С. Р. Насыров

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. МЕРА ЖОРДАНА.

Казань – 2018

УДК 515.1

*Рекомендовано к опубликованию и размещению
на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета
Учебно-методической комиссии Института математики и механики
им. Н. И. Лобачевского, Протокол № 4 от 15 февраля 2018 г.*

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент Р. Н. Гумеров

Несобственные интегралы. Числовые ряды. Мера Жордана: Учебное пособие / С. Р. Насыров. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2018. – 60 с.

Данное учебно пособие предназначено для студентов, обучающихся в бакалавриате по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки». В нем излагаются основы теории несобственных интегралов, числовые ряды, а также мера Жордана.

Материал соответствует программе курса «Математический анализ» для студентов-математиков, действующей в Казанском (Приволжском) федеральном университете.

1 Несобственные интегралы

1.1 Определение несобственного интеграла

Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, то говорят, что f интегрируема в собственном смысле на $[a;b]$. Если f не интегрируема в собственном смысле на $[a;b]$, то выражение $\int_a^b f(x)dx$ называют *несобственным интегралом Римана.* Кроме того, *несобственными интегралами* называют выражения вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

В дальнейшем будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int_a^b f(x)dx$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Если $a \neq -\infty$ и для любого $t \in [a;b)$ функция f интегрируема по Риману на $[a;t]$, то будем говорить, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является *несобственным интегралом с единственной особенностью на верхнем пределе интегрирования* (в точке b). Аналогично определяется *несобственный интеграл с единственной особенностью на нижнем пределе интегрирования* (в точке a). Несобственные интегралы с единственной особенностью на верхнем или на нижнем пределе интегрирования называются *простейшими несобственными интегралами.* Сначала мы займемся исследованием простейших несобственных интегралов.

Говорят, что *интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с единственной особенностью в точке b сходится,* если существует конечный предел

$$\alpha := \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)dx.$$

В этом случае число α называют *значением несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$*. Если *интеграл $\int_a^b f(x)dx$* не сходится, то говорят, что он *расходится.*

Аналогично определяются *несобственный интеграл с единственной особенностью в точке* a и его сходимость. Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в этом случае означает существование конечного предела $\beta := \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx$. Число β называется значением интеграла.

Примеры. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Функция $f(x) = \frac{dx}{x}$ интегрируема на любом отрезке $[t;1]$, $0 < t < 1$, но не интегрируема на отрезке $[0;1]$, так как не ограничена на этом отрезке. (Фактически функция f не определена в точке 0, но как бы мы ни определили ее в этой точке, интеграл в собственном смысле не существует!) Имеем

$$\int_t^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_t^1 = -\ln t \to +\infty, \quad t \to 0+\,.$$

Следовательно, несобственный интеграл с единственной особенностью в точке 0 расходится.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Этот интеграл также простейший с единственной особенностью на нижнем пределе. Он сходится, так как

$$\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_t^1 = 2(1-\sqrt{t}) \to 2, \quad t \to 0+,$$

и его значение равно 2.

3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Этот интеграл имеет единственную особенность в точке $+\infty$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

1.2 Свойства простейших несобственных интегралов

Поскольку изучение интегралов с особенностью на нижнем пределе совершенно аналогично изучению интегралов с особенностью на верхнем пределе, мы ограничимся рассмотрением только интегралов с особенностью на верхнем пределе.

Теорема 1 (линейность). *Пусть* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *— два сходящихся несобственных интеграла с единственной особенностью в точке* b. *Тогда для любых* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *интеграл* $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ *сходится и*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \tag{1.1}$$

Доказательство. Для любого $t \in (a; b)$ в силу линейности собственных интегралов справедлива формула

$$\int_a^t [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^t f(x)dx + \beta \int_a^t g(x)dx. \tag{1.2}$$

Устремляя $t \to b-$ видим, что правая часть (1.2) стремится к правой части (1.1). Следовательно, левая часть имеет конечный предел. Это означает, что интеграл $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ сходится и справедливо (1.1).

Теорема 2 (аддитивность). *Если* $\int_a^b f(x)dx$ *— несобственный интеграл с единственной особенностью в точке* b, *то для любой точки* $c \in (a; b)$ *сходится интеграл* $\int_c^b f(x)dx$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Обратно, если для некоторого $c \in (a; b)$ *сходится интеграл* $\int_c^b f(x)dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Теорема 3 (формула Ньютона-Лейбница). *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a; b)$ *и* F *— некоторая первообразная функции* f *на* $[a; b)$. *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел* $F(b-) := \lim_{x \to b-} F(x)$. *При этом*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a). \tag{1.3}$$

Доказательство. Для любого $t \in (a; b)$ по формуле Ньютона-Лейбница для собственных интегралов имеем

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a) \tag{1.4}$$

Если существует конечный $\lim_{x\to b-} F(x)$, то существует конечный предел правой части равенства (1.4). Следовательно, существует конечный предел и левой части (1.4). Это означает, что $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Переходя к пределу в (1.4), получаем (1.3).

Замечание. На практике полагают $F(b) = \lim_{x\to b-} F(x)$ и формулу Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов записывают в том же виде, что и для собственных:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

Примеры.

1)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2)
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = 1.$$

Теорема 4 (интегрирование по частям). *Пусть функции f и g непрерывно дифференцируемы на $[a;b)$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to b-}[f(x)g(x)]$, то из сходимости одного из интегралов $\int_a^b f(x)g'(x)dx$, $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ следует сходимость другого, и справедливо соотношение*

$$\int_a^b g(x)f'(x)dx = \lim_{x\to b-}[f(x)g(x)] - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{1.5}$$

Доказательство. Для любого $t \in (a;b)$ справедлива формула интегрирования по частям для собственных интегралов

$$\int_a^t g(x)f'(x)dx = f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^t f(x)g'(x)dx. \tag{1.6}$$

Если, к примеру, сходится интеграл $\int_a^b f(x)g'(x)dx$, то правая часть (1.6) имеет конечный предел при $t \to b-$. Значит, конечный предел имеет и левая часть. Это означает, что интеграл $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ сходится. Переходя к пределу в (1.6) при $t \to b-$, получаем (1.5).

Замечание. На практике часто пишут вместо

$$\lim_{x\to b-}[f(x)g(x)] - f(a)g(a),$$

как и в случае собственных интегралов, $f(x)g(x)|_{x=a}^{b}$.

Теорема 5 (замена переменных). *Пусть* $\varphi : [\alpha;\beta) \to [a;b)$ *— непрерывно дифференцируема, строго монотонно возрастает и обладает свойствами:* $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to\beta}\varphi(t) = b$. *Тогда если один из несобственных интегралов* $\int_a^b f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$ *сходится, то сходится и другой и они равны:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть сначала сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Для любого t из интервала $(\alpha;\beta)$ справедлива формула замены переменных в собственном интеграле:

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx = \int_\alpha^t f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau. \tag{1.8}$$

Устремим $t \to \beta-$. Тогда $\varphi(t) \to b$ и левая часть (1.8) имеет конечный предел, равный $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно, и правая часть (1.8) имеет тот же конечный предел. Это означает, что интеграл $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ сходится и справедливо (1.7).

Обратно, пусть сходится $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$. Тогда из строгой монотонности φ следует, что

$$\int_a^u f(x)dx = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(u)} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

При этом $\varphi^{-1}(u) \to \beta$, $u \to b-$. Далее рассуждаем так же, как и в первом случае. Теорема доказана.

Замечание. При замене переменных несобственный интеграл может перейти в собственный.

Примеры.

1)

$$\int_0^1 \ln x = x\ln x|_0^1 - \int_0^1 xd\ln x = -\int_0^1 x\cdot\frac{dx}{x} = -\int_0^1 dx = -1.$$

Отметим, что при вычислениях мы использовали следующий табличный предел: $\lim_{x\to 0+}(x\ln x) = 0$.

2)

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xd(e^{-x}) = -xe^{-x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1,$$

так как $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

3)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int_0^{\pi/2} dt = 0.$$

Здесь сделана замена переменных $x = \sin t$, при этом несобственный интеграл перешел в собственный.

1.3 Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций

Пусть $\int_a^b f(x)dx$ — простейший несобственный интеграл с особенностью в точке b и функция f неотрицательна. Тогда функция $F(t) := \int_a^t f(x)dx$ является монотонно возрастающей функцией на $[a;b)$. Поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim_{t\to b-} F(t)$. Если предел конечен, то несобственный интеграл сходится, если бесконечен, то интеграл расходится, но ему можно приписать значение $+\infty$. В этом случае говорят, что *интеграл расходится к* $+\infty$.

Итак, в случае неотрицательной подинтегральной функции простейшему несобственному интегралу можно приписать конечное или бесконечное значение. В этом существенное отличие от случая, когда подинтегральная функция не знакопостоянна! Если функция f меняет знак на любом интервале $(t;b)$, содержащемся в $(a;b)$, то часто интегралу нельзя приписать никакого определенного значения (если не существует $\lim_{t\to b-} F(t)$).

Теорема 1 (признак сравнения в форме неравенства). *Пусть даны два несобственных интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ с единственной особенностью в точке b. Если $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a;b)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$; из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.*

Доказательство. Для любого $t \in (a;b)$ имеем

$$F(t) := \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx =: G(t).$$

Пусть интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда существует конечный предел $\lim_{x\to b-} G(x)$. В силу монотонного возрастания функции G получаем $G(t) \le \lim_{x\to b-} G(x) < +\infty$. Следовательно, функция G ограничена. Из неравенства $F(t) \le G(t)$, $t \in (a;b)$, следует, что монотонно возрастающая функция F также ограничена сверху. По свойству монотонных функций существует конечный предел $\lim_{x\to b-} F(x)$. Это означает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Второе утверждение теоремы сразу следует из первого.

