Казанский (Приволжский) федеральный университет

Н.В. Калачева, В.А. Сочнева

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебное пособие

Казанский университет

2017

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии
Института математики и механики им.Н.И.Лобачевского
Протокол №2 от 02.10.2017г.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент Института физики К(П)ФУ Даишев Р.А.,
к.ф.-м.н., доцент КНИТУ(КХТИ) Бронштейн М.Д.

Калачева Н.В.

К Основы математики для студентов нематематических специальностей: учебное пособие / Н.В. Калачева, В.А. Сочнева. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 140 с.: ил.

В учебном пособии подобраны и методически распределены материалы по следующим разделам: элементы теории множеств, элементы математической логики, элементы комбинаторики и теории вероятностей, случайные величины, элементы математической статистики. Раздел ≪Элементы математической логики≫ научит студентов отличать ложные высказывания от истинных, а разделы ≪Элементы теории вероятностей≫, ≪Случайные величины≫, ≪Элементы математической статистики≫ помогут прогнозировать возможные развития событий по набору признаков их наступления с заданной вероятностью. Разделы, представленные в пособии, являются первой вводной ступенью к изучению прикладных математических курсов и будут способствовать их лучшему усвоению. В начале каждой главы приводится теоретический материал по рассматриваемому вопросу, разобраны примеры решения типовых задач, в конце каждой главы предложены задачи для самостоятельного решения с ответами.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса ≪Математика≫ и является дополнением к материалам лекций, читаемых в рамках этого курса студентам, обучающимся по специальности ≪Психология≫, а также может применяться для студентов других институтов и факультетов.

Введение

Математику уже затем стоит изучать,
что она ум в порядок приводит.

М.В.Ломоносов

Математика нужна всем. В переводе с греческого «матэма» – это «познание, знание путём рассуждения, наука». С древних времён математика рассматривалась как наиболее безупречный метод достижения достоверного знания о мире и в любой системе образования изучение математики и ее методов занимало достойное место. В средневековой Европе изучались «семь свободных искусств»: грамматика, риторика, диалектика, арифметика, геометрия, астрономия и теория музыки.

Человек, знающий математику лишь по школьному курсу, вряд ли осознает, сколь мизерное количество знаний сообщается в школе. Это всего лишь основания для здравой практической деятельности. На самом деле — это намного больше, шире и интереснее.

Сущность математики не в многочисленных теоремах, формулах, задачах, а в связях между ними, в способах построения логических конструкций и рассуждений, с которыми было бы полезно ознакомиться (а ещё лучше применять их) любому интеллектуально развитому человеку.

Конечно, тот объем и та строгость изложения математики, которая преподаётся студенту-математику, явно не нужны всем студентам. Но тем не менее всем полезно и необходимо умение абстрактно мыслить, умение проводить аналогии между различными фактами, знание приёмов рационального мышления, да и просто умение построить и провести убедительные рассуждения, чётко выделяя промежуточные этапы (все это можно назвать культурой мыслительной деятельности). Именно математика, как никакой другой учебный предмет, развивает эти человеческие качества.

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1. Множества и операции над ними

Понятие множества.

Любая область человеческой деятельности связана не только с одним предметом, объектом, а с целой совокупностью. Например, медицина изучает не только отдельно взятую болезнь, а все болезни, зоология изучает не отдельно взятое животное, а совокупность всех животных.

Математика, как и другая область человеческих знаний, изучает те или иные объекты не каждый в отдельности, а в их связи между собой. Объекты, обладающие теми или иными общими свойствами, объединяются вместе в одну совокупность и изучаются отдельно.

В конце XIX века немецкий математик *Георг Кантор (1845-1918)* создал общую теорию таких совокупностей, имеющей название «теория множеств», которая лежит в основе всей математики. Г.Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение. Понятие множества не определяется через другие, а только поясняется. Это понятие является исходным, на основании которого строятся остальные понятия математики. Теория множеств — это своего рода основа математического языка, а «множество» — это основное (неопределяемое) понятие.

Множество — это совокупность объектов различной природы. Объекты, входящие в данное множество, называются *элементами множества.*

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*, а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — *бесконечными.*

Множества обозначают прописными буквами: A, B, C, ...

Элементы множества обозначаются строчными буквами: $x, y, z, \ldots$

Запись $x \in X$ означает, что объект x есть элемент множества X. Если x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$.

Множество может быть задано *перечислением его элементов*:

$$A = \{x; y; \ldots z\}$$

Каждый элемент входит во множество только один раз, т.е. во множестве *не может быть двух или более одинаковых объектов.*

Множество может быть задано при помощи *правила* или *общего свойства*, позволяющего описать множество и чётко определить совокупность его элементов. Такое свойство называют *характеристическим.*

Например: Множество A — множество натуральных чисел, меньших 7 запишется в виде: $A = \{x|x-$ натуральное, $x < 7\}$. Запись читается следующим образом: множество A содержит натуральные числа, такие, что x меньше 7.

Всякое множество, конечное и бесконечное, может быть задано как перечислением, так и с помощью указания характеристического свойства.

Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми.*

Для числовых множеств используют специальные обозначения:
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
$\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел с нулем;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Действительные числа изображаются точками на *координатной прямой* (числовой оси).

Координатная прямая — это всякая прямая, на которой выбрано направление, принимаемое за положительное, точка — начало отсчета и единица измерения — масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице.

В математике часто приходится иметь дело с числовыми множествами специального вида, имеющие особые обозначения и названия.

Замкнутый промежуток (отрезок) — множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b –

некоторые фиксированные числа, причем $a < b$. Замкнутый промежуток обозначается символом $[a, b]$ или

$$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\} \ .$$

Открытый промежуток (интервал) — множество всех вещественных чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, где a и b – некоторые фиксированные числа, причем $a < b$. Замкнутый промежуток обозначается символом (a, b) или

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \ .$$

Полуоткрытый промежуток (полуинтервал) — множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, $a < < x \leqslant b)$, где a и b – некоторые фиксированные числа, причём $a < b$. Полуоткрытый промежуток обозначается символами $[a, b)$ и $(a, b]$ или

$$[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\} \text{ и } (a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}.$$

Числовой луч от a до $+\infty$ — множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x$ и обозначается $[a, +\infty)$.

Числовой луч от $-\infty$ до a — множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant a$ и обозначается $(-\infty, a]$.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначается $(-\infty, +\infty)$ и называется *числовой прямой*. Всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

При рассмотрении числовых множеств вместо слова «*элемент*», «*число*» употребляется слово «*точка*».

Подмножества.

Определение: Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B одновременно является элементом множества A.

Обозначение: $B \subset A$ или $A \supset B$.

Читается: множество B содержится во множестве A или множество A содержит множество B.

Если во множестве B найдётся хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A, то множество B не является подмножеством множества A.

Обозначение: $B \not\subset A$

Например:

1. Множество натуральных чисел является подмножеством целых чисел, а множество целых является подмножеством действительных чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

2. Множество всех лис является подмножеством во множестве всех хищных зверей, множество хищных зверей – подмножеством во множестве млекопитающих, а множество млекопитающих — подмножеством во множестве позвоночных

3. Множества ромбов, квадратов, прямоугольников — различные подмножества параллелограммов.

Определение: Любое непустое подмножество B множества A, не совпадающее с множеством A, называют *собственным подмножеством.* Подмножества A и $\varnothing$ называют *несобственными подмножествами* множества A.

Число подмножеств любого конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n, из них ровно $(2^n - 2)$ подмножества являются собственными подмножествами.

Операции над множествами.

Определение: Два множества A и B называются *равными*, если они состоят *из одних и тех же элементов.*

Обозначение: $A = B$.

Например: Даны множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{9, 7, 5, 3\}$.

Множество не изменится, если переставить его элементы, таким образом $A = B$.

Одно и тоже множество может быть задано с помощью различных характеристических свойств.

Например: Множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ определяет множество $A = \{2, 3\}$. Это же множество задается другим условием или характеристическим свойством: $A = \{$Множество простых чисел, меньших пяти$\}$.

Если множества *не равны*, то записывают $A \neq B$.

Определение: *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат *хотя бы одному из множеств* A или B.

Обозначение: $A \cup B$.

Если объединяемые множества имеют общие элементы, то эти элементы в объединение записывают только один раз.

Например: Даны множества $A = \{0, 1, 3, a\}$ и $B = \{1, 2, 3, a\}$, тогда объединение этих множеств определяет множество $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, a\}$.

Определение: Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, и из элементов множества B.

Обозначение: $A \cap B$.

Например: Даны множества $A = \{0, 5, 7, a, b\}$ и $B = \{-1, 7, 5, 3, a, c\}$, тогда пресечение этих множеств определяет множество $A \cap B = \{5, 7, a\}$.

Если A и B не имеют общих элементов, то данный факт записывают в виде: $A \cap B = \varnothing$. В этом случае множества не пересекаются.

Пересечение любого множества A с пустым множеством есть пустое множество: $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Определение: *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее элементов множества A, не входящих в множество B .

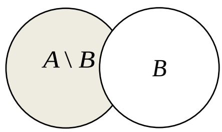
Обозначение: $A \setminus B$.

Например:

1. Даны множества $A = \{0, 1, 5, 3, a\}$ и $B = \{1, 2, 3, a\}$, тогда разность этих множеств определяет множество $A \setminus B = \{0, 5\}$.

2. Множество иррациональных чисел есть разность между множеством действительных и рациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Разность множеств с помощью кругов Эйлера изображается следующим образом:



Графическое изображение множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.

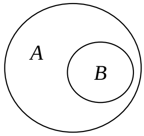
Из истории:

Леонард Эйлер (1707-1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик.

Джон Венн (1834-1923) — английский логик и философ. Д.Венн ввел диаграммы Эйлера-Венна, которые используются как в теории множеств, теории вероятностей, логике, статистике и информатике.

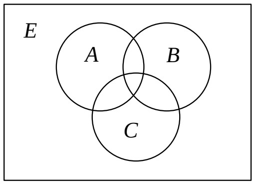
Любое множество можно изобразить графически, нарисовав замкнутый контур и представив себе, что все элементы множества изображены точками, находящимися внутри этого контура — *круги Эйлера*.

Например: Пусть множество B является подмножеством A, т.е. $B \subset A$, тогда этот факт будет изображаться с помощью кругов Эйлера следующим образом:



Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют *основным множеством*, или *универсальным множеством*, или *универсумом*. Универсальное множество обозначается заглавной буквой E.

