*Известия вузов. Математика* *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
*2020, № 5, с. 89–93* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Краткое сообщение*

*А.М. БИКЧЕНТАЕВ*

# СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ И $\tau$-КОМПАКТНОСТЬ $\tau$-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРОЙ ФОН НЕЙМАНА

*Аннотация.* Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана. Установлен признак Лейбница для знакочередующихся рядов $\tau$-измеримых операторов. Получен аналог признака “зажатой” сходимости рядов для $\tau$-измеримых операторов. Для $\tau$-компактного случая доказано соответствующее уточнение этого признака. В терминах топологии сходимости по мере $\tau$ установлен критерий $\tau$-компактности произвольного $\tau$-измеримого оператора. Найдено достаточное условие 1) $\tau$-компактности коммутатора $\tau$-измеримого оператора и проектора, 2) сходимости по мере $\tau$ к нулевому оператору последовательности коммутаторов $\tau$-измеримых операторов и проекторов.

*Ключевые слова*: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, топология сходимости по мере, ряд из операторов, $\tau$-компактный оператор.

*УДК*: 517.983:517.986

*DOI*: 10.26907/0021-3446-2020-5-89-93

**Введение.** Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В теории некоммутативного интегрирования И. Сигала [1], [2] важную роль играет топология $t_\tau$ сходимости по мере на $*$-алгебре $\tau$-измеримых операторов $S(\mathcal{M},\tau)$ [3]. В терминах топологий $t_\tau$ и $t_{\tau l}$ были получены характеризации различных классов алгебр фон Неймана [4]; описаны операторные “интервалы” $I_B = \{A:\ -B \le A \le B\}$, где $A \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{sa}}$ и $B \in S(\mathcal{M},\tau)^+$ ([5]). В [6], [7] в связи с топологией $t_\tau$ были исследованы выпуклые множества $K_B = \{A \in S(\mathcal{M},\tau):\ A^*A \le B\}$.

Оператор $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ называется *$\tau$-существенно обратимым слева*, если существует такой $B \in S(\mathcal{M},\tau)$, что оператор $I - AB$ является $\tau$-компактным. Если для оператора $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ найдется такая $t_\tau$-ограниченная последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset S(\mathcal{M},\tau)$, что

$$X_n^* \xrightarrow{\tau l} 0, \quad X_n \not\xrightarrow{\tau} 0, \quad AX_n \xrightarrow{\tau} 0 \quad (n \to \infty),$$

то $A$ не будет $\tau$-существенно обратимым слева ([8], теорема 3.4). О $\tau$-компактности $\tau$-измеримых операторов см. в [9], [10].

**1. Обозначения и определения.** Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, $I$ — единица $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для

Поступила в редакцию 15.11.2019, после доработки 15.11.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.13556.2019/13.1.

$P \in \mathcal{M}^{\rm pr}$, $\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След $\varphi$ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$; *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) :\ Y \in \mathcal{M}^+,\ Y \leq X,\ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$.

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор $X$, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *$\tau$-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\rm pr}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех $\tau$-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1], [3]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\rm sa}$ обозначим его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\rm sa}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, то $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.

Через $\mu(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| :\ \ P \in \mathcal{M}^{\rm pr}, \quad \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество $\tau$-компактных операторов $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \lim\limits_{t \to \infty} \mu_t(X) = 0\}$ является идеалом в $S(\mathcal{M}, \tau)$.

В $*$-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ вводится топология $t_\tau$ сходимости по мере [3], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists\, P \in \mathcal{M}^{\rm pr}\ \ (\|XP\| \leq \varepsilon \ \text{ и } \ \tau(P^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0,\, \delta > 0.$$

Известно, что $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй, причем $\mathcal{M}$ плотно в $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$. Для $X_n, X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ будем писать $X_n \xrightarrow{\tau} X$, если последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ $t_\tau$-сходится к $X$. Последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ называется сходящейся $\tau$-локально по мере к $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ (обозначение: $X_n \xrightarrow{\tau l} X$) если $X_nP \xrightarrow{\tau} XP$ для всех $P \in \mathcal{M}^{\rm pr}$ с $\tau(P) < +\infty$ ([7], с. 114). О свойствах такой сходимости см. в [4], [11]–[13].