Теорема 2 (признак сравнения в предельной форме). *Пусть даны два несобственных интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ с единственной особенностью в точке b. Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $x \in [a;b)$, и существует предел $\alpha := \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Если $\alpha < +\infty$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Если $\alpha > 0$, то из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. 1) Пусть $\alpha < +\infty$. В силу свойств предела функции $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ c \in (a;b)$: $\forall x \in (c;b)$ $\frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \varepsilon$, т.е. $f(x) < (\alpha+\varepsilon)g(x)$. Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то в силу теоремы 2 предыдущего пункта для любого $d \in (c;b)$ интеграл $\int_d^b g(x)dx$ сходится. В силу линейности интегралов сходится интеграл $\int_d^b (\alpha+\varepsilon)g(x)dx$. По теореме 1 сходится интеграл $\int_d^b f(x)dx$. Тогда сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2) Если $\alpha > 0$, то $\lim_{x\to b-}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha} < +\infty$ и утверждение следует из доказанного в п. 1).

Примеры.

1)
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p}, \quad p > 1.$$
При $p < 1$ аналогичными вычислениями показываем, что
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = +\infty.$$
Наконец, при $p = 1$ имеем
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty.$$
Итак, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

2)
$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_0^1 = \frac{1}{1-p}, \quad p < 1.$$
При $p > 1$ видим, что
$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} = +\infty.$$
Наконец, при $p = 1$ получаем
$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} = \ln x|_0^1 = +\infty.$$
Итак, интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$.

3) Основываясь на примере 2), получаем, что для конечных a и b интегралы вида $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$, $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ сходятся тогда и только тогда, когда $p < 1$.

Из теоремы 2 с использованием этих примеров следуют следующие важные для практики утверждения.

Теорема 3. *Рассмотрим несобственный интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *от неотрицательной функции* f *с единственной особенностью на верхнем пределе. Предположим, что существует* $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \alpha$. *Если* $p > 1$ *и* $\alpha < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится. Если* $p \leq 1$ *и* $\alpha > 0$, *то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Теорема 4. *Рассмотрим несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *от неотрицательной функции* f *с единственной особенностью на верхнем пределе* $b \in \mathbb{R}$. *Предположим, что существует* $\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x) = \alpha$. *Если* $p < 1$ *и* $\alpha < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится. Если* $p \geq 1$ *и* $\alpha > 0$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится.*

Упражнение. Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4 для интегралов с особенностями на нижнем пределе.

Примеры.

1) Интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$$

сходится, так как $\frac{1}{x^2(1+x)} \sim \frac{1}{x^3}$, $p = 3 > 1$.

2) Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$$

расходится, так как $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$, $p = 1$.

3) Интеграл

$$\int_0^1 \ln^2 x dx$$

сходится, т. к. для любого $p \in (0,1)$ имеем $\lim_{x\to 0+}(x^p \ln^2 x) = 0$.

1.4 Несобственные интегралы от незнакопостоянных функций

Теорема 1 (критерий Коши). *Интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *с единственной особенностью на верхнем пределе сходится тогда и только тогда, когда*

$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, t_\varepsilon \in (a; b)\colon\ \forall\, t',\ t'' \in (t_\varepsilon; b)$

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда. когда существует конечный предел $\lim_{t\to b-} F(t)$. В силу критерия Коши существования предела функции это будет тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, t_\varepsilon \in (a; b)\colon\ \forall\, t',\ t'' \in (t_\varepsilon; b)$ $|F(t') - F(t'')| < \varepsilon$. Но

$$|F(t') - F(t'')| = \left|\int_a^{t'} f(x)dx - \int_a^{t''} f(x)dx\right| = \left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right|.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно,* если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2 (признак абсолютной сходимости). *Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится. Тогда по критерию Коши $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, t_\varepsilon \in (a; b)\colon\ \forall\, t',\ t'' \in (t_\varepsilon; b)$

$$\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при таких t', t''

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \le \left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Замечание. Обратное неверно. Существуют интегралы, которые сходятся, но не сходится абсолютно. Такие интегралы называются *условно сходящимися.*

Теорема 3 (признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:*

1) *функция* f *непрерывна на* $[a;b)$ *и имеет ограниченную первообразную* F *на* $[a;b)$*;*

2) *функция* g *непрерывно дифференцируема и монотонна на* $[a;b)$*;*

3) $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$.

Доказательство. Применим к интегралу $\int_a^b f(x)g(x)dx$ критерий Коши. Для любых t', $t'' \in (a;b)$ имеем

$$\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx = \int_{t'}^{t''} g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} F(x)g'(x)dx. \quad (1.9)$$

Выберем константу $M > 0$ так, чтобы $|F(x)| \le M$, $x \in [a;b)$.

Так как функция g монотонна на $[a;b)$, то ее производная либо неотрицательна, либо неположительна на $[a;b)$. Пусть, для определенности, $g'(x) \ge 0$, $x \in [a;b)$. Так как $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, по определению предела $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, t_\varepsilon \in (a;b)$: $\forall\, x \in (t_\varepsilon; b)$ выполняется неравенство

$$|g(x)| \le \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Оценим слагаемые в правой части (1.9). Имеем

$$\left|F(x)g(x)\Big|_{t'}^{t''}\right| \le |F(t'')||g(t'')| + |F(t')||g(t')| \le$$
$$\le M(|g(t'')| + |g(t')|) \le M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad t', t'' \in (t_\varepsilon; b). \quad (1.10)$$

Кроме того,

$$\left|\int_{t'}^{t''} F(x)g'(x)dx\right| \le \left|\int_{t'}^{t''} |F(x)||g'(x)|dx\right| \le M\left|\int_{t'}^{t''} |g'(x)|dx\right| =$$
$$= M\left|\int_{t'}^{t''} g'(x)dx\right| = M|g(t'') - g(t')| \le M(|g(t'')| + |g(t')| \le$$
$$\le M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad t', t'' \in (t_\varepsilon; b). \quad (1.11)$$

Применяя к оценке правой части (1.9) неравенство треугольника, с учетом (1.10) и (1.11), получаем

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad t', t'' \in (t_\varepsilon; b).$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Теорема 4 (признак Абеля). *Интеграл* $\int_a^b f(x)g(x)dx$ *сходится, если*

1) *функция* f *непрерывна на* $[a;b)$ *и несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится;*

2) *функция* g *непрерывно дифференцируема и монотонна на* $[a;b)$*;*

3) *функция* g *ограничена на* $[a;b)$*.*

Доказательство. Функция g монотонна и ограничена на $[a;b)$. Следовательно, существует конечный предел $\alpha := \lim_{x\to b-} g(x)$. Применим признак Дирихле к несобственному интегралу $\int_a^b f(x)(g(x)-\alpha)dx$. Первообразная $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ функции f имеет конечный предел при $x \to b-$, поэтому она ограничена. Функция $g(x)-\alpha$ непрерывно дифференцируема, монотонна на $[a;b)$, и $\lim_{x\to b-}(g(x)-\alpha) = 0$. Следовательно, $\int_a^b f(x)(g(x)-\alpha)dx$ сходится. В силу линейности сходится интеграл

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)(g(x)-\alpha)dx + \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Примеры.

1) Интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

сходится абсолютно, так как

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{1-x}}{\sqrt{1-x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится.

2) Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{1.12}$$

сходится по признаку Дирихле. Действительно, пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$. Функция f имеет ограниченную первообразную

$$F(x) = -\cos x, \quad |F(x)| \le 1.$$

Функция g непрерывно дифференцируема, монотонна и стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Покажем, что интеграл (1.12) не сходится абсолютно. Применим признак сравнения. Имеем

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}.$$

Достаточно доказать, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится. Если бы этот интеграл сходился, то сходился бы и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx.$$

(Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле, это показывается так же, как и выше для интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$). Однако интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Таким образом, интеграл (1.12) сходится условно.

1.5 Несобственные интегралы общего вида

Пусть дан несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и на (a,b) существует конечное число точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ таких, что интегралы

$$\int_a^{t_1} f(x)dx,\ \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx,\ \ldots,\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx,\ \int_{t_n}^{b} f(x)dx$$

являются простейшими несобственными интегралами. Если все эти интегралы сходятся, то *интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, и его значение равно сумме значений соответствующих простейших интегралов. В противном случае *интеграл* называется *расходящимся.*

Отметим, что это определение не зависит от выбора точек t_j.

Примеры.

1) Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{1.13}$$

Разобъем его на два простейших интеграла:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Первый интеграл имеет особенность на нижнем предел и является сходящимся, поскольку $\frac{\sin x}{x} \to 1,\ x \to 0$. Сходимость второго интеграла доказана выше. Следовательно, интеграл (1.13) сходится.

2) Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,dx \tag{1.14}$$

разобъем на два простейших. Первый

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}\,dx$$

сходится при $p < 1$, второй

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,dx$$

при $p < 1$. Следовательно, интеграл (1.14) не сходится ни при каких значениях параметра p.

3) Интеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

сходится, так как сходятся интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

1.6 Интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши

Рассмотрим пример. Несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1/2}$$

расходится, так как простейшие несобственные интегралы

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x-1/2}, \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x-1/2}$$

расходятся. Таким образом, не существует предела

$$\lim_{t',t''\to 1/2} \left(\int_0^{t'} \frac{dx}{x-1/2} + \int_{t''}^1 \frac{dx}{x-1/2} \right).$$

Однако если выбирать t' t'' не произвольно, а симметрично относительно точки $(1/2)$, то предел существует:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{dx}{x-1/2} + \int_{1/2+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x-1/2} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln\left| x - \frac{1}{2} \right|_0^{1/2-\varepsilon} + \ln\left| x - \frac{1}{2} \right|_{1/2+\varepsilon}^1 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln\varepsilon - \ln(1/2) + \ln(1/2) - \ln\varepsilon) = 0.$$

Этот пример наводит на следующее определение.

Пусть несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет единственную особенность в точке $c \in (a;b)$. Говорят, что этот *интеграл существует в смысле главного значения по Коши,* если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right].$$

Этот предел обозначают

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$. Тогда для любого $c \in (a;b)$ существует интеграл в смысл главного значения по Коши

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}.$$

Действительно,

$$\frac{\varphi(x)}{x-c} = \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} + \varphi(c)\frac{1}{x-c},$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{\varphi(x)dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{\varphi(x)dx}{x-c}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))dx}{x-c}\right]+$$

$$+\varphi(c)\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=$$

$$=\int_a^{c}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))dx}{x-c}+\int_{c}^{b}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))dx}{x-c}+$$

$$+\varphi(c)\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln|x-c|\big|_a^{c-\varepsilon}+\ln|x-c|\big|_{c+\varepsilon}^{b}\right]=$$

$$=\int_a^{b}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))dx}{x-c}+\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Последний интеграл существует как несобственный, поскольку имеет особенность только в точке c и в силу дифференцируемости функции φ в этой точки точке

$$\exists\lim_{x\to c}\frac{(\varphi(x)-\varphi(c))}{x-c}=\varphi'(c).$$

2 Числовые ряды

2.1 Сходимость числового ряда

Числовым рядом называется формальная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где a_n — некоторая числовая последовательность.