При этом *универсум* представляется множеством точек некоторого прямоугольника, а его подмножества — соответствующими кругами. Такие диаграммы называют *диаграммами Эйлера-Венна*:



1.2. Дополнение к множеству. Декартово произведение множеств

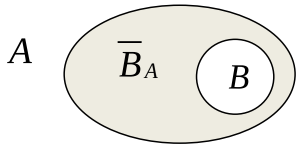
Дополнение к множеству.

Определение: Если $B \subset A$, то множество всех элементов из A , не принадлежащих множеству B, называется *дополнением* множества B до множества A.

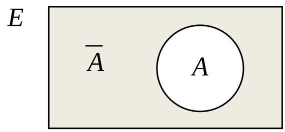
Обозначение: $\overline{B}_A$.

Например: A — множество всех студентов в группе, B — множество студентов, сдавших контрольную работу, тогда $\overline{B}$ — множество студентов, не сдавших контрольную работу.

Дополнение к множеству B в множестве A на диаграммах Эйлера-Венна изобразится следующим образом:



Как уже отмечалось, обычно все множества, которые рассматриваются в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого универсального множества E. То в этом случае, если $A \subset E$, то дополнение к множеству A в универсальном множестве E обозначают $\overline{A}$.



Основные законы теории множеств.

Пусть A, B, C являются подмножествами универсального множества E, тогда имеют место следующие законы:

1. Коммуникативный (переместительный) закон.

   $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$

2. Ассоциативный (сочетательный) закон.

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3. Дистрибутивный (распределительный) закон.

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

4. Законы де Моргана (*Огастес де Морган (1806-1871) — шотландский математик*).

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

5. Закон идемпотентности.

   $A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$

6. Закон двойного дополнения.

   $\overline{\overline{A}} = A.$

7. Закон поглощения.

   $A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$

8. Закон противоречия.
   $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

9. Закон исключения третьего.
   $A \cup \overline{A} = E$.

Роль нуля и единицы в действиях над множествами играют пустое ($\varnothing$) и универсальное (E) множества. Для них справедливы свежующие соотношения:

1. $A \cup \varnothing = A$.

2. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

3. $A \cup E = E$.

4. $A \cap E = A$.

5. $\overline{\varnothing} = E$.

6. $\overline{E} = \varnothing$.

Декартово произведение множеств.

Представим, что нам надо составить множество всевозможных маршрутов, которые можно проложить из Москвы и Казани в города: Прагу, Берлин, Барселону.

Эти маршруты таковы: Москва – Прага, Москва – Берлин, Москва – Барселона, Казань – Прага, Казань – Берлин, Казань – Барселона.

Введем обозначение: X={Москва, Казань}, Y= {Прага, Берлин, Барселона}.

Составленные маршруты можно записать в виде: {(Москва, Прага); (Москва, Берлин); (Москва, Барселона); (Казань, Прага); (Казань, Берлин); (Казань, Барселона)}.

Образованное таким образом множество пар называют *декартовым произведением множеств* X и Y или *прямым произведением.*

Определение: *Декартовым произведением множеств* X и Y называют множество, состоящее из всех пар (x, y), первая компонента которых принадлежит множеству X, т.е. $x \in X$, а вторая компонента — множеству Y, т.е. $y \in Y$.

Обозначение: $X \times Y$ или $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

Замечание:

1. Декартово произведение двух конечных множеств является конечным. Если хотя бы один из сомножителей является бесконечным множеством, то и произведение будет представлять бесконечное множество.

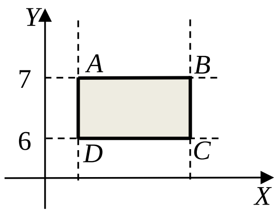
2. В декартовом произведении двух множеств порядок следования пар элементов может быть произвольным, но расположение элементов в каждой паре определяется порядком следования перемножаемых множеств.

3. Декартово произведение двух множеств не обладает свойством коммутативности $X \times Y \neq Y \times X$ при условии, что $X \neq Y$.

4. Множества, полученные в результате декартова произведения, равны только тогда, когда равны все их элементы.

Графическое изображение декартова произведения.
Элементы декартова произведения двух множеств можно изобразить точками в прямоугольной системе координат. Когда говорят, что на множестве введены декартовы координаты, то это значит, что плоскость рассматривается декартовым произведением двух координатных прямых $R \times R = R^2$.

Например, если $X = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{R}, 6 \leqslant x \leqslant 7\}$, то в прямоугольной системе координат множество $X \times Y$ представляет собой множество всех точек прямоугольника $ABCD$. Множество $X \times Y$ изображено на рисунке



1.3. Конечные множества

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов.

Пусть дано A — некоторое конечное множество. Обозначим через $m(A)$ количество элементов множества A.

Например, если $A = \{x | x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0\}$, то $m(A) = 2$.

Число элементов пустого множества равно нулю: $m(\varnothing) = 0$.

Формула включений и исключений. Даны два произвольных конечных множества A и B. Обозначим через $m(A)$ количество элементов множества A, $m(B)$ — количество элементов множества B.

Если $A \cap B = \varnothing$, тогда общее число элементов в объединении этих множеств вычисляется по формуле:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Если $A \cap B \neq \varnothing$, тогда общее число элементов в объединении этих множеств вычисляется по формуле:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

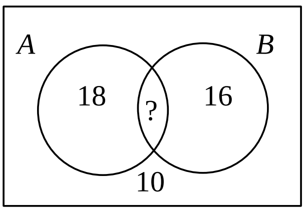
Даны три произвольных конечных множества A, B и C, такие что $A \cap B \cap C \neq \varnothing$, тогда общее число элементов в объединении этих множеств вычисляется по формуле:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - \\ - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C).$$

Эти формулы называются *формулами включений и исключений* для двух и трёх множеств.

Пример: В классе 30 учеников. Известно, что 18 ребят имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 — по плаванию. Десять учеников не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько ребят имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?

Решение: Пусть E — множество учеников в классе (универсальное множество), A — множество учеников, имеющих разряд по лыжам, а B — множество учеников, имеющих разряд по плаванию. Тогда, в силу условия задачи, имеем $m(E) = 30$, $m(A) = 18$, $m(B) = 16$, а $m(A \cup B) = m(E) - 10 = 30 - 10 = 20$. Необходимо найти количество ребят, имеющих спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам, т.е. $m(A \cap B)$.



Применим формулу включений и исключений для двух множеств, из которой находим $m(A \cap B)$:

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 18 + 16 - 20 = 14.$$

Ответ: Спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам имеют 14 учеников.

1.4. Задачи и упражнения

1. Даны числовые множества: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, P– множество простых чисел, K – множество чисел кратных семи. Запишите, каким множествам принадлежат следующие числа $-1; 7; 23; 65; 9; 342; -5; 19; 42; 68; 154$.

2. Прочтите записи и перечислите элементы каждого из множеств:

   а) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$;

   б) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leqslant 2\}$;

   в) $A = \{x | x \in \mathbb{N}_0, -3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

3. Заданы множества A, B, C. Расположите их справа налево так, чтобы каждое из них было подмножеством, следующего за ним.

   а) $A = \{3, 5, 7, a, b\}$, $B = \{a, b, 3, 5, 6, 7\}$, $C = \{a, 3, b, 7\}$;

   б) $A = \{\sqrt{3}, 5, 6, b\}$, $B = \{\sqrt{3}, 5, 6, 7, b\}$, $B = \{\sqrt{3}, a, b, 6, 5, 7\}$.

4. Пусть A — множество всех четырехугольников, B — множество всех трапеций, C — множество всех параллелограммов, D — множество всех прямоугольников, F – множество всех квадратов. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других. Запишите эти множества.

5. На рис.1 изображены следующие множества: M — множество всех отрезков, P — множество всех сторон треугольника ABC, K — множество всех сторон четырехугольника $ACDE$, H — множество всех сторон пятиугольника $ABCDE$.

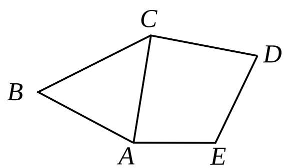


Рис.1

Какое из этих множеств является подмножеством другого? Поставьте, где это возможно, вместо звездочки знак $\subset$:

   а) $P * M$;

   б) $P * H$;

в) $H * M$;

г) $K * H$;

д) $P * K$;

е) $K * M$.

6. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Запишите перечислением элементов множество $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

7. Даны множества A, B, C. Найдите $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup B) \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup (B \cup C)$, если:

   а) $A = \{2, 3, 8, 9\}$, $B = \{16, 18, 20\}$, $C = \mathbb{N}$;

   б) $A = \mathbb{N}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{3, 5, 7\}$;

   в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \mathbb{N}$.

8. Изобразить заданные множества с помощью кругов Эйлера и записать характеристическое свойство элементов множества $A \cap B$, если:

   а) A — множество всех прямоугольников, B — множество всех ромбов;

   б) A — множество всех треугольников, B — множество правильных многоугольников.

9. Пусть A – множество делителей числа 12; B – множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$; C — множество нечетных натуральных чисел x таких, что $3 \leqslant x \leqslant 12$. Записать множества перечислением элементов и найти $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$.

10. Три множества M, K, P изображены на рис.2 тремя прямоугольниками, имеющими общие части.

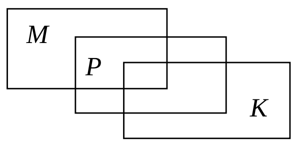


Рис.2

Отметьте штриховкой область для каждого из представленных множеств. Как короче записать множество $(M \cap P) \cap (P \cap K)$?

а) $M \cap P$;
б) $M \cap K$;
в) $P \cap K$;
г) $M \cap P \cap K$;
д) $(M \cap P) \cap (P \cap K)$.

11. Даны числовые множества:

а) $A = [0; 3]$, $B = (1; 5)$, $C = (-2; 0)$;
б) $A = [-1; 1]$, $B = (-\infty; 0)$, $C = [0; 2)$.

Найти множества $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cup B$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$ и изобразить эти множества на числовой прямой.

12. Даны числовые множества: $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant x < 4\}$, $C = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 0\}$.

Найти множества $A \cup B$, $C \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup C) \cap B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$ и изобразить эти множества на числовой прямой.

13. Изобразить на координатной плоскости множество A, координаты точек которого удовлетворяют условиям:

а) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ 4x - y = 0\}$;
б) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ 4x - y < 0\}$;
в) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + y \leqslant 0\}$;
г) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ y > |x|\}$;
д) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| = 1\}$;
е) $A = \{(x; y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leqslant 1\}$.

