ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

УДК 517.17

ПОНЯТИЕ «ФУНКЦИЯ» В ЗАДАЧАХ

И. С. Григорьева

Казанский федеральный университет
Казань, Россия

igrigori_@mail.ru

Работа посвящена изучению понятия «функция» на примере действительной функции одного действительного переменного. Материал изложен в виде набора задач. Он предназначен для факультативной работы со студентами 1 курса, для математических кружков и подготовки к олимпиадам.

Ключевые слова: математический кружок, математическая олимпиада, функция.

1. Введение

На одной из школьных олимпиад (городского уровня) мы предложили следующую задачу.

Задача 1. Известно, что $c(a+b+c) < 0$. Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2+bx+c$. Имеем $f(0) = c$; $f(1) = a+b+c$, так что исходное условие примет вид $f(0)\cdot f(1) < 0$. Непрерывная функция принимает значения разных знаков в точках 0 и 1, значит, она обращается в 0 между единицей и нулём.

Так вот, ни один (!) участник не предложил этого, очевидного с нашей точки зрения, решения! Были длинные рассуждения про дискриминант с перебором случаев. И, кстати, ни один решавший не рассмотрел случай $a = 0$, для которого уравнение перестаёт быть квадратным. Решение с функцией покрывает этот случай без специальных усилий.

Понятие «функция» изучается ещё в средней школе, однако, как показывает опыт, у большинства студентов младших курсов оно не сформировано, нет умения видеть этот математический объект как нечто целое. По-видимому, умение манипулировать идеей функции (отображения) — вещь сложная, она требует достаточно высокого уровня абстрагирования. В статье предлагается набор задач, которые как раз и отрабатывают это умение.

Статья рассчитана на студентов начиная с 1 курса. Все упоминаемые в ней функции заданы на множестве вещественных чисел и принимают вещественные значения.

Немного о ссылках. Задачи олимпиад обычно «кочуют» с одной олимпиады на другую, поэтому сложно найти оригинал. Ссылки приведены на те сборники, в которых была опубликована та или иная задача. Это не означает, что это первое появление задачи в печати. Некоторые задачи перешли в математический фольклор.

2. Композиция функций

Композиция функций — результат их последовательного применения. То есть $f \circ g$ — такая функция, что $f \circ g(x) = f(g(x))$. В частности, композицию $f \circ f$ мы будем иногда обозначать f^2. Аналогично можно ввести произвольную натуральную степень f^n.

Упражнение 1. а) Пусть $f(x) = \sin x$; $\quad g(x) = x^3$. Найдите композиции $f \circ g$; $\quad g \circ f$; $\quad f \circ f$; $\quad g \circ g$.

б) Пусть $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Представьте каким-нибудь способом функцию h как композицию $f \circ g$. Какими формулами задаются f и g?

Замечание. Запись формул для элементарных функций, к которой мы привыкли со школы, не всегда продумана и единообразна. Например, выражение $\sin^2 x$ воспринимается как $(\sin x)^2$. Однако в данной статье мы будем считать, что $\sin^2 x = (\sin^2)(x) = \sin(\sin x)$. Выражение же $(f(x))^2$ есть результат приложения к x функции $\mathrm{sqr} \circ f$, где $\mathrm{sqr}(x) = x^2$.

Упражнение 2. Пусть функция f — возрастает, а g — убывает. Как ведет себя их композиция? Каков будет ответ, если обе функции возрастают? Обе убывают?

Задача 2 [1, №4520]. Существуют ли непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(g(x)) = \operatorname{arctg} x$, $\quad g(f(x)) = \operatorname{arcctg} x$?

Решение. Предположим, что искомые функции f и g существуют. Покажем, что они обратимы на всей числовой прямой. Действительно, если для некоторых x_1, x_2 имеем $g(x_1) = g(x_2)$, то и $\operatorname{arctg} x_1 = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = \operatorname{arctg} x_2$, откуда $x_1 = x_2$. Для функции f доказательство аналогично.

Но если непрерывная функция взаимнооднозначна на некотором промежутке $(a; b)$, то она и строго монотонна на нём (докажите этот факт самостоятельно).

Итак, функции f и g монотонны на $\mathbb{R}$, тогда композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ также являются монотонными функциями, причём одного типа (либо обе возрастают, либо обе убывают). Но функция arctg возрастает, а arcctg — убывает; пришли к противоречию.

Задача 3 [2, 14–8]. Пусть функции f и g заданы на всей числовой прямой. Может ли оказаться так, что $f(g(x)) = x^2$, а $g(f(x)) = x^3$ для всех $x \in \mathbb{R}$?

Ответ. Нет, не может.

