm{P}(G) := 2\int_G u(x,G)dA, \tag{1}$$

называется *жесткостью кручения* области G, здесь через dA обозначен дифференциальный элемент площади (см. [5]).

Задача приближенного вычисления жесткости кручения тесно связана с ее двусторонними оценками через один и тот же геометрический функционал области. Первые приближенные формулы для вычисления жесткости $\mathrm{P}(G)$ связаны с именами лорда Рэлея и В. Сен-Венана (см. [5]). Изопериметрические неравенства для жесткости кручения через различные геометрические и физические функционалы были получены Г. Полиа и Г. Сеге (см. [5]), Е. Макаи (см. [7, 8]), Л. Пейном (см. [9]) и другими математиками.

Геометрический функционал (см. [1, 2]), определяемый равенством

$$\mathrm{I}_p(G) = \int\limits_G \rho(x, G)^p dA, \tag{2}$$

где $\rho(x, G)$ — функция расстояния от точки x до границы области G, называется *евклидовым моментом* области относительно границы порядка p. При $p = 2$ функционал естественно назвать евклидовым моментом инерции области, а при $p = 1$ — стационарным евклидовым моментом области.

В 1995 г. Ф. Г. Авхадиев показал, что жесткость кручения односвязных областей эквивалентна евклидову моменту инерции области относительно своей границы. Более того, были получены двусторонние оценки

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant \mathrm{P}(G) \leqslant 64\,\mathrm{I}_2(G), \tag{3}$$

которые могут применяться для практических целей. В 2001 г. левое неравенство в (3) было улучшено (см. [10]), а именно, было показано, что

$$\frac{3}{2}\,\mathrm{I}_2(G) \leqslant \mathrm{P}(G), \tag{4}$$

однако константа $3/2$ не является точной.

В 1951 г. Г. Полиа и Г. Сеге (см. [5]) показали, что для любой выпуклой области имеет место неравенство

$$\mathrm{P}(G) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2, \tag{5}$$

где $\rho(G)$ — радиус максимального круга, содержащегося в G; равенство в (5) достигается для круга. Е. Макаи получил обратное неравенство

$$\mathrm{P}(G) \leqslant \frac{4}{3}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2 \tag{6}$$

(см. [7,8]), справедливое для выпуклых областей. Это неравенство также оптимально в том смысле, что равенство в (6) достигается в пределе для вырожденных областей, в частности, для узкого прямоугольника.

Неравенства (5) и (6) можно записать в виде двусторонней оценки $\mathrm{P}(G)$ аналогично (3). Преимущество неравенств Г. Полиа и Е. Макаи в том, что жесткость кручения оценивается более простыми геометрическими характеристиками с точными константами. В свою очередь, неравенства (3) справедливы для более широких классов односвязных областей.

Впервые геометрический евклидовый момент инерции был применен в теории кручения Е. Макаи в 1962 г., а именно, было доказано, что

$$\mathrm{P}(G) \leqslant 4\,\mathrm{I}_2(G). \tag{7}$$

Независимо от Е. Макаи последнее неравенство в 1995 г. получил Ф. Г. Авхадиев (см. [2]).

Основная цель данной статьи — получить двусторонние оценки в классе выпуклых областей для евклидова момента инерции, аналогичные неравенствам Полиа—Сеге и Е. Макаи. Как следствие будут получены оценки для жесткости кручения выпуклых областей.

Постановка задач и предлагаемые методы решения принадлежат Р. Г. Салахудинову, решение принадлежит автору.

2. Основные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть G — произвольная выпуклая область на плоскости. Имеет место следующее неравенство*:

$$\mathrm{I}_2(G) \geqslant \frac{1}{6}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2, \tag{8}$$

причем равенство достигается тогда, когда G — описанный около окружности многоугольник или окружность.

Следствие 2.1. *Пусть G — описанный около окружности многоугольник. Справедливо неравенство*

$$\mathrm{P}(G) \geqslant 3\,\mathrm{I}_2(G). \tag{9}$$

Теорема 2.2. *Пусть G — произвольная выпуклая область на плоскости. Имеет место неравенство*

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant \frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G). \tag{10}$$

Постоянная в неравенстве — наилучшая из возможных, так как существует последовательность областей, которые в пределе вырождаются и для которых в пределе

$$\mathrm{I}_2(G) \sim \frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G).$$

Из теоремы 2.2 и неравенства Макаи (7) вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Для любой выпуклой области G справедливо неравенство*

$$\mathrm{P}(G) \leqslant \frac{8}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G). \tag{11}$$

Теорема 2.3. *Пусть G — произвольная выпуклая область на плоскости. Имеет место неравенство*

$$\mathrm{I}_2(G) > \frac{1}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G). \tag{12}$$

Постоянная $1/3$ не точная.

