

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФГАОУ ВПО
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

**ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-
ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ ПО
СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ,
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ И
ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Учебное пособие

Набережные Челны
2018

Выполнение расчетно-проектировочных заданий по сопротивлению материалов, прикладной механике и технической механике: Учебное пособие. / Составители А.Р. Фардеев, Б.Ф. Байрамов. – Набережные Челны: 2018 г. – 109 с.

Учебное пособие составлено в помощь студентам механических и машиностроительных специальностей при выполнении расчетно-проектировочных заданий по сопротивлению материалов, прикладной механике и технической механике. Содержат как теоретические сведения, так и примеры решения задач, подобных задачам расчетно-проектировочных заданий.

Рецензенты: доктор тех. наук В.И. Елизаров,
доктор тех. наук Д.Л. Панкратов

Публикуется в соответствии с решением редакционно-издательского совета Набережночелнинского института (филиала) Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 3 от 10.05.2018 г.)

© Набережночелнинский институт
(филиал) Казанского
(Приволжского)
федерального университета,
2018 год

1. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЛОЖЕННЫХ СВЯЗЕЙ

Соединение двух звеньев механизма, допускающее перемещение одного звена относительно другого называется кинематической парой.

Обозначим:

N – число степеней свободы одного звена кинематической пары в движении относительно другого,

S – число наложенных связей на движение одного звена кинематической пары относительно другого.

Свободно движущееся в пространстве абсолютно твёрдое тело обладает шестью степенями свободы. Им соответствуют 6 элементарных видов движения: три поступательных движения вдоль осей x , y , z и три вращательных движения относительно этих же осей. При вхождении звена в кинематическую пару хотя бы на одно из этих движений накладывается связь. В этом случае число степеней свободы уменьшается на единицу и становится равным пяти, а число наложенных связей становится равным единице, т. е. $N=5$, $S=1$. Это будет кинематическая пара I класса, т. к. по числу наложенных связей S определяют класс кинематической пары. На рис. 1 изображена кинематическая пара I класса. В этой кинематической паре невозможно движение одного звена относительно другого лишь вдоль оси z ,

все остальные пять движений возможны. Следовательно, $S=1$.
Значит это пара I класса.

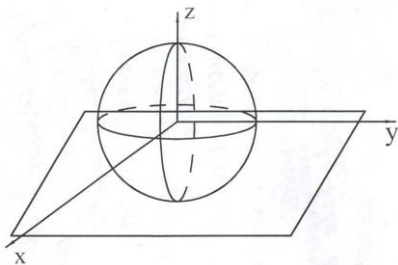


рис. 1

Если связь наложена на два движения, то это кинематическая пара II класса.

Аналогичным образом определяются кинематические пары III, IV, V классов.

На рис. 2 приведён пример кинематической пары IV класса. В этой паре невозможны следующие движения одного звена относительно другого: поступательные движения вдоль осей y и z и вращательные движения вокруг этих же осей. Следовательно, $S=4$.

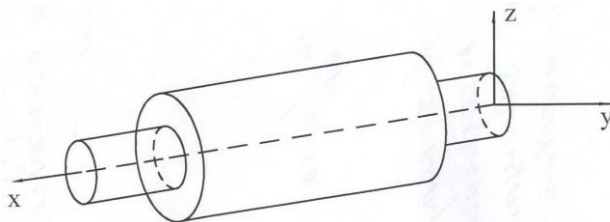


рис. 2

В случае, когда число наложенных связей больше числа степеней свободы, легче посчитать число степеней свободы H , а затем вычислить число наложенных связей S по формуле $S=6-H$.

В случае, изображённом на рис. 2, возможны два движения одного звена относительно другого: поступательное движение вдоль оси x и вращательное движение относительно той же оси. Следовательно, $H=2$, тогда $S=6-2=4$. Значит, это пара IV класса.

На рис. 3 изображена пара V класса. В этой паре возможно лишь поступательное движение одного звена относительно другого вдоль оси x . Следовательно, $H=1$, тогда $S=6-1=5$. Значит, это пара V класса.

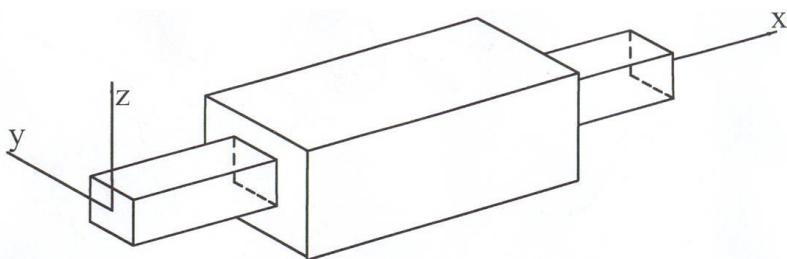


рис. 3

Мы будем рассматривать плоские механизмы. В плоских механизмах возможны лишь кинематические пары IV и V классов, т.к. на звенья плоского механизма уже наложены три связи (невозможно движение вдоль оси z и повороты относительно осей x и y).

2. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

Число степеней свободы механизма – это число обобщённых координат, необходимых для определения движения всех звеньев механизма.

Существуют общие закономерности в структуре механизмов, определяющие число степеней свободы механизмов в зависимости от числа звеньев и числа и видов кинематических пар.

Для плоских механизмов эти закономерности выражаются формулой Чебышева:

$$W=3n - 2p_5 - p_4,$$

где W – число степеней свободы механизма,

n – число подвижных звеньев механизма,

p_5, p_4 – числа кинематических пар соответственно V и IV

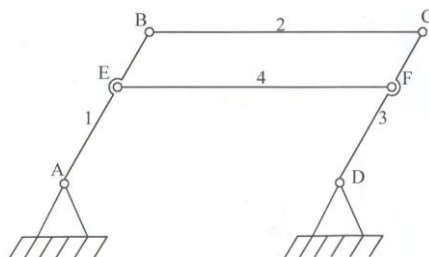
классов.

Этой формулой можно пользоваться, если из механизма исключены все лишние степени свободы и избыточные условия связи.

Лишние степени свободы и избыточные связи – это степени свободы и условия связи не оказывающие никакого влияния на характер движения механизма в целом.

Например, в плоском механизме, изображённом на рис. 4, звено 4 создает избыточные условия связи. Следовательно его необходимо исключить из рассмотрения.

Если высшие пары IV класса в плоском механизме



отсутствуют или заменены низшими парами V класса, то структурная формула получит вид:

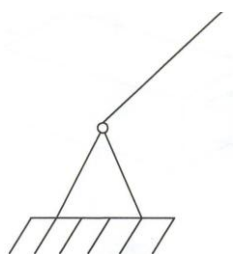
$$W=3n - 2p_5$$

рис. 4

3. СТРУКТУРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Основной принцип структурной классификации плоских механизмов по Ассурю состоит в том, что механизм может быть получен путём присоединения к начальному звену структурных групп (кинематических цепей) нулевой подвижности.

Число степеней свободы структурных групп Ассюра $W_{Г}=0$. Начальное звено, входящее в кинематическую пару V класса со стойкой, образует механизм первого класса. Этот механизм имеет одну степень свободы $W_{Г}=1$. На рис. 5 изображено начальное звено.



Для структурных групп Ассюра $W_{Г}=0$. Если все пары IV класса заменены парами V

класса, то по формуле Чебышева $W=3n - 2p_s$. Тогда:

$$3n - 2p_s=0, \quad p_s=3n/2.$$

рис. 5

Этому условию удовлетворяют следующие сочетания чисел подвижных звеньев и кинематических пар:

| | | | | | |
|-------|---|---|---|----|-----|
| n | 2 | 4 | 6 | 8 | ... |
| p_s | 3 | 6 | 9 | 12 | ... |

Группа, соответствующая первому столбцу, т. е. имеющая два звена и три пары V класса называется группой II класса.

Существует 5 видов или модификаций структурных групп Ассура II класса.

На рис. 6а изображена группа II класса второго порядка первого вида.

На рис. 6б изображена группа II класса второго порядка второго вида.

На рис. 6в изображена группа II класса второго порядка третьего вида.

На рис. 6г изображена группа II класса второго порядка четвертого вида.

На рис. 6д изображена группа II класса второго порядка пятого вида.

Если реализуется второй столбец, т. е. группа имеет 4 звена и 6 пар V класса, то возможны различные типы кинематических цепей.

На рис. 7а изображена группа III класса третьего порядка.

На рис. 7б изображена группа IV класса второго порядка.

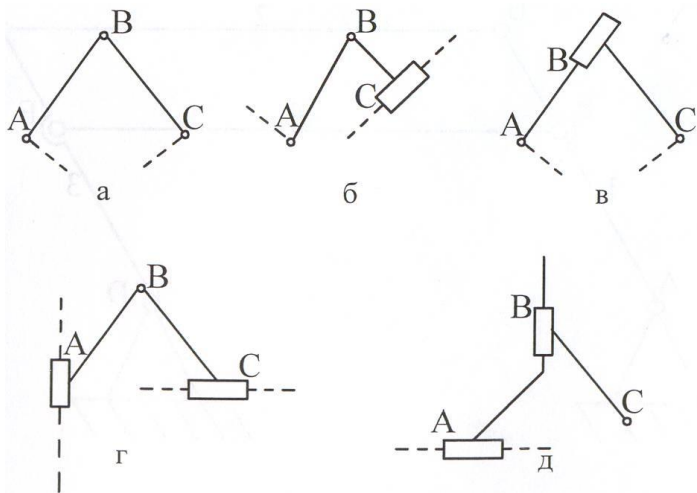


рис. 6

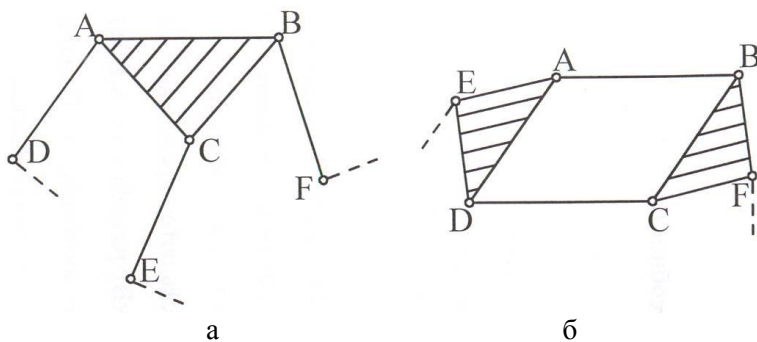


рис. 7

Порядок группы – это число элементов звеньев, которыми группа присоединяется к основному механизму.

Если механизм состоит из структурных групп разного класса, то механизму присваивается класс, совпадающий с наивысшим классом структурных групп Ассура, образующих ведомую часть кинематической цепи механизма.

Пример 1.

Провести структурный анализ и классификацию механизма, изображённого на рис.8.

Решение:

$n=7$, это звенья O_1A , AB , O_2BC , CD , O_3E , EF , ползун.

$P_5=10$, это пары $O_1, A, B, C, O_2, D, O_3, E, F$, ползун-стойка.

$P_4=0$, здесь нет пар IV класса.

$W=3n - 2P_5 - P_4=3*7 - 2*10= 21 - 20=1$.

Степень свободы данного механизма равна единице.

O_1A – начальное звено.

Начальное звено I со стойкой образуют механизм I класса.

Группа ABO_2 – группа II класса, третьего порядка, первого вида, состоит из звеньев (2, 3).

Группа CDO_3 – группа II класса, третьего порядка, первого вида, состоит из звеньев (4, 5).

Группа EF , ползун – группа II класса, второго порядка, второго вида, состоит из звеньев (6, 7).

Формула строения механизма имеет вид:

I (0,1) – II (2,3) – II (4,5) – II (6,7), следовательно это механизм II класса.

4. ПЛАН ПОЛОЖЕНИЙ

Рассмотрим построение плана положений звеньев механизма на примере восьмизвенного механизма II класса, изображённого на рис.8.

Пусть заданы размеры звеньев механизма, положения неподвижных осей вращения и ось x-x направления движения

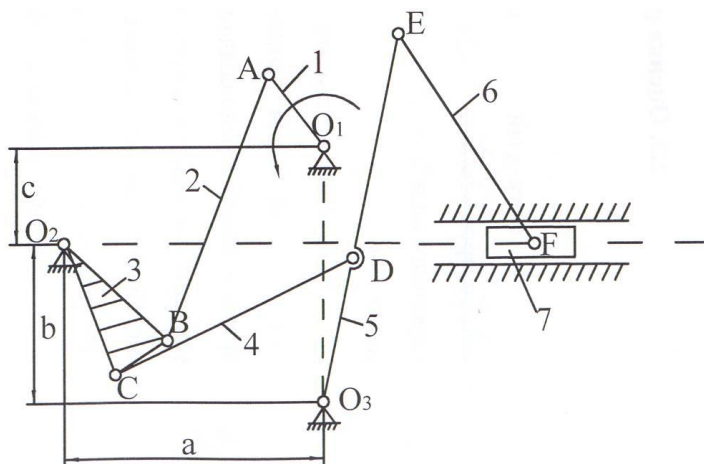


рис. 8

ползуна:

$$L_{O_1A}=32 \text{ см}=0,32 \text{ м};$$

$$L_{DE}=80 \text{ см}=0,8 \text{ м};$$

$$L_{AB}=100 \text{ см}=1 \text{ м};$$

$$L_{EF}=88 \text{ см}=0,88 \text{ м};$$

$$L_{O_2B}=L_{O_2C}=50 \text{ см}=0,5 \text{ м}; \quad L_a=92 \text{ см}=0,92 \text{ м};$$

$$L_{BC}=22 \text{ см}=0,22 \text{ м}; \quad L_b=56 \text{ см}=0,56 \text{ м};$$

$$L_{CD}=96 \text{ см}=0,96 \text{ м}; \quad L_c=34 \text{ см}=0,34 \text{ м}.$$

$$L_{O_3D}=52 \text{ см}=0,52 \text{ м};$$

Сначала зададимся масштабным коэффициентом плана положений μL . Для этого обычно задаются длиной начального звена на чертеже. Удобно задать длину начального звена на чертеже от 15 до 70 мм. Тогда:

$$\mu L=L_{O_1A}/O_1A,$$

где L_{O_1A} – длина звена O_1A в метрах,

O_1A – длина звена O_1A на чертеже в мм.

В нашем случае

$$L_{O_1A}=32 \text{ см}=0,32 \text{ м}.$$

Чтобы μL не был дробным, возьмём

$$O_1A=16 \text{ мм}, \text{ тогда}$$

$$\mu L=0,32 \text{ м}/16 \text{ мм}=0,02 \text{ м/мм}.$$

Наносим на чертеже неподвижные оси O_1 , O_2 , O_3 и ось $x-x$ направления движения ползуна (рис. 9). Для этого необходимо вычислить чертежные расстояния a , b и c :

$$a=L_a/\mu L=0,92/0,02=46, \text{ (мм)};$$

$$b=L_b/\mu L=0,56/0,02=28, \text{ (мм)};$$

$$c=L_c/\mu L=0,34/0,02=17, \text{ (мм)}.$$

Далее из точки O_1 радиусом $O_1A=L_{O_1A}/\mu L=0,32/0,02=16$ мм проводим окружность a_1 , представляющую собой геометрическое место положений точки A .

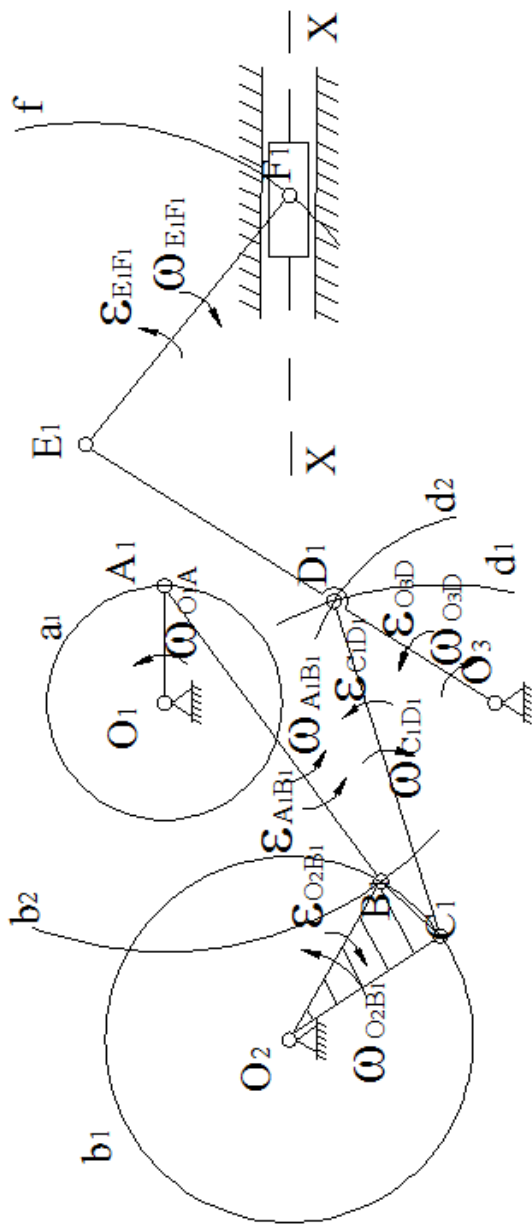


рис. 9

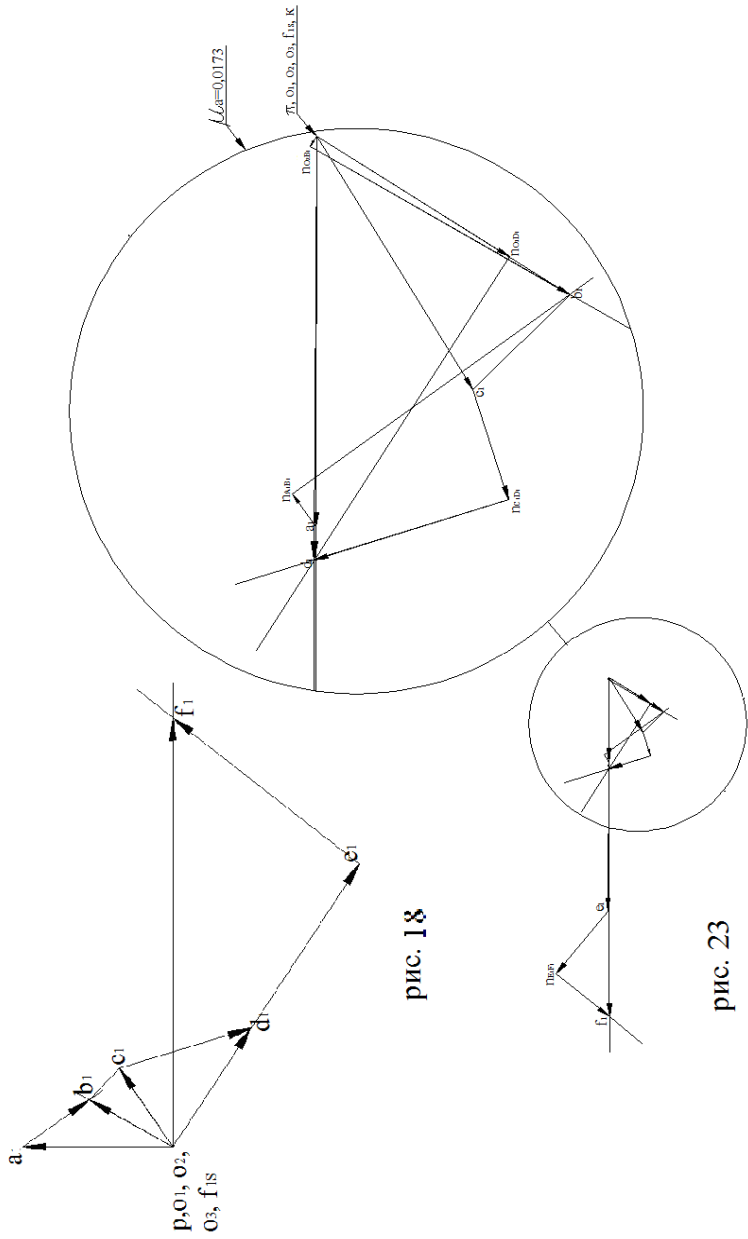


рис. 18

рис. 23

На этой окружности наносим положения $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ точки A , для которых требуется определить положения всех звеньев механизма. Точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ получаются последовательным поворотом радиуса O_1A на $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ соответственно.