14. Для произвольных множеств A, B, C, расположить указанные ниже множества так, чтобы каждое было подмножеством, следующего за ним: $A \cap B \cap C$; B; $B \cap C$; $A \cup B$.

15. Для множеств A и B найти $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cap B) \setminus B$, если

а) $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$;
б) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$;
в) A — множество натуральных делителей числа 18, B — множество натуральных делителей числа 24.

16. Для множеств A и B таких, что $A \cap B \neq \varnothing$ доказать равенство $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

17. Изобразить множества, используя диаграммы Эйлера-Венна для трех множеств A, B, C, если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$:

    а) $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(B \cup C) \cap A$, $A \cup (B \cap C)$;

    б) $(A \cap B) \setminus C$, $A \setminus (B \cap C)$, $(A \cup B) \setminus C$;

    в) $(A \setminus B) \setminus C$, $A \setminus (B \setminus C)$, $C \setminus A \setminus B$.

18. Примените операции над множествами к решению неравенств:

    а) $\dfrac{x+7}{(x+6)^2} \geqslant 0$;

    б) $\dfrac{(x-3)^2}{x-7} < 0$;

    в) $(x-3)^2(x+2) > 0$;

    г) $(x^2-4)^2 + (x^2-4x+4)^2 \leqslant 0$.

19. Найти дополнение множества B до множества A, если:

    а) $A = \{1; a; 3; 5; 7\}$, $B = \{7\}$;

    б) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2; 4; 6; \ldots 2n; \ldots\}$;

    в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$;

    г) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leqslant x \leqslant 6\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 3 < x \leqslant 5\}$.

20. В круг вписан квадрат. Во множестве точек данного круга найдите дополнение к множеству точек квадрата. Изобразить дополнение к множеству на рисунке.

21. Даны множества $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; $A = \{1; 3; 5; 9\}$; $B = \{2; 4; 10\}$. Найти

    а) $A \cup \overline{B}$;

    б) $\overline{A} \cap B$;

    в) $\overline{A \cup B}$;

    г) $\overline{A} \cup \overline{B}$;

    д) $A \cap \overline{B}$;

    е) $\overline{A \cup \overline{B}}$;

    ж) $\overline{A \cap B}$;

    з) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$;

    и) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$;

к) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$;

л) $E \setminus (A \cup B)$;

м) $(E \cap A) \setminus B$.

22. Даны множества $A = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\}$; $B = \{1; 4; 6; 8; 9; 11\}$; $C = \{2; 3; 7; 10; 12\}$. Найти

а) $(A \setminus B) \cap C$;

б) $C \setminus (A \cap B)$;

в) $C \setminus (A \setminus B)$;

г) $(B \cup C) \setminus A$.

23. Даны множества $A = [2; +\infty)$, $B = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, $C = (-3; 3)$. Найти

а) $A \cup B \cup C$;

б) $\overline{A} \cup B$;

в) $A \cup \overline{C}$;

г) $A \cap \overline{B}$;

д) $B \setminus C$;

е) $\overline{B \setminus C}$;

ж) $B \setminus A$;

з) $(A \setminus B) \setminus C$;

и) $B \setminus (A \cap C)$;

к) $\overline{B \setminus (A \cap C)}$.

24. Известно,что $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $A \cap B \cap C \neq \varnothing$, где E – универсальное множество. Изобразить множества на диаграммах Эйлера-Венна:

а) $A \cup \overline{B}$;

б) $\overline{\overline{A} \cup B}$;

в) $\overline{(A \cap B)} \cap C$;

г) $A \cap (\overline{B} \setminus C)$;

д) $\overline{A} \cup B \setminus C$;

е) $(A \setminus \overline{B}) \cup (C \setminus \overline{A})$;

ж) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

25. Пусть универсальным множеством является множество точек плоскости. Записать и изобразить на координатной плоскости следующие множества и дополнения к ним:

    а) $A = \{(x;y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 1\}$;

    б) $A = \{(x;y) | x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 \leqslant 0\}$;

    в) $A = \{(x;y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ 3x + 2y + 5 > 0\}$;

    г) $A = \{(x;y) | x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant 2\}$;

    д) $A = \{(x;y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0, x^2 + y = 4\}$.

26. Доказать тождества:

    а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

    б) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$;

    в) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$.

27. Доказать включения:

    а) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

    б) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

    в) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

28. Найти декартовые произведения $A \times B$, $B \times A$ и изобразить полученные множества на координатной плоскости:

    а) $A = \{1;2;3\}$, $B = \{3;4\}$;

    б) $A = \mathbb{N}$, $B = \{1;2\}$;

    в) $A = [2;4]$, $B = \{4\}$;

    г) $A = [-3;2]$, $A = (4;6)$;

    д) $A = \{-3;5\}$, $B = (2;7]$;

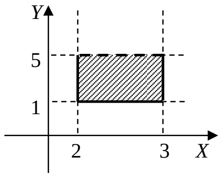
    е) $A = (-2;0]$, $B = \{4;5;7\}$;

    ж) $A = [5;6]$, $B = \mathbb{R}$;

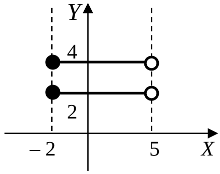
    з) $A = \mathbb{R}$, $B = (-2;2)$;

    и) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$.

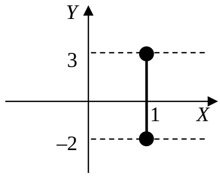
29. На рисунках (3)-(14) в прямоугольной системе координат изображены декартовы произведения двух множеств X и Y. Запишите множества X и Y.



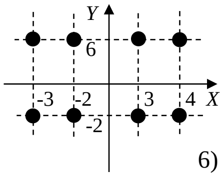
3)



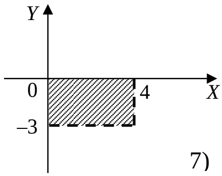
4)



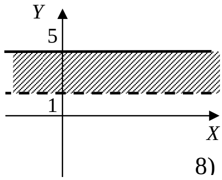
5)



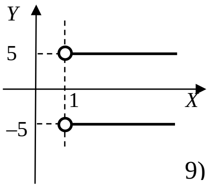
6)



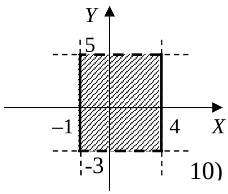
7)



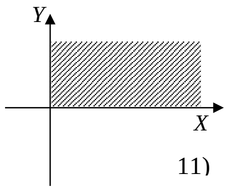
8)



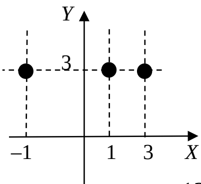
9)



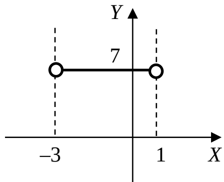
10)



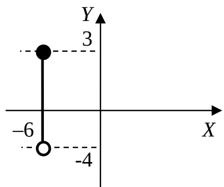
11)



12)



13)



14)

30. Какое условие нужно наложить на множества A и B, чтобы были справедливы следующие утверждения, если $A \neq B$:

а) $m(A) + m(B) > m(A \cup B)$;

б) $m(A \cup B) = m(A)$;

в) $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$;

г) $m(A) + m(B) < m(A \cup B$?

31. В классе 30 человек, посещающих факультативные занятия по физике и математике. Известно, что 10 человек изучают оба предмета, а 25 человек изучают математику. Сколько человек изучают физику?

32. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки три и четыре?

33. В классе 40 учащихся, из них 21 человек учится на «4», 10 человек – на «5», только на «3» успевают 12 человек. Какое количество учащихся учатся на четыре и пять?

34. В школе 45 девочек, каждая из которых или брюнетка, или голубоглазая, или брюнетка с голубыми глазами. 30 девочек – брюнетки, у 25 – голубые глаза. Сколько девочек брюнеток с голубыми глазами?

35. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

36. В школе 1400 учеников, из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников. Сколько учеников умеют кататься на лыжах и на коньках?

37. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 человек знают французский, 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

38. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы одновременно?

39. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7.

40. В студенческой группе 25 человек. Во время летних каникул 9 из них выезжали в туристическую поездку за границу, 12 человек путешествовали по России, 15 человек – отдыхали в Сочи, 6 человек – путешествовали за границей и по России, 7 человек – были за границей и в Сочи, 8 человек – путешествовали по России

и были в Сочи и 3 человека участвовали во всех трех поездках. Сколько студентов никуда не выезжало?

41. В олимпиаде по математике для школьников принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты проверки решений представлены в таблице:

Решены задачи	Количество учащихся, решивших задачи (чел.)
по алгебре	20
по геометрии	18
по тригонометрии	18
по алгебре и геометрии	7
по алгебре и тригонометрии	8
по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что ни одной задачи не решили трое.

а) Сколько учащихся решили все три задачи?

б) Сколько учащихся решили только две задачи?

в) Сколько учащихся решили только одну задачу?

42. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому языку – 76, по физике или русскому языку – 66, по всем предметам – 4 абитуриента.

а) Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку?

б) Сколько среди них получивших только одну пятерку?

43. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых посмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B – 16, фильм C – 19 человек. Сколько учеников посмотрели все три фильма?

44. Пусть A – подмножество множества натуральных чисел. Каждый элемент множества A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов в множестве A, если среди них имеется:

70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; и 20 чисел, кратных 30.

45. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли A, B и C видели соответственно 25, 12 и 23 ученика.

    а) Сколько учеников в классе?

    б) Сколько из них видели спектакли A и B, A и C, B и C?

46. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B и C. Результаты опроса оказались таковы: книгу A читало 25 учеников, книгу B – 22, книгу AC – 22 человека. Книгу A или B читали 33 ученика, A или C – 32 ученика, B или C – 31 ученик; все три книги прочли 10 учащихся.

    а) Сколько учеников прочли только книгу A?

    б) Сколько учеников прочли только книгу B?

    в) Сколько учеников прочли только книгу C?

    г) Сколько учеников прочли только одну книгу?

    д) Сколько учеников прочли хотя бы одну книгу?

    е) Сколько учащихся не прочитали ни одной книги?

Глава 2

Элементы математической логики

2.1. Высказывания и логические операции над ними

Логические высказывания.

Определение: Всякое утверждение (повествовательное предложение), относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно, называется *высказыванием.*

Высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C\dots$.

Записывают: $A \equiv \{6 < 7\}, B \equiv \{\textit{число шесть простое}\}$.

Высказывания могут быть образованы с помощью слов или символов.