Частичной (точнее, n-й частичной) *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется величина $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Говорят, что *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится,* если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n$. При этом число $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пишут

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если *ряд* не сходится, то говорят, что он *расходится.* Если $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, то говорят, что ряд *расходится к* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Примеры.

1) Покажем, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

сходится. Его частичные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

$n \to \infty$. Таким образом, ряд сходится и его сумма равна 1.

2) Геометрическая прогрессия

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

имеет частичные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ и $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

2.2 Критерий Коши. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема (критерий Коши). *Числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n \geq m \geq N$ *выполнено неравенство*

$$\Big| \sum_{k=m}^{n} a_k \Big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для последовательностей. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность частичных сумм S_n. В свою очередь, это будет тогда и только тогда, когда последовательность S_n фундаментальна, т. е. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N\colon \forall\, n \geq m \geq N \;\; |S_n - S_{m-1}| < \varepsilon$. (Понятно, что можно брать S_{m-1} вместо S_m.) Остается заметить, что $\sum_{k=m}^{n} a_k = S_n - S_{m-1}$.

Следствие (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Для доказательства достаточно взять в условии теоремы $m = n$.

Вывод: при исследовании сходимости ряда следует начинать, как правило, с проверки необходимого условия сходимости $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Если это условие не выполняется, то ряд сходиться не может. Если оно выполняется. то ряд может и сходиться, и расходиться, и исследование сходимости требует использования дополнительных признаков или критериев.

Примеры.

1) Рассмотрим сумму геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

Имеем $q^n \to 0$ тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. Следовательно, при $|q| \geq 1$ ряд расходится.

2) Так называемый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Для него выполняется необходимое условие сходимости ряда: $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Покажем, что, тем не менее, ряд расходится. Для этого применим критерий Коши. Установим, что

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \ \forall\, N\ \exists\, n \geq m \geq N : \quad \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} > \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Для любого натурального N пусть $m = N$, $n = 2N-1$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2N} \sum_{k=N}^{2N-1} 1 = \frac{1}{2}.$$

Итак, по критерию Коши ряд расходится.

2.3 Сходимость ряда с неотрицательными членами

Отметим на некоторую аналогию между рядами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственными интегралами $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом аналогом частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$ выступают интегралы $\int_a^x f(t)dt$.

Теорема. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Так как все $a_n \geq 0$, последовательность S_n является монотонно возрастающей. Но монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

Следующая теорема позволяет достаточно просто исследовать сходимость рядов с использованием сравнения рядов с интегралами. Например, ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

можно сопоставить интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

сходимость которого очевидна. Так как интеграл сходится, то отсюда можно вывести сходимость ряда.

Теорема (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть дана невозрастающая функция* $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть $k = [x]$. Тогда $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Интегрируя, получаем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Суммируя эти неравенства, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

или

$$S_n - f(1) \le \int_1^n f(x)dx \le S_{n-1}. \tag{2.1}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то последовательность S_n сходится, следовательно, ограничена, т. е. существует $M > 0$ такое, что $S_n \le M$, $n \ge 1$. Обозначим $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Тогда в силу неотрицательности f и (2.1)

$$F(x) \le \int_1^{n+1} f(t)dt \le S_n \le M,$$

где $n = [x]$. Значит монотонно возрастающая функция F ограничена сверху, поэтому имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Это означает сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Обратно, из сходимости интеграла следует. что функция F ограничена сверху, т. е. существует константа $C > 0$ такая, что $|F(x)| \le C$, $x \ge 1$. Используя (2.1), получаем, что $S_n \le f(1) + C$, $n \ge 1$. Из предыдущей теоремы следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Примеры.

1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Если $p \le 0$, то этот ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Пусть теперь $p > 0$. Тогда функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ неотрицательна и монотонно убывает на $[1; +\infty)$. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

2) Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится. Действительно, функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ неотрицательна и монотонно убывает на $[2; +\infty)$, а интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

сходится. (Конечно, то обстоятельство, что суммирование начинается с 2 не существенно!)

2.4 Верхний и нижний пределы последовательности

По теореме Больцано-Вейерштрасса из любой ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся в $\mathbb{R}$ подпоследовательность. Если последовательность не ограничена, то тогда существует ее подпоследовательность, сходящаяся либо к $+\infty$ либо к $-\infty$. В любом случае, из любой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ к некоторому числу a. Будем называть число a *частичным пределом последовательности* x_n. Обозначим через $A(x_n)$ множество всех частичных пределов последовательности x_n. Как мы показали, это множество непусто.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots$. Очевидно, что множество частичных пределов $A(x_n)=\{-1,1\}$.

2) Пусть $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$. Тогда $A(x_n)=\{-1,1\}$.

3) Занумеруем множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ натуральными числами. В результате получаем последовательность x_n. Что можно сказать про $A(x_n)$?

4) Пусть натуральное число $n=\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$, т. е. α_j — цифры числа n в его десятичной записи. Рассмотрим последовательность $x_n=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$. Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ldots;0,9;\ 0,10;\ 0,11;\ 0,12;\ldots.$$

Тогда $A(x_n)=[0,1;1]$. Действительно, пусть $x\in[0,1;1]$. Тогда x можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $x=0,\beta_1\beta_2\ldots$ Пусть $y_n=0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$. Существует натуральное число k_n такое, что $y_n=x_{k_n}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=\lim_{n\to\infty}y_n=x$. С другой стороны, множество членов последовательности лежит в $[0,1;1]$, поэтому $A(x_n)$ лежит в $[0,1;1]$.

Теорема 1. *Для любой числовой последовательности x_n множество $A(x_n)$ содержит свои точные верхнюю и нижнюю грани.*

Доказательство. Рассмотрим для примера случай точной верхней грани. Пусть $a = \sup A(x_n) \in \mathbb{R}$. В силу свойств sup существует последовательность $a_m \in A(x_n)$, сходящаяся к a. Так как $a_m \in A(x_n)$, существует x_{n_m} такое, что $|x_{n_m} - a_m| < \frac{1}{m}$. (Можно выбирать номера n_m последовательно таким образом, чтобы они возрастали с ростом m.) Тогда $|x_{n_m} - a| \leq |x_{n_m} - a_m| + |a_m - a| < \frac{1}{m} + |a_m - a| \to 0,\ m \to \infty$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = a$, т. е. $a \in A(x_n)$.

Если $a = -\infty$, то $A(x_n) = \{-\infty\}$ содержит одну точку — точку a. Если $a = +\infty$, то последовательность x_n не ограничена сверху, следовательно содержит подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$. Теорема доказана.

Определение. Число $\sup A(x_n)$ называется *верхним пределом последовательности* x_n, а $\inf A(x_n)$ — *нижним пределом.*

Обозначается верхний предел $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, а нижний — $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Очевидна следующая

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Последовательность x_n *сходится тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, *при этом*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема 3 (характеристическое свойство верхнего предела). *Вещественное число* a *является верхним пределом последовательности* x_n *тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall\, n \geq N\ (x_n < a + \varepsilon)$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\colon \exists\, n \geq N\ (x_n > a - \varepsilon)$.

Замечание. Если имеет место условие $\exists N\colon \forall n \geq N\ (x_n \in A)$, то множество A называется *ловушкой последовательности* x_n. Если имеет место условие $\forall N\colon \exists n \geq N\ (x_n \in A)$, то множество A называется *кормушкой последовательности* x_n. Число $a \in \mathbb{R}$ является верхним пределом последовательности x_n тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ множество $(-\infty; a + \varepsilon)$ является ловушкой x_n, а $(-\infty; a - \varepsilon)$ — кормушкой.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. Предположим, что 1) не имеет место. Тогда $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\colon \exists n \geq N\ (x_n \geq a+\varepsilon)$. Это означает, что существует подпоследовательность x_{n_k}, для которой выполняется неравенство $x_{n_k} \geq a + \varepsilon$. Выделим из x_{n_k} сходящуюся подпоследовательность $x_{n_{k_j}}$. Ее предел α удовлетворяет условию $\alpha \geq a + \varepsilon > a$. Таким образом, существует $\alpha \in A(x_n)$ такое, что $\alpha > a$. Это противоречит тому, что $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Теперь предположим, что условие 2) не выполняется. Тогда $\exists N\colon \forall n \geq N\ (x_n \leq a - \varepsilon)$. Таким образом, для любой сходящейся подпоследовательности x_{n_k} с некоторого номера выполняется неравенство $x_{n_k} \leq a-\varepsilon$. Значит, и любой частичный предел β последовательности x_n удовлетворяет неравенству $\beta \leq a-\varepsilon$. Поэтому $a \leq a-\varepsilon$ — противоречие.

Достаточность. Пусть выполняются 1) и 2). Из 1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ любой частичный предел α удовлетворяет неравенству $\alpha \leq a + \varepsilon$. Следовательно, $\alpha \leq a$, т. е. a — мажоранта множества $A(x_n)$ и $\sup A(x_n) \leq a$. Из 2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность x_{n_k}, удовлетворяющая неравенству $x_{n_k} > a - \varepsilon$. Выделим из x_{n_k} подпоследовательность, сходящуюся к некоторому β. Тогда $\beta \in A(x_n)$, $\beta \geq a - \varepsilon$. Следовательно, $\sup A(x_n) \geq a$, откуда $\sup A(x_n) = a$. Теорема доказана.

Теорема 4 (характеристическое свойство нижнего предела). *Вещественное число a является нижним пределом последовательности x_n тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\colon \forall n \geq N\ (x_n > a - \varepsilon)$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall N\colon \exists n \geq N\ (x_n < a + \varepsilon)$.