Определим положение звеньев механизма для случая, когда точка A занимает положение A_1 . Соединив точки O_1 и A_1 получим линию O_1A_1 . Из точки O_2 радиусом $O_2B=L_{O_2B}/\mu_1=0,5/0,02=25$ мм проводим окружность b_1 , представляющую собой первое геометрическое место точек B . Из точки A_1 радиусом $AB=L_{AB}/\mu_1=1/0,02=50$ мм проводим дугу b_2 , представляющую собой второе геометрическое место точек B . Точка пересечения окружностей b_1 и b_2 определит положение точки B_1 (вторая точка пересечения окружностей b_1 и b_2 не рассматривается, т. к. не соответствует схеме механизма). Соединив точки A_1 и B_1 получим линию A_1B_1 .

Построим треугольник $O_2B_1C_1$. Для этого вычислим расстояния B_1C_1 и O_2C_1 . По условию $L_{O_2C_1}=L_{O_2B_1} \Rightarrow O_2C_1=O_2B_1=25$ мм.

$$B_1C_1=L_{B_1C_1}/\mu_1=0,22/0,02=11 \text{ мм.}$$

Соединив точки O_2 и B_1 , получим сторону O_2B_1 треугольника $O_2B_1C_1$. По трём сторонам строим треугольник $O_2B_1C_1$.

Из точки C_1 радиусом $CD=L_{CD}/\mu_1=0,96/0,02=48$ мм проводим дугу d_1 , представляющую собой первое геометрическое место точек D .

Из точки O_3 радиусом $O_3D = L_{O_3D} / \mu_1 = 0,52 / 0,02 = 26$ мм проводим дугу d_2 , представляющую собой второе геометрическое место точек D .

Пересечение окружностей d_1 и d_2 определит положение точки D_1 . Соединив точки C_1 и D_1 , получим линию C_1D_1 . Соединив точки O_3 и D_1 , получим линию O_3D_1 . Продолжим линию O_3D_1 . На полученной линии из точки D_1 отложим расстояние $DE = L_{DE} / \mu_1 = 0,8 / 0,02 = 40$ мм. Получим положение точки E_1 .

Из точки E_1 проведём дугу f радиуса $EF = L_{EF} / \mu_1 = 0,88 / 0,02 = 44$ мм, представляющую собой первое геометрическое место точек F . Ось $x-x$ является вторым геометрическим местом точек F . Пересечение окружности f и оси $x-x$ определит положение точки F_1 .

Соединив точки E_1 и F_1 получим линию E_1F_1 .

Аналогично определяется положение звеньев механизма для случая, когда точка A занимает положение A_2 и т. д.

5. ПЛАНЫ СКОРОСТЕЙ МЕХАНИЗМОВ II КЛАССА

Так как механизмы II класса образованы последовательным присоединением групп, то изложение метода планов скоростей и планов ускорений можно вести применительно к различным видам групп II класса.

Построим план скоростей для группы II класса первого вида, изображённой на рис. 10.

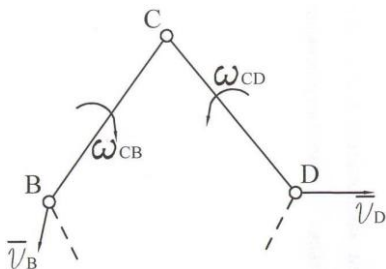


рис. 10

принадлежат одному и тому же звену – абсолютно твердому телу, аналогично $\vec{V}_{CD} \perp CD$.

Выбираем в качестве полюса плана скоростей произвольную точку p (рис. 11).

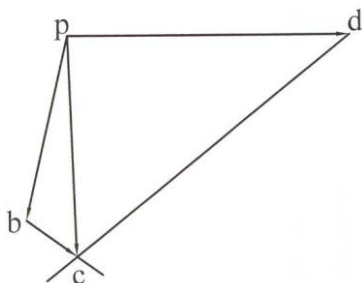


рис. 11

После этого проведём через точки b и d прямые, перпендикулярные к направлениям BC и CD. Эти

Векторы \vec{V}_B и \vec{V}_D даны.

Вектор \vec{V}_C необходимо найти. Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB},$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}.$$

Вектор \vec{V}_{CB} перпендикулярен

линии CB на плане положений, т.к. точки C и B

с собой скорости \vec{V}_B и \vec{V}_D в выбранном нами масштабе с масштабным коэффициентом плана скоростей μ_v , т. е. направления векторов \vec{pb} и \vec{pd} совпадают с направлениями векторов \vec{V}_B и \vec{V}_D , а по длине на плане скоростей:

$$(pb) = v_B / \mu_v \quad \text{и} \quad (pd) = v_D / \mu_v.$$

прямые имеют те же направления, что и скорости \bar{V}_{CB} и \bar{V}_{CD} . Пересечение этих прямых определит положение точки с. Точка с является концом вектора \bar{rc} . Векторы \bar{rc} и \bar{V}_c имеют одно и то же направление, а по модулю:

$$1V_c = \mu_v * (rc).$$

Треугольники $rbс$ и $rdс$ называются планами скоростей звеньев BC и DC, а фигура $rbcd$ называется планом скоростей группы BCD. Точка р называется началом или полюсом плана скоростей.

Пользуясь планом скоростей можно определить модули угловых скоростей $\bar{\omega}_{CB}$ и $\bar{\omega}_{CD}$ звеньев BC и CD:

$$|\omega_{CB}| = V_{CB} / L_{BC} = \mu_v * (bc) / \mu_l * (BC),$$

$$|\omega_{CD}| = V_{CD} / L_{CD} = \mu_v * (cd) / \mu_l * (CD).$$

Здесь (BC) и (CD) – длины отрезков BC и CD на плане положений.

Направления угловых скоростей ω_{CB} и ω_{CD} определяются следующим образом: мысленно приложим векторы \bar{V}_{CB} и \bar{V}_{CD} (или соответственно векторы \bar{bc} и \bar{dc}) к точке с и увидим, что вращение звена BC относительно полюса В происходит по ходу часовой стрелки, а вращение звена CD относительно полюса D – против хода часовой стрелки.

Определим скорость какой-либо точки E, лежащей на оси звена BC (рис.12).

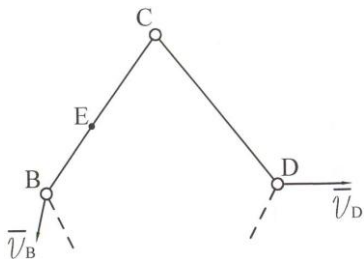


рис. 12

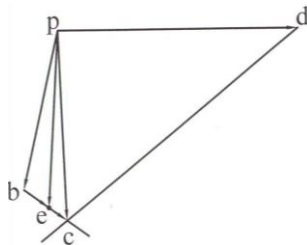


рис. 13

Чтобы определить длину отрезка be на плане скоростей (рис.13), необходимо отрезок (bc) разделить в том же отношении, в каком точка E делит звено BC на схеме группы:

$$(be)/(bc)=BE/BC.$$

v_E определяется по формуле:

$$v_E = \omega_{BC} * (pe).$$

Определим скорость какой-либо произвольной точки F звена CD , не лежащей на оси CD (рис.14).

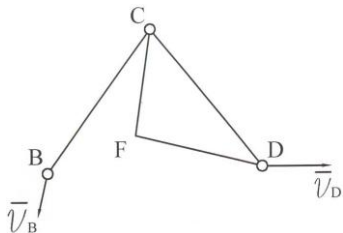


рис. 14

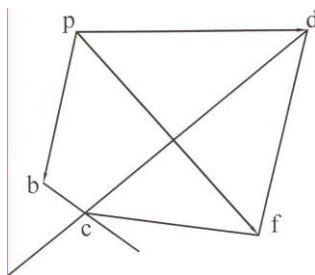


рис. 15

Для этого строим на отрезке cd плана скоростей треугольник cdf , подобный треугольнику CDF на кинематической схеме, но повернутый на 90° по направлению угловой скорости ω_{CD} (рис. 15). Тогда

$$V_F = \mu \cdot (pf).$$

Если порядок букв на схеме при обходе контура звена по часовой стрелке будет CDF, то на плане скоростей при обходе по часовой стрелке треугольника cdf буквы должны идти в том же порядке: c,d,f.

Построим план скоростей для группы II класса второго вида, изображённой на рис.16.

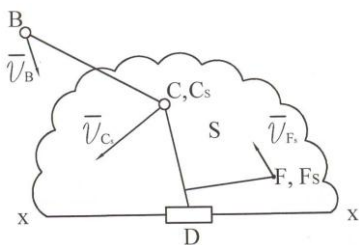


рис. 16

Даны $\bar{V}_B, \bar{V}_{Cs}, \omega_s$. Необходимо

определить \bar{V}_C .

Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB},$$

$$\bar{V}_C = \bar{V}_{Cs} + \bar{V}_{CCs}.$$

Представим звено, содержащее

ось x-x в виде плоскости S и обозначим точку этой плоскости, совпадающую для заданного положения с точкой C через C_s . Вектор скорости \bar{V}_{Cs} точки C_s , как принадлежащий плоскости S известен. Выбираем произвольную точку p за полюс плана скоростей (рис. 17) и откладываем от неё векторы \bar{pb} и \bar{pc}_s , представляющие собой скорости \bar{V}_B и \bar{V}_{Cs} в выбранном нами масштабе μ . То есть направления векторов \bar{pb} и \bar{pc}_s совпадают с направлениями векторов \bar{V}_B и \bar{V}_{Cs} , а по длине:

$$(pb) = V_B / \mu \quad \text{и} \quad (pc_s) = V_{Cs} / \mu \quad \text{мм соответственно.}$$

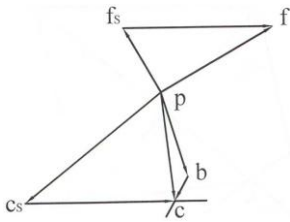


рис. 17

Далее через точку b проводим прямую в направлении вектора \overline{V}_{cb} , т. е. перпендикулярно к направлению BC , а через точку c_s проводим прямую в направлении скорости \overline{V}_{cc_s} , т.е. параллельно оси $x-x$, т. к. движение любой точки звена CD относительно плоскости S происходит параллельно оси $x-x$. Точка пересечения этих прямых определит точку c . Точка c является концом вектора \overline{pc} .

Векторы \overline{pc} и \overline{V}_c имеют одно и то же направление, а по модулю:

$$V_c = \mu_w * (pc).$$

Угловая скорость звена CD равна угловой скорости плоскости S :

$\omega_{cd} = \omega_s$, т.к. звено CD входит с плоскостью S в поступательную пару.

Определим скорость какой-либо произвольной точки F , принадлежащей звену CD .

Откладываем из точки p вектор $\overline{pf_s}$. Направление вектора $\overline{pf_s}$ совпадает с направлением вектора \overline{V}_b , а по длине:

$$(pf_s) = V_F / \mu_w.$$

Из точки f_s откладываем вектор $\overline{f_s f}$, равный вектору $\overline{c_s c}$. Точка f является концом вектора $\overline{p f}$. Направление вектора $\overline{V_f}$ совпадает с направлением вектора $\overline{p f}$, а по модулю:

$$1V_f = \mu_v * (p f).$$

Если необходимо найти скорость точки D , то она находится аналогично скорости точки F .

Пример 2.

Построить план скоростей механизма, изображённого на рис. 8 для положения 1, изображённого на рис. 9. Пусть кроме размеров звеньев механизма, указанных в п.4 задана угловая скорость начального звена O_1A :

$$\omega_{O_1A} = 2 \text{ рад/с.}$$

Решение:

Сначала определим модуль скорости точки A :

$$1V_A = \omega_{O_1A} * L_{O_1A} = 2 * 0,32 = 0,64 \text{ м/с.}$$

Скорость $\overline{V_{A_1 B}}$ в положении 1 механизма направлена перпендикулярно O_1A_1 на плане положений. Так как ω_{O_1A} положительно, то $\overline{V_{A_1 B}}$ направлен так, чтобы вращение начального звена O_1A происходило против хода часовой стрелки.

Скорость точки O_2 равна нулю. У структурной группы $A_1 B_1 O_2$ II класса первого вида, которая присоединяется к начальному звену, известны скорости точек A_1 и O_2 , следовательно можно найти скорость точки B_1 методом планов.

Выберем произвольную точку p за полюс плана скоростей (рис. 18). Зададимся масштабным коэффициентом μ_v . Для этого обычно задаются длиной вектора, соответствующей вектору скорости точки A_1 : пусть $(pa_1)=16$ мм. Длина отрезка (pa_1) на плане скоростей взята равной длине отрезка O_1A на плане положений не случайно:

$$\begin{aligned} \mu_v &= V_{A_1} / (pa_1) = \omega_{O_1A} * L_{O_1A} / (pa_1) = \omega_{O_1A} * (\mu_l * (O_1A)) / (pa_1) = \omega_{O_1A} * \mu_l = \\ &= 2 * 0,02 = 0,04 \text{ м/с/мм.} \end{aligned}$$

Благодаря тому, что $(O_1A)=(pa_1)$, масштабный коэффициент μ_v выражается как произведение угловой скорости начального звена на масштабный коэффициент μ_l .

Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\bar{V}_{B_1} = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{B_1A_1},$$

$$\bar{V}_{B_1} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{B_1O_2} = \bar{V}_{B_1O_2}, \text{ т.к. } \bar{V}_{O_2} = 0.$$

Из точки p отложим вектор $\overline{pa_1}$ длиной $(pa_1)=16$ мм в направлении вектора \bar{V}_{A_1} , т.е. перпендикулярно отрезку O_1A_1 на плане положений, так чтобы вращение отрезка O_1A_1 на плане положений происходило против хода часовой стрелки.

Из точки p отложим вектор $\overline{po_2}$. По длине $po_2 = V_{O_2} / \mu_v = 0$, т. к. $V_{O_2} = 0$. Следовательно, точки p и o_2 совпадают. Из точки a_1 проводим линию, перпендикулярную отрезку B_1A_1 на плане положений (т. е. по линии действия скорости $\bar{V}_{B_1A_1}$). Из точки o_2 (p) проводим линию, перпендикулярную отрезку O_2B_1 (т.е. в

направлении скорости $\vec{V}_{B_1O_2}$). Пересечение этих линий определит положение точки b_1 .

Измерим отрезок (pb_1) на плане скоростей:

$(pb_1)=11$ мм. Значит модуль скорости шарнира В в положении 1

$$V_{B_1} = \mu_v * (pb_1) = 0,04 * 11 = 0,44 \text{ м/с, т.е.}$$

$V_{B_1O_2} = V_{B_1} = 0,44$ м/с. Следовательно модуль угловой скорости звена

O_2B в положении 1 равен

$$|\omega_{B_1O_2}| = V_{B_1O_2} / L_{O_2B} = 0,44 / 0,5 = 0,88 \text{ рад/с.}$$

Измерим отрезок (a_1b_1) :

$(a_1b_1)=9$ мм. Значит модуль относительной скорости

$V_{B_1A_1} = \mu_v * (a_1b_1) = 0,04 * 9 = 0,36$ м/с, а модуль угловой скорости звена

AB в положении 1 равен

$$|\omega_{B_1A_1}| = V_{B_1A_1} / L_{AB} = 0,36 / 1 = 0,36 \text{ рад/с.}$$

Чтобы найти положение точки c_1 , соответствующей концу вектора \vec{V}_{c_1} , необходимо на отрезке o_2b_1 построить треугольник $o_2b_1c_1$, подобный треугольнику $O_2B_1C_1$ на плане положений.

По условию $L_{O_2C_1} = L_{O_2B_1} \Rightarrow o_2c_1 = o_2b_1 \Rightarrow pc_1 = pb_1 \Rightarrow$

$$V_{c_1} = V_{B_1} = 0,44 \text{ м/с.}$$

Угловую скорость $\omega_{B_1O_2}$ звена, которому принадлежат точки С и В мы уже находили.

Далее к механизму присоединяется группа II класса первого вида $C_1D_1O_3$. Скорость точки C_1 известна. Скорость точки O_3 равна нулю, т. е. тоже известна. Следовательно, можем определить скорость точки D_1 .

Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\vec{V}_{D_1} = \vec{V}_{C_1} + \vec{V}_{D_1C_1} \text{ и}$$

$$1\vec{V}_{D_1} = \vec{V}_{O_3} + \vec{V}_{D_1O_3} = \vec{V}_{D_1O_3}, \text{ т.к. } \vec{V}_{O_3} = 0.$$

Вектор \vec{V}_{C_1} , соответствующий вектору скорости \vec{V}_{C_1} , уже отложен.

Отложим из точки p вектор $\vec{pO_3}$. По длине:

$$(pO_3) = v_{O_3}/\mu = 0, \text{ т. к. } v_{O_3} = 0. \text{ Следовательно точки } p \text{ и } O_3 \text{ совпадают.}$$

Из точки C_1 проводим линию, перпендикулярную отрезку C_1D_1 на плане положений (т.е. в направлении скорости $\vec{V}_{D_1C_1}$).

Из точки O_3 проводим линию, перпендикулярную отрезку O_3D_1 (т.е. в направлении скорости $\vec{V}_{D_1O_3}$). Пересечение этих линий определит наложение точки d_1 .

Измерим отрезок (pd_1) :

$(pd_1) = 15,5$ мм. Поэтому модуль скорости точки D_1 равен

$$v_{D_1} = \mu_v * (pd_1) = 0,04 * 15,5 = 0,62 \text{ м/с.}$$

$v_{D_1O_3} = v_{D_1} = 0,62$ м/с. Модуль угловой скорости звена O_3D в положении 1 равен

$$|\omega_{D_1O_3}| = v_{D_1O_3}/L_{O_3D} = 0,62/0,52 = 1,19 \text{ рад/с.}$$

Измерим отрезок (C_1d_1) :

$(C_1d_1) = 15$ мм. Значит

$v_{D_1C_1} = \mu_v * (C_1d_1) = 0,04 * 15 = 0,6$ м/с. Модуль угловой скорости звена CD

в положении 1 равен

$$|\omega_{D_1C_1}| = v_{D_1C_1}/L_{CD} = 0,6/0,96 = 0,625 \text{ рад/с.}$$

Продолжим линию o_3d_1 . По полученной линии отложим отрезок d_1e_1 , найденный из пропорции:

$(o_3d_1)/(d_1e_1) = L_{o_3D} / L_{DE} = 0,52 / 0,8 = 13/20$. Следовательно

$$(d_1e_1) = (o_3d_1) * 0,8 / 0,52 = (20/13) * (o_3d_1)$$

Так как $(o_3d_1) = (pd_1) = 15,5$ мм, то

$(d_1e_1) = 15,5 * 20 / 13 = 23,8$ мм и модуль скорости точки E в положении

1 равен

$$v_{E_1} = \mu_v * (pe_1) = \mu_v * (pd_1 + d_1e_1) = 0,04 * (15,5 + 23,8) = 1,57 \text{ м/с.}$$

Угловую скорость $\omega_{D_1O_3}$ звена, которому принадлежат точки E и D мы уже вычисляли.