Решение. Заметим, что функция f должна быть инъективна, то есть принимать при разных аргументах различные значения. В противном случае и композиция $g \circ f$ была бы не инъективна. Применим ко второму равенству функцию f. Получим, что $f(g(f(x))) = f(x^3)$. Левую часть можно переписать как $f \circ g(f(x)) = (f(x))^2$. Итак, $f(x^3) = (f(x))^2$. Подставим в это равенство в качестве x значения 0, 1 и -1. Для каждого из них $x^3 = x$, так что все три числа $f(0)$, $f(1)$ и $f(-1)$ удовлетворяют уравнению $a = a^2$. Но у этого уравнения только два различных корня. Пришли к противоречию.

3. Степень функций

Рассмотрим подробнее один из вариантов композиции функций, степень, то есть $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n экземпляров функции).

формула f^n

Упражнение 3. Построить график функции $f(f(x))$, если $f(x) = 3 - |x|$.

Задача 4 [2, 12–1]. Известно, что функция f возрастающая. Докажите, что уравнения $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ равносильны[1].

Решение. Обозначим для краткости данные равенства (I) и (II) соответственно. Нужно доказать, что из (I) следует (II) и наоборот. Первая часть утверждения выполняется для любой функции. Действительно, применим к (I) функцию f, получим равенство $f(f(x)) = f(x) = x$. Но обратное верно не всегда.

Когда функция f называется возрастающей? Если из $x > y$ следует, что $f(x) > f(y)$. Пусть верно равенство (II). Обозначим $f(x) = y$, уравнение сведётся к системе $y = f(x)$, $x = f(y)$. Предположим, что x и y не совпадают, например $x > y$. Тогда в силу возрастания $f(x) > f(y)$, то есть $y > x$. Пришли к противоречию. Итак, $x = y = f(x)$, что и требовалось доказать.

Упражнение 4. Будет ли верно утверждение задачи, если функция f не возрастающая?

Упражнение 5. Верна ли *«Лемма о кубе»*? Т. е. будут ли для произвольной возрастающей функции f равносильны уравнения $f(x) = x$ и $f^3(x) = x$?

Используя *Лемму о квадрате* можно придумывать много задач. Например:

Упражнение 6. Сколько решений имеет уравнение $\sin(\sin x) = x$? Заметьте, что функция sin не является монотонной. Как обойти это препятствие?

Упражнение 7. Решить в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 1/x = y, \\ y^3 - 1/y = z, \\ z^3 - 1/z = x. \end{cases}$$

Задача 5. Функция $f(x)$ определена для всех действительных x и $f(f(x)) = 5x + 4$. Найдите $f(-1)$.

---

[1]В дальнейшем будет называть этот результат «*Лемма о квадрате*».

курсив?

Ответ. -1.

Решение. Имеем $f^3(x) = f(5x+4) = 5f(x)+4$. Подставляя в это равенство $x=-1$, получим соотношение $f(-1) = 5f(-1)+4$.

Эта задача была использована в методической части олимпиады учителей [3, 2012, заочный тур]. В задании приведено несколько неверных решений этой задачи, участнику олимпиады предлагается найти в них ошибки.

Задача 6 [2, 13–6]. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin^n)(x) - (\sin^n)(x)}{x^3}.$$

Ответ. $n/3$.

Решение. Так как в знаменателе стоит x^3, достаточно разложить числитель по степеням x с точностью до $o(x^3)$. Пусть $f(x) = x + ax^3 + o(x^3)$ и $g(x) = x+bx^3+o(x^3)$ при $x \to 0$. Тогда $g(f(x)) = x+(a+b)x^3+o(x^3)$ при $x \to 0$. Применяя эту формулу несколько раз, получаем, что $f^n(x) = x+nax^3+o(x^3)$. Кроме того, если g – функция, обратная к f, то $g(x) = x - ax^3 + o(x^3)$. Имеем при $x \to 0 : \sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$, тогда $\arcsin x = x + x^3/6 + o(x^3)$. Числитель дроби принимает вид $(x + nx^3/6) - (x - nx^3/6) + o(x^3) = nx^3/3 + o(x^3)$.

4. Обратная функция

По аналогии с положительными степенями функции можно ввести и отрицательные. Пусть $f\colon D \to E$, где D, E – некоторые подмножества $\mathbb{R}$. Тогда функция $g = f^{-1}\colon E \to D$ обладает свойствами

$$g(f(x)) = x, \forall x \in D, \quad f(g(x)) = x, \forall x \in E. \tag{1}$$

Как известно, такая функция g называется обратной к f.

При таком обозначении для степеней функции сохраняется обычное свойство $f^{m+n} = f^m \circ f^n$. При этом приходится считать, что $f^1 = f$, $f^0 = \mathrm{id}$, где id – тождественная функция.

Возникает вопрос: можно ли в соотношениях (1) оставить только одно равенство, например, первое? Будет ли второе соотношение автоматически следовать из первого?