Например:

1. В году 12 месяцев;
2. $13 < 17$;
3. Земля вращается вокруг Солнца;
4. Уравнение $x^2 + 6x + 18 = 0$.

Побудительные предложения («*Идите к доске*»), вопросительные («*Который час?*») восклицательные («*Спартак – чемпион!*») *высказываниями не являются.*

Утверждения, содержащие переменные («*Студент x изучает психологию*») , определения («*Векторы называются равными если они сонаправлены и их длины равны*») также *не являются высказываниями.*

Высказывания бывают *простые* и *составные (или сложные).*

Простое высказывание — это высказывание, которое не может быть разбито на более простые высказывания. Про простое высказывание всегда однозначно можно сказать, что оно истинно или ложно, не интересуясь его структурой.

Одновременно высказывание *не может быть* истинным и ложным.

Истинное высказывание обозначим «*И*», ложное – «*Л*».

Из простых высказываний при помощи *логических связок*, или *логических операций* (слова «не», союзов «и», «или», «если ..., то...», «тогда и только тогда, когда...») можно строить *сложные высказывания.*

Например: Даны два простых высказывания A и B:
$A \equiv \{6 < 7\}, B \equiv \{$*число шесть простое*$\}$.
Тогда составные высказывания запишутся в виде:
$C \equiv \{6 < 7$ $\{$*или число шесть простое*$\}$,
$D \equiv \{$*тогда и только тогда* $6 < 7$, *когда число шесть простое*$\}$,
$E \equiv \{$*если число шесть простое, то* $6<7\}$.

Сложное высказывание может состоять из несвязанных между собой по смыслу простых высказываний.

Например: $A \equiv \{$если слон насекомое, то Антарктида покрыта густыми лесами$\}$.

Сложные высказывания, как и простые, всегда только *истинны* или только *ложны*. Истинность или ложность сложного высказывания определяется:

- во первых, тем, какие логические связки использованы для образования сложного высказывания;

- во-вторых, тем, какие из простых высказываний, образующих сложное, истинны, а какие ложны.

Определение: Высказывания, истинность которых зависит от одной или нескольких переменных, называются *предложениями, зависящими от переменных.*

Например:

Предложение «n делится на 7» зависит от переменой n, принимающей натуральные значения. При одних значениях переменной n оно истинно, а при других — ложно.

Неравенство $2y - x > 6$ является предложением, зависящим от двух переменных x и y. При $x = 1, y = 4$ оно истинно, а при $x = 4, y = 1$ — ложно.

Предложения, зависящие от переменной, обозначают $A(x)$, $B(n)$, $C(x; y)$ и т.д. Для каждого предложения необходимо указывать на каком множестве переменных оно рассматривается.

Логические операции. Таблицы истинности.

1. *Отрицание*. Логическая связка: «не A», «неверно, что A».
   Обозначение: $\bar{A}$.

   Например: $A \equiv \{$в комнате холодно$\}$, $\bar{A} \equiv \{$в комнате не холодно$\}$.

   Из двух высказываний A и $\bar{A}$ всегда одно является истинным, а другое — ложным.

2. *Конъюнкция (логическое умножение)*. Логическая связка: «и».
   Обозначение: $A \wedge B$ или AB.

   Например: $A \equiv \{$ 12 делится на 3$\}$, $B \equiv \{$12 делится на 4$\}$, тогда $A \wedge B \equiv \{$12 делится на 3 и на 4$\}$. *Конъюнкция двух высказываний A и B будет истинной только тогда, когда оба высказывания истинны.*

3. *Дизъюнкция (логическое сложение)*. Логическая связка: «или».
   Обозначение: $A \vee B$ или $A + B$.

   Например: $A \equiv \{7 < 9\}$, $B \equiv \{3 + 5 = 8\}$, тогда $A \vee B \equiv \{7 <$ < 9 или $3 + 5 = 8\}$. *Дизъюнкция двух высказываний A и B будет истинной только тогда, когда хотя бы одно из высказываний истинны.*

4. *Импликация (следствие)*. Логическая связка: «*если A, то B*», «*из A, следует B*», где A — условие, B — заключение или следствие.
   Обозначение: $A \to B$.

   Например: Даны четыре высказывания:

   1) Если $A \equiv \{7 < 9\}$, то $B \equiv \{3 + 5 = 8\}$;

   2) Если $A \equiv \{7 > 9\}$, то $B \equiv \{$ неравенство $x^2 < 16$ решения не имеет$\}$;

   3) Если $A \equiv \{7 > 9\}$, то $B \equiv \{3 + 5 = 8\}$;

   4) Если $A \equiv \{7 < 9\}$, то $B \equiv \{$Париж находится в Антарктиде$\}$.

   Из этих высказываний ложным является только четвёртое (в нем условие истинно, а заключение ложно), все остальные высказывания истинны.

Таким образом, из неверного высказывания может следовать как неверное, так и верное высказывание.

Импликация двух высказываний A и B ложна тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. В других случаях $A \to B$ истинна.

5. *Эквивалентность.* Логическая связка: « *A тогда и только тогда, когда B*», «*для того, чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B*».
   Обозначение: $A \leftrightarrow B$.

   Эквивалентность двух высказываний A и B истинна только тогда, когда оба высказывания истинны, либо оба ложны.

Таблица истинности для логических операций.

A	$\bar{A}$	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	И

Формулы алгебры логики.

Всякое сложное высказывание, которое может быть построено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквивалентности называется *формулой алгебры логики.*

Пример 1: Дано высказывание: «Если мистер Джонс счастлив, то миссис Джонс несчастлива, и если мистер Джонс несчастлив, то миссис Джонс счастлива». Записать высказывание в виде логической формулы.

Решение: Из данного высказывания выделим следующие утверждения: $A \equiv$ {мистер Джонс счастлив}, $B \equiv$ { миссис Джонс счастлива}. С учетом этого, данного высказываине можно записать в виде логической формулы $(A \to \overline{B}) \wedge (\overline{A} \to B)$.

Для определения истинности или ложности сложных высказываний необходимо выполнять логические операции в следующем порядке:

1. Отрицание;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;

5. Эквивалентность.

Если над формулой стоит знак отрицания, то при записи формулы скобки можно опустить. *Например*, формулу $x \to \overline{(y \vee x \wedge z)}$ можно записать в виде $x \to \overline{y \vee x \wedge z}$.

Если в выражении присутствуют скобки, то вначале выполняются действия в скобках.

Истинность или ложность сложного высказывания можно установить, решая задачу по действиям.

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в него простых высказываний.

Свойства логический операций.

Для любых высказываний A, B, C справедливы следующие формулы алгебры логики:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $AB = BA$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $A(B + C) = AB + AC$
6. $A + BC = (A + B)(A + C)$
7. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
8. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A \to B = \overline{A} + B$

С помощью формул (1)-(10) можно проводить преобразования логических выражений так же, как в обычной алгебре.

Пример 2: Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форт Мустанг», но ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Решение: Рассмотрим высказывания:

$A = \{$машина синего цвета$\}$;

$B = \{$машина марки «Бьюик»$\}$;

$C = \{$машина чёрного цвета$\}$;

$D = \{$машина марки «Крайслер»$\}$;

$E = \{$машина марки «Форд Мустанг»$\}$.

Поскольку каждый участник назвал верно либо марку машины, либо ее цвет, то из показаний Брауна следует, что высказывание $A + B$ истинно, из показаний Джонса вытекает, что высказывание $C + D$ истинно, а из показаний Смита следует истинность высказывания $\overline{A} + E$. Значит, что будет истинным и произведение этих трех высказываний $P = (A + B)(C + D)(\overline{A} + E)$. Раскрывая скобки, получим:

$$P = (A + B)(C + D)(\overline{A} + E) = AC\overline{A} + ACE + AD\overline{A} + ADE + BC\overline{A} + \\ + BCE + BD\overline{A} + BDE.$$

Сумма восьми слагаемых может быть истинным высказыванием только в том случае, когда хотябы одно из них истинно. Из определения высказываний сразу же следует, что все слагаемые, кроме пятого ложны. Значит, истинно пятое слагаемое $BC\overline{A}$.

Ответ: черный «Бьюик».

2.2. Равносильные формулы. Тавтология и противоречие. Логическое следование

Равносильные формулы алгебры логики

Определение: Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения при любых значениях входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильные формулы обозначаются «$\equiv$», а запись означает, что формулы A и B равносильны.

Равносильные формулы: $\bar{\bar{x}} \equiv x,\ x \vee x \equiv x,\ (x \wedge \bar{x}) \vee y \equiv y.$

Формула называется *тождественно истинной (или тавтологией)*, если она принимает истинное значение при всех значениях входящих в неё переменных.

Тождественно истинное высказывание обозначают буквой I.

Например, тождественно истинными являются формулы $x \vee \bar{x}$, $x \to (y \to x)$, $(y \wedge x) \wedge \bar{x}$.

Построим таблицу истинности для формулы $x \vee \bar{x}$.

x	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$
И	Л	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	И	И

Из таблицы истинности видно, что формула $x \vee \bar{x}$ всегда истинна, т.е.является тавтологией, в этом случае записывают $x \vee \bar{x} \equiv I$.

Формула называется *тождественно ложной (или противоречием)*, если она принимает ложное значение при всех значениях входящих в неё переменных.

Тождественно ложное высказывание обозначают буквой L.

Например, тождественно ложные формулы: $x \wedge \bar{x}$, $x \leftrightarrow \bar{x}$.

Построим таблицу истинности для формулы $x \leftrightarrow \bar{x}$.

x	$\bar{x}$	$x \leftrightarrow \bar{x}$
И	Л	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	И	Л

Из таблицы истинности видно, что формула $x \leftrightarrow \bar{x}$ всегда ложна,т.е. является противоречием, в этом случае записывают $x \leftrightarrow \bar{x} \equiv L$.

Логическое следование.

Определение: Если импликация $A \to B$ является тавтологией, то говорят, что A *логически влечет* B, или, что B является *логическим следствием* A.

Обозначается: $A \mapsto B$.

Пример: Доказать, что $A = x \wedge y$ логически влечет $B = y$, т.е. $A \mapsto B$.

Решение: Построим таблицу истинности.

x	y	$A = x \wedge y$	$B = y$	$A \mapsto B$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И

Из таблицы видно, что импликация $A \to B$ есть тавтология, следовательно, A логически влечет B или $A \mapsto B$.

2.3. Задачи и упражнения

1. Среди следующих предложений выделить высказывания и установить, истинны они или ложны:

   а) $23 \leqslant 5$;

   б) Был ли Наполеон французским императором?