Теперь к рассмотренной кинематической цепи присоединяется группа Ассур II класса второго вида, состоящая из звена E_1F_1 и ползуна. Эта группа имеет два звена. Первое звено – это звено E_1F_1 . Второе звено – это ползун. Второе звено входит в две пары: поступательную и вращательную. В общем случае эти пары находятся в разных точках такого звена. В нашем же случае вращательная и поступательная пары совмещены в одной точке F_1 и вторым звеном является сам ползун.

Обозначим через S плоскость, содержащую ось x-x. В нашем случае эта плоскость неподвижна, т.к. находится на стойке, следовательно, $v_{F_1S} = 0$, $\omega_S = 0$. Здесь F_{1S} – точка, принадлежащая плоскости S и совпадающая в данном положении с точкой F_1 , ω_S – угловая скорость плоскости S.

Известны \bar{V}_{E_1} , \bar{V}_{F_3} и ω_s , следовательно, можно определить скорость точки F ползуна \bar{V}_{F_1} . Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\bar{V}_{F_1} = \bar{V}_{E_1} + \bar{V}_{F_1E_1} \text{ и}$$

$$\bar{V}_{F_1} = \bar{V}_{F_{1S}} + \bar{V}_{F_1F_{1S}} .$$

Вектор \bar{r}_{E_1} , соответствующий скорости \bar{V}_{E_1} уже отложен. Отложим вектор $\bar{r}_{F_{1S}}$, соответствующий скорости $\bar{V}_{F_{1S}}$. Так как $v_{F_{1S}}=0$, то $(r_{F_{1S}})=v_{F_{1S}}/\mu_v=0$. Следовательно, точка f_{1S} совпадает с точкой p.

Из точки e_1 проводим линию, перпендикулярную отрезку E_1F_1 на плане положений (т. е. в направлении скорости $\bar{V}_{F_1E_1}$).

Из точки f_{1S} проводим линию, параллельную оси x-x (т. е. в направлении скорости $\bar{V}_{F_1F_{1S}}$).

Пересечение этих линий определит положение точки f_1 .

Измерим отрезок (pf_1) :

$(pf_1)=48$ мм. Тогда модуль скорости поступательного движения ползуна равен

$$v_{F_1}=\mu_v \cdot (pf_1)=0,04 \cdot 48=1,92 \text{ м/с.}$$

Измерим отрезок (e_1f_1) :

$(e_1f_1)=26$ мм, следовательно

$v_{F_1E_1}=\mu_v \cdot (e_1f_1)=0,04 \cdot 26=1,04$ м/с. Модуль угловой скорости звена 6

(EF) равен

$$|\omega_{F_1E_1}|=v_{F_1E_1}/L_{EF}=1,04/0,88=1,18 \text{ рад/с.}$$

Угловая скорость ползуна равна угловой скорости плоскости S и равна нулю.

Для определения направлений угловых скоростей $\omega_{B_1O_2}$, $\omega_{B_1A_1}$, $\omega_{D_1O_3}$, $\omega_{D_1C_1}$, $\omega_{E_1F_1}$ мысленно приложим векторы $\vec{V}_{B_1O_2}$, $\vec{V}_{B_1A_1}$, $\vec{V}_{D_1O_3}$, $\vec{V}_{D_1C_1}$, $\vec{V}_{E_1F_1}$ (или векторы $\vec{o_2b_1}$, $\vec{a_1b_1}$, $\vec{o_3d_1}$, $\vec{c_1d_1}$, $\vec{e_1f_1}$ из плана скоростей) к точкам B_1 , B_1 , D_1 , D_1 , F_1 соответственно и увидим, что звенья O_2BC , AB , EF вращаются против хода часовой стрелки, а звенья O_3DE , CD – по ходу часовой стрелки относительно выбранных центров O_2 , A_1 , O_3 , C_1 и E_1 соответственно.

6. ПЛАНЫ УСКОРЕНИЙ МЕХАНИЗМОВ II КЛАССА

Построим план ускорений для группы II класса первого вида, изображённой на рис. 19.

Даны ускорения \vec{a}_B и \vec{a}_D , а также план скоростей группы,

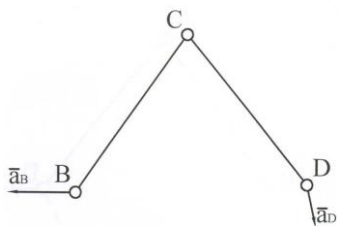


рис. 19

необходимо найти ускорение \vec{a}_C .

Построение плана ускорений ведём по двум векторным уравнениям:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau}$$

В качестве полюса плана ускорений выбираем произвольную точку π (рис. 20). Откладываем от неё векторы $\vec{\pi b}$ и $\vec{\pi d}$, представляющие собой ускорения \vec{a}_B и \vec{a}_D в

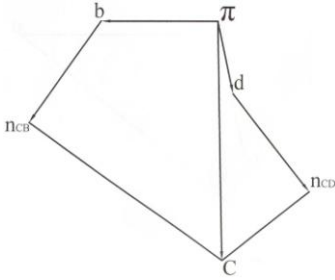


рис. 20

выбранном нами масштабе плана ускорений с масштабным коэффициентом μ_a , т.е. направления векторов $\overline{b\pi}$ и $\overline{d\pi}$ совпадают с направлениями векторов $\overline{a_{CB}}$ и $\overline{a_{CD}}$, а по длине на плане ускорений равны:

$$(\pi b) = a_{CB} / \mu_a, \quad (\pi d) = a_{CD} / \mu_a.$$

Далее вычислим модули

осестремительных (нормальных) ускорений $\overline{a_{CB}^n}$ и $\overline{a_{CD}^n}$ по формулам:

$$a_{CB}^n = (v_{CB})^2 / L_{BC} \quad \text{и} \quad a_{CD}^n = (v_{CD})^2 / L_{CD}.$$

Величины v_{CB} и v_{CD} вычисляются по формулам:

$$v_{CB} = \mu_v * (bc) \quad \text{и} \quad v_{CD} = \mu_v * (cd),$$

где (bc) и (cd) – длины отрезков bc и cd на плане скоростей группы II класса первого вида.

Затем из точек b и d плана ускорений откладываются векторы $\overline{b\pi_{CB}}$ и $\overline{d\pi_{CD}}$, представляющие собой ускорения $\overline{a_{CB}^n}$ и $\overline{a_{CD}^n}$ в масштабе μ_a . Направления векторов $\overline{b\pi_{CB}}$ и $\overline{d\pi_{CD}}$ совпадают с направлениями векторов $\overline{a_{CB}^n}$ и $\overline{a_{CD}^n}$, т.е. они направлены вдоль звеньев BC и CD от точки C к точке B или D , а по длине:

$$(b\pi_{CB}) = a_{CB}^n / \mu_a \quad \text{и} \quad (d\pi_{CD}) = a_{CD}^n / \mu_a.$$

Через полученные точки π_{CB} и π_{CD} проводим прямые, перпендикулярные к линиям BC и CD на плане положений. Эти

прямые параллельны линиям действия вращательных (касательных) ускорений \vec{a}_{CB}^{τ} и \vec{a}_{CD}^{τ} . Точка пересечения этих прямых определит положение точки с на плане ускорений.

Точка с является концом вектора $\overline{пс}$. Векторы $\overline{пс}$ и $\overline{ас}$ имеют одно и то же направление, а модуль ускорения точки С равен:
 $a_c = \mu_a * (\overline{пс})$.

Построенные фигуры $\pi \omega_{псвс}$ и $\pi \omega_{псдс}$ называются планами ускорений звеньев ВС и CD, а вся фигура $\pi \omega_{псвсдс} d\pi$ называется планом ускорений группы BCD.

Точка π называется началом или полюсом плана ускорений. Пользуясь планом ускорений можно определить угловые ускорения ε_{CB} и ε_{CD} звеньев ВС и CD по модулю:

$$|\varepsilon_{CB}| = a_{CB}^{\tau} / L_{BC} = \mu_a * (\overline{псвс}) / (\mu_l * (BC)) \text{ и}$$

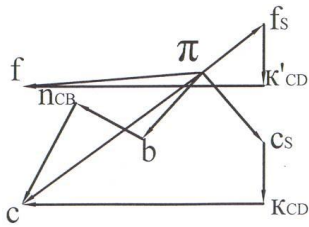
$$|\varepsilon_{CD}| = a_{CD}^{\tau} / L_{CD} = \mu_a * (\overline{псдс}) / (\mu_l * (CD)).$$

Здесь (BC) и (CD) – длины отрезков BC и CD на плане положений.

Направления угловых ускорений ε_{CB} и ε_{CD} определяются следующим образом:

мысленно прикладывая векторы \vec{a}_{CB}^{τ} и \vec{a}_{CD}^{τ} (или соответственно векторы $\overline{псвс}$ и $\overline{псдс}$) к точке C_1 видим, что ε_{CB} направлено по ходу часовой стрелки, а ε_{CD} направлено против хода часовой стрелки относительно выбранных центров В и D соответственно.

Определение ускорений точки E, лежащей на оси звена СВ



$$a^n_{CB} = (V_{CB})^2 / L_{BC} \text{ и}$$

$$a^k_{CS} = 2 * |\omega_s| * V_{CS}.$$

Модули V_{CB} и V_{CS} вычисляются

по формулам:

$$V_{CB} = \mu_a * (bc) \text{ и}$$

$$V_{CS} = \mu_a * (c_sC),$$

где (bc) и (c_sC) – длины отрезков bc и c_sC на плане скоростей.

Затем из точек b и c_s плана ускорений откладываем векторы $\overline{bn_{CB}}$ и $\overline{c_sK_{CD}}$ представляющие собой ускорения $\overline{a^n_{CB}}$ и $\overline{a^k_{CS}}$, в масштабе μ_a . Направления векторов $\overline{bn_{CB}}$ и $\overline{c_sK_{CD}}$ совпадают с направлениями векторов $\overline{a^n_{CB}}$ и $\overline{a^k_{CS}}$, т. е. вектор $\overline{bn_{CB}}$ направлен вдоль звена BC от точки C к точке B , а вектор $\overline{c_sK_{CD}}$ направлен перпендикулярно оси $x-x$ так, как будет направлен вектор $\overline{c_sC}$ из плана скоростей если его повернуть на 90° по направлению дуги ω_s (см. рис. 17).

По длине:

$$(bn_{CB}) = a^n_{CB} / \mu_a \quad \text{и} \quad (c_sK_{CD}) = a^k_{CS} / \mu_a.$$

Через точку n_{CB} проводим прямую, перпендикулярную к линии BC плана положений. Эта прямая параллельна линии действия вращательного (касательного) ускорения $\overline{a^r_{CB}}$.

Через точку K_{CD} проводим прямую, параллельную оси $x-x$. Эта прямая параллельна линии действия ускорения $\overline{a^r_{CS}}$.

Точка пересечения этих прямых определит положение точки s на плане ускорений.

Точка s является концом вектора $\overline{\pi s}$. Векторы $\overline{\pi s}$ и $\overline{a_s}$ имеют одно и то же направление, а по модулю:

$$a_s = \mu_a * (\pi s).$$

Найдём угловое ускорение ε_{cd} звена CD:

$\varepsilon_{cd} = \varepsilon_s$, т.к. звено CD входит с плоскостью S в поступательную пару.

Определим ускорение произвольной точки F, принадлежащей звену CD (рис. 21). Из точки π отложим вектор $\overline{\pi f_s}$. Направление вектора $\overline{\pi f_s}$ совпадает с направлением вектора $\overline{a_{f_s}}$, а по длине:

$$(\pi f_s) = a_{f_s} / \mu_a.$$

Из точки f_s откладываем вектор $\overline{f_s k'_{cd}}$ равный вектору $\overline{c_s k_{cd}}$. Затем из точки k'_{cd} откладываем вектор $\overline{k'_{cd} f}$, равный вектору $\overline{k_{cd} c}$. Точка f является концом вектора $\overline{\pi f}$. Направление вектора $\overline{a_f}$ совпадает с направлением вектора $\overline{\pi f}$, а по величине:

$$a_f = \mu_a * (\pi f).$$

Пример 3.

Построить план ускорений механизма, изображённого на рис. 8 для положения, изображённого на рис. 9.

Даны размеры звеньев механизма, указанные в п. 4 и угловая скорость начального звена $\omega_{0,a} = 2$ рад/с.

Решение:

Сначала определим ускорение точки А:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Так как начальное звено O_1A движется с постоянной угловой скоростью, то $\varepsilon_{O_1A} = 0$, следовательно:

$$\vec{a}_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} * L_{O_1A} = 0. \quad \text{Модуль осецимительного (нормального)}$$

ускорения вычисляется по формуле:

$$a_A^n = (\omega_{O_1A})^2 * L_{O_1A} = 4 * 0,32 = 1,28 \text{ м/с}^2.$$

Эти выражения верны для любого положения точки А. Направление же ускорения точки А зависит от положения точки А.

Так как касательное ускорение точки А равно нулю, то ускорение точки А равно её нормальному ускорению:

$$a_A = 1,28 \text{ м/с}^2.$$

Направлено это ускорение вдоль отрезка A_1O_1 на плане положений от точки A_1 к точке O_1 (рис. 9).

Ускорение точки O_2 равно нулю. У структурной группы Ассура II класса первого вида $A_1B_1O_2$, которая присоединяется к начальному звену O_1A_1 , известны ускорения точек A_1 и O_2 , следовательно, можно найти ускорение точки B_1 методом планов.

Выберем произвольную точку π за полюс плана ускорений (рис.23). Зададимся масштабным коэффициентом μ_a . Для этого

обычно задаются длиной вектора, соответствующего вектору ускорения точки A_1 ($a_{A_1} = \mu_a * (\pi a_1)$):

пусть $(\pi a_1) = 16$ мм.

Длина отрезка (πa_1) на плане ускорений взята равной длине отрезка $O_1 A_1$ на плане положений не случайно:

$$\mu_a = a_{A_1} / (\pi a_1) = (\omega_{O_1 A_1})^2 * L_{O_1 A_1} / (\pi a_1) = (\omega_{O_1 A_1})^2 * (\mu_c(O_1 A_1)) /$$

$$(\pi a_1) = (\omega_{O_1 A_1})^2 * \mu_c = 4 * 0,02 = 0,08 \text{ м/с}^2 / \text{мм}.$$

Благодаря тому, что $(O_1 A_1) = (\pi a_1)$ масштабный коэффициент μ_a выражается как произведение квадрата угловой скорости на масштабный коэффициент μ_c .

Построение плана ускорений группы Асура II класса первого вида ведём по двум векторным уравнениям:

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_{A_1} + \vec{a}_{B_1 A_1}^n + \vec{a}_{B_1 A_1}^\tau,$$

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_{O_2} + \vec{a}_{B_1 O_2}^n + \vec{a}_{B_1 O_2}^\tau = \vec{a}_{B_1 O_2}^n + \vec{a}_{B_1 O_2}^\tau, \text{ т.к. } \vec{a}_{O_2} = 0.$$

Из точки π отложим вектор $\vec{\pi a_1}$, длина которого $(\pi a_1) = 16$ мм в направлении вектора \vec{a}_{A_1} , т.е. вдоль отрезка $A_1 O_1$ на плане положений от точки A_1 к точке O_1 .

Из точки π отложим вектор $\vec{\pi o_2}$. По длине: $(\pi o_2) = a_{O_2} / \mu_a = 0$, т.к. $a_{O_2} = 0$.

Следовательно, точки π и o_2 совпадают. Из точки a_1 отложим вектор $\vec{a_1 \pi_{AB}}$. Этот вектор направлен так же, как и вектор $\vec{a}_{B_1 A_1}^n$, т.е. вдоль отрезка $A_1 B_1$ на плане положений от точки B_1 к точке A_1 , а по длине:

$$(a_{n_{A_1B_1}}) = a_{n_{B_1A_1}}^n / \mu_a = (v_{B_1A_1})^2 / (L_{AB} * \mu_a) = (0,36)^2 / (1 * 0,08) = 1,62 \text{ мм.}$$

Скорости одной точки механизма относительно другой (в данном случае $v_{B_1A_1}$) были вычислены при построении плана скоростей в примере 2.

Из точки π отложим вектор $\overline{\pi O_2 B_1}$. Этот вектор направлен так же, как и вектор $\overline{a_{B_1O_2}^n}$, т.е. вдоль отрезка $O_2 B_1$ на плане положений от точки B_1 к точке O_2 , а по длине:

$$(\pi O_2 B_1) = a_{B_1O_2}^n / \mu_a = (v_{B_1O_2})^2 / (L_{O_2B_1} * \mu_a) = 0,44^2 / (0,5 * 0,8) = 0,5 \text{ мм.}$$

Через точки $\pi_{A_1B_1}$ и $\pi_{O_2B_1}$ проводим прямые, перпендикулярные отрезкам $A_1 B_1$ и $O_2 B_1$ на плане положений. Эти прямые параллельны линиям действия вращательных (касательных) ускорений $\overline{a_{B_1A_1}^{\tau}}$ и $\overline{a_{B_1O_2}^{\tau}}$. Точка пересечения этих прямых определит положение точки b_1 . Соединив точки π и b_1 , получим вектор $\overline{\pi b_1}$. Измерим отрезок πb_1 :

$$(\pi b_1) = 13 \text{ мм.}$$

Тогда модуль ускорения точки B_1 равен

$$a_{B_1} = \mu_a * (\pi b_1) = 0,08 * 13 = 1,04 \text{ м/с}^2.$$

Измерим отрезок $(\pi_{A_1B_1} b_1)$:

$$(\pi_{A_1B_1} b_1) = 14 \text{ мм. Значит модуль касательного ускорения } \overline{a_{B_1A_1}^{\tau}} \text{ равен } a_{B_1A_1}^{\tau} = \mu_a * (\pi_{A_1B_1} b_1) = 0,08 * 14 = 1,12 \text{ м/с}^2. \text{ Модуль углового ускорения}$$

звена AB в данном положении 1 вычисляем по формуле:

$$|\varepsilon_{A_1B_1}| = a_{B_1A_1}^{\tau} / L_{AB} = 1,12 / 1 = 1,12 \text{ рад/с}^2.$$

Измерим отрезок $(\pi_{O_2B_1} b_1)$:

$$(\pi_{O_2B_1} b_1) = 13 \text{ мм. Модуль касательного ускорения } \overline{a_{B_1O_2}^{\tau}} \text{ равен}$$

$\vec{a}_{\text{в.о.}} = \mu_a * (\overline{\text{п.о.в.}} \cdot b_1) = 0,08 * 13 = 1,04 \text{ м/с}^2$ и соответственно модуль
 углового ускорения звена $\text{O}_2\text{В}$ равен
 $|\varepsilon_{\text{O}_2\text{В}}| = \vec{a}_{\text{в.о.}} / L_{\text{O}_2\text{В}} = 1,04 / 0,5 = 2,08 \text{ рад/с}^2$.