Теорема 2.4. *Для любой выпуклой области G имеет место неравенство*

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant \frac{1}{3}\rho(G)^2\,\mathrm{A}(G), \tag{13}$$

равенство в котором достигается для вырожденных областей.

3. Вспомогательные результаты, доказательства.

Доказательство теоремы 2.1. Случай равенства проверяется непосредственным вычислениями. Пусть G — произвольный описанный около окружности n-угольник со сторонами $a_1, \dots, a_n$ и углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = (n-2)\pi$, и $\rho(G)$ — радиус максимального вписанного в область G круга (см. рис. 1).

Впишем в многоугольник круг радиуса $\rho(G)$ и биссектрисами разобьем многоугольник на n треугольников $\triangle_i$. Выразим стороны многоугольника через радиус окружности и прилежащие к ним углы:

$$a_i = \rho(G)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right), \quad i = \overline{1,n},$$

где $\alpha_{n+1} = \alpha_1$. Определим площадь каждого треугольника:

$$\mathrm{A}(\triangle_i) = \frac{1}{2}\rho(G)^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{A}(G) = \rho(G)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}.$$

Введем следующие обозначения, связанные с областью: $G(t) := \{z \in G \mid \rho(z, G) > t\}$ — множество уровня функции расстояния $\rho(x, G)$;

$$a(t) := \mathrm{A}(G(t)) := \iint\limits_{G(t)} dA$$

— площадь множества уровня $G(t)$; $\partial G(t)$ — линия уровня функции расстояния, $0 \leqslant t \leqslant \rho(G)$.

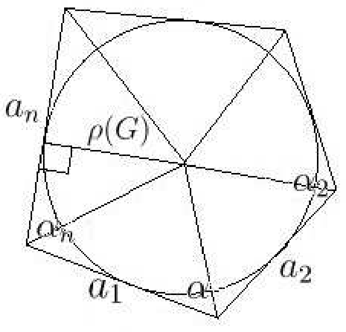

Рис. 1

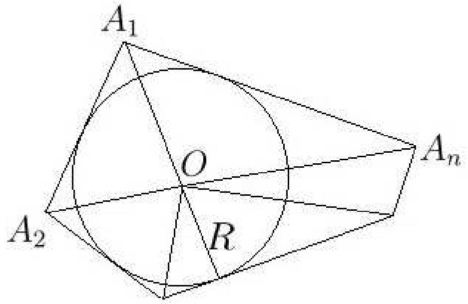

Рис. 2

Нам потребуется следующее выражение для евклидова момента области относительно своей границы порядка $p(>0)$, которое получается из (2) интегрированием по частям и применения определения кратного интеграла по Лебегу:

$$\mathrm{I}_p(G) = \int\limits_0^{\mathrm{A}(G)} t(a)^p da = \int\limits_{\rho(G)}^{0} t^p d(a(t)) = -\int\limits_0^{\rho(G)} t^p d(a(t)) =$$

$$= -t^p a(t)\Big|_{t=0}^{\rho(G)} + p\int\limits_0^{\rho(G)} a(t)t^{p-1}dt = p\int\limits_0^{\rho(G)} t^{p-1}a(t)dt, \quad p>0. \quad (14)$$

Определим площадь множества уровня многоугольника

$$a(t) = \big(\rho(G)-t\big)^2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}.$$

Тогда, применяя (14), получим

$$\mathrm{I}_2(G) = 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\cdot a(t)dt = 2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\int\limits_0^{\rho(G)} \big(\rho(G)-t\big)^2 t dt = \frac{\rho(G)^4}{6}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}.$$

Таким образом, момент инерции описанного около окружности многоугольника равен

$$\mathrm{I}_2(G) = \frac{\mathrm{A}(G)\rho(G)^2}{6}.$$

Теперь пусть G — произвольный n-угольник с вершинами $A_1,\dots,A_n$ и пусть хотя бы одна сторона многоугольника не касается максимального вписанного в G круга.