   в) Цена товара меньше его стоимости;

   г) Всякий человек имеет брата;

   д) Пейте томатный сок!;

   е) Существует человек, который моложе своего отца;

   ж) Ни один человек не весит более 1000 кг;

   з) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

2. Пусть даны высказывания: A: «Студент Иванов изучает английский язык», B: «Студент Иванов успевает по математической логике», C: «Студент Иванов помогает в учебе отстающим». Дать словесную формулировку высказываний:

   а) $A \wedge \bar{B}$;

   б) $A \to B$;

   в) $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$;

   г) $\bar{C} \leftrightarrow A \wedge B$;

   д) $\overline{C} \to \bar{A} \vee \bar{B}$.

3. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики и установите, истинны они или ложны:

   а) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;

   б) 45 кратно 3 или 12 не кратно 3;

   в) $\sqrt{25} = 5$ или $\sqrt{25} = -5$;

   г) $2 \leqslant 5$;

   д) Если число 212 делится на 3 и 4, то оно делится на 12;

   е) Число 212 — трехзначное и кратно 3 или 4.

4. Выясните в значении каких логических союзов употребляются грамматические союзы в следующих предложениях:

   а) Хоть редко, да метко.

   б) Движение яхты было возможно лишь тогда, когда дул ветер.

   в) «Стоило отцу заикнуться о плате, как капитан с яростью принимался сопеть». *(Р.Стивенсон. Остров сокровищ).*

5. Запишите следующие высказывания в символической форме:

   а) «Иван Иванович чрезвычайно тонкий человек и в порядочном разговоре никогда не скажет неприличного слова и тотчас обидится, если услышит его». *(Н.В.Гоголь. Как поссорился Иван Иванович с Иваном Никифоровичем).*

   б) «Так как караси ни в цензуру своих мыслей не представляют, ни в участке не прописывают, то в политической неблагонадежности их никто не подозревает». *(М.Е. Салтыков-Щедрин. Карась-идеалист).*

   в) Тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если оно не вынуждено изменить это состояние под влиянием действующих сил.

   г) Хлеб или ложка за обедом выпадет — гость спешит.

6. По мишени произведено три выстрела. Пусть $A_k \equiv \{$*мишень поражена при k-ом выстреле*$\}$, $k = 1,\ 2,\ 3$. Что означают следующие высказывания:

   а) $A_1 \vee A_2 \vee A_3$;

   б) $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$;

   в) $(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2 \wedge \bar{A}_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge A_3)$?

7. Определить истинность или ложность высказываний:

   а) $A = x \wedge \bar{y}$, если $x = Л$, $y = И$;

   б) $B = (\bar{x} \vee y) \wedge \bar{y}$, если $x = И$, $y = И$;

   в) $C = (x \to \bar{y}) \vee y$, если $x = И$, $y = Л$.

8. Определить истинность или ложность высказываний:

   а) $A = x \vee y \to z$, если $x = И$, $y = Л$, $z = И$;

   б) $B = (x \to z) \wedge (y \to z) \vee x \wedge (x \vee yz \to \bar{y}) \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee z$, если $x = И$, $y = Л$, $z = Л$;

   в) $C = x \wedge (y \wedge z)$, если $x = Л$, $y = И$, $z = И$;

   г) $D = ((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$, если $x = Л$, $y = И$, $z = И$;

   д) $E = \overline{(x \vee y) \to (\overline{x \vee z})}$, если $x = И$, $y = Л$, $z = И$.

9. На вопрос кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

10. Найти логические значения x и y, при которых выполняется равенство $(И \to x) \to y = Л$.

11. Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

12. Если $p \to q$ истинно, $\bar{q} \vee r$ истинно, а r – ложно, то каким будет логическое значение p?

13. Для каждой формулы определите, достаточно ли приведенных данных (они указаны в скобках), чтобы установить истинностное значение формулы. Если данных достаточно, то укажите это значение.

    а) $(x \to y) \to z$, $(z = И)$;

    б) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$, $(x \to y = И)$.

14. Построить таблицы истинности для следующих формул:

    а) $(x \to y) \vee \bar{x}$;

    б) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x})$;

    в) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (y \to z))$.

15. Даны два предложения: $A(x) : x-2>0$, $B(x) : x+2 \geqslant 0$, определенные при $x \in \mathbb{R}$. В чем заключаются следующие предложения, и каковы множества их истинности:

    а) $A(x) \vee B(x)$;
    б) $A(x) \wedge B(x)$;
    в) $A(x) \to B(x)$;
    г) $B(x) \to A(x)$;
    д) $A(x) \wedge \overline{B}(x)$;
    е) $\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}$.

16. Определить, является ли каждая из следующих формул тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

    а) $x \wedge (x \to y) \to y$;
    б) $x \leftrightarrow (x \vee x)$;
    в) $(x \to y) \to (y \to y)$;
    г) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \leftrightarrow (y \leftrightarrow))$;
    д) $((x \to y) \wedge y) \to x$.

17. Доказать равносильность:

    а) $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$;
    б) $x \to (y \to z) \equiv (x \wedge y) \to z$;
    в) $(x \to y) \wedge (x \to z) \equiv x \to (y \to z)$.

18. Доказать, что формула тождественно истинная:

    а) $A \equiv x \to (y \to x)$;
    б) $A \equiv x \vee \bar{x} \to y \vee \bar{y}$.

19. В деле об убийстве имеются два подозреваемых — Петр и Павел. Допросили четырех свидетелей, которые последовательно дали такие показания: «Петр не виноват», «Павел не виноват», «Из двух первых показаний, по меньшей мере, одно истинно», «Показания третьего ложны». Четвертый свидетель оказался прав. Кто совершил преступление?

20. В одном городе было совершено ограбление квартиры. Подозрение пало на двух известных воров — Иванова и Петрова. Кроме того, были найдены три свидетеля, которые заявили: «Это они сделали вместе», «Ограбление совершил Иванов, Петров в этом

не участвовал», «Если Петров совершил ограбление, то Иванов тоже принимал в этом участие». Какой вывод можно сделать из показаний свидетелей, если они все дали ложные показания?

21. Один из пяти братьев разбил тарелку. Андрей сказал: «Это Витя или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба шутите». Дими сазал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав». Мама знает, что трое из её сыновей всегда говорят правду. Кто разбил тарелку?

22. Доказать или опровергнуть:

    а) $A = x \leftrightarrow y$ логически влечет $B = x \to y$;
    б) $A = x \wedge y$ логически влечет $B = x$;
    в) $A = x \wedge (x \leftrightarrow y)$ логически влечет $B = y$;
    г) $A = x \leftrightarrow y$ логически влечет $B = \bar{x} \vee y$.

23. Установить, имеет ли место логическое следование в заданных утверждениях:

    а) Если по проводнику проходит электрический ток, то вокруг проводника образуется магнитное поле, но вокруг проводника не образуется магнитное поле. Следовательно, по проводнику не проходит электрический ток.
    б) Если он принадлежит к нашей компании, то он храбр и на него можно положиться. Но он не принадлежит к нашей компании. Значит, он не храбр или на него нельзя положиться.

Глава 3

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

3.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика — это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из конечного числа заданных объектов.

Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств — любую комбинаторную задачу можно выразить, используя понятие конечного множества.

Если исходное множество состоит из n различных элементов и если при каждом выборе мы будем извлекать из него новый элемент, отличный от всех других, то такой выбор элементов называется *выбор элементов без повторений.*

Если исходное множество состоит из элементов k типов, причём внутри каждого типа элементы неразличимы, то при очередном выборе мы можем извлечь либо новый элемент, либо такой, который уже встречался при предшествующих извлечениях, то такой выбор элементов называется *выбор элементов с повторениями.*

Например: Множество $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ состоит из $n = 5$ различных элементов, а множество $a,\ a,\ b,\ c,\ c,\ c,\ d,\ e,\ e$ состоит из $n_1 = 2$ букв a, $n_2 = 1$ буквы b, $n_3 = 3$ букв c, $n_4 = 1$ буквы d, $n_5 = 2$ букв e, всего $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 9$ элементов, среди которых не все различны.

Основные правила комбинаторики.

Правило суммы. Если выбор каждого из объектов $a_1,\ a_2,\ a_3$ ... можно выполнить $n_1,\ n_2,\ n_3$ ... способами, соответственно, причем выборы $a_1,\ a_2,\ a_3$ ... являются взаимоисключающими, то выбор «или a_1, или a_2, ..., или a_k» можно произвести $N = n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Пример 1. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причём между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 – железнодорожный и 3 – автобусных маршрута. Каково общее число маршрутов?

Решение: Общее число маршрутов между пунктами A и B равно $2 + 1 + 5 = 6$.

Пример 2. На полке в книжном шкафу стоят 25 книг, среди которых учебники: 5 книг по математике, 4 книги по физике, 6 книг по химии, остальные книги — художественная литература. Сколькими способами можно выбрать учебник с этой полки?

Решение: Взять любую из 5 книг по математике можно 5 способами, книгу по физике — 4 способами, книгу по химии — 6 способами. Выбор одной книги не влияет на выбор другой книги. Значит, по правилу суммы учебник с полки можно выбрать $5 + 4 + 6 = 15$ способами.

Правило произведения: Если из k объектов элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, и после каждого из таких выборов элемент a_2 может быть выбран n_2 способами и т.д., то выбор «и a_1, и a_2,..., и a_k» можно произвести $N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k = \prod\limits_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Пример 3: Сколькими способами можно распределить два из четырех шаров по двум лункам (в лунку помещается только один шар)?

Решение: Очевидно, первую лунку можно заполнить четырьмя способами, так как при выборе первой лунки имеется четыре шара. Вторую лунку можно заполнить тремя шарами, так как после заполнения первой лунки осталось три шара. Заметим, что с каждым из четырёх способов заполнения первой лунки может совпадать любой из трёх способов заполнения второй лунки: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 4 \cdot 3$. Поэтому общее число способов распределения шаров по двум лункам равно $4 \cdot 3 = 12$.

Рассмотрим пример на применение этих двух правил.

Пример 4. Сколько различных «слов» (т.е. последовательностей букв), состоящих не менее чем из пяти различных букв, можно образовать из букв слова «рисунок»

Решение: Слово «рисунок» состоит из 7 букв. применяя правило произведения соответствующее число раз, можно подсчитать, что существует : $N_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2500$ «слов» из пяти букв (выбираемых из букв слова «рисунок»), $N_2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ «слов» из шести букв, $N_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ «слов» из семи букв. Тогда по правилу суммы, существует $N = N_1 + N_2 + N_3 = 2520 + 5040 + 5040 = 12600$ «слов», состоящих не менее чем из пяти букв слова «рисунок».