Для определения положения точки c_1 на плане ускорений построим треугольник $\text{o}_2b_1c_1$, подобный треугольнику $\text{O}_2\text{В}_1\text{С}_1$ на плане положений (метод или теорема подобия) на отрезке $(\overline{\text{пб}}_1)$. Эти треугольники обычно повернуты относительно друг друга. По условию $L_{\text{O}_2\text{C}_1} = L_{\text{O}_2\text{В}_1} \Rightarrow \text{O}_2\text{C}_1 = \text{O}_2\text{В}_1 \Rightarrow \overline{\text{пс}}_1 = \overline{\text{пб}}_1 \Rightarrow a_{c_1} = a_{\text{в.о.}} = 1,04 \text{ м/с}^2$. Угловое ускорение звена 3, которому принадлежат точки С и В, мы уже находили. Далее к основному механизму присоединяется структурная группа Асура II класса первого вида $\text{С}_1\text{D}_1\text{O}_3$. Ускорение точки С_1 известно, ускорение точки O_3 равно нулю, т.е. тоже известно. Следовательно, можем определить скорость точки D_1 .

Построение ведём по двум векторным уравнениям:

$$\vec{a}_{\text{D}_1} = \vec{a}_{\text{C}_1} + \vec{a}_{\text{D}_1\text{C}_1}^n + \vec{a}_{\text{D}_1\text{C}_1}^\tau \text{ и}$$

$$\vec{a}_{\text{D}_1} = \vec{a}_{\text{O}_3} + \vec{a}_{\text{D}_1\text{O}_3}^n + \vec{a}_{\text{D}_1\text{O}_3}^\tau = \vec{a}_{\text{D}_1\text{O}_3}^n + \vec{a}_{\text{D}_1\text{O}_3}^\tau, \text{ т.к. } \vec{a}_{\text{O}_3} = 0.$$

Вектор $\overline{\text{пс}}_1$, соответствующий вектору ускорения \vec{a}_{C_1} , уже отложен. Из точки п отложим вектор $\overline{\text{пo}_3}$. По длине:
 $(\overline{\text{пo}_3}) = a_{\text{O}_3} / \mu_a = 0$, т.к. $a_{\text{O}_3} = 0$.

Следовательно, точки п и O_3 совпадают.

Из точки C_1 отложим вектор $\overline{\text{с}_1\text{п.с.д.}}$. Этот вектор направлен так же, как и вектор $\vec{a}_{\text{D}_1\text{C}_1}^n$, т.е. вдоль отрезка C_1D_1 на плане положений от точки D_1 к точке C_1 , а по длине:

$$(c_{пс.д.})=a_{D,C}^n/\mu_a=(V_{D,C})^2/(L_{CD}*\mu_a)=0,6^2/(0,96*0,08)=4,7 \text{ мм.}$$

Из точки π отложим вектор $\overline{\pi o_{D_1}}$. Этот вектор направлен так же, как и вектор $\overline{a_{D,O_3}^n}$, т.е. вдоль отрезка O_3D_1 на плане положений от точки D_1 к точке O_3 , а по длине:

$$(\pi o_{D_1})=a_{D,O_3}^n/\mu_a=(V_{D,O_3})^2/(L_{O_3D_1}*\mu_a)=0,62^2/(0,52*0,08)=9,24 \text{ мм.}$$

Через точки $пс.д.$ и $по.д.$ проводим прямые, перпендикулярные отрезкам C_1D_1 и O_3D_1 на плане положений. Эти прямые параллельны линиям действий ускорений $\overline{a_{D,C_1}^{\tau}}$ и $\overline{a_{D,O_3}^{\tau}}$.

Точка пересечения этих прямых определит положение точки d_1 . Соединив точки π и d_1 получим вектор $\overline{\pi d_1}$. Измерим отрезок (πd_1) :

$$(\pi d_1)=17,5 \text{ мм. Значит модуль ускорения точки } D_1 \text{ равен}$$

$$a_{D_1}=\mu_a*(\pi d_1)=0,08*17,5=1,4 \text{ м/с}^2.$$

Измерим отрезок $пс.д. d_1$:

$$(пс.д. d_1)=8 \text{ мм. Следовательно модуль касательного ускорения}$$

$$\overline{a_{D,C_1}^{\tau}} \text{ равен}$$

$$a_{D,C_1}^{\tau}=\mu_a*(пс.д. d_1)=0,08*8=0,64 \text{ м/с}^2, \text{ а модуль углового ускорения}$$

$$\text{звена 4 равен}$$

$$|\varepsilon_{C_1D_1}|=a_{D,C_1}^{\tau}/L_{CD}=0,64/0,96=0,67 \text{ рад/с}^2.$$

Измерим отрезок $(по.д. d_1)$:

$$(по.д. d_1)=15 \text{ мм. Значит модуль касательного ускорения звена 5}$$

$$\text{равен}$$

$$a_{D,O_3}^{\tau}=\mu_a*(по.д. d_1)=0,08*15=1,2 \text{ м/с}^2 \text{ и модуль углового ускорения звена}$$

$$5 \text{ равен}$$

$$|\varepsilon_{O_3D}| = a_{D,O_3}^r / L_{O_3D} = 1,2 / 0,52 = 2,3 \text{ рад/с}^2.$$

Продолжим линию O_3d_1 . По полученной линии отложим отрезок d_1e_1 , найденный из соотношения:

$$(O_3d_1) / (d_1e_1) = L_{O_3D} / L_{DE} = 0,52 / 0,8, \text{ т.е. воспользуемся теоремой подобия:}$$

$$(d_1e_1) = (O_3d_1) * 0,8 / 0,52, \text{ где}$$

$$(O_3d_1) = (\pi d_1) = 17,5 \text{ мм.}$$

$(d_1e_1) = 17,5 * 0,8 / 0,52 = 26,9 \text{ мм.}$ Поэтому ускорение точки E звеньев 5 и 6 по модулю равно

$$a_{E1} = \mu_a * (\pi e_1) = \mu_a * (\pi d_1 + d_1e_1) = 0,08 * (17,5 + 26,9) = 0,08 * 44,4 = 3,55 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение звена 5, которому принадлежат точки E и D мы уже находили.

Теперь к основному механизму присоединяется группа Ассура II класса второго вида E_1F_1 , ползун.

Вспомним, что S – плоскость, содержащая ось x-x. В нашем случае эта плоскость неподвижна, т. к. находится на стойке.

Следовательно:

$$a_{F_{1S}} = 0, \quad \omega_s = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_s = 0.$$

Здесь F_{1S} – точка, принадлежащая плоскости S и совпадающая в данном положении с точкой F_1 , ω_s – угловая скорость плоскости S, ε_s – угловое ускорение плоскости S.

У данной структурной группы известны \vec{a}_{E_1} , $\vec{a}_{F_{1S}}$, ω_s , ε_s . Следовательно, можно найти \vec{a}_{F_1} . Построение ведем по двум векторным уравнениям:

$$\vec{a}_{F_1} = \vec{a}_{E_1} + \vec{a}_{F_1E_1}^n + \vec{a}_{F_1E_1}^r \quad \text{и}$$

$$\vec{a}_{F_1} = \vec{a}_{F_1s} + \vec{a}_{F_1F_1s}^k + \vec{a}_{F_1F_1s}^r.$$

Вектор $\vec{\pi e_1}$, соответствующий вектору ускорения \vec{a}_{E_1} уже отложен.

Из точки π отложим вектор $\vec{\pi f_{1s}}$. По длине:

$$(\pi f_{1s}) = a_{F_1s} / \mu_a = 0, \text{ т. к. } a_{F_1s} = 0.$$

Следовательно, точки π и f_{1s} совпадают.

Из точки e_1 отложим вектор $\vec{e_1 n_{E_1 F_1}}$. Этот вектор направлен также как и вектор $\vec{a}_{F_1 E_1}^n$, т.е. вдоль отрезка $E_1 F_1$ на плане положений от точки F_1 к точке E_1 , а по длине равен:

$$(\vec{e_1 n_{E_1 F_1}}) = a_{F_1 E_1}^n / \mu_a = (v_{F_1 E_1})^2 / (L_{EF} * \mu_a) = 1,04^2 / (0,88 * 0,08) = 15,36 \text{ мм.}$$

Вычислим модуль вектора $\vec{a}_{F_1 F_1s}^k$:

$$a_{F_1 F_1s}^k = 2 * |\omega_s| * v_{F_1 F_1s} = 0, \text{ т. к. } \omega_s = 0.$$

Из точки f_{1s} отложим вектор $\vec{f_{1s} k}$. По длине:

$$f_{1s} k = a_{F_1 F_1s}^k / \mu_a = 0, \text{ т. к. } a_{F_1 F_1s}^k = 0.$$

Следовательно, точки f_{1s} и k совпадают.

Через точку $n_{E_1 F_1}$ проводим прямую, перпендикулярную отрезку $E_1 F_1$ на плане положений. Эта прямая параллельна линии действия ускорения $\vec{a}_{F_1 E_1}^r$.

Через точку k проводим прямую, направленную параллельно оси $x-x$ на плане положений. Эта прямая параллельна линии действия ускорения $\vec{a}_{F_1 F_1s}^r$.

Пересечение этих двух прямых, проведённых через точки π_{E,F_1} и k определит точку f_1 . Соединив точки π и f_1 получим вектор $\overline{\pi f_1}$.

Измерим отрезок (πf_1):

(πf_1)=64 мм и вычислим модуль ускорения ползуна 7 в положении 1:

$$a_{F_1} = \mu_a * (\pi f_1) = 0,08 * 64 = 5,12 \text{ м/с}^2.$$

Измерим отрезок ($\pi_{E,F_1} f_1$):

($\pi_{E,F_1} f_1$)=13 мм и вычислим модуль касательного ускорения $\overline{a}_{F_1 E_1}^{\tau}$:

$\overline{a}_{F_1 E_1}^{\tau} = \mu_a * (\pi_{E,F_1} f_1) = 0,08 * 13 = 1,04 \text{ м/с}^2$, а также модуль углового ускорения звена 6:

$$|\varepsilon_{E_1 F_1}| = \overline{a}_{F_1 E_1}^{\tau} / L_{EF} = 1,04 / 0,88 = 1,18 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение ползуна равно угловому ускорению плоскости S и равно нулю. Для определения направлений угловых ускорений $\varepsilon_{O_1 B_1}$, $\varepsilon_{A_1 B_1}$, $\varepsilon_{O_1 D_1}$, $\varepsilon_{C_1 D_1}$, $\varepsilon_{E_1 F_1}$ мысленно приложим векторы $\overline{a}_{B_1 O_1}^{\tau}$, $\overline{a}_{B_1 A_1}^{\tau}$, $\overline{a}_{D_1 O_1}^{\tau}$, $\overline{a}_{D_1 C_1}^{\tau}$, $\overline{a}_{F_1 E_1}^{\tau}$ (или векторы $\overline{p_{O_1 B_1} b_1}$, $\overline{p_{A_1 B_1} b_1}$, $\overline{p_{O_1 D_1} d_1}$, $\overline{p_{C_1 D_1} d_1}$, $\overline{p_{E_1 F_1} f_1}$) к точкам B_1 , B_1 , D_1 , D_1 , F_1 соответственно и увидим, что $\varepsilon_{A_1 B_1}$, $\varepsilon_{C_1 D_1}$, $\varepsilon_{O_1 D_1}$, $\varepsilon_{E_1 F_1}$ направлены против хода часовой стрелки, а $\varepsilon_{O_1 B_1}$ направлен по ходу часовой стрелки.

Направления векторов ускорений получены на плане ускорений (рис. 23).

7. ВВЕДЕНИЕ В КУРС «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ», ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Задачи и содержание курса «Соппротивление материалов».

Соппротивление материалов изучает поведение различных материалов при действии на них сил и указывает, как подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и поперечные размеры при условии полной надежности работы и наибольшей дешевизны конструкции.

Иногда приходится решать видоизмененную задачу – проверять достаточность размеров запроектированной или существующей конструкции.

Поперечные размеры элемента конструкции находят, пользуясь условием прочности. Достаточность уже принятых поперечных размеров элемента проверяется также при помощи условия прочности. Условие прочности обеспечивает невозможность разрушения элемента конструкции или получения им остаточных деформаций. В большинстве случаев условие прочности должно быть дополнено проверками на жесткость и устойчивость. Проверка на жесткость должна ограничить деформации элементов. Проверка на устойчивость должна обеспечить возможность изменения элементами конструкции намеченной для них формы равновесия.

Основные гипотезы сопротивления материалов.

- а) Гипотеза о сплошности материала. Считается, что материал непрерывно заполняет весь объём элемента конструкции и не учитывается структура материала;
- б) Гипотеза об однородности материала. Считается, что весь объём материала обладает одинаковыми механическими свойствами;
- в) Гипотеза об изотропности материала. Считается, что механические свойства материала одинаковы во всех направлениях. В противном случае материал называется анизотропным.
- г) Гипотеза о линейной упругости материала. Считается, что диаграмма деформирования материала выражена линейной зависимостью.

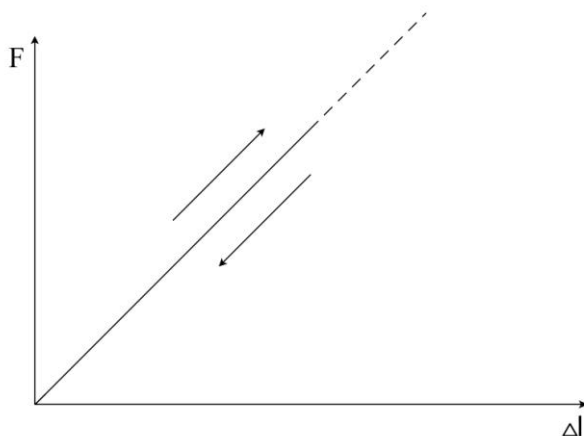


Рис. 24

д) Гипотеза о малости перемещений. Считается, что перемещения элемента конструкции малы по сравнению с его размерами.

е) Принцип суперпозиции. Для линейно-деформируемых конструкций справедлив принцип суперпозиции: результат действия группы сил равен алгебраической или геометрической сумме результатов, полученных от действия каждой группы в отдельности.

Линейно-деформируемой называется конструкция в элементах которой внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения прямо пропорциональны действующей на конструкцию нагрузке. Такая прямо пропорциональная связь наблюдается при малых деформациях. Так как деформация элементов малы, то считается, что рассматриваемые конструкции являются линейно-деформируемыми и, следовательно, для них справедлив принцип суперпозиции.

Классификация внешних нагрузок.

Силу или момент, которые условно считаются приложенными в точке, называют сосредоточенными. В действительности сосредоточенная сила или момент передаются на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента. Благодаря полости размеров этой площадки сосредоточенную силу или момент при расчетах считают приложенной в точке. Единицей измерения

величины сосредоточенной силы является Ньютон (Н), а единицей измерения величины сосредоточенного момента – (Нм).

Распределенными нагрузками называются силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади элемента конструкции.

Объёмными силами называются силы, действующие на каждый элемент объёма конструкции. Примером объёмных сил является сила тяжести.

Сила, распределенная по длине элемента называется линейно-распределенной или погонной нагрузкой. Сила, распределенная по площади элемента называется поверхностной нагрузкой. Объёмные силы называют объёмной нагрузкой.

Распределенные нагрузки и объёмные силы характеризуются в каждой точке вектором интенсивности. Векторы интенсивности определяются по формулам:

$$\bar{q} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta l}; \quad \bar{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A}; \quad \bar{\gamma} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta V},$$

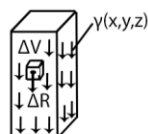
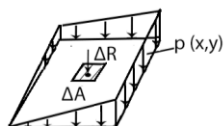
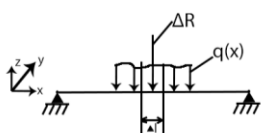


Рис. 25

где \bar{q} - вектор интенсивности линейно-распределенной нагрузки; \bar{P} - вектор интенсивности поверхностной нагрузки; $\bar{\gamma}$ - вектор интенсивности объёмной нагрузки; $\Delta\bar{R}$ - равнодействующая сила на длине Δl , площадке ΔA или объёма ΔV . Величины интенсивностей – распределенных и объёмных сил являются их мерой. Единицей измерения величин интенсивностей являются: для q - н/м, для P - н/м², для γ - н/м³. Если интенсивность линейно-распределенной, поверхностной или объёмной нагрузки постоянна, то она называется равномерно-распределенной нагрузкой. В противном случае – неравномерно-распределенной нагрузкой.

По характеру действия нагрузки делятся на статические и динамические.

Нагрузка, постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями или ускорениями возникающего движения можно пренебречь, называется статической.

Быстро изменяющуюся нагрузку называют динамической.

При расчете элемента конструкции реальный элемент с приложенными к нему внешними нагрузками заменяется расчетной схемой. Для примера рассмотрим шарнирно-опертую балку с приложенными к ней сосредоточенными силами (см. рис. 26). Перенесем силы, приложенные к балке к оси стержня. В результате получим осевую расчетную схему, где обозначена

ось балки, нагруженная сосредоточенными силами и моментами (см. рис. 27).

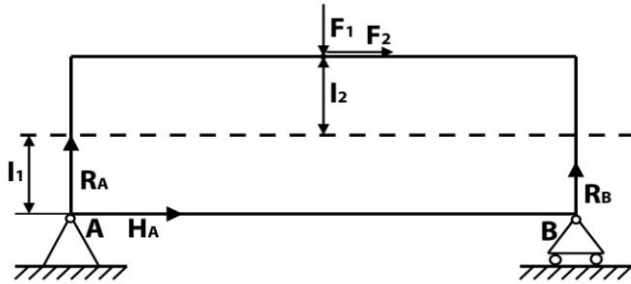


Рис. 26

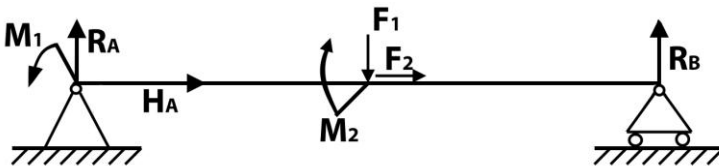


Рис. 27

Воздействия на элемент тех частей конструкции на которые он опирается называются реакциями. Реакции находятся из уравнений равновесия.

Стержень, пластина, оболочка.

Стержень- это тело, длина которого ℓ существенно превышает размеры поперечного сечения h и b (рис. 28). Размеры h и b могут быть переменными.

Вначале будут рассмотрены стержни с постоянными размерами h и b .

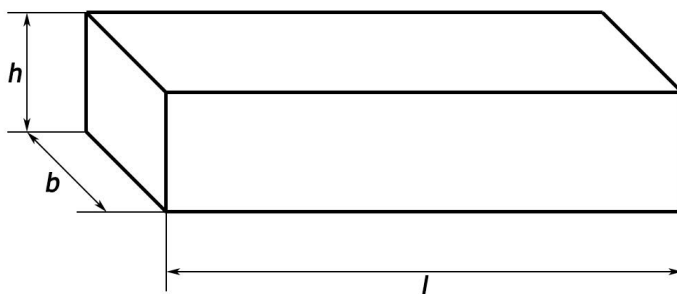


Рис. 28

Осью стержня называется геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести поперечных сечений. Если ось стержня является прямой, то стержень называется прямолинейным. Если ось является кривая линия, то стержень называется криволинейным.