Пусть $m$ — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное $L_1$-пространство Лебега может быть определено как $L_1(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(X) \in L_1(\mathbb{R}^+, m)\}$ с нормой $\|X\|_1 = \|\mu(X)\|_1$, $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$.

**Лемма 1** ([14])**.** *Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда*

1) $\mu_t(X) = \mu_t(|X|) = \mu_t(X^*)$ *для всех* $t > 0$*;*
2) *если* $|X| \leq |Y|$*, то* $\mu_t(X) \leq \mu_t(Y)$ *для всех* $t > 0$*;*
3) $\mu_{s+t}(X+Y) \leq \mu_s(X) + \mu_t(Y)$ *для всех* $s, t > 0$*;*
4) $\mu_{s+t}(XY) \leq \mu_s(X)\mu_t(Y)$ *для всех* $s, t > 0$*;*
5) $\mu_t(AXB) \leq \|A\|\|B\|\mu_t(X)$ *для всех* $A, B \in \mathcal{M}$ *и* $t > 0$*;*
6) $\mu_t(f(|X|)) = f(\mu_t(X))$ *для всех непрерывных возрастающих функций* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и* $t > 0$.

**Лемма 2.** *Пусть $A_j, A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $j \in J$. Тогда*

1) $A_j \xrightarrow{\tau} A \Leftrightarrow \mu_t(A_j - A) \xrightarrow{j} 0$ *для каждого* $t > 0$*;*
2) *сеть* $\{A_j\}_{j \in J}$ *$t_\tau$-ограничена* $\Leftrightarrow \sup_{j \in J} \mu_t(A_j) < +\infty$ *для каждого* $t > 0$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $S_0(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с идеалом $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактных операторов в $\mathcal{H}$, сходимость $\tau$-локально по мере совпадает со сходимостью в сильной операторной топологии ($so$-топологии). Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $s$-чисел оператора $X$ ([15], с. 46), $\chi_A$ — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_1(\mathcal{M},\tau)$ есть идеал ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

**2. Основные результаты.** Приведем операторные аналоги классических утверждений для функциональных рядов.

**Теорема 1** (признак Лейбница для $S(\mathcal{M},\tau)$). *Пусть $A_n \in S(\mathcal{M},\tau)^+$ и $A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_n \geq \ldots$, $A_n \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}A_n$ $t_{\tau l}$-сходится ($t_\tau$-сходится для $A_1 \in S_0(\mathcal{M},\tau)$) и его сумма не превышает $A_1$.*

**Теорема 2.** *Пусть $A_n \in S(\mathcal{M},\tau)^+$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ $t_{\tau l}$-сходится. Пусть $B_n \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{sa}}$ такие, что $-A_n \leq B_n \leq A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ также $t_{\tau l}$-сходится.*

**Теорема 3.** *Пусть $A_n \in S_0(\mathcal{M},\tau)^+$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ $t_\tau$-сходится. Пусть $B_n \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{sa}}$ такие, что $-A_n \leq B_n \leq A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ также $t_\tau$-сходится в $S_0(\mathcal{M},\tau)^+$.*

**Лемма 3.** *Пусть $A_j, B_j \in S(\mathcal{M},\tau)$, $j \in J$, и сеть $\{A_j\}_{j\in J}$ $t_\tau$-ограничена, $B_j \xrightarrow{\tau l} 0$. Тогда $A_jB_j \xrightarrow{\tau l} 0$.*

В лемме 3.3 из [12] показано, что если $\{A_j\}_{j\in J} \subset S(\mathcal{M},\tau)^+$ и $A_j \xrightarrow{\tau l} 0$, то $A_j^q \xrightarrow{\tau l} 0$ для каждого $0 < q < 1$.