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x+5}$. Эта функция задана для всех $x \geqslant -5$. Из соотношения $y = \sqrt{x+5}$, получим, что $x = y^2 - 5$. Можно ли считать функцию g, $g(x) = x^2 - 5$ обратной к функции f, $f(x) = \sqrt{x+5}$? Вообще говоря, нет.

Имеем, $g(f(x)) = (\sqrt{x+5})^2 - 5 = x + 5 - 5 = x$. Однако $f(g(x)) = \sqrt{(x^2-5)+5} = |x|$, что совпадает с x только при условии $x \geqslant 0$. Итак, для функций f и g выполняется равенство $g(f(x)) = x$, но не $f(g(x)) = x$.

Функцией, обратной к функции f, будет функция g, суженная на область $x \geqslant 0$, хотя выражение $x^2 - 5$ имеет смысл на всей вещественной прямой.

Забыв об этой тонкости, мы можем сделать ошибки при решении задач. В следующей задаче напрашивается применить результат *Леммы о квадрате*, однако неаккуратное его использование приводит к неверному результату.

Задача 7. Решить уравнение $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$.

Решение. Если решать «в лоб», возведением в квадрат, получим уравнение четвёртой степени. Но, как мы видели ранее, левая и правая части уравнения являются взаимнообратными функциями. Введём функцию $f(x) = \sqrt{x+5}$, заданную для всех $x \geqslant -5$. Уравнение примет вид $f^{-1}(x) = f(x)$ или $f(f(x)) = x$.

В силу того, что функция f возрастающая, это уравнение равносильно $f(x) = x$, то есть соотношению $\sqrt{x+5} = x$, которое легко сводится к квадратному: $x^2 - x - 5 = 0$, $x \geqslant 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, подходит только положительный корень, $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Попробуем теперь решить задачу без *Леммы о квадрате*. Сведём уравнение к системе: положим $y = \sqrt{x+5}$, при ограничениях $x \geqslant -5, y \geqslant 0$. При этих ограничениях надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+5}, \\ x^2 - 5 = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 5 = x, \\ x^2 - 5 = y. \end{cases}$$

С учетом ограничений преобразование является равносильным.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(y - x)(y + x + 1) = 0$.

1) $y = x$, второе уравнение системы приобретает вид $x^2 - 5 = x$ – уравнение, которое мы уже решали. С учётом ограничений корнем будет $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

2) $y + x + 1 = 0$. Тогда $x^2 - 5 = -1 - x$, $x^2 + x - 4 = 0$, корни $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Ограничения приводятся к виду $x \geqslant -5, x \leqslant -1$, им удовлетворяет корень $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Итак, используя *Лемму о квадрате* мы потеряли один корень! Почему так получилось? Потому что мы неправильно использовали понятие «обратная функция». Как мы показали, функция g, заданная уравнением $g(x) = x^2 - 5$ без дополнительного ограничения $x \geqslant 0$ не является обратной к функции f, между тем, в уравнении такое ограничение не предусмотрено! Оно имеет отрицательный корень.

Упражнение 8. Существует ли обратимая функция f, удовлетворяющая функциональному уравнению $f^{-1}(x) = f(x+1)$?

Задача 8. Существует ли обратимая функция f, удовлетворяющая для всех x из некоторого непустого множества уравнению $f(x) = -f^{-1}(x)$?

Решение. Если обратимая функция непрерывна на некотором промежутке, то, как мы показали ранее, она монотонна на нём. Но тогда равенство не может выполняться: функции в левой и правой части имеют разный тип монотонности (если одна возрастает, то другая убывает). Значит, надо искать разрывную обратимую функцию.

Пусть точка $(x; y)$ лежит на графике функции f^{-1}, то есть $f^{-1}(x) = y$. Тогда на графике функции f лежат точки $(y; x)$ и $(x; -y)$, то есть график функции f переходит в себя при повороте на $90°$ по часовой стрелке. Следовательно, он переходит в себя и при повороте на $180°$ и на $270°$, в частности, функция f нечётная.

Скажем, искомую функцию можно задать равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-2; -1] \cup [1; 2), \\ -x/2, & x \in (-4; -2] \cup [2; 4). \end{cases}$$

Эта функция задана на множестве $(-4; -1] \cup [1; 4)$ (см. Рис. 1).

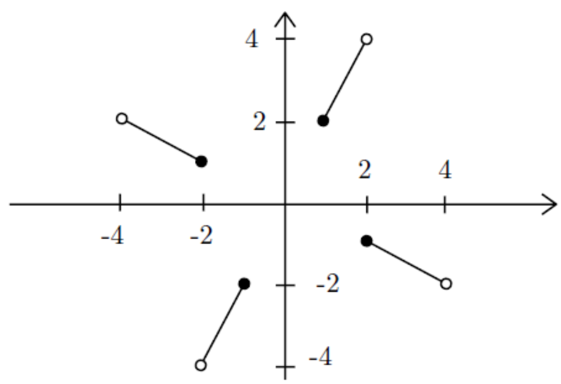

Рис. 1.