В дальнейшем оси координат будем выбирать так, чтобы ось x всегда совпадала с осью прямолинейного стержня, а оси y и z лежали в плоскости поперечного сечения. Если стержень криволинейный, то ось x направляется по касательной к оси стержня.

Основные расчетные уравнения для стержня записываются относительно одной независимой переменной – координаты x . Решение этих уравнений составляет одномерную задачу.

Пластина – это тело, у которой толщина δ существенно меньше его размеров a и b (рис. 29).

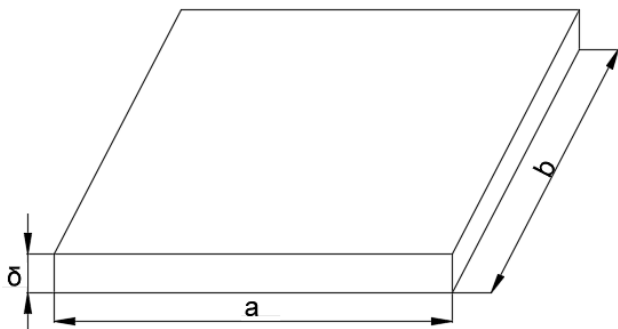


Рис. 29

Криволинейная пластина называется оболочкой (рис. 30).

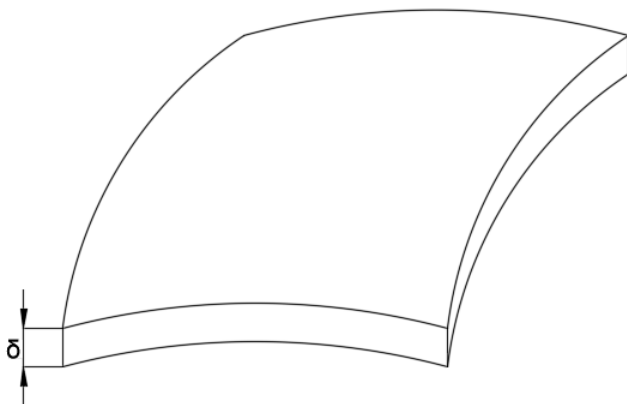


Рис. 30

Основные расчетные уравнения для пластин и оболочек зависят от двух аргументов: x и y . Решение этих уравнений составляет двумерную задачу.

В курсе сопротивления материалов будут рассматриваться одномерные задачи расчета стержневых элементов конструкций.

Стержневые элементы, работающие на изгиб, называются балками. Стержневые элементы, на которые действуют вертикальные сжимающие силы параллельно их оси называются стойками. Наклонные стержневые элементы называются раскосами. Конструкция, состоящая из соединенных изгибающих стержней, называется рамой. Конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирно, нагруженная только в узлах называется фермой. Стержень, передающий вращательное движение, называется валом.

Деформации и перемещения.

Элемент конструкции под действием внешних сил изменяет свои размеры и форму. Это изменение формы и размеров называется деформацией.

Некоторая произвольная точка M переходит в новое положение M_1 (рис. 31). Вектор $\overline{MM_1}$ называется вектором полного перемещения точки M . Его проекции на оси координат x , y , z называются перемещениями по осям и обозначаются u , v , w , соответственно.

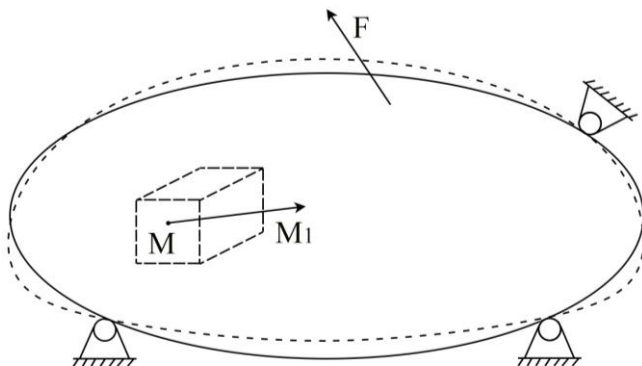


Рис. 31

Кроме линейного перемещения существует угловое перемещение. Рассмотрим отрезок между двумя близкими точками. Если сравнить положения этого отрезка до и после деформации, то они будут повернуты друг относительно друга, на некоторый угол. Этот угол поворота также характеризуется вектором, который может быть разложен по осям x , y , z .

Выделим возле точки M элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz и рассмотрим его отдельно (рис. 32).

За счет деформации длины ребер этого параллелепипеда получает абсолютные удлинения Δdx , Δdy , Δdz . Относительными линейными деформациями называются величины, вычисляемые по формулам:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

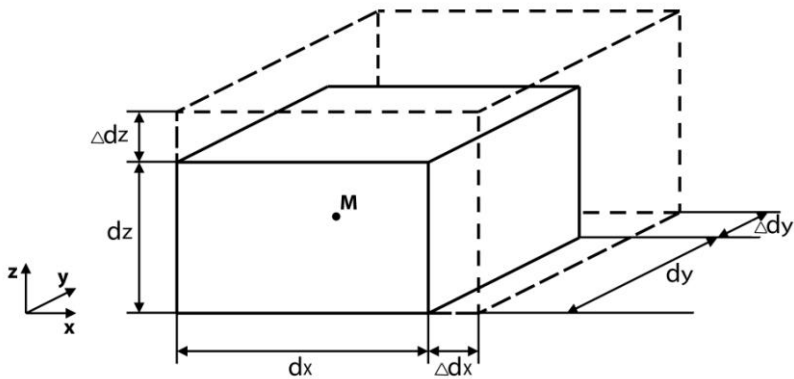


Рис. 32

Относительные линейные деформации безразмерные и для реальных материалов имеют порядок $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Кроме линейных деформаций возникают угловые деформации или углы сдвига, представляющие собой малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда. В плоскости xz это будет величина γ_{xz} (рис. 33).

Аналогично определяются величины γ_{yz} γ_{xy} .

Деформации разделяются на упругие и остаточные. Упругими называются деформации, которые исчезают после удаления вызвавших их сил. Оставшиеся после снятия нагрузки деформации называются остаточными.

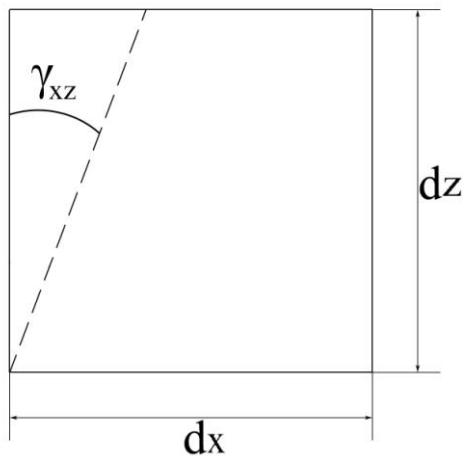


Рис. 33

Внутренние силы. Напряжения.

В элементе конструкции под действием внешних сил возникают дополнительные внутренние силы, сопровождающие деформацию материала. В дальнейшем будем называть их просто внутренними силами.

Эти внутренние силы стремятся восстановить прежнюю форму и размеры деформированного элемента.

Рассмотрим элемент конструкции, находящийся в равновесии под действием некоторых сил $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$. Реакции опор включены в число указанных сил (рис. 34).

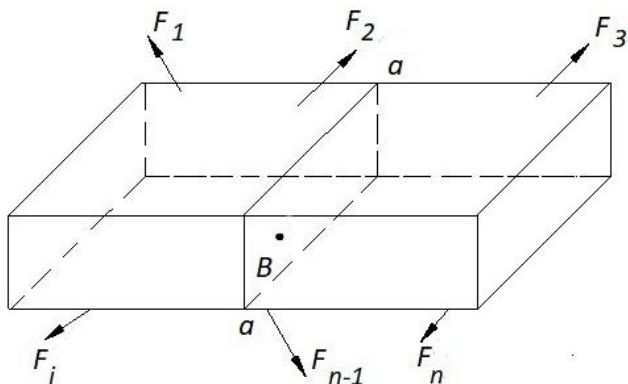


Рис. 34

Через рассматриваемую точку B – мысленно проведем сечение $a-a$. К этому сечению приложены внутренние силы, с которыми левая часть элемента действует на правую, или правая часть действует на левую. Внутренние силы распределены по всему сечению. Рассмотрим левую часть и внутренние силы, действующие на нее со стороны правой части (рис. 35).

В окрестности точки B выделим малую площадку ΔA_n . Ее ориентация в пространстве определяется нормалью \vec{n} . Вектор ΔR_n – это равнодействующая внутренних сил на площадке ΔA_n .

Полным напряжением в точке B по сечению с нормалью n Называется вектор P_n который определяется по формуле

$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}_n}{\Delta A_n}$$

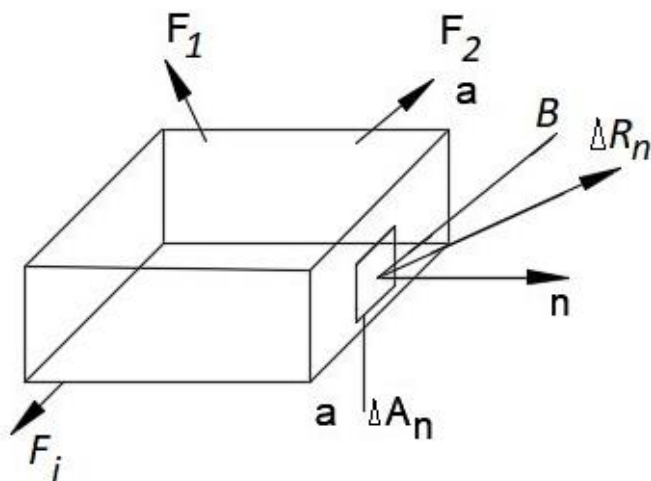


Рис. 35

Из определения следует, что полным напряжением в точке по сечению называется интенсивность внутренних поверхностных сил в данной точке, распределенных по сечению. Следовательно, единицей измерения величины полного напряжения является $H/m^2 = Па$.

Разложим вектор P_n на составляющие σ_n и τ_n (рис. 36).

σ_n - нормальное напряжение

τ_n - касательное напряжение.

Вектор σ_n направлен к нормали к плоскости сечения.

Вектор τ_n находится в плоскости сечения. Вектор τ_n может

быть разложен на составляющие по осям координат, находящимся в плоскости сечения.

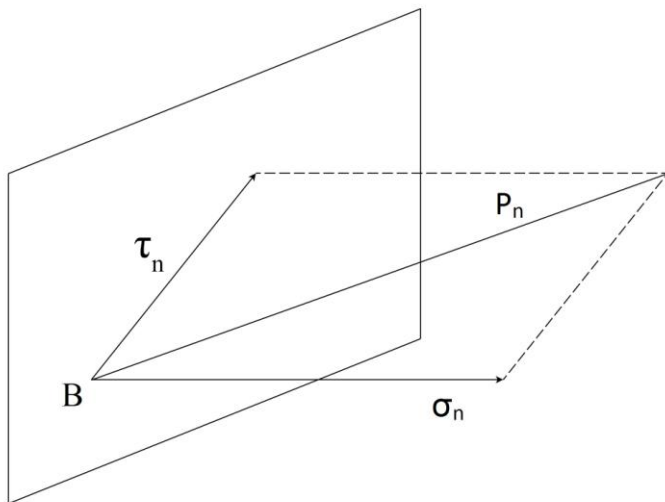


Рис. 36

Выделим в окрестности точки B бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz . Если полные напряжения P_x , P_y , P_z , действующие на его гранях разложить на составляющие, то на каждой грани получим одно нормальное и два касательных напряжения (рис. 37).

Для трех граней элемента они образуют тензор напряжений

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

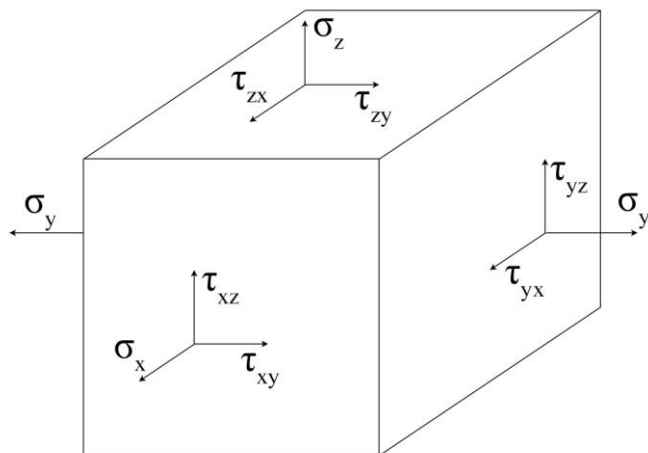


Рис. 37

У нормального напряжения индекс говорит о том, что оно действует на площадке с нормалью параллельной указанной оси в направлении, параллельном этой оси. У касательного напряжения первый индекс говорит о том, что оно действует на площадке с нормалью, параллельной указанной оси, а второй индекс говорит о том, что оно действует в направлении, параллельном указанной оси.

Связь между внутренними усилиями и напряжениями.

Рассмотрим поперечное сечение *a-a* элемента конструкции, находящегося в равновесии под действием сил $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$. Реакции опор включены в число указанных сил (рис. 38).

Внутренние силы, действующие со стороны правой части на левую, распределенные по сечению, приведем к главному

вектору \vec{V} , приложенному в центре тяжести O сечения $a - a$ и главному моменту \vec{M} (рис. 39).

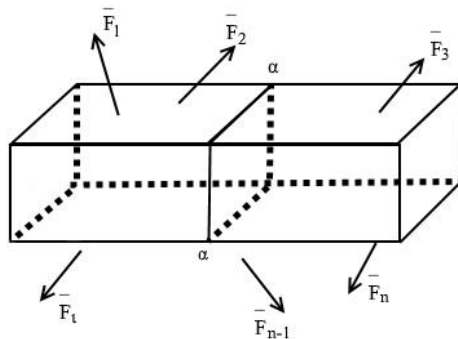


Рис. 38

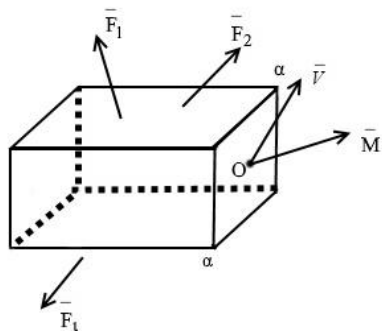


Рис. 39

Проведем оси координат O_{xyz} . Ось x направим по оси стержня от сечения. Она перпендикулярна плоскости сечения. Оси y и z лежат в плоскости сечения. Разложим векторы \vec{V} и

\bar{M} на шесть составляющих: три силы N, Q_y, Q_z и три момента M_x, M_y, M_z (рис. 40).

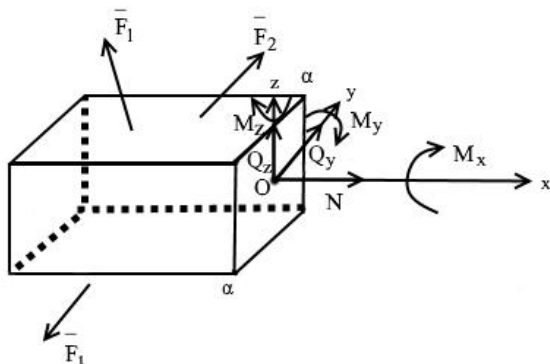


Рис. 40

Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, распределенных на площади сечения, называются внутренними усилиями в сечении. Каждое внутреннее усилие имеет свое название.

N – продольная сила,

Q_y, Q_z – поперечные силы, параллельные осям y и z соответственно.

$M_x = M_{кр}$ – крутящий момент

M_y, M_z – изгибающие моменты относительно осей y и z соответственно.

Рассмотри в сечении $a - a$ бесконечно малую площадку dA . Если спроецировать вектор полного напряжения P_x ,

действующего на этой площадке на оси координат, то получим 3

составляющие полного напряжения: $\sigma_x; \tau_{xy}; \tau_{xz}$ (рис. 41).

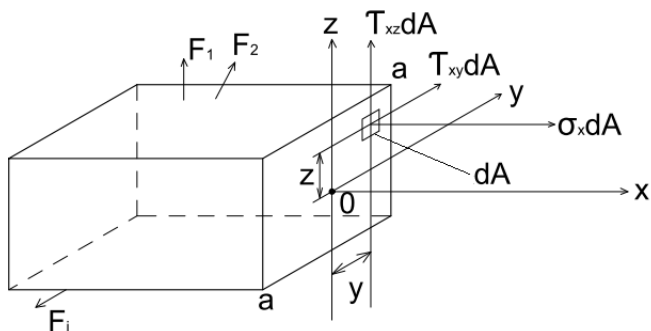


Рис. 41

Если сравнить этот рисунок с предыдущим, то можно выразить внутренние усилия через напряжения, действующие в поперечном сечении.

Элементарные силы, действующие на площадку dA равны $\sigma_x dA, \tau_{xy} dA, \tau_{xz} dA$. Проецируя все элементарные силы на оси x, y и z и суммируя эти силы и их моменты относительно осей координат по всему сечению получим:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad ; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad ; \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad ;$$

$$M_x = M_{кр} = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA \quad ;$$

$$M_y = \int_A (\sigma_x dA) \cdot z \quad ; \quad M_z = \int_A (\sigma_x dA) \cdot y$$

Здесь \int_A означает интегрирование по площади A .

Метод сечений.

При помощи метода сечений определяются внутренние усилия в произвольном сечении элемента конструкции через внешние нагрузки.

Рассмотри элемент, находящийся в равновесии действием сил $F_1, F_2, \dots, F_{i-1}, \dots, F_n$. Реакции опор входят в число этих сил (рис. 42).

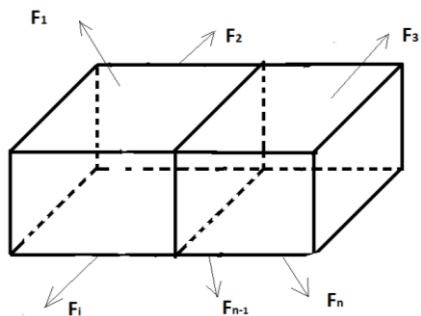


Рис. 42

Мысленно рассечем элемент по сечению $a - a$ на две части. Отбросим одну из частей, например, правую. Оставшаяся левая часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил, приложенных к ней. Внутренние силы приложены к левой части элемента в сечении $a - a$. Ранее было

показано, что их можно заменить внутренними усилиями $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 43).

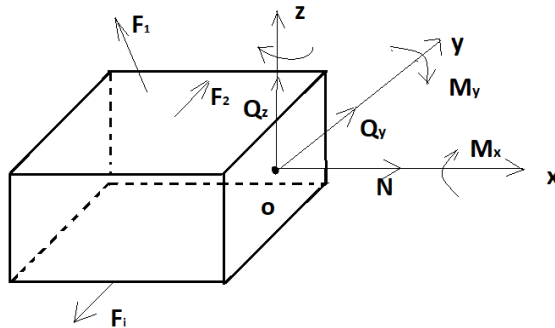


Рис. 43

Запишем для оставшейся левой части шесть уравнений равновесия.

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa x} = 0 \quad \sum_{\kappa=1}^n M_{x\kappa} = 0$$

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa y} = 0 \quad \sum_{\kappa=1}^n M_{y\kappa} = 0$$

$$\sum_{\kappa=1}^n F_{\kappa z} = 0 \quad \sum_{\kappa=1}^n M_{z\kappa} = 0$$

Из этих шести уравнений равновесия находим шесть неизвестных внутренних усилий.