Впишем в нашу область G круг максимально возможного радиуса $R=\rho(G)$ и разобьем n-угольник на треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, …, OA_nA_1. Рассмотрим случай, когда у всех треугольников углы при основании острые. Евклидов момент инерции области G будет равен сумме значений евклидового момента инерции каждого треугольника

$$\mathrm{I}_2(G) = \iint\limits_G \rho(z,G)^2 dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\triangle_i}\rho(z,G)^2dx\,dy,$$

где $\triangle_i$ — это треугольник OA_iA_{i+1}.

Для доказательства неравенства необходимо оценить величину

$$\iint\limits_{\triangle_i}\rho(z,G)^2dx\,dy.$$

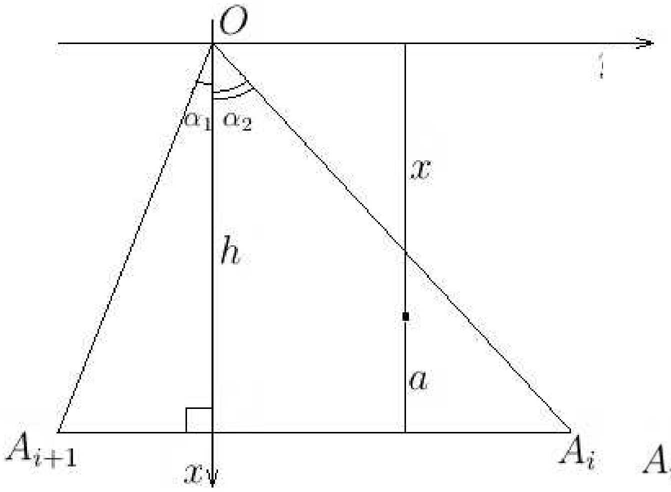

Рис. 3

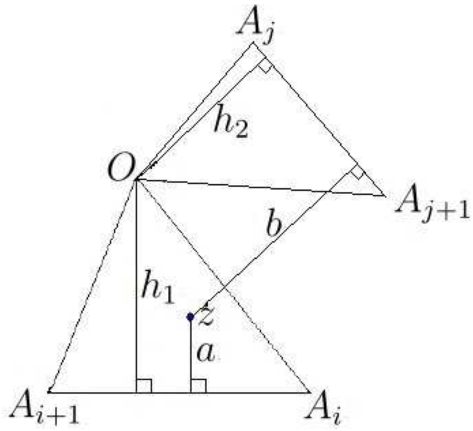

Рис. 4

Рассмотрим один из треугольников $\triangle_i$. Мы знаем, что функция расстояния $\rho(z,G)$ на основании треугольника A_iA_{i+1} равна нулю и $\rho(O,G)=R$. Введем новую функцию

$$z(x,y):=R\left(1-\frac{x}{h}\right),$$

где h — высота, опущенная из точки O на основание A_iA_{i+1} (см. рис. 3);

$$R\left(1-\frac{x}{h}\right)=\frac{R(h-x)}{h}=\frac{Ra}{h}.$$

Значение функции $z(x,y)$ на основании треугольника равно нулю и $\rho_{\triangle_i}(O)=R$. Эта функция линейная и сохраняет свойства функции расстояния.

Вычислим следующий интеграл:

$$\iint\limits_{\triangle_i} z^2 dA=\int\limits_0^h\int\limits_{-x\operatorname{tg}\alpha_1}^{x\operatorname{tg}\alpha_2}\left(R-x\frac{R}{h}\right)^2 dx\,dy=\frac{1}{12}R^2h^2\big(\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_1\big)=\frac{1}{6}\,\mathrm{A}(\triangle_i)R^2.$$

Таким образом, если мы покажем, что для любого треугольника $\triangle_i$ выполняется неравенство $\rho(z,G)\geqslant\rho_{\triangle_i}(z)$, то неравенство (8) будет доказано. Действительно,

$$\iint\limits_G \rho(z,G)^2dx\,dy=\sum_i\iint\limits_{\triangle_i}\rho(z,G)^2dx\,dy\geqslant\sum_i\iint\limits_{\triangle_i}z^2dx\,dy=\sum_i\frac{1}{6}\,\mathrm{A}(\triangle_i)\rho(G)^2=\frac{1}{6}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2.$$

Фиксируем i и рассмотрим треугольник $\triangle_i$. Длину высоты, опущенной из точки O на основание треугольника A_iA_{i+1}, обозначим h_1. Фиксируем в треугольнике точку (x,y). Пусть расстояние от точки z до стороны A_iA_{i+1} равно a.