Упражнения. 1) Сформулируйте аналоги теорем 3 и 4 для случая, когда точка $a = \pm\infty$.

2) Докажите, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m.$$

Замечание. Утверждение упражнения 2) объясняет другие часто встречающиеся обозначения для верхнего и нижнего пределов: $\limsup_{n\to\infty} x_n$ и $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

2.5 Теоремы сравнения для знакопостоянных рядов

Для рядов с неотрицательными членами последовательность частичных сумм монотонно возрастает. Поэтому сходимость таких рядов равносильна ограниченности последовательности частичных сумм.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le a_n \le b_n$, $n \ge 1$. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ — частичные суммы. Так как a_k, $b_k \ge 0$, то последовательности S_n, Σ_n возрастают. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ имеет конечный предел Σ, следовательно, ограничена сверху числом Σ. Из неравенства $0 \le S_n \le \Sigma_n \le \Sigma$, $n \ge 1$, следует, что монотонная последовательность S_n ограничена, поэтому имеет конечный предел. Это означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Замечание. Сходимость ряда не зависит от величины первых членов. Поэтому теорема 1 справедлива и в случае, если условие $0 \le a_n \le b_n$ выполняется при $n \ge n_0$, где n_0 — некоторое число. Это же справедливо и для других признаков.

Теорема 2. *Пусть* a_n, $b_n > 0$, $n \ge 1$.

1) *Если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, *то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) *Если* $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, *то из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. 1) Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha < +\infty$. Выберем β так, чтобы $\alpha < \beta < +\infty$. По характеристическому свойству верхнего предела $\exists N$: $\forall n \geq N$ $(\frac{a_n}{b_n} < \beta)$. Следовательно, $a_n < \beta b_n$, $n \geq N$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta b_n)$ также сходится. По теореме 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Если $\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\alpha} < +\infty$, и остается применить утверждение 1).

Теорема 3. *Пусть a_n, $b_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \geq 1$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

то есть

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}, \; n \geq 1.$$

Следовательно, $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$, $n \geq 1$, и в силу теоремы 1 получаем утверждение нашей теоремы.

Теорема 4 (признак Даламбера). *Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$. Если выполняется неравенство $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Фиксируем некоторое число $q \in (\alpha; 1)$. По характеристическому свойству верхнего предела $\exists N$: $\forall n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, так как $q < 1$. По теореме 3 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь $\beta := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Фиксируем число $q \in (1; \beta)$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}, \; n \geq N,$$

для некоторого N. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ расходится ($q > 1$), по теореме 3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши) *Пусть* $a_n \geq 0$ *при* $n \geq 1$. *Если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $\alpha := \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Фиксируем число $q \in (\alpha; 1)$. В силу характеристического свойства верхнего предела заключаем, что $\exists N\colon \forall n \geq N \ \ (\sqrt[n]{a_n} < q)$, т. е. $a_n < q^n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится ($q < 1$), по теореме 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь $\alpha := \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Тогда существует подпоследовательность n_k такая, что при достаточно больших k имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$, т. е. $a_{n_k} > 1$. Но тогда $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и ряд расходится.

Примеры.

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1, \ n \to \infty.$$

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится по радикальному признаку Коши, так как

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1, \ n \to \infty.$$

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1, \quad n \to \infty.$$

4) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{((-1)^n+2)^n}$. Имеем $\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{(-1)^n+2}$. По радикальному признаку Коши ряд расходится, так как $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$.

5) Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, $n \to \infty$, то ни признак Даламбера, ни признак Коши не дают ответа, сходится ряд или нет. Однако мы знаем, что при $p > 1$ ряд сходится, при $p \leq 1$ — расходится. Этот пример показывает, что для исследования некоторых рядов нужны более тонкие признаки, чем признаки Коши и Даламбера. Одним из таких признаков является признак Раабе.

Теорема 6 (признак Раабе). *Пусть* $a_n > 0$, $n \geq 1$. *Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Если

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. 1) Пусть $\beta := \varliminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$. Фиксируем $\lambda \in (1;\beta)$. Тогда $\exists N\colon\ \forall n \geq N$

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \lambda \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\lambda}{n} < 1 - \frac{\lambda}{n+1}.$$

Докажем, что при $0 < x < 1$ выполняется неравенство

$$1 - \lambda x < (1-x)^{\lambda}.$$

Действительно, функция $f(x) := 1 - \lambda x - (1-x)^{\lambda}$ имеет производную

$$f'(x) = -\lambda(1 - (1-x)^{\lambda-1}) < 0,\ x \in (0;1),$$

следовательно она строго монотонно убывает на $[0;1]$. Из неравенства $f(x) < f(0) = 0$ следует доказываемое неравенство. Применяя его, получаем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\lambda}{n+1} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\lambda} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

где $b_n = \frac{1}{n^{\lambda}}$. Итак,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \geq N.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ сходится, то по признаку сравнения (теорема 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $\gamma := \varlimsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$. Тогда $\exists N\colon\ \forall n \geq N$

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

где $b_n = \frac{1}{n-1}$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ расходится, поэтому по признаку сравнения (теорема 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Замечание. Если выполняется одно из равенств

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1,$$

то из этого нельзя вывести информацию о сходимости (расходимости ряда) без дополнительных исследований. Однако есть более тонкие признаки, например, признак Гаусса, которые позволяют иногда доказывать сходимость (расходимость) рядов.

Примеры. 1) Применим признак Раабе к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)},$$

где x — некоторое число, не являющееся целым отрицательным. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{x+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{x+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{x}{x+n+1} = x.$$

Если $x > 1$, то ряд сходится, если $x < 1$, то ряд расходится. Если $x = 1$, то получаем по существу гармонический ряд, который тоже расходится.

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}.$$

Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e},$$

откуда с использованием замены переменной и правила Лопиталя получаем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1-\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}}{x} = -\lim_{x\to 0+} \frac{1}{e}(1+x)^{1/x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)' =$$
$$= -\frac{1}{e}\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2} =$$
$$-\lim_{x\to 0+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

2.6 Некоторые дополнительные свойства числовых рядов

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то для любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$, и $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mu b_n$.

2) Сходимость ряда не зависит от первых членов: для любого N ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$.

3) Группировка членов ряда. Пусть $l_1 < l_2 < \ldots < l_n < \ldots$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность $b_1 = \sum_{n=1}^{l_1}$, $b_2 = \sum_{l_1+1}^{l_2}, \ldots, b_n = \sum_{l_{n-1}+1}^{l_n} \ldots$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и суммы этих рядов равны. Действительно, n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ равна

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{j=1}^{l_n} a_j,$$

т.е. совпадает с l_n-й частичной суммой S_{l_n} ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Так как последовательность S_n имеет конечный предел, ее подпоследовательность также имеет тот же конечный предел.

Обратное утверждение неверно. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Сгруппируем его члены таким образом:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots$$

В результате получаем сходящийся ряд. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть*

$$b_n = \sum_{l_{n-1}+1}^{l_n} a_n. \tag{2.2}$$

Если $a_n \to 0$, $n \to \infty$, *и последовательность* $l_n - l_{n-1}$ (*число членов в сумме* (2.2)) *ограничена, то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Для доказательства рассмотрим частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{k=1}^{q} b_k + \sum_{n=l_q+1}^{p} a_n,$$

где q таково, что $l_q \le p \le l_{q+1}$. При $p \to \infty$ имеем $q \to \infty$ и суммы $\sum_{k=1}^{q} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Докажем, что $\sum_{n=l_q+1}^{p} a_n \to 0$, $p \to \infty$.

Пусть $l_n - l_{n-1} \le M$ для любого n. Тогда, с использованием необходимого условия сходимости ряда, получаем

$$\Big|\sum_{n=l_q+1}^{p} a_n\Big| \le \sum_{n=l_q+1}^{p} |a_n| \le \sum_{n=l_q+1}^{l_{q+1}} |a_n| \le$$
$$\le (l_{q+1} - l_q) \max_{l_q+1 \le n \le \le l_{q+1}} |a_n| \le M \max_{l_q+1 \le n \le l_{q+1}} |a_n| \to 0,$$

$p \to \infty$. Теорема доказана.

2.7 Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 1 (признак Дирихле). *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если*

1) *последовательность* a_n *монотонна;*

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

3) *последовательность частичных сумм* $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ *ряда* $\sum_{k=1}^\infty b_k$ *ограничена.*

Доказательство. Для $n \geq m > 1$ имеем

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n} a_k B_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n - a_m B_{m-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+1} B_n - a_m B_{m-1}.$$

Последовательность a_n монотонна. Без ограничения общности можно считать, что a_n монотонно убывает. Так как $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Кроме того, существует $C > 0$ такое, что $|B_k| \leq C$, $k \geq 1$. Тогда

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k - a_{k+1}||B_k| + |a_{n+1}||B_n| + |a_m||B_{m-1}| \leq$$

$$\leq C\Big(\sum_{k=m}^{n} |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+1}| + |a_m|\Big) = C\Big(\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} + a_m\Big) =$$

$$= C((a_m - a_{n+1}) + a_m + a_{n+1}) = 2Ca_m.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы $a_m < \frac{\varepsilon}{2C}$. Тогда при $n \geq m \geq N$ получаем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ сходится.

Теорема 2 (признак Абеля). *Ряд* $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ *сходится, если*

1) *последовательность* a_n *монотонна;*

2) *последовательность* a_n *ограничена;*

3) *ряд* $\sum_{k=1}^\infty b_k$ *сходится.*

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что существует конечный предел $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} ab_n.$$

Первый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ сходится по признаку Дирихле, так как последовательность $(a_n - a)$ монотонна и стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ имеет конечный предел, следовательно, ограничена. Второй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$ сходится в силу условия 3). Тогда в силу линейности и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Если $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд очевидно сходится. Пусть $x \neq 2\pi n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в этом случае ряд сходится по признаку Дирихле. Действительно, пусть $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$. Очевидно, что a_n монотонно убывает и стремится к нулю. Рассмотрим частичные суммы

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

Имеем

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}B_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \sum_{k=1}^{n}\Big(\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}\Big) = \\ = \Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\Big) + \Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\Big) + \ldots + \\ + \Big(\cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big) = \\ = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|B_n| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Итак, последовательность B_n ограничена, поэтому исходный ряд сходится по признаку Дирихле.