Можно отбросить левую часть и рассмотреть равновесие правой части под действием внешних и внутренних усилий. Согласно закону о равенстве действия и противодействия внутренние усилия, которые приложены к правой части

элемента со стороны левой части равны по величине и противоположены по направлению внутренним усилиям, действующим на левую часть со стороны правой части (рис. 44).

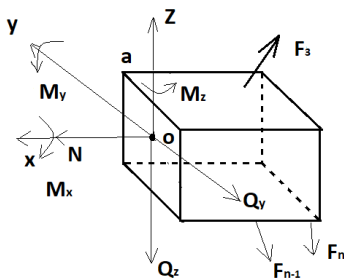


Рис. 44

Из рисунков для левой и правой частей элемента видно, что на обоих рисунках у направлений внутренних усилий можно выявить общие признаки. Продольная сила направлена от сечения и вызывает растяжение. Поперечные силы Q_y и Q_z вращают оставшуюся часть элемента против хода часовой стрелки, относительно произвольной точки на оси оставшейся части при взгляде со стороны видимых на чертеже частей элемента. Момент M_x направлен по ходу часовой стрелки при взгляде на сечение со стороны внешней нормали. Момент M_y вызывает растяжение волокон с положительными координатами z . Момент M_z вызывает растяжение волокон с положительными координатами y .

Указанные на рисунках направления внутренних усилий в дальнейшем будем считать положительными, а для определения этих направлений будем использовать отмеченные признаки.

Эпюры внутренних усилий.

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях, меняются вдоль его оси.

Графики изменения внутренних усилий вдоль оси стержня называются эпюрами.

Эпюры внутренних усилий строятся для определения опасных сечений. Опасными являются сечения, в которых внутренние усилия достигают наибольших значений.

Эпюры строятся в следующем порядке.

1. Строятся базисные линии. Базисная линия – это линия, параллельная оси стержня. Она располагается справа от расчетной схемы, если ось стержня расположена вертикально и ниже расчетной схемы, если ось стержня расположена горизонтально. Если ось стержня наклонная, криволинейная или ломаная, то базисная линия располагается произвольно, но непосредственной близости от расчетной схемы стержня
2. Определяются реакции опор, если это необходимо.
3. Устанавливаются границы участков.

Границами участков являются сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы и моменты или начинается и

заканчивается распределенная нагрузка, а также сечения, в которых имеется перелом оси стержня.

4. Применяя метод сечений и учитывая правило знаков, получают аналитические зависимости внутренних усилий от координаты x в пределах каждого участка.

5. Используя полученные аналитические зависимости, строят графики внутренних усилий, которые называются эпюрами.

При этом ординаты эпюр откладывают в определенном масштабе перпендикулярно базисной линии и указывают их значения в характерных точках. В кружочке указывают знак внутреннего усилия. Построенную эпюру штрихуют линиями, перпендикулярными базисной линии.

Дифференциальные зависимости между M , Q и q при изгибе.

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.

Если изгибающий момент в сечении является единственным внутренним усилием, то изгиб называется чистым.

Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, которая проходит через ось балки и главную ось поперечного сечения (например ось симметрии сечения), то изгиб называется плоским.

Если при плоском изгибе внешняя нагрузка перпендикулярна оси балки, то в поперечных сечениях балки возникают только поперечная сила и изгибающий момент. Такой изгиб называется поперечным.

Согласно правилу знаков, введенному ранее для общего случая нагружения, поперечная сила Q_z положительна, если стремится повернуть оставшуюся часть балки против хода часовой стрелки относительно произвольной точки на оси оставшейся части. Изгибающий момент M_y положителен, если он растягивает верхние волокна балки (рис. 45).

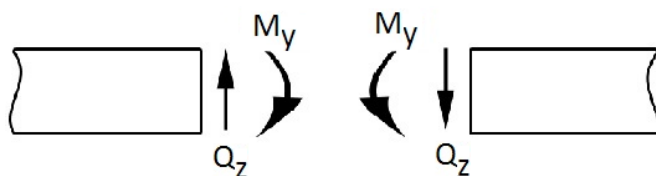


Рис. 45

Внешнюю распределенную нагрузку будем считать положительной, если она совпадает по направлению с вертикальной осью z , направленной вверх.

Между внешней распределенной нагрузкой с интенсивностью q_z , поперечной силой Q_z и изгибающим моментом M_y , существуют дифференциальные зависимости. Выведем их.

Рассмотрим балку, к которой приложена положительная внешняя распределенная нагрузка (рис. 46).

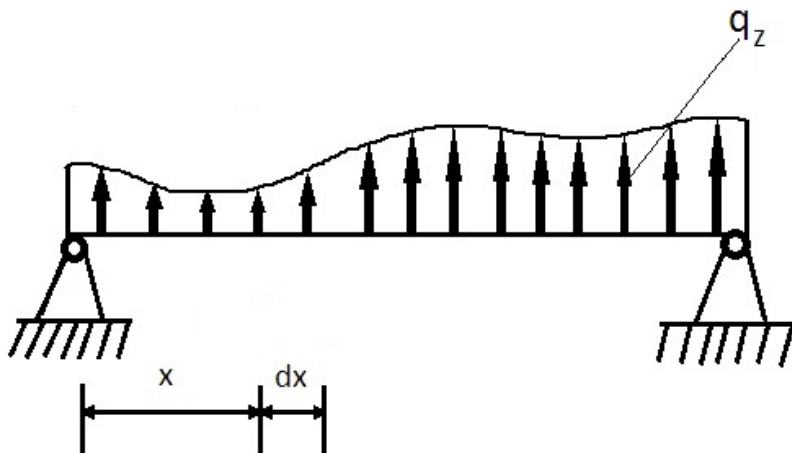


Рис. 46

Выделим в произвольном месте балки элемент длиной dx . Отбросим левую и правую части от этого элемента. Заменяем действие отброшенной левой части балки на элемент поперечной силой Q_z и изгибающим моментом M_y . Действие правой части на элемент заменим поперечной силой $Q_z + dQ_z$ и изгибающим моментом $M_y + dM_y$. Здесь dQ_z и dM_y - приращения поперечной силы и изгибающего момента на элементе dx .

Кроме внутренних усилий на элемент действует внешняя распределенная нагрузка, которую из-за малости dx можно считать равномерно распределенной.

Под действием указанных сил элемент находится в равновесии (рис. 47).

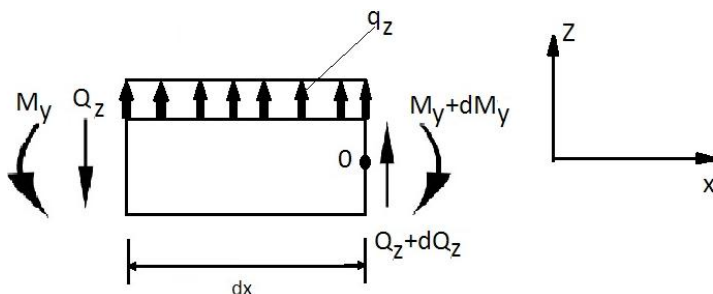


Рис. 47

Составим уравнения равновесия для элемента.

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Q_z + d_z dx + Q_z + dQ_z = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Ok} = 0; \quad M_y + Q_z dx - q_z \frac{(dx)^2}{2} - M_y - dM_y = 0 \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует

$$\frac{dQ_z}{dx} = q_z \quad (3)$$

Если в уравнении (2) пренебречь слагаемым $q_z \frac{(dx)^2}{2}$ как

величиной второго порядка малости, то получим

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (4)$$

Если записать зависимость (3) с учетом зависимости (4), то получим

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z \quad (5)$$

Зависимости (3), (4), (5) называются дифференциальными зависимостями между M_y , Q_z и q_z . В дальнейшем индексы у M_y , Q_z и q_z при плоском изгибе можно опускать.

Следствия, вытекающие из дифференциальных зависимостей между M , Q и q при изгибе. Проверка правильности построения эпюр.

Дифференциальные зависимости между M , Q и q имеют вид

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

Из этих дифференциальных зависимостей вытекают следующие следствия:

1. На участке, где $q = 0$, поперечная сила Q постоянна, изгибающий момент M изменяется по линейной зависимости.

Если одновременно $q = 0$ и $Q = 0$, то изгибающий момент M постоянен.

2. На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, ($q = const$) поперечная сила Q изменяется по линейной зависимости, а изгибающий момент M по квадратичной зависимости, у которой выпуклость обращена в сторону действия распределенной нагрузки q .

Если на этом участке поперечная сила Q в одном из сечений равна нулю, то изгибающий момент в этом сечении принимают экстремальное значение: максимум или минимум (рис. 48).

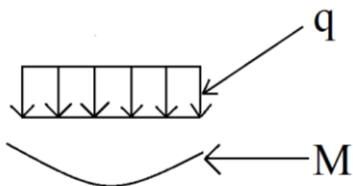


Рис. 48

3. В сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q будет скачок, равный значению этой силы при движении по оси стержня слева направо, а эпюра M будет иметь перелом, направленный в сторону действия силы (рис. 49).

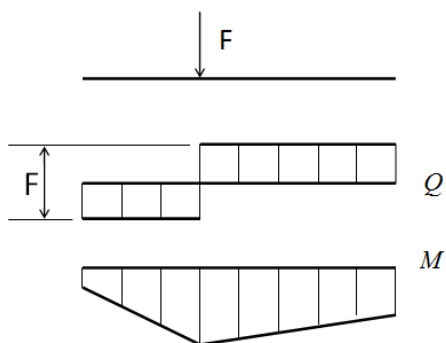


Рис. 49

4. В сечении, где применен сосредоточенный изгибающий момент, на эпюре Q изменений не будет, а на эпюре M будет скачок, равный значению сосредоточенного момента. Направление скачка будет вверх при движении вдоль оси стержня слева направо, если сосредоточенный момент направлен против хода часовой стрелки (рис. 50).

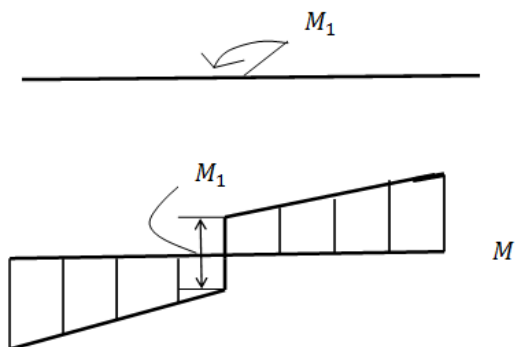


Рис. 50

Эти следствия из дифференциальных зависимостей между M , Q , и q используются при построении эпюр M и Q , и для проверки правильности построения эпюр.

При построении эпюр M и Q положительные значения откладываются вверх, а отрицательные значения вниз.

8. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжение и сжатие прямолинейного стержня. Напряжения в поперечных сечениях стержня.

В простейшем случае растянутый или сжатый стержень - это стержень с силами, приложенными к концам и направленными вдоль его оси

Рассмотрим резиновый стержень прямоугольного поперечного сечения, на поверхность которого нанесена равномерная прямоугольная сетка. Нагрузим этот стержень сосредоточенными растягивающими силами F , приложенными в центре тяжести концевых сечений. Стержень деформируется так, как показано на рис. 51.



Рис. 51

Сечения искривляются лишь вблизи места нагружения. В этой области также будут неравномерно распределяться напряжения, что соответствует принципу Сен-Венана: распределения напряжений зависит от способа приложения

внешних сил лишь вблизи места нагружения, а в частях, достаточно удаленных от места приложения сил, распределение напряжений зависит только от статического эквивалента этих сил.

За пределами указанной области прямоугольная сетка не искажается и остается равномерной, изменяются лишь размеры ее ячейки. Вертикальные линии сетки перемещаются параллельно самим себе. Такая картина деформации стержня соответствует гипотезе плоских сечений. (гипотеза Бернулли): поперечные сечения стержня плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформации остаются плоскими и перпендикулярными оси и после деформации.

На основании гипотезы плоских сечений можно заключить, что нормальные напряжения распределены по поперечному сечению равномерно, т.е.

$$\sigma_x = const$$

Ранее было показано, что

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$N = \sigma_x A \quad (\text{т.к. } \sigma_x = const)$$

Тогда

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Растягивающие напряжения будут считать положительными, сжимающие-отрицательными.

Напряжения в сечениях, наклоненных к поперечному сечению при растяжении (сжатии).

Рассмотрим стержень, растянутый равномерно-распределенной нагрузкой. Определим напряжения на наклонной площадке, составляющей угол α с поперечным сечением (рис. 52).



Рис. 52

Рассечем стержень по этому наклонному сечению и отбросим правую его часть. На наклонной площадке полные напряжения P_α будут направлены вдоль продольной оси и распределены равномерно (рис. 53).

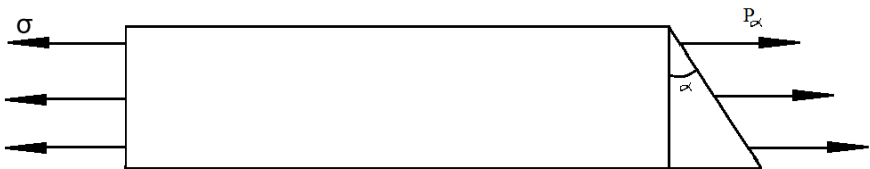


Рис. 53

Оставшаяся левая часть находится в равновесии. Поэтому

$$-\sigma \cdot A + P_\alpha A_\alpha = 0 \text{ или}$$

$$-\sigma \cdot A = P_\alpha A_\alpha,$$

где $A_\alpha = A / \cos \alpha$ - площадь наклонного сечения.

$$\text{Тогда } P_\alpha = \sigma \cos \alpha.$$

Разложим полное напряжение P_α на нормальное σ_α и касательное τ_α (рис. 54).

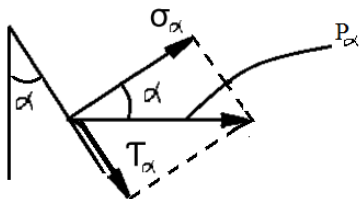


Рис. 54

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin^2 \alpha; \text{ или}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

На площадках, совпадающих с поперечными сечениями, т.е при $\alpha = 0$, имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x = \sigma_{\max} = \frac{N}{A}, \quad \tau_{\alpha} = 0.$$

На продольных площадках, т.е. при $\alpha = 90^{\circ}$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\min} = 0 \quad \tau_{\alpha} = 0.$$

На площадках, наклоненных под углом $\alpha = 45^{\circ}$ имеем

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{N}{2A} \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}.$$

Такое же по абсолютной величине напряжения получим на площадках наклоненных под углом $\alpha = 135^{\circ}$.

На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине, т.к.

$$|\sin 2\alpha| = |\sin 2(\alpha + 90^{\circ})|.$$

На площадках с экстремальными значениями нормальных напряжений (в продольных и поперечных сечениях) касательные напряжения равны нулю.

Продольные и поперечные деформации при растяжении (сжатии).

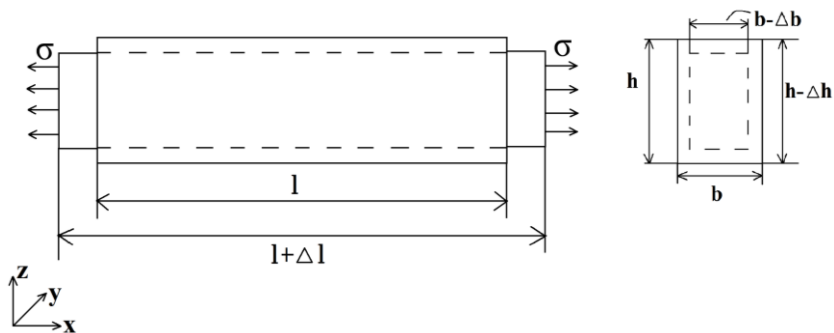


Рис. 55

Рассмотрим стержень, растянутый равномерно распределенной нагрузкой (рис. 55). Длина стержня увеличивается и становится равной $l + \Delta l$, где Δl – абсолютная продольная деформация стержня.

Поперечные размеры стержня уменьшаются и становятся равными $h - \Delta h$ и $b - \Delta b$, где Δh и Δb – это абсолютные поперечные деформации стержня.

Отношение абсолютной продольной деформации стержня к его первоначальной длине называется относительной продольной деформацией.

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}.$$

Отношение абсолютной поперечной деформации стержня к его первоначальному поперечному размеру называется относительной поперечной деформацией.

$$\varepsilon_{\text{попер.}} = \varepsilon_y = \frac{-\Delta b}{b}, \quad \varepsilon'_{\text{попер}} = \varepsilon_z = \frac{-\Delta h}{h}.$$

Знак (+) у деформации ε_x и знак (-) у деформаций ε_y и ε_z поставлены потому, что при растяжении продольные размеры стержня увеличиваются, а поперечные размеры уменьшаются.

Для изотропных материалов поперечные деформации равны между собой:

$$\varepsilon_{\text{попер.}} = \varepsilon_y = \varepsilon_z.$$

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ называются также относительными линейными деформациями и являются безразмерными величинами.

Закон Гука при растяжении (сжатии).

Модуль упругости, Коэффициент Пуассона.

Существует закономерность между силами и перемещениями, которые они вызывают. Эта закономерность называется законом Гука. Если перейти к напряжениям и деформациям, то закон Гука имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль упругости.

Модуль упругости является физической постоянной материала и определяется экспериментально. Единицей измерения модуля упругости является $H / м^2 = Па$, т.к. ε - безразмерная величина.

Модуль упругости большинства материалов имеет большие числовые значения. Например, для стали $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, для меди $E = 10^{11} \text{ Па}$, для дерева $E = 10^{10} \text{ Па}$

Абсолютное значение отношения относительной поперечной деформации при растяжении или сжатии в области действия закона Гука называется коэффициентом Пуассона.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}} \right| \quad (1)$$

Коэффициент Пуассона для каждого материала определяется экспериментально. Значения коэффициента Пуассона находятся в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$.

Для большинства материалов $0,25 \leq \mu \leq 0,35$.

Рассмотрим стержень, который растянут вдоль оси x (см. рис. 55).

Деформация в направлении оси x на основании закона Гука равна:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Из (1) следует:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}} = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Определение осевых перемещений при растяжении (сжатии).

Рассмотрим стержень, нагруженный на правом конце равномерно распределенной нагрузкой, которая вызывает его растяжение (рис. 56).

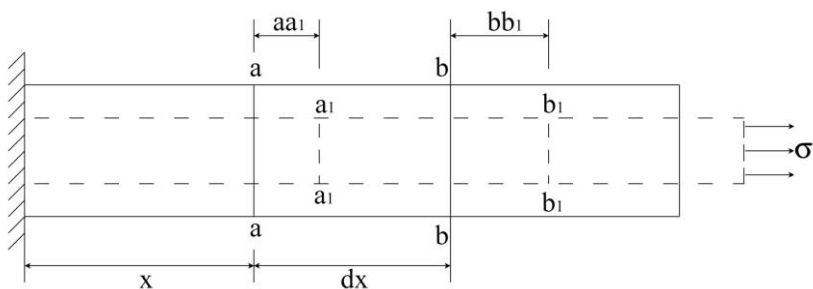


Рис. 56

Выделим два произвольных сечения $a-a$ и $b-b$, которые находятся на расстоянии dx друг от друга.