Можно построить график на основе любой монотонной функции, поворачивая его на $90°$ и «отрезая» части, перекрывающиеся по области определения.

Упражнение 9. Можно ли построить аналогичную функцию на всей числовой прямой?

5. Область определения и множество значений функции

Как мы видели ранее, при изучении функции важно знать ее область определения. Точнее, функция — это тройка объектов: область определения D, область значений E и отображение, которое каждому элементу из D ставит в соответствие единственный элемент из E. Этот факт обозначается обычно так: $f\colon D \to E$.

Часто при задании функции её область определения не указывают явно. Для элементарной функции считается по умолчанию, что функция задана при всех значениях аргумента, для которых формула, её задающая, имеет смысл. Именно при наличии этого соглашения можно ставить вопрос «Какова область определения функции?».

? и точка - как-то непривычно выглядит...

Задача 9 [4]. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

«Решить уравнение $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})+(\sin x)^2=0$. Введём переменную $t=\operatorname{tg} x$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}, (\sin x)^2=\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{1+(\operatorname{tg} x)^2}. \tag{2}$$

В конце цитаты было две точки, убрала одну...

После преобразований уравнение приобретает вид $2t^2+t+1=0$, и, значит, не имеет корней».

Решение. Непосредственной проверкой можно убедиться, что число $\pi/2$ — корень исходного уравнения. «Проведём» это значение по всем преобразованиям. В равенстве $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$ левая часть существует при $x=\pi/2$, а правая — нет.

Можно сказать, что равенства (2) не являются равенствами функций, так как области определения левых и правых частей не совпадают.

Основное свойство функции (отображения) состоит в том, что каждому аргументу (элементу D) соответствует единственное значение из E. При этом, вообще говоря, не требуется, чтобы каждому элементу из E соответствовал единственный элемент из D. Их может быть и несколько, и ни одного. Примером может служить функция $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В множестве E можно выделить те элементы, которые являются значениями функции f для каких-либо ее аргументов. Это множество будем обозначать $f(D)$ и называть множеством значений функции.

Задача 10. Найти множество значений функции $f(x)=\log_x(100x-99)$.

Ответ. $f(D)=(1;100)\cup(100;+\infty)$.

Решение. Область определения f есть множество $D=(0.99;1)\cup(1;+\infty)$. Обычно для построения множества значений функции применяется исследование на возрастание и убывание с помощью производной. Имеем

$$f(x)=\frac{\ln(100x-99)}{\ln x},\quad f'(x)=\frac{\frac{100}{100x-99}\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot\ln(100x-99)}{(\ln x)^2}=$$

$$=\frac{100x\ln x-(100x-99)\ln(100x-99)}{x\cdot(100x-99)(\ln x)^2}.$$

Знаменатель положителен в D. Чтобы найти нули производной, надо приравнять к нулю числитель, т. е. функцию

$$g(x)=100x\ln x-(100x-99)\ln(100x-99).$$

Однако, решить полученное уравнение мы не сможем. Значит, нам надо исследовать поведение функции g с помощью производной. Имеем

$$g'(x)=100\ln x+100-100\ln(100x-99)-100=100(\ln x-\ln(100x-99)).$$

Это выражение положительно, если $x>100x-99$, и отрицательно в противном случае. Значит, функция g возрастает при $0.99<x<1$ и убывает при

$x > 1$. В точке $x = 1$ она имеет максимум, равный нулю. Итак, производная функции f отрицательна на всей области её определения. Однако это ещё не значит, что эта функция убывает на всей D! Можно только сказать, что она убывает на каждом из промежутков $(0.99; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Для завершения исследования нужно исследовать функцию на концах области определения. Имеем

$$\lim_{x\to 0.99+0} \frac{\ln(100x-99)}{\ln x} = \frac{-\infty}{\ln 0.99} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(100x-99)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{100x-100}{x-1} = 100,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(100x-99)}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + \ln(100-99/x)}{\ln x} = 1.$$

Итак, функция f убывает на всей области определения от $+\infty$ до 1, но имеет устранимый разрыв в точке $x = 1$, предел в которой равен 100.

Следующая задача объединяет идеи степени функции и её области определения.

Задача 11. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Чему равны её степени?