Комбинации без повторений.

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из n различных элементов. Если в множестве введено отношение порядка, т.е. определено какой элемент множества за каким следует или какому предшествует, то множество называется *упорядоченным.*

Определение: Упорядоченные подмножества из n элементов по m элементов каждое ($0 \leqslant m \leqslant n$), отличающиеся друг от друга *либо составом, либо порядком расположения элементов, либо и тем и другим одновременно* называются *размещениями из n элементов по m.*

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Известно, что $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \dfrac{0!}{0!} = 1.$

Пример 5. Сколькими способами из группы в 20 человек можно выбрать старосту, профорга и культорга?

Решение: Первую должность можно занять любым из 20 человек, вторую – любым из 19, а третью – любым из 18, общее число способов равно произведению этих чисел $A_{20}^3 = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840$.

Определение: Упорядоченные множества элементов, состоящие из n различных элементов и отличающиеся друг от друга *только порядком следования элементов,* называют *перестановками* этих элементов.

Перестановки — это размещения из n элементов по n. Каждая перестановка содержит все n элементов множества.

Число всевозможных перестановок из n элементов по n обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!.$$

Пример 6. Сколькими способами можно рассадить шесть человек на шести стульях?

Решение: Первого человека можно рассадить шестью способами, второго – пятью способами, ..., последнего – одним способом. А так как нужно занять все стулья одновременно, то по правилу умножения имеем $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$ способов.

Определение: Подмножества из n элементов по m элементов каждое $(0 \leqslant m \leqslant n)$, отличающиеся друг от друга *только составом элементов* называются *сочетаниями из n элементов по m.*

Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Принято считать, что $C_n^0 = 1$.

Пример 7. Сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для соревнования по бегу, если имеется семь бегунов?

Решение: $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 3!} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ способов.

Комбинации с повторениями.

При решении комбинаторных задач часто приходится сталкиваться с комбинациями, которых один и тот же элемент участвует более одного раза — такие комбинации называются *комбинациями с повторениями.*

Пример 8: Сколько различных трёхзначных чисел можно записать при помощи цифр 4 и 5?

Решение: Возможны четыре случая:

1. В трёхзначное число цифра 4 не входит, т.е.555.
2. В трёхзначное число цифра 4 входит один раз, т.е. 455, 545, 554.
3. В трёхзначное число цифра 4 входит два раза, т.е. 445, 454, 544.
4. В трёхзначное число цифра 4 входит три раза, т.е. 444.

Таким образом, различных трёхзначных чисел из цифр 4 и 5 можно составить $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ штук. Эти числа отличаются или составом цифр, или их порядком, что соответствует комбинациям под названием размещения. Но это не совсем обычные размещения, они допускают повторение элементов.

Определение. Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется такое упорядоченное множество, которое содержит k элементов, причём один и тот же элемент может входить в это множество несколько раз (от нуля до k).

Пример 9. Составим из трёх элементов A, B, C размещения с повторениями из 3-х элементов по 2 элемента: $AA, BB, CC, AC, BA, CB, AB, BC, CA$.

Заметим, что размещения с повторениями одинаковы, если они совпадают как элементами, так и порядком их расположения.

Число всех размещений с повторениями из n по k обозначается символом $\bar{A}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Пример 10. Сколько различных пятизначных чисел можно составить при помощи цифр 1, 2, 3?

Решение. Искомое число комбинаций равно $\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243$.

Пример 11. Сколько различных расписаний экзаменов может быть составлено, если в экзаменационную сессию нужно сдать 4 экзамена двум преподавателям (каждому по 2 экзамена).

Решение. Обозначим первого преподавателя x, а второго — y. Тогда возможны следующие ситуации: $xyxy, yxyx, xyyx, yxxy, xxyy, yyxx$.

Других ситуаций не получится, так как записать две «x» на 2-х из 4-х мест можно C_4^2 способами, а две «y» на оставшиеся два места можно определить C_2^2 способами.

По правилу произведения получим, что количество различных расписаний может быть: $C_4^2 \cdot C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \dfrac{(4-2)!}{2! \cdot 0!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ штук. В этом примере мы встретились с перестановками с повторениями.

Определение. Перестановка n элементов, среди которых k_1 элемент первого типа, k_2 элементов второго типа, …, k_m элементов m-го типа $(k_1 + k_2 + \dots + k_m = n)$, причём элементы разных типов различны, называется *перестановкой с повторениями n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа,…, k_m элементов m-го типа.*

Число всех перестановок с повторениями n элементов, среди которых среди которых k_1 элемент первого типа, k_2 элементов второго типа, …, k_m элементов m-го типа $(k_1 + k_2 + \dots + k_m = n)$ обозначается символом $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ и вычисляется по формуле:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Пример 12. Сколько различных последовательностей букв можно составить, переставляя буквы в слове «криминалистика».

Решение. Так как в слове «криминалистика» 14 букв, то $n = 14$. Элементов первого типа (буквы ≪к≫) две штуки – $k_1 = 2$, элементов второго типа (буква ≪р≫) одна штука – $k_2 = 1$ и далее $k_3 = 4$ (буква ≪и≫), $k_4 = 1$ (буква ≪м≫), $k_5 = 1$ (буква ≪н≫), $k_6 = 2$ (буква ≪а≫), $k_7 = 1$(буква ≪л≫), $(k_8 = 1)$ (буква ≪с≫), $k_9 = 1$ (буква ≪т≫).

Следовательно, количество всех слов: $P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{14!}{2!4!2!}$.

Пример 13. Трёхсменное дежурство на контрольно-пропускном пункте обеспечивают два подразделения. Сколько различных расписаний дежурства можно составить?

Решение. Обозначим факт дежурства представителя первого подразделения через x, второго – через y. Тогда возможны расписания: xxx, xxy, xyy, yyy. Каждая из четырёх комбинаций отличается от любой другой составом элементов, порядок здесь не существенен, так как основное — сколько людей выделяет подразделение на дежурство. Следовательно, эти комбинации — сочетания, но не обычные, а с повторениями.

Определение. Сочетанием с повторениями из n элементов по k элементов называется множество, содержащее k элементов, причём каждый элемент принадлежит к одному из n типов.

Число всех сочетаний с повторениями из n по k обозначается $\bar{C}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\bar{C}_n^k = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Пример 14. Выпишите все сочетания с повторениями из трех элементов A, B, C по 3 и определите их количество

Решение. Возможны следующие варианты: AAA, BBB, CCC, ABB, $BCC, ACC, BBC, AAB, AAC, ACB$. Количество комбинаций вычислим по формуле: $\bar{C}_3^3 = \dfrac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10$.

Для вычислений числа сочетаний с повторениями удобно использовать следующую формулу:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k.$$

Пример 15. Сколько можно сделать костей домино, используя числа 0, 1, 2, ..., 9?

Решение. Кости «нового» домино можно рассматривать как сочетания с повторениями из 10 по 2. Следовательно, число костей такого домино было бы:

$$\bar{C}_{10}^{2} = C_{10+1}^{10-1} = C_{11}^{9} = \frac{11!}{9!2!} = 5 \cdot 11 = 55.$$

3.2. События и их вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности, присущи массовым случайных явлениям, называют *теорией вероятностей.*

Основные понятия теории вероятностей.
Опыт, эксперимент, наблюдение явления называют *испытанием.*

Например: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игрального кубика, извлечение шара из ящика.

Результат испытания (опыта) называют *событием* или *исходом испытания.*

Например: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости, появление шара определенного цвета.

События обозначаются заглавными буквами A, B, C, ...

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдёт в результате данного испытания.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдёт в данном испытании.

Событие называется *случайным* в данном испытании, если оно может произойти, а может и не произойти в результате данного испытания.

Два случайных события называются *совместными* в данном испытании, если появление одного из них не исключает появления другого в этом испытании.

Например: Испытание: однократное подбрасывание игральной кости (кубика). Событие A – выпадение четного числа, событие B – выпадение числа, кратного трём.

Два случайных события называются *несовместными* в данном испытании, если появление одного из них исключает появления другого в этом испытании.

Например: Испытание: однократное подбрасывание монеты. Событие A – выпадение «герба», событие B – выпадение «цифры». Появление события A исключает появление события B.

Несколько случайных событий называются *несовместными,* если они попарно-несовместны.

Два случайных события называются *противоположными,* если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит, т.е. является достоверным событием.

Событие, противоположное событию A, обозначают $\bar{A}$.

Например: Испытание — стрельба по мишени. Событие A (попадание в цель) и событие $\bar{A}$ (промах) являются противоположными.

Случайные события $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ называются *равновозможными (или равновероятными)*, если ни одно из этих событий является более возможным, чем другие.

Например: выпадение «герба» или «цифры» при подбрасывании монеты; выпадение любого числа от 1 до 6 при подбрасывании игральной кости; извлечение чёрного или белого шара из урны, содержащей два белых и два чёрных шара.

Каждое из равновозможных событий, которое не может быть разложено на более простые, называется *элементарным исходом.*

Например: Испытание – один раз подбрасывается игральная кость (кубик, грани которого занумерованы цифрами от 1 до 6). Элементарные исходы здесь соответствуют числу выпавших очков на верхней грани. Если принять за A_1 – выпадение цифры 1 на верхней грани, за A_2 – выпадение цифры 2 и т.д., то можно записать, что $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$ – элементарные исходы при подбрасывании игрального кубика.

Случайные события $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ образуют *полную группу событий,* если эти события *несовместны* и появление *одного и только одного* из них является достоверным событием.

Например: При бросании игральной кости (игрального кубика) верхней гранью может оказаться любая из шести. Все шесть исходов испытания несовместны, а если игральная кость правильная (симметричная и однородная), то эти исходы равновозможны и являются элементарными исходами. Пусть A_k — событие, означающее появление верхней грани с цифрой k ($k = 1, 2, 3, 4, 6$). События A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу.

Классическое определение вероятности.

Определение: Вероятностью события A называется отношение числа элементарных исходов m, благоприятных данному событию, к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Из определения вероятности следует, что

1. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $p = 1$, т.к. для достоверного события $n = m$, следовательно $p = \dfrac{n}{n} = 1$.
2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $p = 0$, т.к. для невозможного события $m = 0$, следовательно $p = \dfrac{0}{n} = 0$.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей, т.к. для случайного события A выполняются неравенства $0 < m < n$, или $0 < \dfrac{m}{n} < 1$, то вероятность случайного события выражается следующим неравенством: $0 < p(A) < 1$.
4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Геометрические вероятности.