От приложенной нагрузки сечение $a-a$ переместится в положение a_1-a_1 на расстояние $aa_1=u(x)$, а сечение $b-b$ переместится в положение b_1-b_1 на расстояние $bb_1=u(x)+du$.

Следовательно, удлинение участка стержня длиной dx равно:

$$\Delta dx = bb_1 - aa_1 = du,$$

А относительная деформация:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Ранее было показано, что

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA} \quad (2)$$

Подставив формулу (2) в формулу (1) получим

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}; \quad du = \frac{N}{EA} dx$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до x

$$u(x) - u_0 = \int_0^x \frac{N}{EA} dx$$

Тогда

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{EA} dx, \quad (3)$$

где u_0 - перемещение левого конца стержня.

Если на некотором участке

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = const, \text{ то}$$

$$u(x) = u_0 + \frac{N}{EA} x. \quad (4)$$

Определим полное удлинение стержня

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \frac{Nl}{EA};$$

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}. \quad (5)$$

Эта формула применима на участке, где $\sigma_x = \frac{N}{A} = const$.

Если $\sigma_x = \frac{N}{A} \neq const$, то используя формулу (3) вместо формулы (4) получим:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{N}{EA} dx \quad (6)$$

Испытание материалов на растяжение. Основные механические характеристики материала.

Испытания проводятся на разрывных машинах. Через захваты к образцу прикладывается растягивающая нагрузка (рис. 57).

Разрывная машина снабжена устройством для автоматической записи в определенном масштабе диаграммы растяжения.

Диаграммой растяжения называется график зависимости между растягивающей силой F и удлинением образца $\Delta \ell$.

Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали изображена на рис. 58.

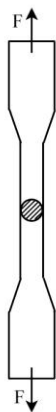


Рис. 57

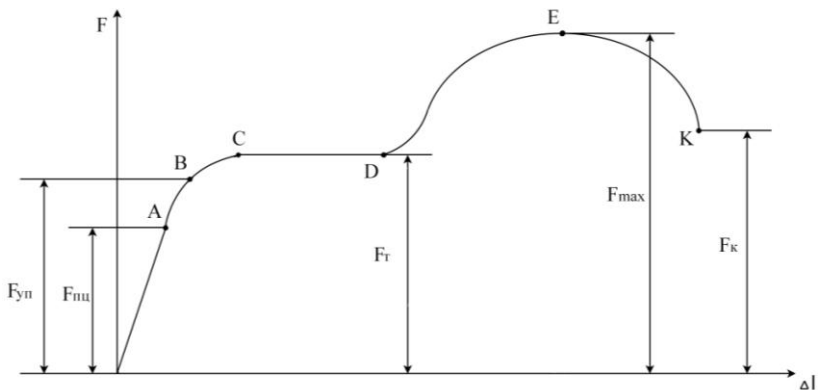


Рис. 58

До некоторой точки *A* диаграмма представляет собой наклонную прямую. На этом участке выполняется закон Гука. Максимальная нагрузка, при которой этот закон еще не нарушается, обозначена $F_{нп}$. Она используется для вычисления предела пропорциональности:

$$\sigma_{нп} = \frac{F_{нп}}{A_0}$$

Пределом пропорциональности $\sigma_{нп}$ называется наибольшее напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией. Для стали 3:

$$\sigma_{нп} = 195 \dots 200 \text{ МПа.}$$

Зона *OA* называется зоной упругости. После точки *A* диаграмма становится криволинейной. *B* непосредственной

близости от точки A находится точка B , соответствующая пределу упругости.

Пределом упругости σ_{yn} называется максимальное напряжение, при котором в материале не возникают остаточные деформации:

$$\sigma_{yn} = \frac{F_{yn}}{A_0}$$

Для стали 3:

$$\sigma_{yn} = 205 \dots 210 \text{ МПа.}$$

При дальнейшем нагружении линейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок CD . Участок CD называется площадкой текучести. Площадка текучести отсутствует у хрупких материалов. Здесь деформации растут без увеличения нагрузки. Нагрузка F_T , соответствующая точке D , используется при определении предела текучести:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

Пределом текучести σ_T называется напряжение, при котором образец деформируется без увеличения растягивающей нагрузки.

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов.

Для стали 3:

$$\sigma_T = 220 \dots 250 \text{ МПа.}$$

Зона BD называется зоной общей текучести.

После зоны текучести диаграмма снова становится криволинейной. Образец приобретает способность воспринимать возрастающее усилие до значения F_{\max} . Усилие F_{\max} используется для вычисления временного сопротивления:

$$\sigma_{\epsilon} = \frac{F_{\max}}{A_0}$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется временным сопротивлением (пределом прочности).

Для стали 3:

$$\sigma_{\epsilon} = 370 \dots 470 \text{ МПа.}$$

Зона DE называется зоной упрочнения.

При максимальном усилии на образце возникает локальное уменьшение поперечного сечения – шейка.

В точке K образец разрушается. Сила F_K , соответствующая точке K называется разрушающей, а напряжение – истинным пределом прочности:

$$S_K = \frac{F_K}{A_K}$$

Где A_K - площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Зона EK называется зоной местной текучести.

Для стали 3:

$$S_K = 900 \dots 1000 \text{ МПа.}$$

Диаграмма растяжения $F = f \cdot (\Delta\ell)$ характеризует свойства образца, т.к. зависит от его размеров. Для оценки механических свойств материала диаграмму растяжения перестраивают в координатах «напряжение-деформация». Для этого все абсциссы делят на первоначальную длину рабочей части образца ℓ_0 , а все ординаты делят на первоначальную площадь сечения A_0 . В результате получаем диаграмму напряжений $\sigma = f \cdot (\varepsilon)$ (рис. 59), которая имеет тот же вид, что и диаграмма $F = f \cdot (\Delta\ell)$. т.к. A_0 и ℓ_0 - постоянны.

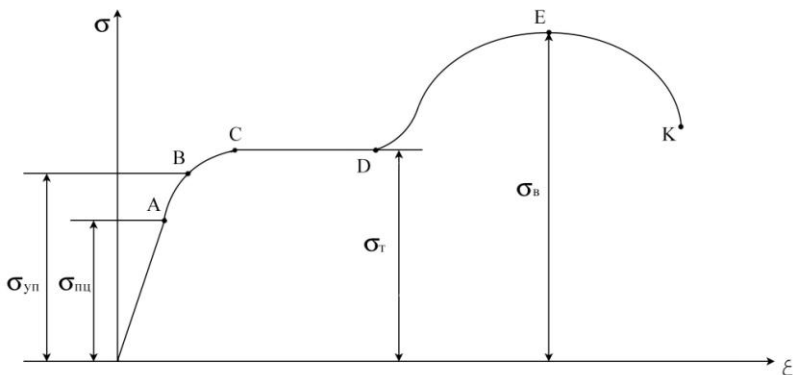


Рис. 59

Метод допускаемых напряжений. Определение допускаемых напряжений.

Этот метод остается основным при расчете механических узлов и деталей машиностроительных конструкций.

Считается, что критерием надежности конструкции является выполнение условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm},$$

где σ_{\max} - наибольшее рабочее напряжение, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом.

σ_{adm} - допускаемое для данного материала напряжение, полученное на основании эксперимента.

Допускаемое напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_0}{K},$$

где σ_0 - опасное напряжение,

K - коэффициент запаса прочности .

Для пластичных материалов за опасное напряжение принимается предел текучести σ_T ; для хрупких материалов – временное сопротивление (предел прочности) σ_s .

Для строительных сталей значение коэффициента запаса прочности принимается $K=1,4 \dots 1,6$.

Для хрупких материалов $K=2,5 \dots 3,5$.

Для древесины $K=3,5 \dots 6$.

9. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ.

При построении эпюр внутренних усилий используется метод сечений. Для определения внутренних усилий мысленно рассекаем стержень плоскостью, перпендикулярной оси стержня. При этом стержень делится на две части. Одна из

частей отбрасывается. Воздействие отброшенной части на оставшуюся заменяется силами N , Q_y , Q_z и моментами M_x , M_y , M_z – компонентами главного вектора и главного момента внутренних усилий в выбранной на сечении системе координат (рис. 60).

Сила N , приложенная вдоль оси стержня называется продольной силой.

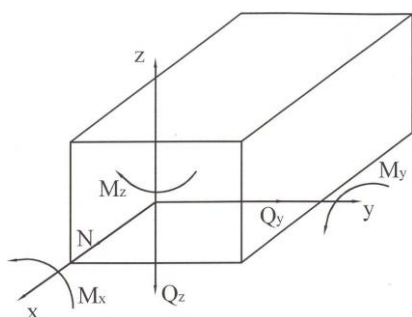


рис. 60

Силы Q_y и Q_z , приложенные перпендикулярно оси стержня называются поперечными силами. Моменты M_y и M_z относительно осей y и z называются изгибающими моментами. Момент M_x относительно оси x называется крутящим моментом и обычно обозначается $M_{кр}$ или T .

Внутренние усилия определяются из уравнений равновесия оставшейся части стержневой системы. Графики, показывающие значения внутренних усилий в зависимости от координаты x называются эпюрами внутренних усилий.

Мы будем рассматривать плоские рамы, к которым приложены силы, действующие в плоскости рамы (обычно за эту плоскость берут плоскость xoz). В этом случае не будут возникать такие внутренние усилия, как Q_y , M_x , M_z .

Тогда неизвестными внутренними усилиями, которые необходимо определить, являются N , Q_z , M_y . Так как теперь все внутренние усилия обозначены разными буквами, необходимость в индексах отпадает, и искомые внутренние усилия можно обозначить N , Q , M . Так мы и будем поступать в дальнейшем.

Определим правило знаков для внутренних усилий N , Q , M . Продольная сила N положительна, если она растягивает волокна стержня. Поперечная сила Q положительна, если она стремится повернуть сечение относительно точки, находящейся в оставшейся части стержня против хода часовой стрелки. Изгибающий момент M положителен, если он растягивает волокна с положительными координатами z .

До построения эпюр необходимо найти реакции опор. Они находятся из уравнений равновесия всей рамы. Если рама составная, то реакции можно находить из уравнений равновесия, составленных для каждой из частей рамы.

В дальнейшем реакции опор учитываются так же, как и внешние силы.

При построении эпюр рама делится на участки. Границами участков являются:

- точки, в которых происходит изменение геометрии стержневой системы (начало и конец стержня, поворот или разветвление оси стержня);

- точки, в которых приложены сосредоточенные внешние силы и моменты;
- точки начала действия и конца действия распределённых сил и моментов.

На каждом участке выбирается своя система координат.

При этом ось ox

направляется вдоль оси стержня. Ось oz направляется вверх на горизонтальном участке стержня. На негоризонтальных участках ось z направляется во внешнюю сторону от рамы. Если негоризонтальный участок находится внутри рамы, то ось z направляется произвольно.

Эпюры строятся на базисной линии. Базисной линией называется линия, параллельная оси стержня.

Значения внутренних усилий откладываются на перпендикуляре к базисной линии. В отдельных точках проставляются числа, показывающие величину внутреннего усилия. Знак внутреннего усилия указывается в кружочке на площади между графиком и базисной линией. Площадь между графиком и базисной линией штрихуется перпендикулярно базисной линии.

Для проверки правильности построения эпюр проверяется выполнение следующих условий:

1. а) в точках приложения сосредоточенных сил, которые дают проекцию на ось стержня возникает скачок на эпюре продольной силы на величину этой проекции;

б) в точках приложения сосредоточенных сил, которые дают проекцию на перпендикуляр к оси стержня, возникает скачок на эпюре поперечной силы на величину этой проекции;

в) в точках приложения сосредоточенного момента происходит скачок на эпюре изгибающего момента на величину этого момента.

2. В силу дифференциальной зависимости $dM/dx=Q$:

а) в точке, в которой происходит скачок на эпюре поперечной силы Q , наблюдается излом на эпюре изгибающего момента;

б) в точке, в которой поперечная сила Q равна нулю изгибающий момент M достигает экстремума;

в) на участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент возрастает; на участке, где поперечная сила Q отрицательна, изгибающий момент убывает; на тех участках, где $Q=0$ изгибающий момент постоянен.

3. В силу дифференциальных зависимостей

$$dM/dx=Q \quad \text{и} \quad dQ/dx=-q,$$

на участке, где действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q , направленная перпендикулярно оси стержня, эпюрой поперечной силы Q является прямая, а эпюрой изгибающего момента M – квадратичная парабола.

4. В точках, в которых происходит поворот оси стержня или разветвление оси стержня правильность построения эпюр проверяется следующим образом:

возле такой точки на каждой из ветвей проводятся сечения.

Те части, которые не содержат указанной точки, отбрасываются. Действие отброшенных частей на оставшуюся заменяется внутренними усилиями N , Q , M .

После этого проверяется выполнение уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi}=0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi}=0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_i=0.$$

Значения N , Q , M в этих уравнениях находятся из эпюр внутренних усилий.

Пример 4.

Построить эпюры внутренних усилий N , Q , M для составной рамы, изображённой на рис. 61.

$$P_1=10 \text{ кН};$$

$$P_2=5 \text{ кН};$$

$$M_1=15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$q=4 \text{ кН/м};$$

$$\alpha=30^\circ.$$

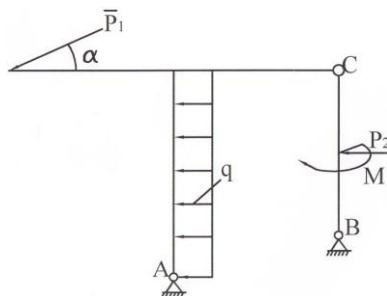


рис. 61

Решение:

Сначала определим реакции опор (рис. 62). Если рассматривать стержневую систему в целом, то имеется 4 неизвестных: V_A , H_A , V_B , H_B и 3 уравнения равновесия.

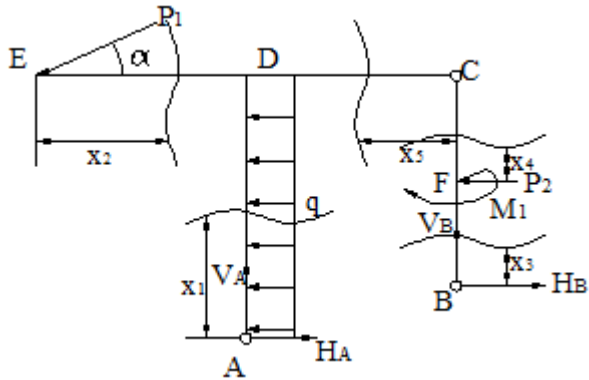


Рис.62

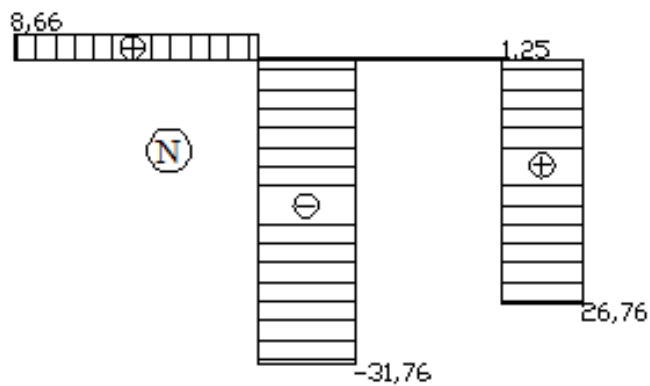


Рис.65

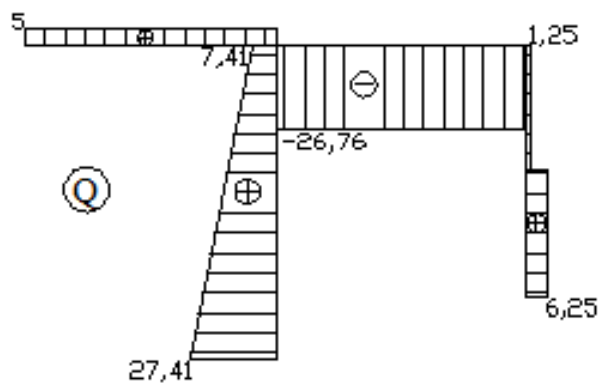


Рис.66

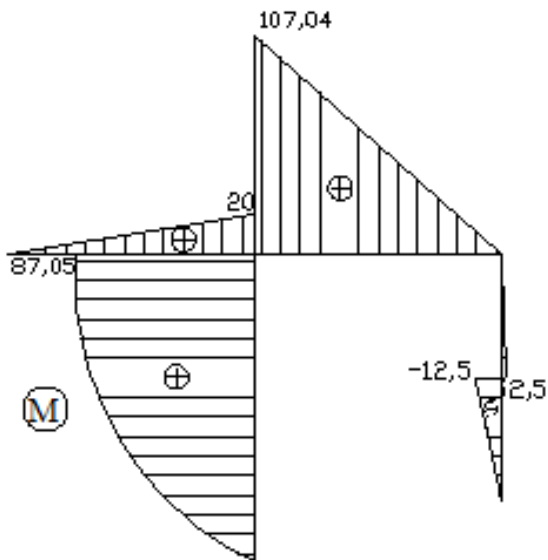


Рис.67

То есть задача статически неопределённая. Определим степень статической неопределённости рамы:

$$ССН=4-3=1.$$

Для определения реакций рассмотрим каждую из частей в отдельности. В этом случае имеется 6 неизвестных и 6 уравнений равновесия. Следовательно, задача статически определённая.

Рассмотрим левую часть рамы (рис. 27).

Запишем уравнения равновесия для левой части:

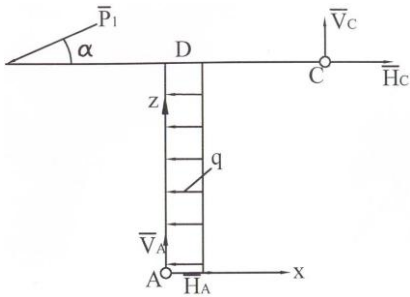


рис. 63

$$\sum_{i=1}^n F_{xi}=0,$$

$$H_A + H_C - q \cdot 5 - P_1 \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi}=0,$$

$$V_A + V_C - P_1 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ci}=0,$$

$$P_1 \cdot \sin \alpha \cdot 8 - q \cdot 5 \cdot 5/2 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 5 = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим правую часть (рис. 64).