Решение. Имеем $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$, тогда

$$g^2(x) = \frac{1+g(x)}{1-g(x)} = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{x},$$

$$g^3(x) = g^2(g(x)) = -\frac{1}{g(x)} = -\frac{1-x}{1+x},$$

$$g^4(x) = g^2(g^2(x)) = -\frac{1}{-1/x} = x.$$

Итак, четвёртая степень функции g совпадает с тождественным преобразованием, $g^4 = \mathrm{id}$ на том множестве аргументов, где все равенства имеют смысл. Исходная функция не определена при $x = 1$, её квадрат — при $x = 0$, куб — при $x = -1$. Итак, четвёртая степень функции g является тождественной функцией на множестве $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Ясно, что последующие степени будут чередоваться циклически.

Замечание. Из того факта, что $g \circ g^3 = g^3 \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$ следует, что g^3 — функция, обратная к g на A. Аналогично, g^2 обратна к самой себе на множестве A. В частности, все степени g обратимы (биективны) на A. Впрочем, это можно проверить и непосредственно.

Задача 12. Непустое подмножество $A \subset \mathbb{R}$ назовём хорошим, если из $x + y \in A$ следует, что $xy \in A$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Перечислите все хорошие множества.

Ответ. Единственное хорошее множество: $\mathbb{R}$.

Заменила тире на :

Решение. Пусть $a \in A$, тогда множеству A принадлежат все значения функции $x(a-x)$. График этой функции — парабола с ветвями вниз, то есть её значения пробегают промежуток $(-\infty;\ a^2/4]$. В частности, в хорошее множество входят все неположительные числа.

Но тогда в него входят и все положительные числа. Действительно, рассмотрим произвольное положительное число b. Число $c = -2\sqrt{b}$ входит в A, значит, в него входит и $c^2/4 = b$.

Убрала "отрицательное" число, иначе был разрыв...

Задача 13 [2, 16–6]. Рассмотрим класс функций $K = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

а) Покажите, что функцию $f(x) = x^2$ можно представить как сумму инъекции и сюръекции из K.

б) Покажите, что функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, заданную на $\mathbb{R}$, нельзя представить в виде суммы инъекции и сюръекции из K.

Решение. а) Например, запишем равенство $x^2 = x^3 + (x^2 - x^3)$. Здесь x^3 — монотонна и, следовательно, инъективна. Значения функции $(x^2 - x^3)$ пробегают всю числовую прямую, она сюръективна.

б) Предположим, что $f(x) = g(x) + h(x)$, причём $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — инъективна, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сюръективна, $g(0) + h(0) = 1$, $g(x) = -h(x)$ при $x \neq 0$ и $g(0) = 1 - h(0)$. В силу инъективности функции g, ни при каком $x \neq 0$ она не принимает значение $1 - h(0)$. Следовательно, ни при каких x функция h не принимает значение $-(1-h(0)) = h(0)-1$. Это противоречит сюръективности функции h.

6. Чётность, нечётность, периодичность

Определения чётной, нечётной и периодической функций приводить не будем. Отметим только, что они тесно связаны с видом области определения. Например, чётной или нечётной функция может быть только на множестве D, симметричном относительно 0.

Упражнение 10. Пусть область определения функции симметрична относительно 0. Покажите, что её можно представить как сумму нечётной и чётной функций.

Задача 14 [4]. Верно ли, что функция f,

$$f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$$

нечётная?

Решение. Нет, это неверно, потому что области определения функций $f(x)$ и $f(-x)$ не совпадают. Говоря другими словами, область D определения функции f не симметрична относительно 0. Действительно, при $x = \frac{\pi}{2}$ значение функции f существует, а при $x = -\frac{\pi}{2}$ — нет.

дроби? м.б. через / ?

Однако если сузить область определения функции f так, чтобы она стала симметричной относительно 0, то функция окажется нечётной. Проверим равенство $f(-x) = -f(x)$. Имеем

$$f(-x) + f(x) = \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} + \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{1 - (\sin x + \cos x)^2 + 1 - (\sin x - \cos x)^2}{(1 - \sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos x)}.$$

Раскрывая скобки в числителе видим, что он равен тождественно нулю.

Упражнение 11. Найдите наибольшее множество, на котором функция из предыдущей задачи является нечётной.

Задача 15 [5, с. 54]. Пусть для некоторого $a \neq 0$ и любого x выполняется равенство

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}. \tag{3}$$

Докажите, что функция f периодическая. Найдите какой-нибудь её период.

Решение. Можно заметить, что правая часть равенства (3) является композицией $g \circ f$, где g — функция, рассмотренная в задаче 11. При её решении доказано, что $g^4 = \mathrm{id}_\mathrm{A}$, где $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Ясно, что $f(x+4a) = g^4(f(x)) = f(x)$, то есть $4a$ — один из периодов данной функции.