Если число возможных исходов испытания бесконечно, а исходы равновозможны, то вводят понятие *геометрической вероятности.* Каждому исходу сопоставляется некоторая точка области S_n, а благоприятным исходам — точки, лежащие в некоторой ее части S_m. Тогда вероятность $p(A)$ попадания точки в область S_m определяется как отношение мер (длин, площадей, объёмов) этих областей.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу бросается точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$p = \frac{l}{L}.$$

Пусть на плоскости задана область G, имеющая площадь S_G. В области содержится область g площади S_g. В область G наудачу брошена точка. Будем считать, что брошенная точка может попасть в некоторую часть области G с вероятностью, пропорциональной площади этой части и не зависящей от ее формы и расположения.

Таким образом, вероятность попадания точки в область g определяется формулой:

$$p(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$p = \frac{v}{V}.$$

Пример: На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых равны R и r $(r < R)$. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт в кольцо, образованное окружностями.

Решение: Испытание – точка случайно брошена в круг радиуса R. Событие A – точка, брошенная наудачу в большой круг попадёт в кольцо, образованное окружностями. Вероятность попадания точки в кольцо, образованное окружностями равна $p(A) = \dfrac{S_1}{S}$, где S_1 – площадь кольца, S – площадь круга радиуса R. Таким образом, находим

$$p(A) = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Статистическое определение вероятности.

Как классическое, так и геометрическое определения вероятности неприменимы, если результаты испытания *не равновозможны.*В этом случае используют *статистическое определение вероятности.*

Пусть проведена серия из n испытаний, событие A произошло m раз.

Определение: Относительной частотой события события A в данной серии испытаний называется отношение числа опытов, в которых это событие произошло, к числу всех произведённых опытов, т.е.

$$\omega(A) = \frac{m}{n}.$$

Частота события может изменяться от одной группы испытаний к другой. Относительная частота обладает свойством *статистической устойчивости*: в различных сериях многочисленных испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться событие A) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной.

Определение: Вероятностью события A называется *число, вокруг которого колеблется относительная частота* $\omega(A)$ *при повторении длинных серий испытаний.*

$$p(A) \approx \omega(A).$$

Равенство является более точным, чем больше число n испытаний в серии.

Например: Если по цели произведено 200 выстрелов и при этом зарегистрировано 180 попаданий, то относительная частота попаданий в цель равна $\omega(A) = \dfrac{180}{200} = 9$.

3.3. Основные теоремы теории вероятностей

Алгебра событий. Соотношения между событиями.

Определение: Суммой двух событий называется событие, состоящее в появлении *хотя бы одного из этих событий.*

Обозначение: $A + B$.

Определение: Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Определение: Произведением двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении.

Обозначение: AB.

Определение: Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий.

Если событие A обязательно произойдёт при появлении некоторого другого события B, то говорят, что *событие B влечёт появление события A,* т.е. $B \subset A$.

Свойства операций над событиями:

1. *Коммутативность:* $A + B = B + A, \quad AB = BA$;

2.*Ассоциативность:* $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$,
$A(BC) = (AB)C = ABC$;
3. *Дистрибутивность:* $(A + B)C = AC + BC$.

Соотношения между событиями:

Если U — достоверное событие, V — невозможное событие, $\bar{A}$ — противоположное событие, то выполняются равенства:

$$\begin{array}{ll} A + A = A & AA = A \\ A + \bar{A} = U & A\bar{A} = V \\ A + V = A & AV = V \\ A + U = U & AU = A \end{array}$$

Определение: Разностью событий A и B называется событие C, которое обозначает, что наступает событие A и не происходит событие B. Обозначение: $A - B$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема 1: Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Теорема 2: Вероятность наступления хотя бы одного из n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n).$$

Следствие 1: Если попарно-несовместные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Отсюда следует, что вероятность противоположного события равна:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Если обозначить $p(A) = p,\ p(\bar{A}) = q$, то формулы для нахождения суммы противоположных событий перепишутся в виде:

$$p + q = 1,\ q = 1 - p.$$

Пример 1: В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Какова вероятность извлечения цветного шара, если извлекается один шар?

Решение: Вероятность вынуть красный шар $p(A) = \dfrac{10}{30}$, синий шар $p(B) = \dfrac{5}{30}$. Вероятность появления цветного шара $p(A+B) = p(A) + p(B) = \dfrac{1}{2}$.

Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность.

Определение: События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

В частности, если n событий $A_1 A_2 A_3 ... A_n$ независимы, то противоположные им события $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 ... \bar{A}_n$ также независимы.

Определение: Событие B называется *зависимым* от A, если вероятность события B зависит от того, произошло событие A или нет.

Определение: Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется условной вероятностью события A, обозначается $p(A/B)$и вычисляется по формуле:

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}.$$

Определение: Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B, обозначается $p(B/A)$ и вычисляется по формуле:

$$p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)}.$$

Теорема 3 (*Теорема умножения вероятностей для зависимых событий*): Вероятность совместного наступления двух *зависимых событий* равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность второго события, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B).$$

Понятие условной вероятности и теорема умножения вероятностей обобщаются на случаи трёх и более событий.

Теорема 4 (*Теорема умножения вероятностей для n зависимых событий*): Вероятность совместного наступления n зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$p(A_1A_2A_3...A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1A_2)...p(A_n)p(A_1A_2...A_{n-1}).$$

В частности, в случае трёх событий A, B и C имеет место равенство:

$$p(ABC) = p(A)p(B/A)p(C/AB).$$

Если событие B не зависит от события A, то условная вероятность события B при условии, что A произошло равна безусловной вероятности события B: $p(B/A) = p(B)$.

Аналогично, если если событие A не зависит от события B, то $p(A/B) = p(A)$.

Теорема 5 (*Теорема умножения вероятностей независимых событий*): Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

Теорема 6 (*Теорема умножения вероятностей n независимых событий*): Вероятность совместного наступления n независимых событий равна произведению их вероятностей

$$p(A_1A_2A_3...A_n) = p(A_1)p(A_2)p(A_3)...p(A_n).$$

В частности, для трёх независимых событий A, B, C вероятность совместного наступления будет вычисляться по формуле:

$$p(ABC) = p(A)p(B)p(C).$$

Пример 2: В урне 7 белых и 3 чёрных шара. Из урны без возвращения извлекаются три шара. Найти вероятность того, что первые два шара, извлечённые из урны будут чёрными , а третий — белый.

Решение: Обозначим события:

A — извлекли первый шар (чёрный);

B — извлекли второй шар (чёрный);

C — извлекли третий шар (белый).

Извлечение шаров происходит без возвращения, поэтому событие B зависит от A, а событие C зависит от A и B.

Таким образом, вероятность будет равна:

$$p(ABC) = p(A)p(B/A)p(C/AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{120} \approx 0,058.$$

Вероятность появления хотя бы одного события.

Пусть $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ — независимые в совокупности события (но могут быть совместны); $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, ..., \bar{A}_n$ — противоположные им события, также независимые.

Обозначим через B событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, т.е.

$$B = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n.$$

Событие, противоположное событию B, будет состоять в том, что не произошло ни одного события из перечисленной группы, т.е.

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot ... \cdot \bar{A}_n.$$

Но т.к. B и $\bar{B}$ являются противоположными событиями, то

$$p(B) + p(\bar{B}) = 1 \qquad \text{и}$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot ... \cdot \bar{A}_n) = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot ... \cdot p(\bar{A}_n).$$

Обозначим вероятности этих событий через $p(A_1) = p_1$, $p(A_2) = p_2$, ..., $p(A_n) = p_n$, а вероятности противоположных событий через $p(\bar{A}_1) = (1 - p_1) = q_1$, $p(\bar{A}_2) = (1 - p_2) = q_2$, ..., $p(\bar{A}_n) = (1 - p_n) = q_n$.

Тогда вероятность наступления хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n вычисляется по формуле:

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) = 1 - q_1 q_2 q_3 ... q_n.$$

Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равновозможны, то и противоположные к ним события равновозможны, т.е. $q_1 = q_2 = q_3 = ... = q_n = q$, в этом случае формула примет вид:

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) = 1 - q^n.$$

Пример 3: Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6; для второго 0,7; для третьего 0,75. Найти вероятность по крайней мере одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Решение: Введём события A, B и C, состоящие в том, что в цель попал соответственно первый, второй и третий стрелки. Обозначим вероятности противоположных событий через $q(A), q(B), q(C)$. События A, B и C независимы в совокупности, поэтому получим:

$$p(A + B + C) = 1 - q(A)q(B)q(C) = 1 - (1 - 0,6)(1 - 0,7)(1 - 0,75) = \\ = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,25 = 0,97,$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема 7. Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Следствие 3. Если событие B зависит от события A, то $p(AB) = p(B/A)$ и вероятность наступления хотя бы одного из этих двух событий определяется формулой:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(B/A).$$

Следствие 4. Если события A и B независимы, то $p(AB) = p(A)p(B)$ и вероятность наступления хотя бы одного из этих двух событий определяется формулой:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B).$$

Следствие 5. Если события A и B несовместны, то $p(AB) = 0$ и вероятность наступления хотя бы одного из этих двух событий определяется формулой:

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Пример 4: Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,7; вторым 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок поразит мишень.

Решение: Обозначим события:

A — первый стрелок поразит мишень;

B — первый стрелок поразит мишень;

$A+B$ — хотя бы один стрелок поразит мишень.

События A, B — совместны и независимы, поэтому имеем:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

3.4. Следствия теорем сложения и умножения

Формула полной вероятности.

Рассмотрим n попарно несовместных событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n, образующих полную группу событий, для которых $p(H_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу равна $p(H_1) + p(H_2) + p(H_3) + \ldots + p(H_n) = 1$, т.е. наступление «или события H_1, или H_2, или ..., H_n» является достоверным событием.

Пусть событие A может произойти только в случае наступления одного из событий $H_1,\ H_2,\ H_3,\ ...,\ H_n$. Тогда событие A можно представить в виде суммы $A = AH_1 + AH_2 + AH_3 + ... + AH_n$.