Теорема 3 (признак Лейбница). *Пусть* a_n *— монотонно убывающая последовательность и* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. Тогда ряд*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n$$

сходится.

Справедливость признака Лейбница легко обосновывается с помощью признака Дирихле, если положить $b_n = (-1)^{n+1}$.

2.8 Признак абсолютной сходимости ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Так как $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$, утверждение сразу следует из критерия Коши.

Замечание. Если ряд сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то отсюда не следует, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится по признаку Лейбница, но не сходится абсолютно, так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Если *ряд* сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.* Справедлива

Теорема 2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого числа* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *существует биекция* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ *сходится к числу* A*.*

Таким образом, сумма ряда существенно зависит от порядка следования его членов. Однако для абсолютно сходящихся рядов сумма не зависит от порядка суммирования.

Теорема 3. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то для любой биекции* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ *сходится абсолютно, причем к той же сумме.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{f(k)}| \leq \sum_{j=1}^{l} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < +\infty,$$

где $l = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{f(n)}|$ ограничена и ряд сходится.

Теперь докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ сходится к той же сумме, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\colon \forall n \geq m \geq N$ $\sum_{k=m}^{n} |a_n| < \varepsilon$. Рассмотрим частичную сумму $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$. Любое a_k является одновременно некоторым $a_{f(l_k)}$, где $l_k = f^{-1}(k)$. Пусть $\widetilde{m} = \max_{1 \leq k \leq N} l_k$. Ясно, что $\widetilde{m} \geq N$. Пусть $n \geq \widetilde{m}$. Тогда для некоторого $L \geq N$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}\Big| \geq \sum_{k=N}^{L} |a_n| < \varepsilon,$$

так как при вычитании любой член a_k первой суммы будет сокращаться с некоторым членом второй суммы, если $k < N$. Из этого неравенства следует, что последовательности частичных сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют одинаковый предел. Теорема доказана.

2.9 Произведение рядов

Рассмотрим два ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

Формально перемножим эти два ряда как два многочлена бесконечной степени, сгруппировав члены с одинаковыми степенями переменной x:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots +$$
$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. Это наводит на следующее определение.

Произведением числовых рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_jb_{n-j}$.

Теорема (Мертенс). 1) *Если ряды* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходятся, причем по крайней мере один из них сходится абсолютно, то произведение сходится и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_jb_{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

2) *Если оба ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то и их произведение сходится абсолютно.*

3) *Если оба ряда сходятся условно, то их произведение не обязано сходиться.*

Доказательство. 1) Пусть

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ \beta_n = B - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Частичная сумма произведения равна

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) \ldots +$$
$$+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 =$$
$$= a_0(B - \beta_n) + a_1(B - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B - \beta_0) =$$
$$= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)B - a_0\beta_n - a_1\beta_{n-1} - \ldots - a_n\beta_0 = A_nB - \gamma_n,$$

где

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0.$$

При $n \to \infty$ имеем $A_n \to A := \sum_{k=0}^{\infty} a_n$ и $A_nB \to AB$. Если мы докажем, что $\gamma_n \to 0$, то тогда последовательность $\sum_{k=0}^{n} c_k$ частичных сумм будет сходиться к AB. Это и будет означать, что произведение рядов сходится к AB.

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Обозначим через α его сумму $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Можно считать, что $\alpha > 0$. Так как $B_n \to B$, то $\beta_n \to$

0, $n \to \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N\colon \forall n \geq N \;\; |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Кроме того, последовательность β_n ограничена, т.е. $\exists M > 0\colon |\beta_n| \leq M$. Имеем при $n \geq N$

$$|\gamma_n| \leq \sum_{k=1}^{n-N} |a_k||\beta_{n-k}| + \sum_{n-N+1}^{n} |a_k||\beta_{n-k}| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2\alpha} \sum_{k=1}^{n-N} |a_k| + M \sum_{n-N+1}^{n} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k|.$$

По критерию Коши

$$\exists N_1 : \; \forall n \geq m \geq N_1 \left(\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M} \right).$$

Если $n \geq N + N_1$, то

$$M \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k| < M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

и $|\gamma_n| < \varepsilon$. Это означает, что $\gamma_n \to 0$, $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

2) Если оба ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| = \sum_{k=0}^{n} (|a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \ldots + |a_k||b_n|) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{j=0}^{n} |b_j| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < +\infty.$$

Так как частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ с неотрицательными членами ограничены сверху, этот ряд сходится.

3) Приведем пример рядов, которые сходятся, но их произведение расходится. Пусть $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся по признаку Лейбница. Рассмотрим n-й член произведения

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}}.$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2},$$

поэтому

$$c_n \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1,$$

т. е. $c_n \not\to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, т. е. ряд расходится.

3 Мера Жордана

Мера Жордана является вспомогательным инструментом для построения кратного интеграла Римана. На плоскости (в $\mathbb{R}^2$) мера Жордана множества — это его площадь, в $\mathbb{R}^3$ — объем, в $\mathbb{R}^n$ — n-мерный объем. Однако подходы к определению меры (площади, объема) существуют разные. Дело в том, что не любому множеству в $\mathbb{R}^n$ можно сопоставить неотрицательное число (его меру), которое обладает свойством: мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер каждого из множеств. Основная задача теории меры заключается в следующем. Разбить все множество подмножеств $\mathbb{R}^n$ на две части — Σ и Σ^c. Элементы из Σ называются измеримыми множествами, элементы из Σ^c — неизмеримыми. На Σ определить функцию (меру) $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, при этом Σ и μ обладают свойствами:

1) $\forall A \in \Sigma \ \ \mu(A) \geq 0$;

2) $\forall A,\ B \in \Sigma \ \ A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B \in \Sigma$;

3) если $A,\ B \in \Sigma,\ A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Мы будем строить σ и меру μ (меру Жордана), обладающие дополнительными естественными свойствами:

4) Если φ — некоторое движение в $\mathbb{R}^n$, то $\forall A \in \Sigma$ множество $\varphi(A) \in \Sigma$ и $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$;

5) Множество Σ содержит все параллелепипеды вида

$$[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \ldots \times [a_n; b_n],$$

при этом $\mu([a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \ldots \times [a_n; b_n]) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$.

3.1 Внутренняя и внешняя меры Жордана

Двоичным кубом ранга k в $\mathbb{R}^n$ назовем множество вида

$$\left[\frac{m_1}{2^k}; \frac{m_1+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{m_2}{2^k}; \frac{m_2+1}{2^k}\right] \times \ldots \times \left[\frac{m_n}{2^k}; \frac{m_n+1}{2^k}\right],$$

где $m_1,\ m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$.

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $l_*(k;a)$ число двоичных кубов ранга k, содержащихся в A°, а через $l^*(k;a)$ число двоичных кубов ранга k, пересекающихся с A^-. Пусть

$$\mu_*(k;a) = l_*(k;a) \cdot \frac{1}{2^{kn}}, \quad \mu^*(k;a) = l^*(k;a) \cdot \frac{1}{2^{kn}}.$$

Отметим, что величина $\frac{1}{2^{kn}}$ — это объем двоичного куба ранга k в $\mathbb{R}^n$, поэтому величины $\mu_*(k;a)$ и $\mu^*(k;a)$ имеют важный геометрический смысл: это объемы фигур, составленных из двоичных кубов ранга k, которые соответственно лежат во внутренности или пересекаются с замыканием множества A.

Лемма. *Для любого* $A \subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $k \in \mathbb{Z}$

$$0 \le \mu_*(k;a) \le \mu_*(k+1;a) \le \mu^*(k+1;a) \le \mu^*(k;a)$$

Доказательство. Неравенство $0 \le \mu_*(k;a)$ очевидно. Неравенство $\mu_*(k+1;a) \le \mu^*(k+1;a)$ следует из того, что $A^\circ \subset A^-$. Осталось доказать, что

$$\mu_*(k;a) \le \mu_*(k+1;a), \tag{3.1}$$

$$\mu^*(k+1;a) \le \mu^*(k;a). \tag{3.2}$$

Докажем сначала (3.1). Пусть Q — двоичный куб ранга k, который содержится в A°. Этот куб состоит из ровно 2^n двоичных кубов ранга $(k+1)$, поэтому $l_*(k+1;a) \ge 2^n l_*(k;a)$. Умножая это неравенство на $\frac{1}{2^{n(k+1)}}$, получаем (3.1).

Теперь докажем (3.2). Если двоичный куб Q ранга k не пересекается с A^-, то и составляющие его кубы ранга $(k+1)$ не пересекается с A^-. Если же Q пересекается с A^-, то некоторые составляющие его 2^n

куба ранга $(k+1)$ пересекаются с A^-, некоторые могут не пересекаться. В результате получаем неравенство $l^*(k+1;a) \le 2^n l^*(k;a)$, откуда следует (3.2). Лемма доказана.

Следствие. *Пусть множество A ограничено. Тогда последовательности $\mu_*(k;A)$ и $\mu^*(k;A)$ монотонны, ограничены и, следовательно, имеют конечные пределы*

$$\mu_*(A) := \lim_{k\to\infty} \mu_*(k;A), \quad \mu^*(A) := \lim_{k\to\infty} \mu^*(k;A).$$

Величины $\mu_*(A)$ и $\mu^*(A)$ называются внутренней и внешней мерой Жордана множества A.

Теорема. *Для любых ограниченных множеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ имеют место следующие утверждения.*

1) $0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) < +\infty$.

2) *Если* $A \subset B$, *то* $\mu_*(A) \le \mu_*(B)$, $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

3) *Если* $A \cap B = \emptyset$, *то* $\mu_*(A \cup B) \ge \mu_*(A) + \mu_*(B)$.

4) $\mu^*(A \cup B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

5) $\mu^*(\partial A) = \mu^*(A) - \mu_*(A)$.

6) $\mu_*(A^\circ) = \mu_*(A)$, $\mu^*(A^-) = \mu^*(A)$.