Может ли оказаться, что f принимает одно из значений $\{-1; 0; 1\}$? Нет. В силу того, что равенство (3) выполняется на всей числовой оси, $f(x)$ нигде не равно 1. Если $0 = f(x_0)$, то $f(x_0 + a) = g(f(x_0)) = g(0) = 1$, чего быть не может. Аналогично показывается, что f не принимает значение -1, так как $g(-1) = 0$.

Упражнение 12. (МШ, №4223, 2/96). Функция $f(x)$ определена для всех вещественных значений x и для всех x выполняется:

1) $f(x + 3) \leqslant f(x) + 3$;

2) $f(x + 2) \geqslant f(x) + 2$.

Доказать, что функция $g(x) = f(x) - x$ периодическая.

7. Функциональные уравнения

Функциональные уравнения — довольно частый сюжет в студенческих (да и школьных) олимпиадах. Им посвящены целые книги, напр. [**??**], поэтому здесь мы не будем уделять им много внимания. Часто встречается такой тип уравнений: $af(x) + bf(g(x)) = h(x)$, где g — «корень из единицы», то есть функция, некоторая степень которой равна id, а h — заданная функция.

Упражнение 13. Найдите функцию, которая для всех $x \neq 0, x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{x} f(x) + x f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = 1.$$

Задача 16 [2, 99–5]. Найти функцию f, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = \sqrt{x} + \int\limits_0^1 x(1+xy)f(y)dy.$$

Решение. В данном случае важно понять, что тут функция, а что — константа. Преобразуем интеграл в правой части соотношения.

$$\int\limits_0^1 x(1+xy)f(y)dy = \int\limits_0^1 xf(y)dy + \int\limits_0^1 x^2yf(y)dy = ax + bx^2,$$

где

$$a = \int\limits_0^1 f(y)dy, \quad b = \int\limits_0^1 yf(y)dy. \tag{4}$$

Значит, искомая функция имеет вид $f(x) = \sqrt{x} + ax + bx^2$, причём $a,\ b$ — это числовые коэффициенты, которые подбираются исходя из соотношений (4).

Упражнение 14. Найдите эти коэффициенты.

Иногда на решение функционального уравнения накладывается дополнительное условие, например, непрерывность или дифференцируемость.

Задача 17 [5, стр. 7]. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

Ответ. Любая функция вида $ax + \frac{x^3}{3}$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Используем определение производной:

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y) + xy(x+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} + x^2 = a + x^2.$$

Здесь a — некоторая константа. Значит, искомая функция удовлетворяет уравнению

$$f'(x) = a + x^2 \quad \Rightarrow \quad y = ax + \frac{x^3}{3} + C.$$

Подставляя в исходное равенство $y = 0$, получим, что $f(x) = f(x) + f(0)$, откуда $f(0) = 0$, то есть $C = 0$.

Проверим теперь, всякая ли функция такого вида является решением.

$$f(x+y) = a(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} = ax + ay + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x^2y + xy^2 =$$

$$= f(x) + f(y) + xy(x+y).$$

Тождество выполняется.

8. Задания без решений

Упражнение 15 [5, стр. 16]. Пусть функция f непрерывна на всей числовой оси, причём $f(f(x)) \equiv x$. Докажите, что существует точка x_0, для которой $f(x_0) = x_0$.

Упражнение 16 [5, стр. 38]. Пусть функция f непрерывна на всей числовой прямой, и уравнение $f(x) = x$ не имеет решения. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.

Упражнение 17 [5, стр. 28]. Существует ли такая непрерывная числовая функция f, определённая на всей числовой оси, что $f(f(x)) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$?

Упражнение 18 [2, 02–7]. Найти все непрерывные на $[a, b]$ функции φ, удовлетворяющие соотношению $\varphi(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \psi(x)$, где ψ — некоторая функция, непрерывная на $[a, b]$.

Упражнение 19 [2, 09–1]. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x$ для всех $x \neq 0$.

Упражнение 20 [5, стр. 55]. Найти вещественную функцию, удовлетворяющую уравнению

$$2f(x + 2) + f(-x - 1) = (x + 2)^2.$$

Упражнение 21 [5, стр. 53]. Найти все функции, удовлетворяющие условию $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2x_1x_2$ для $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$.

Упражнение 22 [7, 1994.3]. Найти все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению $3f(2x + 1) = f(x) + 5x$.

Упражнение 23 [7, 2001.4]. Найти все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$), удовлетворяющие уравнению

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$$

Упражнение 24 [7, 1999.5]. Существует ли непрерывная на полуоси $(1; +\infty)$ функция f и такая, что

$$\int\limits_x^{x^2} f(t)dt = 1, \quad \forall x \in (1; +\infty)?$$

Упражнение 25 [5, стр. 21]. Найти дифференцируемую функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую для любых x, y равенству $f(x, y) = yf(x) + xf(y)$.