Пусть $\triangle_j$ — другой треугольник. Длину высоты, опущенной из точки O на сторону A_jA_{j+1}, обозначим h_2, а расстояние от точки z, лежащей в треугольнике $\triangle_i$, до основания A_jA_{j+1} треугольника $\triangle_j$ обозначим через b (см. рис. 4).

Докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{b}{a}\geqslant\frac{h_2}{h_1}. \tag{15}$$

Рассмотрим два возможных случая.

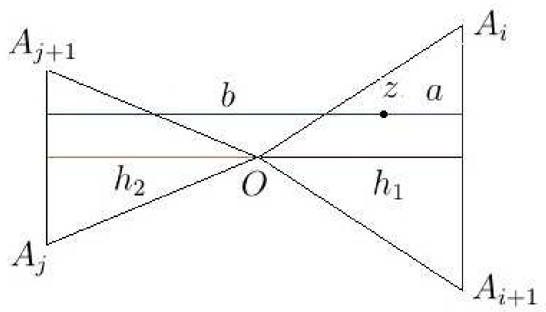

Рис. 5

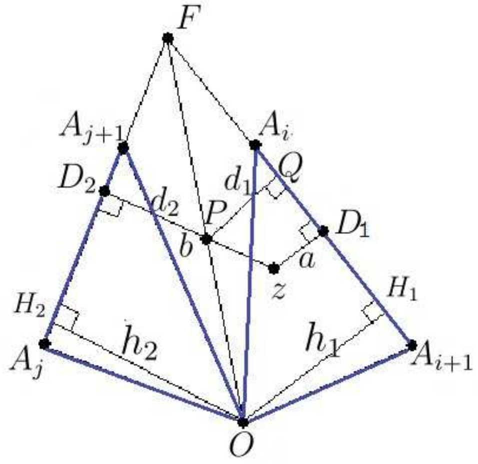

Рис. 6

I. Пусть основания A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} треугольников $\triangle_i$ и $\triangle_j$ параллельны (см. рис. 5). В этом случае $b \geqslant h_2$ и $a \leqslant h_1$; поэтому

$$\frac{b}{a} \geqslant \frac{h_2}{a} \geqslant \frac{h_2}{h_1}.$$

II. Пусть основания A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} треугольников $\triangle_i$ и $\triangle_j$ пересекаются в некоторой точке F (см. рис. 6). В силу выпуклости n-угольника Ω эти прямые пересекаются вне отрезков $[A_i, A_{i+1}]$ и $[A_j, Aj+1]$.

Пусть расстояние от точки (x, y) до точки D_1 равно a, а расстояние от точки (x, y) до D_2 равно b. Прямая ZD_2 пересекает отрезок OF в точке P. Расстояние от точки P до основания A_iA_{i+1} обозначим d_1, расстояние от P до стороны A_jA_{j+1} обозначим d_2. Высоты OH_1 и OH_2 равны h_1 и h_2 соответственно. Здесь $b \geqslant d_2$, $a \leqslant d_1$ и треугольник FPQ подобен треугольнику FOH_1, а треугольник FPD_2 подобен треугольнику FOH_2. Из этих неравенств и подобий треугольников следует

$$\frac{b}{a} \geqslant \frac{d_2}{a} \geqslant \frac{d_2}{d_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Неравенство (15) доказано. Итак,

$$\frac{b}{a} \geqslant \frac{h_2}{h_1} \geqslant \frac{R}{h_1}, \quad \rho(z, G) = \min\{a, b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Следовательно,

$$\rho(z, G) \geqslant \frac{aR}{h_1} = \rho_{\triangle_i}(z).$$

Таким образом, неравенство (8), а вместе с ним теорема 2.1 полностью доказаны. □

Пользуясь неравенством Полиа—Сеге (5) и применяя равенство

$$\mathrm{I}_2(G) = \frac{1}{6}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2,$$

которое справедливо для любого описанного около окружности многоугольника, получаем неравенство (9).