Доказательство. 1) Для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $l_*(k;A) \le l^*(k;A)$, так как если куб $Q \subset A^\circ$, то $Q \subset A^-$, т.е. $Q \cap A^- \ne \emptyset$. Умножая это неравенство на $\frac{1}{2^{kn}}$ получаем $\mu_*(k;A) \le \mu^*(k;A)$. Устремляя k к бесконечности, получаем нужное неравенство.

2) Если $A \subset B$, то $A^\circ \subset B^\circ$ и $A^- \subset B^-$. Следовательно,

$$l_*(k;A) \le l_*(k;B), \quad l^*(k;A) \le l^*(k;B).$$

Умножая эти неравенства на $\frac{1}{2^{kn}}$ и устремляя k к бесконечности, получаем справедливость 2).

3) Имеем $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$, причем $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$. Следовательно, двоичные кубы ранга k, которые входят в множества A° и B° не пересекаются и входят в число двоичных кубов ранга k, содержащихся в $(A \cup B)^\circ$. Следовательно, $l_*(k;A \cup B) \ge l_*(k;A) + l_*(k;B)$, откуда следует нужное неравенство.

4) Имеем $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$. Поэтому если куб Q пересекается с $(A \cup B)^-$, то он пересекается либо с A^-, либо с B^-. Следовательно,

$$l^*(k; A \cup B) \leq l^*(k; A) + l^*(k; B).$$

Из этого неравенства следует требуемое.

5) Поскольку граница ∂A является замкнутым множеством, имеем $(\partial A)^- = \partial A$. Рассмотрим двоичный куб Q. Условие $Q \cap (\partial A)^- \neq \emptyset$ равносильно условию $Q \cap \partial A \neq \emptyset$. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда $Q \cap A^- \neq \emptyset$ и $Q \not\subset A^\circ$. Отсюда следует, что

$$l^*(k; \partial A) = l^*(k; A) - l_*(k; A).$$

Требуемое равенство следует отсюда умножением на объем куба ранга k и предельным переходом.

6) Так как $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, $(A^-)^- = A^-$, то $l_*(k; A^\circ) = l_*(k; A)$, $l^*(k; A^-) = l^*(k; A)$. Отсюда следуют нужные равенства.

3.2 Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$. Множества меры нуль

Пусть A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Множество A называется *измеримым* (по Жордану), если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. При этом число

$$\mu(A) := \mu_*(A) = \mu^*(A)$$

называется *мерой Жордана* множества A. Множество A называется *множеством меры нуль* или *нуль-множеством,* если оно измеримо и $\mu(A) = 0$.

Отметим следующие свойства множеств меры нуль.

1) *Ограниченное множество A является множеством меры нуль тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) = 0$.*

2) *Любое подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.*

3) *Объединение конечного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

Доказательство. 1) Необходимость очевидна из определения. Пусть $\mu^*(A) = 0$. Из теоремы, п. 1, следует, что $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) = 0$. Тогда $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$. Следовательно, A измеримо и $\mu(A) = 0$.

2) Пусть $B \subset A$ и A является нуль-множеством. Так как A ограничено, то и B ограничено. Из теоремы, п. 2, следует, что

$$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0.$$

Значит, $\mu^*(B) = 0$. В силу свойства 1) B является нуль-множеством.

3) Достаточно доказать, что если A и B — нуль-множества, то $A \cup B$ — нуль-множество. Так как A и B ограничены, то $A \cup B$ также ограничено. По предыдущей теореме, п. 4,

$$0 \leq \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 0.$$

Значит, $\mu^*(A \cup B) = 0$, т.е. $A \cup B$ — нуль-множество в силу свойства 1).

3.3 Критерии измеримости

Теорема 1 (первый критерий измеримости). *Ограниченное множество A измеримо тогда и только тогда, когда его граница ∂A является нуль-множеством.*

Доказательство. Множество A измеримо $\iff \mu_*(A) = \mu^*(A) \iff \mu^*(\partial A) = \mu^*(A) - \mu_*(A) = 0 \iff \partial A$ — 0-множество.

Пример. Множество $A = \mathbb{Q} \cap [0;1]$ не измеримо по Жордану. Действительно, $A^- = [0;1]$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = A^- \setminus A^\circ = [0;1]$. Нетрудно видеть, что $l^*(k;\partial A) = 2^k + 2$, $k \in N$, так как двоичные кубы ранга k, пересекающиеся с $(\partial A)^- = [0;1]$ суть $\left[\frac{m-1}{2^k}; \frac{m}{2^k}\right]$, $m = 0,\ 1,\ 2\ldots, 2^k + 1$. Имеем $\mu^*(k;\partial A) = \frac{2^k+2}{2^k} \to 1$, $k \to \infty$. Таким образом, $\mu^*(\partial A) \neq 0$ и по теореме 1 A не может быть измеримым множеством.

Теорема 2 (второй критерий измеримости). *Ограниченное множество A измеримо тогда и только тогда, когда A^- и A° являются измеримыми множествами одинаковой меры. При этом*

$$\mu(A^-) = \mu(A^\circ) = \mu(A).$$

Доказательство. Предположим, что множество A измеримо. Тогда

$$\mu_*(A^\circ) = \mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A) = \mu^*(A^-)$$

и

$$\mu_*(A^\circ) \le \mu^*(A^\circ) \le \mu^*(A^-) = \mu_*(A^\circ).$$

Отсюда следует, что $\mu_*(A^\circ) = \mu^*(A^\circ) = \mu(A)$. Это означает, что множество A° измеримо и $\mu(A^\circ) = \mu(A)$.

Аналогично показывается, что

$$\mu_*(A^\circ) \le \mu_*(A^-) \le \mu^*(A^-) = \mu_*(A^\circ).$$

Следовательно, $\mu_*(A^-) = \mu^*(A^-) = \mu(A)$, т. е. множество A^- измеримо и $\mu(A^-) = \mu(A)$.

Обратно, пусть A^- и A° являются измеримыми множествами одинаковой меры. Тогда

$$\mu(A^\circ) = \mu_*(A^\circ) \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) \le \mu^*(A^-) = \mu(A^-) = \mu(A^\circ).$$

Значит, все величины, входящие в это соотношение, равны, в частности, $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A^\circ) = \mu(A^-)$. Это означает, что множество A измеримо и $\mu(A^-) = \mu(A^\circ) = \mu(A)$.

3.4 Свойства измеримых множеств

Теорема 1. *Если множества A и B измеримы, то множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ также измеримы.*

Доказательство. Так как множества A и B измеримы, они ограничены. Поэтому в силу первого критерия измеримости достаточно доказать, что границы множеств являются нуль-множествами $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

Рассмотрим множество $A \cup B$. Его граница

$$\begin{aligned}\partial(A \cup B) = (A \cup B)^- \cap ((A \cup B)^c)^- = (A^- \cup B^-) \cap (A^c \cap B^c)^- \subset \\ \subset (A^- \cup B^-) \cap A^c \cap B^c = (A \cap A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c \cap B^c) \subset \\ \subset (A \cap A^c) \cup (B \cap B^c) = \partial A \cup \partial B.\end{aligned}$$

Так как ∂A и ∂B — множества меры нуль, то $\partial A \cup \partial B$ также множество меры нуль. Следовательно $\partial(A \cup B)$ является подмножеством нуль-множества, т.е. само является нуль-множеством.

Аналогично доказывается, что множества $\partial(A \cap B)$ и $\partial(A \setminus B)$ являются подмножествами множества $\partial A \cup \partial B$, поэтому они также являются нуль-множествами (установите это самостоятельно!). Теорема доказана.

Теорема 2 (монотонность меры). *Если A и B — измеримые множества и $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Доказательство очевидно.

Теорема 3. *Если A и B — измеримы, то*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда $A \cap B = \emptyset$. Тогда $\mu(A \cap B) = 0$. Докажем, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Используя ранее доказанные свойства, получаем

$$\begin{aligned}\mu_*(A \cup B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B) = \mu(A) + \mu(B) = \\ = \mu^*(A) + \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cup B) \geq \mu_*(A \cup B).\end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что $\mu_*(A \cup B) = \mu^*(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2) Общий случай. Имеем $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Кроме того, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. В силу 1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$, откуда следует требуемое равенство.

Следствие 1. *Если A и B — измеримы, то*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Следствие 2. Если множества $A_1,\ A_2 \ldots, A_m$ измеримы, то $\cup_{k=1}^{m} A_k$ измеримо и

$$\mu\left(\cup_{k=1}^{m} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

Доказательство. Для двух множеств это следует сразу из теоремы 3. Далее применяем метод математической индукции.

Теорема 4. *Пусть множества* A_1, $A_2, \ldots, A_m$ *измеримы и* $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, $i \neq j$. *Тогда* $\mu\left(\cup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k)$.

Доказательство. При $m = 2$ имеем

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для случая k множеств, $2 \leq k \leq m-1$ $(m \geq 3)$. Докажем, что тогда оно справедливо и для m множеств. Имеем $\cup_{k=1}^{m} A_k = \cup_{k=1}^{m-1} A_k \cup A_m$. При этом

$$\mu\left(\cup_{k=1}^{m-1} A_k \cap A_m\right) = \mu\left(\cup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right) \leq \cup_{k=1}^{m-1} \mu(A_k \cap A_m) = 0.$$

Применяя наше предположение индукции для двух, а затем для m множеств, получаем

$$\mu\left(\cup_{k=1}^{m} A_k\right) = \mu\left(\cup_{k=1}^{m-1} A_k \cup A_m\right) = \mu\left(\cup_{k=1}^{m-1} A_k\right) + \mu(A_m) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \mu(A_k) + \mu(A_m) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

3.5 Произведение измеримых множеств

Изучим вопрос об измеримости и мере произведения измеримых множеств. Чтобы различать меры Жордана в пространствах различной размерности, будем обозначать меру Жордана в $\mathbb{R}^n$ через μ_n.

Заметим также, что множество Q является двоичным кубом ранга k в $\mathbb{R}^{n=m}$ тогда и только тогда, когда Q можно представить в виде произведения: $Q = Q_1 \times Q_2$, где Q_1 и Q_2 — двоичные кубы ранга k в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

Теорема. *Если* A *— измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$, B *— измеримое множество в* $\mathbb{R}^m$, *то* $A \times B$ *— измеримое множество в* $\mathbb{R}^{n+m}$ *и*

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B).$$

Доказательство. Предварительно установим, что справедливы два равенства: 1) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$; 2) $(A \times B)^- = A^- \times B^-$.