Упражнение 26 [5, стр. 17]. Найти все дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}.$$

Упражнение 27 [2, 02–5]. Найти все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$ и $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Упражнение 28 [2, 19–3]. Непрерывно дифференцируемая функция f, $f \not\equiv 0$, удовлетворяет условию $f'(x) = f(-x)$. Найти все вещественные нули функции f.

9. Решения упражнений

Упр. 1. а) $f \circ g(x) = \sin(x^3)$; $g \circ f(x) = (\sin x)^3$; $f \circ f(x) = \sin \sin x$; $g \circ g(x) = x^9$. б) Например, $h = f \circ g$, где $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$. Или $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2$.

Замечание. В «школьной» записи $(\sin x)^3$ совпадает с $\sin^3 x$. Однако мы приняли соглашение, что $f^3 = f \circ f \circ f$.

Упр. 2. Композиция функций одного поведения возрастает, разных — убывает.

Упр. 3. $y = f^2(x) = 3 - \big|3 - |x|\big|$ (см. Рис. 2). График функции f^n выглядит аналогично, только имеет n «зубьев пилы».

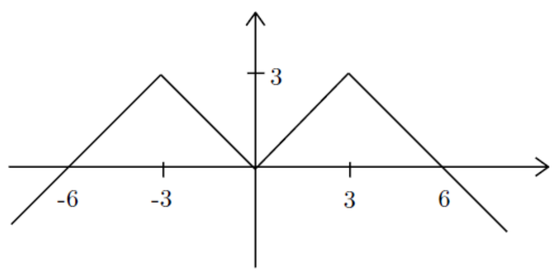

Рис. 2.

Упр. 4. Вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим функцию $f(x) = -x$. Уравнение (I) имеет вид $-x = x$, решение единственное, $x = 0$. Но $f(f(x)) = -(-x) = x$, так что решением (II) будет любое число!

Упр. 5. Да, выполняется для любой степени возрастающей функции f. Действительно, если $f(x) \neq x$, то оно может быть либо меньше x, либо больше. Пусть $x < f(x)$, тогда в силу возрастания функции f имеем $f(x) < f(f(x))$, $f(f(x)) < f(f(f(x)))$ и т.д. То есть выполняется цепочка неравенств $x < f(x) < f^2(x) < \ldots < f^n(x)$. Никакое значение в этой цепочке не может быть равно первому. Случай $x > f(x)$ рассматривается аналогично.

Упр. 6. Формально в этом случае нельзя применить *Лемму о квадрате*. Однако заметим, что любое решение уравнения лежит в промежутке $[-1; 1]$, так как является синусом некоторого аргумента. На этом промежутке функция sin возрастает. Поэтому в силу *Леммы* заданное уравнение равносильно $\sin x = x$, имеющему единственное решение $x = 0$.

Упр. 7. **Ответ.** $x = y = z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Заметим, что в левой части каждого уравнения стоят значения функции f, $f(x) = x^3 - 1/x$. При положительных x эта функция возрастает. Имеем $y = f(x), z = f(y), x = f(z)$, откуда следует, что x является решением уравнения $f^3(x) = x$.

Воспользуемся результатом Упражнения 5. Для возрастающей функции это уравнение равносильно $f(x) = x$, то есть $x^3 - 1/x = x$ или $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Это биквадратное уравнение, у него единственный положительный корень $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Ясно, что значения всех трёх переменных совпадают.

Упр. 8. **Ответ.** Существует. Например, функция $f(x) = x - 1/2$.

Будем искать такую функцию среди линейных. Пусть $f(x) = kx + b$, $k \neq 0$. Тогда $f^{-1}(x) = \frac{1}{k}(x - b)$. Уравнение принимает вид $\frac{1}{k}(x - b) = kx + k + b$, причём это равенство должно выполняться при всех x. Это значит, что коэффициенты слева и справа должны совпадать.

$$\begin{cases} 1/k = k, \\ -b/k = k + b. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k^2 = 1, \\ -b = 1 + kb. \end{cases}$$

При $k = 1$ второе уравнение принимает вид $-b = 1 + b$, откуда $b = -1/2$.

При $k = -1$ второе уравнение принимает вид $-b = 1 - b$, решений нет.

Упр. 9. Решение для всей прямой можно получить из примера, приведённого в решении задачи. Например, к графику можно применить бесконечное число раз гомотетию с коэффициентами $1/4$ и 4 и доопределить функцию нулём при $x = 0$.

Упр. 10. Всякая функция представима в виде $f = f_+ + f_-$, где

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Первая из них чётная, вторая — нечётная.