Доказательство теоремы 2.2. Установим следующее неравенство между функционалами $\mathrm{I}_2(G)$ и $\mathrm{I}_1(G)$:

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant \frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G), \tag{16}$$

где G — выпуклая область на плоскости. Для доказательства неравенства применим метод Е. Макаи, который заключается в замене функции $a(t)$ на линейную (см. [7, 8]).

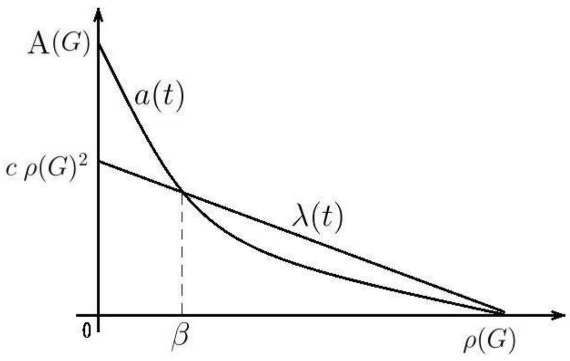

Рис. 7

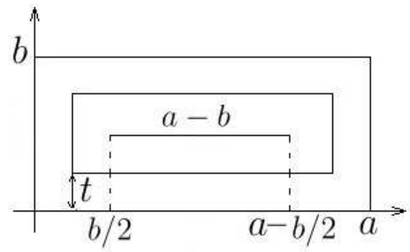

Рис. 8

Рассматривая функцию $a(t)$ конкретных областей, например круга, прямоугольника, трапеции, можно заметить, что функция $a(t)$ — убывающая и выпукла вниз (см. [7,8]). Очевидно, существует такая линейная функция $\lambda(t) = c\big(\rho(G)^2 - \rho(G)t\big)$, $c > 0$, что

$$\mathrm{I}_1(G) = \int\limits_0^{\rho(G)} a(t)dt = \int\limits_0^{\rho(G)} \lambda(t)dt. \tag{17}$$

Графики функций $a(t)$ и $\lambda(t)$ изображены на рис. 7. Константа c однозначно определяется из равенства (17).

Так как функция $a(t) - \lambda(t)$ выпукла вниз, то существует такое число β $(0 < \beta < \rho(G))$, что

$$\begin{cases} a(t) - \lambda(t) \geqslant 0, & 0 \leqslant t \leqslant \beta, \\ a(t) - \lambda(t) \leqslant 0, & \beta \leqslant t \leqslant \rho(\Omega). \end{cases} \tag{18}$$

Представим $\mathrm{I}_2(G)$ в следующем виде:

$$\mathrm{I}_2(G) = 2\int\limits_0^{\rho(G)} ta(t)\,dt = 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\big(a(t) - \lambda(t)\big)\,dt + 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\,dt.$$

Представим первый интеграл в виде суммы интегралов; тогда

$$\mathrm{I}_2(G) = 2\int\limits_0^{\beta} t\big(a(t) - \lambda(t)\big)\,dt + 2\int\limits_{\beta}^{\rho(G)} t\big(a(t) - \lambda(t)\big)\,dt + 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\,dt.$$

В силу (17), (18) имеем

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant 2\int\limits_0^{\beta} \beta\big(a(t) - \lambda(t)\big)\,dt + 2\int\limits_{\beta}^{\rho(G)} \beta\big(a(t) - \lambda(t)\big)\,dt + 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}_2(G) \leqslant 2\int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\,dt = 2c\int\limits_0^{\rho(G)} t\big(\rho(G)^2 - \rho(G)t\big)\,dt = \frac{c\rho(G)^4}{3}.$$

Используя (17), найдем $\mathrm{I}_1(G)$:

$$\mathrm{I}_1(G) = \int\limits_0^{\rho(G)} \lambda(t)\,dt = c\int\limits_0^{\rho(G)} \big(\rho(G)^2 - \rho(G)t\big)\,dt = \frac{c\rho(G)^3}{2}.$$

Имеем следующие неравенства:

$$\mathrm{I}_2(G) - \frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G) \leqslant \frac{c\rho(G)^4}{3} - \frac{2}{3}\frac{c\rho(G)^4}{2} = c\rho(G)^4\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{6}\right) \leqslant 0.$$