1) Возьмем точку $z \in A \times B$. Она имеет вид $z = (x, y)$, где $x \in A$, $y \in B$. При этом $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, так как

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+m}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

откуда

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n+m} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{m} y_j^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in (A \times B)^\circ$. Тогда существует $O_\varepsilon(z_0) \in A \times B$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ Если $x \in O_\delta(x_0)$, $y \in O_\delta(y_0)$, то $z = (x, y) \in O_\varepsilon(z_0)$, так как $\|z - z_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 < \delta^2 + \delta^2 = \varepsilon^2$, откуда $z \in A \times B$. Следовательно, $x_0 \in O_\delta(x_0) \subset A$, $y_0 \in O_\delta(y_0) \subset B$. Значит, $x_0 \in A^\circ$, $y_0 \in B^\circ$. Итак мы доказали, что $(A \times B)^\circ \subset A^\circ \times B^\circ$.

Обратно, пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ \times B^\circ$, т. е. $x_0 \in A^\circ$, $y_0 \in B^\circ$. Тогда существуют ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что $O_{\varepsilon_1}(x_0) \subset A$, $O_{\varepsilon_2}(y_0) \subset B$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда $O_\varepsilon(z_0) \subset O_{\varepsilon_1}(x_0) \times O_{\varepsilon_2}(y_0) \subset A \times B$. Действительно, если $z = (x, y) \in O_\varepsilon(z_0)$, то $\|x - x_0\|^2 \le \|z - z_0\|^2 < \varepsilon^2 \le \varepsilon_1^2$, откуда следует, что $x \in O_{\varepsilon_1}(x_0)$. Аналогично $y \in O_{\varepsilon_2}(y_0)$. Итак, $O_\varepsilon(z_0) \subset A \times B$, т. е. $z_0 \in (A \times B)^\circ$. Это означает, что $A^\circ \times B^\circ \subset (A \times B)^\circ$.

2) Вспомним характеризацию точек прикосновения через последовательности. Точка $z_0 = (x_0, y_0)$ принадлежит $(A \times B)^-$ тогда и только тогда, когда $\exists z_k = (x_k, y_k) \in A \times B$: $z_k \to z_0$, $k \to \infty \iff \exists x_k \in A$: $x_k \to x_0$ и $\exists y_k \in B$: $y_k \to y_0 \iff x_0 \in A^-$ и $y_0 \in B^- \iff z_0 \in A^- \times B^-$.

Теперь докажем теорему. Рассмотрим множество двоичных кубов Q ранга k, лежащих в $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$. Любой куб Q представим в виде $Q = Q_1 \times Q_2$, где Q_1 — двоичный куб ранга k, лежащий в A°, Q_2 — двоичный куб ранга k, лежащий в B°. Обратно, если Q_1 — двоичный куб ранга k, лежащий в A°, Q_2 — двоичный куб ранга k, лежащий в B°, то Q является двоичным кубом ранга k, лежащим в $(A \times B)^\circ$. Отсюда следует, что $l_*(k; A \times B) = l_*(k; A) \times l_*(k; B)$. Умножая последнее равенство на $2^{-k(n+m)}$, получаем $2^{-k(n+m)} l_*(k; A \times B) = 2^{-kn} l_*(k; A) \times 2^{-km} l_*(k; B)$ или

$\mu_*(k; A \times B) = \mu_*(k; A) \times \mu_*(k; B)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\mu_*(A \times B) = \mu_*(A) \times \mu_*(B)$.

Аналогично устанавливаем, что $l^*(k; A \times B) = l^*(k; A) \times l^*(k; B)$ (обоснуйте это самостоятельно!). Как и в случае внутренней меры, отсюда следует, что $\mu^*(A \times B) = \mu^*(A) \times \mu^*(B)$.

Так как множества A и B измеримы, то $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu_n(A)$, $\mu_*(B) = \mu^*(B) = \mu_m(B)$. Значит, $\mu_*(A \times B) = \mu^*(A \times B) = \mu_n(A) \times \mu_m(B)$, т. е. множество $A \times B$ измеримо и $\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B)$.

3.6 Классы измеримых множеств

1) *Любой отрезок* $[a; b]$ *измерим и* $\mu([a; b]) = b - a$.

а) Пусть сначала концы a и b отрезка $[a; b]$ являются двоичными числами ранга N. Тогда они являются также и двоичными числами ранга $k \geq N$. При этом,

$$l_*(k; [a; b]) = (b - a)2^k - 2, \quad l^*(k; [a; b]) = (b - a)2^k + 2,$$

откуда

$$\mu_*(k; [a; b]) = (b - a) - 2^{1-k}, \quad \mu^*(k; [a; b]) = (b - a) + 2^{-1-k}.$$

Имеем

$$\lim_{k \to \infty} \mu_*(k; [a; b]) = \lim_{k \to \infty} \mu^*(k; [a; b]) = b - a,$$

поэтому $\mu_*([a; b]) = \mu_*([a; b]) = b - a$. Итак, отрезок $[a; b]$ измерим и $\mu([a; b]) = b - a$.

б) Пусть теперь a и b — произвольные действительные числа. Можно считать, что $a \neq b$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ числа a и b принадлежат некоторым двоичным кубам $[a_k; c_k]$ и $[b_k; d_k]$ ранга k. Следовательно, $a_k \leq a \leq c_k$, $b_k \leq b \leq d_k$. При этом кубы (отрезки) $[a_k; c_k]$ вложены друг в друга, и их длины стремятся к нулю. Следовательно, по принципу вложенных отрезков a_k, $c_k \to a$, $k \to \infty$. Аналогично b_k, $d_k \to b$, $k \to \infty$. При достаточно больших k имеем $c_k < b_k$, при этом

$[c_k; b_k] \subset [a; b] \subset [a_k; d_k]$. По свойству внутренней и внешней мер с учетом п. а)

$$c_k - b_k = \mu([c_k; b_k]) = \mu_*([c_k; b_k]) \le \mu_*([a; b]) \le$$
$$\le \mu^*([a; b]) \le \mu^*([a_k; d_k]) = \mu^*([a_k; d_k]) = d_k - a_k.$$

При $k \to \infty$ получаем

$$b - a = \lim_{k\to\infty}(c_k - b_k) \le \mu_*([a; b]) \le \mu^*([a; b]) \le \lim_{k\to\infty}(d_k - a_k) = b - a.$$

Отсюда $\mu_*([a; b]) = \mu^*([a; b]) = b - a$, отрезок $[a; b]$ измерим и его мера $\mu([a; b]) = b - a$.

Следствие 1. *Любой параллелепипед* $\prod_{i=1}^{n}[a_i; b_i]$ *измерим и*

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i; b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Следствие 2. *Любое конечное множество в* $\mathbb{R}^n$ *является нуль-множеством.*

Пусть C — кривая в $\mathbb{R}^n$ с представлением

$$x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Кривая C называется *спрямляемой*, если

$$l(C) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}))^2} < +\infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = 1$ отрезка $[0; 1]$. Число $l(C)$ называется *длиной кривой* C.

Теорема 1. *Пусть* C *— спрямляемая кривая в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. *Тогда* C *является нуль-множеством.*

Доказательство. Пусть l — длина кривой C. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разобъем кривую C на $(2m)$ частей C_1, $C_2, \dots, C_{2m}$ длины $\frac{l}{2m}$ точками

$P_1,\ P_2, \ldots, P_{2m-1}$. Рассмотрим куб Q_k центром в точке P_k и длиной стороны $\frac{l}{m}$. Тогда $C_k \cup C_{k+1} \subset Q_k$, поэтому $C \subset \cup_{k=1}^{2m-1} G_k$. Отсюда следует, что

$$0 \leq \mu^*(C) \leq \sum_{k=1}^{2m-1} \mu^*(Q_k) = \sum_{k=1}^{2m-1} \mu(Q_k) = (2m-1)\left(\frac{l}{m}\right)^n \leq \frac{2l^n}{m^{n-1}} \to 0,$$

$m \to \infty$. Следовательно, $\mu^*(C) = 0$, т. е. C является нуль-множеством.

Следствие. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, граница которой является спрямляемой кривой C. Тогда D измерима.*

Теорема 2. *График непрерывной функции, определенной на компактном множестве в $\mathbb{R}^n$, является нуль множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, A — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in A \quad (\|x_1 - x_2\| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Рассмотрим множество двоичных кубов ранга k, которые пересекаются с $A^- = A$. Так как множество A компактно, то их число ограничено. Обозначим эти кубы через $Q_1,\ Q_2, \ldots, Q_l$. Отметим, что диаметр каждого куба Q_j равен $\frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Пусть $k = k(\delta)$ выбрано настолько большим, что $\frac{\sqrt{n}}{2^n} < \delta$. Обозначим $M_i = \max_{x \in Q \cap A} f(x)$, $m_i = \min_{x \in Q \cap A} f(x)$. Эти величины существуют в силу теоремы Вейерштрасса. В силу выбора δ имеем $M_i - m_i < \varepsilon$. Следовательно, график $\Gamma_f \subset \cup_{i=1}^{l} Q_i \times [m_i; M_i]$. Тогда

$$\mu^*(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^{l} \mu^*(Q_i \times [m_i; M_i]) = \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i \times [m_i; M_i]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i)(M_i - m_i) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i) = \varepsilon \mu^*(k; A).$$

Итак, для любых $\varepsilon > 0$ и $k \geq k(\delta)$ имеем $\mu^*(\Gamma) \leq \varepsilon \mu^*(k; A)$. Устремляя $k \to \infty$, получаем $\mu^*(\Gamma) \leq \varepsilon \mu^*(A)$. Наконец, устремляя ε к нулю, получаем $\mu^*(\Gamma) \leq 0$, откуда следует, что $\mu^*(\Gamma) = 0$.

Пример. Покажем, что шар $B_n(R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le R\}$, $R > 0$, измерим. Действительно, это — ограниченное множество, и его границу можно представить как объединение графиков двух непрерывных функций $x_n = \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$, $x_n = -\sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}$, заданных на компактном множестве $B_{n-1}(R)$. Поскольку по доказанной теореме эти графики являются нуль-множествами, по свойствам множеств меры нуль и граница $\partial B_n(R)$ является нуль-множеством. По первому критерию измеримости шар $B_n(R)$ измерим.