**Предложение 1.** *Для $t_\tau$-ограниченной сети $\{A_j\}_{j\in J} \subset S(\mathcal{M},\tau)^+$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $A_j \xrightarrow{\tau l} 0$,

(ii) $A_j^q \xrightarrow{\tau l} 0$ *для каждого* $q > 0$.

**Теорема 4.** *Пусть $A_n \in \mathcal{M}^+$ и $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}^+$, ряд so-сходится. Тогда для каждого $q > 0$ имеем $A_n^q \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$.*

*Схема доказательства.* В силу положительной однородности и нормальности следа $\tau$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $\tau(P) < +\infty$ имеем

$$+\infty > \|A\|\tau(P) \geq \tau(PAP) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(PA_nP).$$

Так как числовой ряд сходится, его общий член стремится к нулю:

$$\tau(PA_nP) = \|PA_nP\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку пространство $\langle L_1(\mathcal{M},\tau), \|\cdot\|_1\rangle$ непрерывно вложено в топологическую алгебру $\langle S(\mathcal{M},\tau), t_\tau\rangle$, то $PA_nP \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$. Для каждого $t > 0$ в силу п. 1) леммы 2 и пп. 1), 6) леммы 1 получаем

$$\mu_t(A_n^{1/2}P)^2 = \mu_t(PA_n^{1/2} \cdot A_n^{1/2}P) = \mu_t(PA_nP) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $A_n^{1/2}P \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$ в силу п. 1) леммы 2. Таким образом, $A_n^{1/2} \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$ и можно применить лемму 3.

**Следствие 1.** Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и $P_n P_m = 0$ для $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда $P_n \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$.

**Теорема 5.** *Для оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $A \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$,

(ii) $X_n A \xrightarrow{\tau} 0$ $(n \to \infty)$ *для всех $t_\tau$-ограниченных последовательностей* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ *таких, что* $X_n \xrightarrow{\tau l} 0$ $(n \to \infty)$.

*Схема доказательства.* (ii)⇒(i) Если оператор $A$ не $\tau$-компактен, то $a := \lim_{t\to\infty} \mu_t(A) > 0$. В силу полуконечности следа $\tau$ существует последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно ортогональных проекторов в $\mathcal{M}$ и число $b > 0$ такие, что $0 < b \leq \tau(P_n) < +\infty$ и $aP_n \leq A$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. [5], предложение 4.1). Умножив обе части неравенства $aP_n \leq A$ на проектор $P_n$ слева и справа, получаем $aP_n \leq P_n A P_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu_t(P_n A) \geq \mu_t(P_n A P_n) \geq \mu_t(aP_n) = a\mu_t(P_n) \geq a\chi_{(0,b)}(t) \text{ для всех } t > 0$$

в силу пп. 2), 5) леммы 1. Получили $P_n \xrightarrow{\tau l} 0$ $(n \to \infty)$ в силу следствия 1, но последовательность $\{P_n A\}_{n=1}^{\infty}$ не является $t_\tau$-сходящейся в силу п. 1) леммы 2.

Пусть $T, P \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $P = P^2$. Если коммутатор $[T, P]$ лежит в $S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $TP - PTP = [T, P]P \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

**Теорема 6.** *Пусть $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ такие, что $PTT^*P \leq TPT^*$.*

(i) *Если $TP - PTP \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $[T, P] \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.*

(ii) *Если $TP = PTP$, то $[T, P] = 0$.*

*Схема доказательства.* (i) Поскольку $X = TP - PTP \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $X^* = PT^* - PT^*P \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и

$$|[T, P]^*|^2 = (TP - PT)(PT^* - T^*P) = TPT^* - T \cdot PT^*P - PTP \cdot T^* + PTT^*P \leq$$

$$\leq TPT^* - T(PT^* - X^*) - (TP - X)T^* + TPT^* = TX^* + XT^* \in S_0(\mathcal{M}, \tau)^+.$$

Тогда в силу пп. 1), 2), 6) леммы 1 имеем

$$0 \leq \mu_t([T, P]) = \mu_t(|[T, P]^*|^2)^{1/2} \leq \mu_t(TX^* + XT^*)^{1/2} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Таким образом, $[T, P] \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

Заметим, что если гипонормальный оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ такие, что оператор $TP$ когипонормальный, то $PTT^*P \leq TPT^*$.