Обоснуем неулучшаемость постоянной $2/3$. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть G — прямоугольник со сторонами равными a и b, $a > b$. Для прямоугольника площадь множества уровня $a(t) = (b-2t)(a-2t)$, радиус максимального вписанного круга равен $\rho(G) = b/2$. Вычислим евклидов момент порядка p:

$$\mathrm{I}_p(G) = p\int\limits_0^{b/2} t^{p-1}(b-2t)(a-2t)\,dt = p\int\limits_0^{b/2}\Big(abt^{p-1} - (2b+2a)t^p + 4t^{p+1}\Big)\,dt =$$

$$= p\left(\frac{abt^p}{p} - \frac{(2b-2a)t^{p+1}}{p+1} + \frac{4t^{p+2}}{p+2}\right)\Bigg|_0^{b/2} =$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^p\left(\frac{ab(p+1)(p+2) - p(p+2)(b+a)b + p(p+1)b^2}{(p+1)(p+2)}\right) =$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^p\left(\frac{pab + 2ab - pb^2}{(p+1)(p+2)}\right) = \frac{b^{p+1}}{2^p}\frac{(a(p+2) - pb)}{(p+1)(p+2)}.$$

Тем самым, получаем, что

$$\mathrm{I}_1(G) = \frac{ab^2}{4}\left(1 - \frac{b}{3a}\right), \quad \mathrm{I}_2(G) = \frac{ab^3}{12}\left(1 - \frac{b}{2a}\right).$$

Учитывая, что $\rho(G) = b/2$, приведем евклидов момент инерции к следующему виду:

$$\mathrm{I}_2(G) = \frac{ab^3}{12}\left(1 - \frac{b}{2a}\right) = \frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G) - \frac{4\rho(G)^4}{9}.$$

Рассмотрим предельный случай при $\rho(G) \to 0$:

$$\mathrm{I}_2(G)\cdot\left(\frac{2}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G)\right)^{-1} \xrightarrow[\rho(G)\to 0]{} 1.$$

Таким образом, для узкого прямоугольника или, по-другому, для «иглы» в пределе имеет место равенство.

Теорема 2.2 доказана. □

Перейдем теперь к исследованию неравенства (12).

Лемма 3.1. *Пусть G — произвольная выпуклая область на плоскости. Имеет место следующее неравенство*:

$$\mathrm{I}_1(G) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G), \tag{19}$$

причем постоянная в неравенстве наилучшая из возможных.

Для обоснования леммы 3.1 воспользуемся методом Е. Макаи (см. [7, 8]). Обозначим через $l(t)$ периметр кривой, которая состоит из тех точек из G, для которых минимальное расстояние до границы G равно t. Если G является выпуклой многоугольной областью, то $l(t)$ — кусочно линейная, убывающая и вогнутая функция (см. [7,8])

Введем линейную функцию $\lambda(t) = \mathrm{L}(G) - ct$, $c > 0$, равенством

$$\mathrm{A}(G) = \int\limits_0^{\rho(G)} l(t)\,dt = \int\limits_0^{\rho(G)} \lambda(t)\,dt. \tag{20}$$

Из равенства интегралов (20) получаем, что площадь области G совпадает с площадью трапеции $BCDF$ (см. рис. 9).

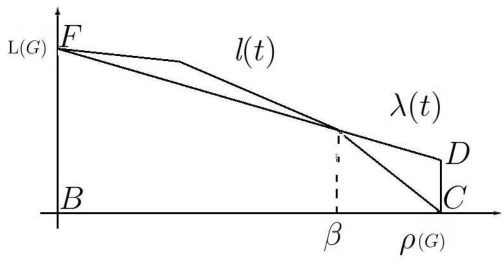

Рис. 9. Графики функций $l(t)$ и $\lambda(t)$

Из равенства (20) следует, что существует такое число β, $(0 < \beta < \rho)$, что

$$\begin{cases} l(t) - \lambda(t) \geqslant 0, & 0 \leqslant t \leqslant \beta, \\ l(t) - \lambda(t) \leqslant 0, & \beta \leqslant t \leqslant \rho(\Omega). \end{cases} \tag{21}$$

Из (21) и (20) получим, что

$$\int\limits_0^{\rho(G)} t\big(l(t) - \lambda(t)\big)dt \leqslant \int\limits_0^{\beta} \beta\big(l(t) - \lambda(t)\big)dt + \int\limits_{\beta}^{\rho(G)} \beta\big(l(t) - \lambda(t)\big)dt = 0.$$