Запишем уравнения равновесия для правой части:

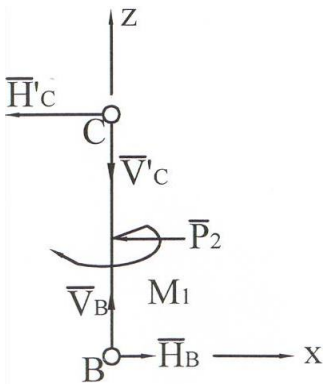


рис. 64

$$\sum_{i=1}^n F_{xi}=0, \quad -H'_C + H_B - P_2 = 0; \text{ здесь } H'_C = H_C. \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi}=0, \quad V_B - V'_C = 0; \text{ здесь } V'_C = V_C. \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ci}=0, \quad -P_2 \cdot 2 - M_1 + H_B \cdot 4 = 0. \quad (6)$$

Решим полученную систему из шести уравнений с шестью неизвестными. Из уравнения 6 следует:

$$H_B = (2P_2 + M_1) / 4 = (10 + 15) / 4 = 6,25 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения 4 следует:

$$H_C = H_B - P_2 = 6,25 - 5 = 1,25 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения 1 следует:

$$H_A = -H_C + q \cdot 5 + P_1 \cdot \cos \alpha = -1,25 + 20 + 10 \cdot 0,866 = 28,66 - 1,25 = 27,41 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения 3 следует:

$$V_A = (P_1 \cdot \sin \alpha \cdot 8 - q \cdot 5 \cdot 5/2 + H_A \cdot 5) / 4 = (40 - 50 + 27,41 \cdot 5) / 4 = 31,76 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения 2 следует:

$$V_C = -V_A + P_1 \cdot \sin \alpha = -31,76 + 5 = -26,76 \text{ (кН)}.$$

Из уравнения 5 следует:

$$V_B = V_C = -26,76 \text{ (кН)}.$$

Выпишем найденные реакции опор:

$$V_A = 31,76 \text{ кН}, \quad H_A = 27,41 \text{ кН},$$

$$V_B = -26,76 \text{ кН}, \quad H_B = 6,25 \text{ кН},$$

$$V_C = -26,76 \text{ кН}, \quad H_C = 1,25 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности нахождения реакций опор составим уравнение моментов относительно точки А для всей системы (рис 62).

$$\sum_{i=1}^n M_{A_i} = P_1 \cdot \sin \alpha \cdot 4 + P_1 \cdot \cos \alpha \cdot 5 + q \cdot 5 \cdot 5/2 + P_2 \cdot 3 - M + V_B \cdot 4 -$$

$i=1$

$$-H_B \cdot 1 = 20 + 43,3 + 50 + 15 - 15 - 107,04 -$$

$$-6,25 = 0,01 \approx 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Построим эпюры N, Q, M.

Прежде всего построим базисные линии для эпюр N, Q, M (рис. 29, 30, 31).

Разобьём раму на участки. Пусть:

участок АВ – участок I,

участок ED – участок II,

участок BF – участок III,

участок FC – участок IV,

участок CD – участок V.

Расчет эпюр производим по участкам.

Участок I.

Проведём сечение в пределах первого участка. Расстояние от начала участка до сечения обозначим x_1 . Как видно из рис. 62:

$$0 \leq x_1 \leq 5 \text{ м.}$$

Отбросим верхнюю часть. Заменяем действие отброшенной верхней части на оставшуюся нижнюю часть внутренними усилиями N , Q , M (рис. 68). По оси стержня проведём ось x , ось z направим во внешнюю сторону рамы.

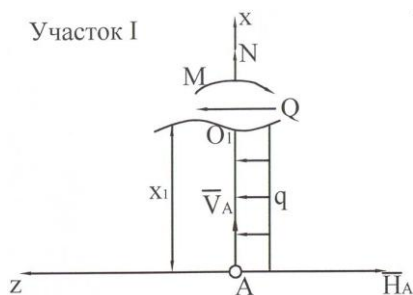


рис.68

Составим уравнения равновесия для оставшейся нижней части:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0, & V_A + N &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0, & -H_A + q * x_1 + Q &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{O_i} &= 0, & H_A * x_1 - q * x_1 * x_1 / 2 - M &= 0. \end{aligned}$$

Здесь O_1 (далее O_2, \dots, O_5) – центр сечения на участке 1.

Из этих уравнений равновесия выразим внутренние усилия как функции x_1 .

$N = -V_A = -31,76$ кН. Как видно, продольная сила N не зависит от координаты x_1 (положения сечения) и эпюрой N является прямая, параллельная оси стержня.

$Q = N_A - q \cdot x_1$. Из этого выражения видно, что эпюрой поперечной силы Q является прямая, наклонная к оси стержня;

при $x_1 = 0$, $Q = N_A = 27,41$ кН;

при $x_1 = 5$, $Q = 27,41 - 4 \cdot 5 = 7,41$ (кН).

$M = N_A \cdot x_1 - q \cdot (x_1)^2 / 2$. Из выражения для изгибающего момента M видно, что эпюрой M является парабола;

при $x_1 = 0$, $M = 0$;

при $x_1 = 2,5$, $M = 27,41 \cdot 2,5 - 4 \cdot (2,5)^2 / 2 = 56,025$ (кН*м);

при $x_1 = 5$, $M = 27,41 \cdot 5 - 4 \cdot 5^2 / 2 = 137,05 - 50 = 87,05$ (кН*м).

Если в пределах участка есть точка, в которой $Q = 0$, то это точка экстремума для эпюры M . Найдём эту точку, если она существует.

$Q = N_A - q \cdot x_1 = 0$. Отсюда

$x_1 = N_A / q = 27,41 / 4 = 6,85$ (м) > 5 (м).

Так как $0 \leq x_1 \leq 5$ м, точки экстремума на эпюре M нет.

Определим точки пересечения эпюры M с осью x_1 :

$M = x_1 \cdot (N_A - q \cdot x_1 / 2) = 0$. Решив это уравнение, получим 2 корня:

$x_{11} = 0$; $x_{12} = 2N_A / q = 13,705$ м.

Первая точка находится в пределах участка, вторая точка – вне пределов участка.

Так как в выражении для M переменная x_1 во второй степени, то эпюра M представляет собой параболу. Направление вогнутости определяется по правилу паруса. Пусть q – ветер, эпюра M – парус. Тогда ветер должен надувать парус. Теперь можно построить эпюры N , Q , M для первого участка (рис. 65, 66, 67).

Участок II

Проведём сечение в пределах второго участка. Расстояние от начала участка до сечения обозначим x_2 . Как видно из рис. 62:

$$0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м.}$$

Отбросим правую часть. Заменяем действие отброшенной правой части на оставшуюся левую внутренними усилиями N , Q , M (рис. 69). По оси стержня проведём ось x , ось z направим вверх.

Составим уравнения равновесия для оставшейся левой части:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0, & -P_1 \cdot \cos \alpha + N &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0, & -P_1 \cdot \sin \alpha + Q &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{O_2} &= 0, & P_1 \cdot \sin \alpha \cdot x_2 - M &= 0. \end{aligned}$$

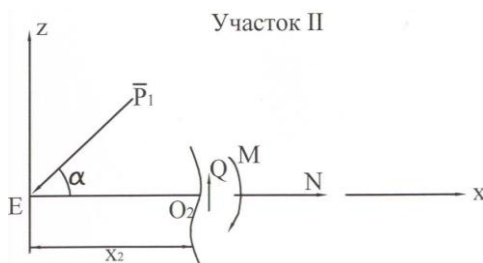


рис. 69

Из этих уравнений равновесия выразим внутренние усилия как функции x_2 .

$N = P_1 \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ (кН). Как видно, продольная сила N не зависит от координаты x_2 и эпюрой N является прямая, параллельная оси стержня.

$Q = P_1 \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5$ (кН). Из этого выражения видно, что поперечная сила Q не зависит от координаты x_2 и эпюрой Q является прямая, параллельная оси стержня.

$M = P_1 \cdot \sin \alpha \cdot x_2 = 10 \cdot 0,5 \cdot x_2 = 5x_2$. Из выражения для изгибающего момента M видно, что эпюрой M является прямая, наклонная к оси стержня;

при $x_2 = 0$, $M = 0$ и
при $x_2 = 4$, $M = 20$ кН*м.

Теперь можно построить эпюры N , Q , M для второго участка (рис. 65, 66, 67).

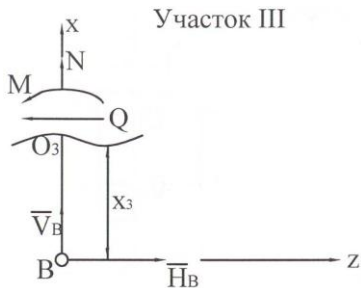
Участок III.

Проведём сечение в пределах третьего участка. Расстояние от начала участка до сечения обозначим x_3 . Как видно из рис.26:

$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м.}$$

Отбросим верхнюю часть. Заменим действие отброшенной верхней части на оставшуюся нижнюю внутренними усилиями N , Q , M (рис. 70). По оси стержня проведём ось x , ось z направим во внешнюю сторону рамы.

Составим уравнения равновесия для оставшейся нижней части:



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0, & N + V_B &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0, & H_B - Q &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{oi} &= 0, & H_B * x_3 + M &= 0. \end{aligned}$$

рис. 70

Из полученных уравнений равновесия выразим внутренние усилия как функции x_3 . $N = -V_B = 26,76$ кН. Как видно, продольная сила N не зависит от координаты x_3 и эпюрой N является прямая, параллельная оси стержня.

$Q = H_B = 6,25$ кН. Из этого выражения видно, что поперечная сила Q не зависит от координаты x_3 и эпюрой Q является прямая, параллельная оси стержня.

$M = -H_B * x_3 = 6,25 * x_3$. Из выражения для изгибающего момента M видно, что эпюрой M является прямая, наклонная к оси стержня;
 при $x_3 = 0$, $M = 0$;
 при $x_3 = 2$, $M = -12,5$ кН*м.

Теперь можно построить эпюры N , Q , M для третьего участка (рис. 65, 66, 67).

Участок IV.

Проведём сечение в пределах четвёртого участка. Расстояние от начала участка до сечения обозначим x_4 . Как видно из рис. 62:

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м.}$$

Отбросим верхнюю часть. Заменяем действие отброшенной верхней части на оставшуюся нижнюю внутренними усилиями N , Q , M (рис. 71). По оси стержня проведём ось x , ось z

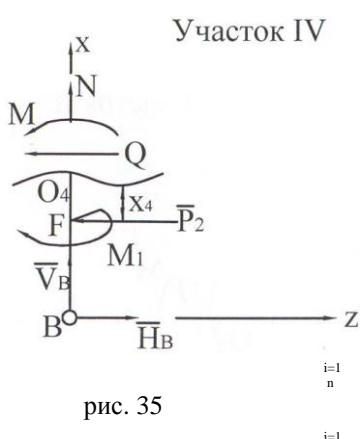


рис. 35

направим во внешнюю сторону рамы.

Составим уравнения равновесия для оставшейся нижней части:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi}=0, \quad N+V_B=0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi}=0, \quad H_B-P_2-Q=0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{o,i}=0, \quad H_B*(2+x_4)-P_2*x_4-M_1+M=0.$$

Из полученных уравнений равновесия выразим внутренние усилия как функции x_4 .

$N=-V_B=26,76$ кН. Как видно, продольная сила N не зависит от координаты x_4 и эпюрой N является прямая, параллельная оси стержня.

$Q=H_B-P_2=6,25-5=1,25$ кН. Из этого выражения видно, что поперечная сила Q не зависит от координаты x_4 и эпюрой Q является прямая, параллельная оси стержня.

$M=-H_B*(2+x_4)+P_2*x_4+M_1$. Из выражения для изгибающего момента M видно, что эпюрой M является прямая, наклонная к оси стержня;

при $x_4=0$, $M=-H_B*2+M_1=-12,5+15=2,5$ (кН*м),

при $x_4=2$, $M=-H_B*4+P_2*2+M_1=-25+10+15=0$.

Теперь можно построить эпюры N , Q , M для четвёртого участка (рис. 65, 66, 67).

Участок V.

Проведём сечение в пределах пятого участка. Расстояние от начала участка до сечения обозначим x_5 . Как видно из рис. 62:

$$0 \leq x_5 \leq 4 \text{ м.}$$

Отбросим левую часть. Заменяем действие отброшенной левой части на оставшуюся правую внутренними усилиями N , Q , M (рис. 72). По оси стержня проведём ось x , ось z направим в верх.

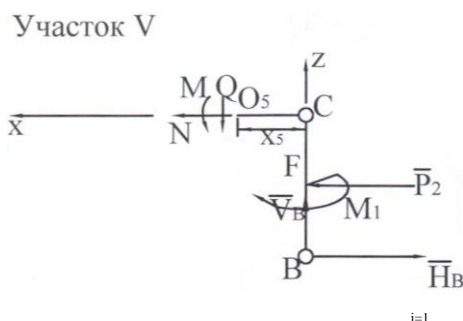


рис. 72

Составим уравнения равновесия для оставшейся правой части.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0, & N + P_2 - H_B &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0, & -Q + V_B &= 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{O_i} &= 0, \end{aligned}$$

$$M - P_2 * 2 - M_1 + H_B * 4 + V_B * x_5 = 0.$$

Из полученных уравнений равновесия выразим внут-

ренние усилия как функции x_5 .

$N = -P_2 + H_B = -5 + 6,25 = 1,25 \text{ кН}$. Как видно, продольная сила N не зависит от координаты x_5 и эпюрой N является прямая, параллельная оси стержня.

$Q=V_B=-26,76$ кН. Из этого выражения видно, что поперечная сила Q не зависит от координаты x_5 и эпюрой Q является прямая, параллельная оси стержня.

$$M=P_2 \cdot 2 + M_1 - N_B \cdot 4 - V_B \cdot x_5 = 10 + 15 - 6,25 \cdot 4 - (-26,76) \cdot x_5 = 26,76 \cdot x_5.$$

Из выражения для изгибающего момента M видно, что эпюрой M является прямая, наклонная к оси стержня;

при $x_5=0$, $M=0$,

при $x_5=4$, $M=26,76 \cdot 4=107,04$ (кН*м).

Теперь можно построить эпюры N , Q , M для пятого участка и всей рамы (рис. 65, 66, 67).

Проверим правильность построения эпюр N , Q , M .

1. а) в точках А, В, Е приложены сосредоточенные силы R_A , R_B , P_1 , которые дают следующие проекции на ось балки:

$$|V_A|=31,76 \text{ кН};$$

$$|V_B|=26,76 \text{ кН};$$

$$|P_1 \cdot \cos \alpha| = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

именно на эти величины происходят скачки в точках А, В, Е на эпюре N ;

- б) в точках А, В, Е, F приложены сосредоточенные силы H_A , N_B , P_1 , P_2 , которые дают следующие проекции на перпендикуляр к оси балки:

$$|H_A|=27,41 \text{ кН};$$

$$|N_B|=6,25 \text{ кН};$$

$$|P_1 \sin \alpha| = 10 \cdot 1/2 = 5 \text{ кН};$$

$$|P_2|=5 \text{ кН};$$

- именно на эти величины происходят скачки в точках А, В, Е, F на эпюре Q;
- в) в точке F приложен сосредоточенный момент $M_1=15 \text{ кН}\cdot\text{м}$; именно на эту величину происходит скачок в точке F на эпюре M.
2. а) если отбросить скачки на эпюре Q в концевых точках рамы, то остаётся точка F, в которой происходит скачок на эпюре Q; в этой точке на эпюре M кроме скачка происходит излом, т. е. изменяется угол между осью балки и самой эпюрой; так и должно быть по условию проверки;
- б) на эпюре Q нет точек, в которых $Q=0$, поэтому на эпюре M нет точек экстремума;
- в) на участках I, II, III, IV поперечная сила Q положительна; на этих участках изгибающий момент возрастает; на участке V поперечная сила Q отрицательна, на этом участке изгибающий момент убывает (при движении слева на право);
- на эпюре Q нет участков, на которых $Q=0$, поэтому на эпюре M нет участков, на которых изгибающий момент постоянен.
3. На участке I действует равномерно распределённая нагрузка, направленная по перпендикуляру к оси стержня. На этом участке эпюрой Q является прямая, а эпюрой M – квадратичная парабола.

4. В точке С происходит поворот оси стержня. Проведём сечения на участках IV и V возле точки С (рис. 73).

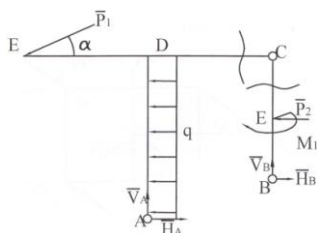


рис. 37

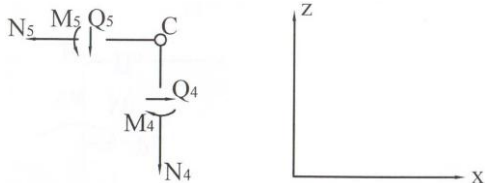


рис. 74

Отбросим части рамы, не содержащие точку С. Действие отброшенных частей на оставшуюся заменим внутренними усилиями N, Q, M (рис. 74).

Из эпюр N, Q, M найдём значения N_4 , Q_4 , M_4 , N_5 , Q_5 , M_5 в точке С:

$$\begin{aligned} N_4 &= 26,76 \text{ кН}, & N_5 &= 1,25 \text{ кН}, \\ Q_4 &= 1,25 \text{ кН}, & Q_5 &= -26,76 \text{ кН}, \\ M_4 &= 0, & M_5 &= 0. \end{aligned}$$

Проверим выполнение уравнений равновесия.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{xi} &= 0, & Q_4 - N_5 &= 1,25 - 1,25 = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} &= 0, & -Q_5 - N_4 &= 26,76 - 26,76 = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ci} &= 0, & M_5 - M_4 &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия выполняются.

В точке D происходит разветвление оси стержня. Проведём сечения на участках I, II, V возле точки D (рис. 75).

Отбросим части рамы, не содержащие точку D. Действие отброшенных частей на оставшуюся заменим внутренними усилиями N, Q, M (рис. 40). Из эпюр N, Q, M найдём значения $N_1, Q_1, M_1, N_2, Q_2, M_2, N_5, Q_5, M_5$ в точке D:

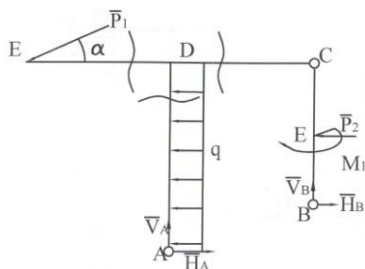


рис. 75

$$N_1 = -31,76 \text{ кН},$$

$$N_2 = 8,66 \text{ кН},$$

$$N_5 = 1,25 \text{ кН},$$

$$Q_1 = 7,41 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 5 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -26,76 \text{ кН},$$

$$M_1 = 87,05 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_5 = 107,04 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

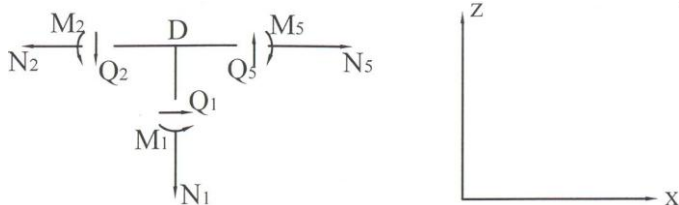


рис. 40

Проверим выполнение уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad -N_2 + N_5 + Q_1 = -8,66 + 1,25 + 7,41 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \quad -Q_2 - N_1 + Q_5 = -5 + 31,76 - 26,76 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Di} = 0, \quad M_2 + M_1 - M_5 = 20 + 87,05 - 107,04 = 107,05 - 107,04 = 0,01 \approx 0.$$

Все условия проверки правильности построения эпюр выполняются. Следовательно, эпюры построены верно.

Содержание

| | |
|---|----|
| 1. Классификация кинематических пар в зависимости от наложенных связей..... | 3 |
| 2. Структура механизмов..... | 6 |
| 3. Структурная классификация механизмов..... | 7 |
| 4. План положений..... | 11 |
| 5. Планы скоростей механизмов II класса..... | 16 |
| 6. Планы ускорений механизмов II класса..... | 28 |
| 7. Введение в курс «Сопротивление материалов», основные понятия, эпюры внутренних усилий..... | 42 |
| 8. Растяжение и сжатие..... | 72 |
| 9. Построение эпюр внутренних усилий..... | 87 |