Упр. 11. Решим уравнение $1 + \sin x + \cos x = 0$. Его можно переписать в виде $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1$, т. е. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4})$. Получаем две серии решений: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = (2n+1)\pi$ с целыми n, k. Первая серия особых точек несимметрична, для симметричности нужно исключить из D ещё и серию точек $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Следовательно, наибольшее множество, на котором заданная функция нечётна, — это числовая прямая с исключёнными точками $\frac{\pi}{2}k$, $k \neq 4m$.

Кстати, такое преобразование формулы может нам подсказать, почему эта функция нечётная. Имеем

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})}{1 + \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin\frac{\pi}{4} + \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4} + \sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{2\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

так как $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$. Равенство верно тогда, когда $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \neq 0$, т. е. для $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Упр. 12. Мы знаем, что происходит с функцией при прибавлении 2 или 3. А как изменится её значение при прибавлении 6? Имеем

$$f(x+6) \leqslant f(x+3)+3 \leqslant f(x)+6.$$

С другой стороны, $f(x+6) \geqslant f(x+4)+2 \geqslant f(x+2)+4 \geqslant f(x)+6$. Значит, $f(x+6) = f(x)+6$ и $g(x+6) = f(x+6)-x-6 = f(x)-x = g(x)$. То есть, функция g имеет период 6.

Упр. 13. **Ответ.** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Обозначим $g(x) = \frac{1}{1-x}$, тогда

$$g^2(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = 1-\frac{1}{x}, \quad g^3(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})} = x.$$

Мы видим, что функция g является корнем 3 степени из id. Подставляя в исходное уравнение вместо x значения $g(x)$ и $g^2(x)$, получим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{1}{x} f(x) & +xf\left(\frac{1}{1-x}\right) & & =1, \\ & (1-x)f\left(\frac{1}{1-x}\right) & +\frac{1}{1-x}f\left(1-\frac{1}{x}\right) & =1, \\ \left(1-\frac{1}{x}\right)f(x) & & -\frac{x}{1-x}f\left(1-\frac{1}{x}\right) & =1, \end{array}\right.$$

линейную относительно $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ и $f\left(1-\frac{1}{x}\right)$. Нам нужно найти только значение $f(x)$, так что можно применить правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x & 0 \\ 0 & 1-x & \frac{1}{1-x} \\ 1-\frac{1}{x} & 0 & -\frac{x}{1-x} \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1-x & \frac{1}{1-x} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{1-x} \end{vmatrix} = \frac{2x^2}{1-x}.$$

f(x) дробь заменила на / ?

Тогда $f(x) = \Delta_1/\Delta$.

Упр. 14. **Ответ.** $f(x) = -2{,}4x - 1{,}6x^2 + \sqrt{x}$.

Вычислим указанные в (4) интегралы:

$$\int\limits_0^1 f(y)dy = \int\limits_0^1 (ay+by^2+\sqrt{y})dy = a\cdot\frac{1}{2} + b\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = a,$$

$$\int\limits_0^1 yf(y)dy = \int\limits_0^1 (ay+by^2+\sqrt{y})ydy = a\cdot\frac{1}{3} + b\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = b.$$

Итак, коэффициенты a и b задаются системой линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{2}{3} = 0, \\ \frac{1}{3}a - \frac{3}{4}b + \frac{2}{5} = 0. \end{array}\right.$$

Решая её, получаем, что $a = -2{,}4$; $b = -1{,}6$.

Литература

непонятно в [1] - это рубрика в журнале ?

[1] «Задачник» журнала «Математика в школе». 2000. №7.

[2] Задачи студенческих олимпиад по математике, посвящённых дню рождения Н. И. Лобачевского. Казанский университет (1999–2019 гг.): учеб.-метод. пособие. Казань: Фэн, 2020. 101 с. (сост. Д. Ф. Абзалилов, И. С. Григорьева, Э. Ю. Лернер).

[3] VII Заочный конкурс учителей по математике. МЦНМО, на сайте https://www.mccme.ru/oluch/

[4] Григорьева И. С. Такой простой знак равенства // Математика в школе. 2000. №10. С. 53–54.

[5] Шахматов В. М. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие. / В. М. Шахматов, А. Л. Лисок, Т. В. Тарабокова – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. 144 с.

[6] Бродский Я. С., Слипенко Я. К. Функциональные уравнения. Москва: Ленанд. 2021. 104 с.

[7] Методическое пособие по решению задач студенческой математической олимпиады (1993-2007). МФТИ, на сайте
https://mipt.ru/education/chair/mathematics/olymp/

Поступила 26.08.2021

THE CONCEPT OF “FUNCTION” IN PROBLEMS

I. S. Grigorieva

The article contains a set of problems for studying the concept of “function”, namely the real function of one variable. It is designed for the 1st year college students. It can be used in mathematical elective courses and to train college students for math contests.

Keywords: math elective, math olympiad, function.