Так как $a'(t) = -l(t)$, то

$$\mathrm{I}_1(G) = -\int\limits_0^{\rho(G)} t\, da(t) = \int\limits_0^{\rho(G)} t\, l(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}_1(G) = \int\limits_0^{\rho(G)} t\, l(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\, dt.$$

Вычислим площадь области, применив малую формулу трапеций:

$$\mathrm{A}(G) = \frac{1}{2}\big(\lambda(0) + \lambda(\rho(G))\big)\rho(G) = \mathrm{L}(G)\rho(G) - \frac{c\rho(G)^2}{2}.$$

Подставив найденные значения функционалов в неравенство (19) получим

$$\mathrm{I}_1(G) - \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G) \leqslant \int\limits_0^{\rho(G)} t\lambda(t)\, dt - \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G).$$

Вычисляя интеграл и подставляя значение площади, находим

$$\mathrm{I}_1(G) - \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G) \leqslant \frac{\mathrm{L}(G)\rho(G)^2}{2} - \frac{c\rho(G)^3}{3} - \frac{\mathrm{L}(G)\rho(G)^2}{2} + \frac{c\rho(G)^3}{4} = -\frac{c\rho(G)^3}{12} < 0.$$

Таким образом, справедливость неравенства (19) установлена. На примере прямоугольника покажем неулучшаемость константы 1/2.

Пример 2. Пусть G — прямоугольник со сторонами a и b, $a > b$. Радиус максимального вписанного круга $\rho(G) = b/2$, площадь области $\mathrm{A}(G) = ab$. Евклидов момент порядка 1 прямоугольника равен

$$\mathrm{I}_1(G) = \frac{ab^2}{4} - \frac{b^3}{12} = \frac{1}{2}\rho(G)\,\mathrm{A}(G) - \frac{2\rho(G)^3}{3}.$$

В пределе $\rho(G) \to 0$, получим

$$\mathrm{I}_1(G) \cdot \left(\frac{1}{2}\rho(G)\,\mathrm{A}(G)\right)^{-1} \xrightarrow[\rho(G)\to 0]{} 1.$$

Таким образом, для узкого прямоугольника в (19) в пределе достигается равенство.

Доказательство теоремы 2.3. С использованием леммы 3.1 и теоремы 2.1 получим неравенство (12):

$$\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2 = 3\frac{\mathrm{A}(G)\rho(G)^2}{6} \leqslant 3\,\mathrm{I}_2(G).$$

Поскольку неравенство (12) получено как комбинация двух неравенств с различными экстремальными областями, то заключаем, что константа 1/3 не является точной. □

Доказательство теоремы 2.4. Применяя лемму 3.1 и теорему 2.2, получаем теорему 2.4. □

Таким образом, из неравенств (7), (10) и (13) вытекает следующая цепочка неравенств для жесткости кручения:

$$\mathrm{P}(G) \leqslant 4\,\mathrm{I}_2(G) \leqslant \frac{8}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G) \leqslant \frac{4}{3}\,\mathrm{A}(G)\rho(G)^2. \tag{22}$$

Постоянные, входящие в неравенства, наилучшие.

Отметим, что полученная оценка для жесткости кручения

$$\mathrm{P}(G) \leqslant \frac{8}{3}\rho(G)\,\mathrm{I}_1(G)$$

улучает классическое неравенство (6) Е. Макаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Конформные отображения и краевые задачи. — Казань, 1996.
2. *Авхадиев Ф. Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 12. — С. 3–12.
3. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей. — Казань: Казанск. гос. ун-т им. В. И. Ульянова-Ленина, 2006.
4. *Авхадиев Ф. Г.* Введение в геометрическую теорию функций. — Казань: Казан. ун-т, 2012.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
6. *Салахудинов Р. Г.* Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 8. — С. 66–79.
7. *Makai E.* Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam// Acta Sci. Math. — 1959. — *20*. — P. 33–35.
8. *Makai E.* On the principal frequency of a convex membrane and related problems// Czech. Math. J. — 1959. — *9*. — P. 66–70.
9. *Payne L. E.* Isoperimetric inequalities and their applications// SIAM Rev. — 1967. — *9*, № 3. — P. 453–488.
10. *Salahudinov R. G.* An isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane// J. Ineq. Appl. — 2001. — *6*. — P. 253–260.

Гафиятуллина Лилия Ильгизяровна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: gafiyat@gmail.com