**Предложение 2.** *Пусть $P, T_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $P^2 = P$.*

(i) *Если $[T_n, P] \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$, то $T_n P - PT_n P \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$.*

(ii) *Если $[T_n, P] \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$, то $T_n P - PT_n P \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$.*

**Теорема 7.** *Пусть $t_\tau$-ограниченная последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ и $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ такие, что $PT_nT_n^*P \leq T_nPT_n^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $T_nP - PT_nP \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$, то $[T_n, P] \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$.*

**Теорема 8.** *Если оператор $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ антикоммутирует с некоторым обратимым оператором $T \in \mathcal{M}$, то $\tau(A) = 0$.*

**Следствие 2.** Если $\tau(I) = 1$, то в условиях теоремы 8 имеем $\|I + zA\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

## Литература


[1] Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (3), 401–457 (1953).

[2] Takesaki M. *Theory of operator algebras. V.* II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125 (Springer, Berlin, 2003).

[3] Nelson E. *Notes on non-commutative integration*, J. Funct. Anal. **15** (2), 103–116 (1974).

[4] Бикчентаев А.М. *Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана*, II, Матем. заметки **82** (5), 783–786 (2007).

[5] Bikchentaev A.M., Sukochev F.A. *When weak and local measure convergence implies norm convergence*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2), 1414–1431 (2019).

[6] Stinespring W.F. *Integration theorems for gages and duality for unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1), 15–56 (1959).

[7] Ciach L.J. *Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra*, Colloq. Math. **55** (1), 109–121 (1988).

[8] Bikchentaev A.M. *On $\tau$-essentially invertibility of $\tau$-measurable operators*, Internat. J. Theor. Phys. **58** (12), (2019). https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w

[9] Сонис М.Г. *Об одном классе операторов в алгебрах фон Неймана с мерой Сигала на проекторах*, Матем. сб. **84** (3), 353–368 (1971).

[10] Stroh A., West P.G. *$\tau$-compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. **93** (1), 73–86 (1993).

[11] Bikchentaev A.M. *The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra*, Lobachevskii J. Math. **14**, 17–24 (2004). (http: // ljm.ksu.ru)

[12] Бикчентаев А.М. *Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана*, Тр. МИАН **255**, 41–54 (2006).

[13] Chilin V.I., Muratov M.A. *Comparison of topologies on $*$-algebras of locally measurable operators*, Positivity **17** (1), 111–132 (2013).

[14] Fack T., Kosaki H. *Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).

[15] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* (Наука, М., 1965).



*Айрат Мидхатович Бикчентаев*

*Казанский федеральный университет,*

*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

*A.M. Bikchentaev*


### Convergence in measure and $\tau$-compactness of $\tau$-measurable operators, affiliated with a semifinite von Neumann algebra


*Abstract.* Let $\tau$ be a faithful normal semifinite trace on a von Neumann algebra. We establish the Leibniz criterion for sign-alternating series of $\tau$-measurable operators. An analogue of the criterion of "sandwich" convergence of series for $\tau$-measurable operators is obtained. We prove a refinement of this criterion for the $\tau$-compact case. In terms of measure convergence topology, the criterion of $\tau$-compactness of an arbitrary $\tau$-measurable operator is established. We also give a sufficient condition of 1) $\tau$-compactness of the commutator of a $\tau$-measurable operator and a projection; 2) convergence of $\tau$-measurable operator and projection commutator sequences to the zero operator in the measure $\tau$.



*Keywords*: Hilbert space, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, topology of convergence in measure, series of operators, $\tau$-compact operator.



*Airat Midkhatovich Bikchentaev*

*Kazan Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*
`e-mail:` Airat.Bikchentaev@kpfu.ru