3.7 Преобразования измеримых множеств

I) Сдвиг. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$. Определим множество

$$c + A := \{c + x \mid x \in A\}.$$

Будем говорить, что множество $c + A$ получено из множества A *сдвигом на вектор* c.

Теорема. *Если множество A измеримо, для любого $c \in \mathbb{R}^n$ множество $c + A$ также измеримо и $\mu(c + A) = \mu(A)$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда множество A является параллелепипедом $\Pi = \prod_{i=1}^n [a_i; b_i]$. Тогда $c + \Pi = \prod_{i=1}^n [c_i + a_i; c_i + b_i]$ — параллелепипед, следовательно, измеримое множество. Его мера

$$\mu(c + \Pi) = \prod_{i=1}^n [(c_i + b_i) - (c_i + a_i)] = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \mu(\Pi).$$

2) Пусть теперь A — произвольное измеримое множество. Рассмотрим двоичные кубы Q_1, $Q_2, \ldots, Q_l$, ранга k, которые содержатся в A° и двоичные кубы Q'_1, $Q'_2, \ldots, Q'_m$, ранга k, которые пересекаются с A^-. Тогда $\sum_{i=1}^l \mu(Q_i) = \mu_*(k; A)$, $\sum_{i=1}^m \mu(Q'_i) = \mu^*(k; A)$. Имеем

$$\cup_{i=1}^l (c + Q_i) = c + \cup_{i=1}^l Q_i \subset c + A \subset c + \cup_{i=1}^m Q'_i = \cup_{i=1}^m (c + Q'_i).$$

Для любых $i \ne j$ очевидно, что

$$\mu((c + Q_i) \cap (c + Q_j)) = 0, \quad \mu((c + Q'_i) \cap (c + Q'_j)) = 0,$$

поэтому

$$\mu_*(k;A) = \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^{l} \mu(c+Q_i) = \mu\left(\cup_{i=1}^{l}(c+Q_i)\right) =$$
$$= \mu_*\left(\cup_{i=1}^{l}(c+Q_i)\right) \le \mu_*(c+A) \le \mu^*(c+A) \le \mu^*\left(\cup_{i=1}^{m}(c+Q_i')\right) =$$
$$= \mu\left(\cup_{i=1}^{m}(c+Q_i')\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(c+Q_i') = \sum_{i=1}^{m} \mu(Q_i') = \mu^*(k;A).$$

Итак, $\mu_*(k;A) \le \mu_*(c+A) \le \mu^*(c+A) \le \mu^*(k;A)$. Устремляя $k \to \infty$, получаем $\mu(A) \le \mu_*(c+A) \le \mu^*(c+A) \le \mu(A)$, откуда следует, что $\mu_*(c+A) = \mu^*(c+A) = \mu(A)$. Это означает, что множество $c+A$ измеримо и $\mu(c+A) = \mu(A)$.

Пусть $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — произвольное обратимое линейное отображение. В курсе линейной алгебры доказывается, что любое такое преобразование можно представить в виде суперпозиции следующих отображений:

$I)$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha \ne 0$,

$II)$ $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \mapsto$
$\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$,

$III)$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$.

Лемма. *Пусть Q — некоторый куб в $\mathbb{R}^n$, являющийся произведением отрезков. При линейном преобразовании ϕ одного из типов $I-III$ куб Q переходит в измеримое множество, мера которого равна $\mu(Q)$ для преобразований типа II или III и $|\alpha|\mu(Q)$ для преобразований типа I.*

Доказательство. $I)$ Поскольку последние $(n-1)$ координат не меняются, а первая умножается на α, с учетом теоремы мере произведения достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Имеем $Q = [a;b]$, $\alpha Q = [\alpha a; \alpha b]$, $\alpha > 0$; $\alpha Q = [\alpha b; \alpha a]$, $\alpha < 0$. Следовательно, αQ измеримо как отрезок и $\mu(\alpha Q) = \alpha(b-a)$, $\alpha > 0$; $\mu(\alpha Q) = -\alpha(b-a)$, $\alpha < 0$. Итак, $\mu(\alpha Q) = |\alpha|\mu(Q)$.

$II)$ Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ переводит квадрат $[a;b] \times [c;d]$ в квадрат $[c;d] \times [a;b]$, т. е. измеримое множество той же меры.

III) Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$ переводит квадрат $Q = [a; b] \times [c; d]$ в параллелограмм с вершинами $(a+c; c)$, $(a+d; d)$, $(b+c; c)$, $(b+d; d)$. Очевидно это — измеримое множество. Найдем его меру. Так как при сдвиге мера не меняется, то осуществим сдвиг параллелограмма на вектор $(-(a+c), -c)$. В результате получаем параллелограмм с вершинами $(0, 0)$, $(d-c, d-c)$, $(b-a, 0)$, $(b-a+d-c, d-c)$. Так как $d-c = b-a = q$, где q — длина стороны квадрата, то получаем параллелограмм с вершинами $(0, 0)$, (q, q), $(q, 0)$, $(2q, q)$. Разделим этот параллелограмм прямой $\{x_1 = q\}$ на два треугольника, которые пересекаются по стороне, т. е. множеству меры нуль. Сдвигая правый треугольник влево, можно составить из них квадрат в вершинами $(0, 0)$, $(0, q)$, $(q, 0)$, (q, q), причем треугольники также пересекаются по множеству меры нуль. Учитывая это и инвариантность меры при параллельных переносах, видим, что мера образа квадрата совпадает с мерой квадрата со стороной q. Итак, $\mu(\phi(Q)) = q^2 = \mu(Q)$. Лемма доказана.

Следствие. *Если ϕ — линейное невырожденное преобразование в $\mathbb{R}^n$ одного из типов $I-III$, Q — куб в $\mathbb{R}^n$, то его образ $\phi(Q)$ измерим и* $\mu(\phi(Q)) = |\det[\phi]|\mu(Q)$, где $[\phi]$ — матрица отображения ϕ.

Доказательство. В случае I) матрица $[\phi]$ матрица диагональна и на ее главной диагонали стоят единицы, за исключением одного элемента, равного α. Таким образом, $\det[\phi] = \alpha$. Во втором и третьем случаях очевидно $\det[\phi] = 1$.

Теорема 1. *Если ϕ — линейное невырожденное преобразование в $\mathbb{R}^n$, A — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то его образ $\phi(A)$ измерим и* $\mu(\phi(A)) = |\det[\phi]|\mu(A)$, где $[\phi]$ — матрица отображения ϕ.

Доказательство. а) Сначала рассмотрим случай, когда ϕ — линейное преобразование в $\mathbb{R}^n$ одного из видов $I-III$. Используем ту же идею доказательства, что и для параллельного переноса. Пусть двоичные кубы Q_1, $Q_2, \ldots, Q_l$ ранга k содержатся в A°, двоичные кубы Q'_1, $Q'_2, \ldots, Q'_m$

ранга k пересекаются с A^-. Тогда

$$\cup_{i=1}^l Q_i \subset A \subset \cup_{i=1}^m Q_i', \quad \cup_{i=1}^l \phi(Q_i) \subset \phi(A) \subset \cup_{i=1}^m \phi(Q_i').$$

В силу предыдущей леммы

$$\mu(\phi(Q_i)) = |\det[\phi]|\mu(Q_i), \quad \mu(\phi(Q_i')) = |\det[\phi]|\mu(Q_i').$$

Применяя те же рассуждения, что и для случая параллельного переноса, получаем

$$\sum_{i=1}^l \mu(\phi(Q_i)) \leq \mu_*(\phi(A)) \leq \mu^*(\phi(A)) \leq \sum_{i=1}^m \mu(\phi(Q_i')),$$

откуда

$$|\det[\phi]|\mu_*(k; A) = |\det[\phi]| \sum_{i=1}^l \mu(Q_i) \leq \mu_*(\phi(A)) \leq$$
$$\leq \mu^*(\phi(A)) \leq |\det[\phi]| \sum_{i=1}^m \mu(Q_i') = |\det[\phi]|\mu^*(k; A).$$

При $k \to \infty$ величины $\mu_*(k; A)$, $\mu^*(k; A)$ стремятся к $\mu(A)$, поэтому из последнего неравенства получаем

$$|\det[\phi]|\mu(A) \leq \mu_*(\phi(A)) \leq \mu^*(\phi(A)) \leq |\det[\phi]|\mu(A).$$

Значит, $\mu_*(\phi(A)) = \mu^*(\phi(A)) = |\det[\phi]|\mu(A)$. Это доказывает, что множество $\phi(A)$ измеримо и $\mu(\phi(A)) = |\det[\phi]|\mu(A)$.

б) В общем случае представим ϕ в виде $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p$, где ϕ_j имеют вид $I - III$. Так как для них утверждение леммы уже установлено, имеем

$$\mu(\phi(A)) = \mu(\phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p(A)) = |\det[\phi_1]| \cdot |\det[\phi_2]| \cdot \ldots \cdot |\det[\phi_p]|\mu(A) =$$
$$= |\det[\phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p]|\mu(A) = |\det[\phi]|\mu(A).$$

Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим любое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$. Так как определитель матрицы этого преобразования равен по модулю единице, получаем, что при ортогональном преобразовании мера множеств не меняется. Так как мера не меняется и при сдвиге, получаем, что справедлива

Теорема 2. *При любом движении в* $\mathbb{R}^n$ *измеримые множества переходят в измеримые той же меры.*

Литература

[1] Никольский С.М. *Курс математического анализа, т. 1.* – М.: Наука, 1973. – 432 с.

[2] Зорич В.А. *Математический анализ, ч. I.* – М.: Наука, 1981.– 243 с.

[3] Шерстнев А.Н. *Конспект лекций по математическому анализу.* – Казань: КГУ, 2009. – 374 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. *Математический анализ, т.1.* – М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.

[5] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1.* – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.

[6] Демидович Б.П. *Сборник задач по математическому анализу.* – М.: МГУ, ЧеРо, 1997. – 624 с.

[7] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* – М.: Мир, 1967. – 251 с.

Оглавление