Известны вероятности появления события A при условии, что произошло одно из событий $H_1,\ H_2,\ H_3,\ ...,\ H_n$, а именно $p(A/H_i)$. Тогда вероятность появления события A будет определяться по формуле:

$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2) + ... + p(AH_n) =$$

$$= p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + ... + p(H_n)p(A/H_n),$$

где события $H_1,\ H_2,\ H_3,\ ...,\ H_n$ называют *гипотезами,* а полученная формула называется *формулой полной вероятности* или *теоремой гипотез.*

Пример 1: Пусть поступающие на сборку детали изготавливаются на трёх станках, причём на первом станке производится половина всех деталей, на втором – 30%, а на третьем – 20%. Известно, что на первом станке допускается 3% брака, на втором 1% и на третьем 0,5%. Какова вероятность того, что произвольно взятая со склада деталь будет бракованной?

Решение: Пусть H_1 – «выбор детали производства первого станка», H_2 – «выбор детали производства второго станка», H_3 – «выбор детали производства третьего станка» и A – «выбор бракованной детали».

Вероятности того, что делали изготовлены на первом, втором и третьем станке (вероятности гипотез) равны $p(H_1) = 0,5$ $p(H_2) = 0,3$ $p(H_3) = 0,2$.

Вероятности того, что бракованные детали выпускаются на первом, втором, третьем станке равны $p(A/H_1) = 0,03$, $p(A/H_2) = 0,01$, $p(A/H_3) = 0,005$.

Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$p(A) = 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,005 = 0,019, \text{ т.е. почти } 2\%.$$

Формула Байеса.

События H_i, при наступлении которых происходит событие A, называем *гипотезами.*

Каждая из гипотез имеет свою вероятность $p(H_1), p(H_2), ..., p(H_n)$, вычисленную до опыта (априорная вероятность), в котором может произойти событие A.

Если событие A уже произошло (в нашем примере – попалась бракованная деталь), то вероятности гипотез должны быть заменены (или пересмотрены) на новые, послеопытные (апостериорные вероятности).

По теореме умножения вероятностей двух зависимых событий имеем:

$$p(AH_i) = p(A)p(H_i/A) \quad \text{или} \quad p(AH_i) = p(H_i)p(A/H_i).$$

Приравниваем праве части полученных равенств:

$$p(A)p(H_i/A) = p(H_i)p(A/H_i) \qquad (i = \overline{1,n})$$

откуда

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)} \qquad (i = \overline{1,n}).$$

где $p(H_i)$— априорная вероятность i-ой гипотезы, $p(H_i/A)$ — апостериорная вероятность i-ой гипотезы, $p(A)$ — формула полной вероятности.

Таким образом,

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i)p(A/H_i)} \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Эта формула называется *формулой Байеса.* Она позволяет осуществить переоценку (перерасчет) вероятностей гипотез.

Пример 2: В условиях примера 1 выясним, какова вероятность того, что попавшаяся бракованная деталь изготовлена на первом станке.

Решение: $p(H_i/A) = \dfrac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,03}{0,019} = 0,78.$

Теорема о повторении опытов. Формула Бернулли.

Пусть проводится серия n независимых друг от друга испытаний. Предположим, что в каждом испытании некоторое событие A может наступить с одной и той же вероятностью $p = p(A)$, или не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Вычислим вероятность того, что в n испытаниях событие A появится k раз $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Для этого представим событие B — «появление события A k раз в n опытах». Обозначим через A — событие, которое произошло, $\bar{A}$ — событие, которое не произошло.

Событие B может быть представлено следующими исходами:

$$\underbrace{A\bar{A}\bar{A}...AA\bar{A}A}_{n}, \text{ или } \underbrace{A\bar{A}\bar{A}...AA\bar{A}A}_{n}, \text{ или } \underbrace{A\bar{A}\bar{A}...AA\bar{A}A}_{n} \; ...$$

Каждый возможный исход содержит n множителей. Во всех исходах событие A появилось k раз и не появилось $(n-k)$ раз.

Таким образом, событие B будет представляться в виде определённого числа слагаемых, содержащих всевозможные произведения из сомножителей.

Вероятность события, определяемого каждым из слагаемых, на основании теоремы умножения независимых событий, будет вычисляться по формуле $p^k(1-p)^{n-k}$.

Событие B будет включать в себя C_n^k слагаемых, соответствующее количеству различных способов поставить A на k мест из n.

По теореме сложения вероятность появления события A k раз в n испытаниях будет вычисляться по формуле:

$$p(B) = p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1.$$

Если вероятность противоположного события обозначить через $q = 1 - p$, то формула примет вид:

$$p(B) = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 < p < 1.$$

Полученная формула представляет собой *формулу Бернулли или теорему о повторении опытов.*

Формула удобна для применения при небольших n $(n \leqslant 10)$ и является частным случем теоремы умножения вероятностей.

Пример 3: Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

Решение: По условию задачи имеем $n = 4$, $k = 3$, $p = 0.8$. Следовательно, искомая вероятность трёх попаданий в цель из четырёх выстрелов будет равна

$$p_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A, происходящее с вероятностью $p = p(A)$ в каждом испытании. наступит от k_1 до k_2 раз включительно, равна

$$p_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = p_n(k_1) + p_n(k_1+1) + ... + p_n(k_2).$$

Имеет место равенство:

$$p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + ... + p_n(n) = 1.$$

Функция $p_n(k)$ как функция переменной k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, достигает своего максимального значения при некотором $k = k_0$. Число k_0 называется *наивероятнейшим числом* наступления события A. Для числа k_0 имеет место следующая оценка:

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p.$$

Пример 4: Найти наивероятнейшее число попаданий в кольцо при пяти бросаниях, если вероятность попадания мячом в кольцо при одном попадании равна $p = 0,6$.

Решение: Имеем $n = 5; p = 0,6; q = 0,4$. Для числа k_0 получаем оценку: $5 \cdot 0,6 - 0,4 \leqslant k_0 \leqslant 5 \cdot 0,6 + 0,6$ или $2,6 \leqslant k_0 \leqslant 3,6$. Так как k_0 — целое число, то $k_0 = 3$.

Формула Пуассона. Поток событий.

Если число испытаний n велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мала ($p < 0,01$), то численная реализация формулы Бернулли становится сложной, хотя формула верна при любых n и p.

Теорема (Пуассона): Если $0 < p < 1$, то

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np; \; k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Формула Пуассона применима для вычисления вероятностей событий, составляющих *поток событий* — последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Простейшим, или *пуассоновским* называется поток событий, для которого вероятность появления k событий потока при интенсивности потока λ вычисляется по формуле Пуассона

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Пример 5: Радиоустройство содержит 1000 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени T равна $p = 0,004$. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно 5 элементов.

Решение: Имеем $n = 1000, \; p = 0,004, \; q = 1 - p = 0,996, \; \lambda = pn = 4$. Нужно вычислить $p_{1000}(5)$. Формула Пуассона даёт:

$$p_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} = \frac{1024 \cdot 0,0183}{120} = 0,1562.$$

Теорема Лапласа. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Численная реализация формул Бернулли и Пуассона при больших λ затруднительна. Этот пробел устраняет формула Лапласа.

Локальная теорема Лапласа: Если вероятность появления события A в одном испытании равна p и число испытаний велико, то вероятность появления событие A m раз в n испытаниях приближённо равна:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } \varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\dfrac{x^2}{2}}, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в Приложении 1. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция $\varphi(x)$ чётная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример 6: Вероятность попадания по движущейся мишени равна 0.7. Какова вероятность того, что из 20 произведённых выстрелов 15 окажутся удачными?

Решение: По условию задачи имеем $n = 20$; $m = 15$; $p = 0,7$; $q = 0,3$. Вычисляем $\sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot 0,7 \cdot 0,3} \approx 2,05$; $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{15 - 20 \cdot 0,7}{2,05} \approx 0,49$. Находим по таблицам $\varphi(0,49) = 0,3538$, откуда

$$P_{20}(15) = \frac{0,3538}{2,05} = 0,173.$$

При вычислении по формуле Бернулли получаем

$$P_{20}(15) = C_{20}^{1}5 \cdot 0,7^{15} \cdot 0,3^{5} = 0,179.$$

В данном случае ошибка в 0,006 составляет около 3% от искомой вероятности. Если же число испытаний будет увеличиваться, то приближение будет становиться более точным.

Интегральная теорема Лапласа: Если проводится большое число n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, то вероятность того, что число появлений m события A в этих испытаниях находится в интервале $a \leqslant m \leqslant b$, приближённо равна

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x) = -\dfrac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^x e^{-\dfrac{z^2}{2}}\,dz$ – функция Лапласа, $x' = \dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$.

Тогда формула для вычисления вероятности перепишется в виде:

$$P(a \leqslant m \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x, где $0 \leqslant x \leqslant 5$ приведена в Приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$.

Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечётная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 7: Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 900 выстрелах число попаданий будет заключено между 690 и 740.

Решение: По условию задачи имеем $n = 900$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $a = 690$; $b = 740$. Вычислим аргументы функции Лапласа:

$$\frac{b-np}{\sqrt{npq}} = \frac{740 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{20}{12} = 1,67 \text{ и } \frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{690-720}{12} = -2,5.$$

Учитывая нечётность функции Лапласа, находим искомую вероятность

$$P(690 \leqslant x \leqslant 740) = \Phi(1,67) - \Phi(2,5) = 0,4525 + 0,4938 = 0,9463.$$

Следует заметить, что формула для вычисления вероятности по теореме Лапласа несколько упрощается в случае, когда границы a и b для возможного числа появлений события A симметричны относительно числа np, т.е. $b - np = -(a - np)$ и, следовательно, формула для вычисления вероятности примет следующий вид:

$$P(a \leqslant m \leqslant b) = 2\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Пример 8: Пусть $n = 900$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. Требуется найти $P(705 \leqslant m \leqslant 735)$.

Решение: По условию задачи имеем $np = 720$, $b - np = 735 - 720 = 15$, $\sqrt{npq} = 12$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(705 \leqslant m \leqslant 735) = 2\Phi\left(\frac{15}{12}\right) = 2\Phi\,(1,25) = 2 \cdot 0,3944 = 0,7888,$$

где значение функции Лапласа $\Phi\,(1,25)$ определяется по таблице (Приложение 2).

Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

В рассмотренных примерах для вычисления $P(a \leqslant m \leqslant b)$ приходилось вычислять аргументы функции Лапласа $\dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$.

Введем обозначения, пусть $\beta = \dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\alpha = \dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$, тогда в новых обозначениях интегральная теорема Лапласа примет вид вид:

$$P(a \leqslant m \leqslant b) = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta).$$

Из введённых обозначений следует:

$$b = np + \beta\sqrt{npq},\ a = np + \alpha\sqrt{npq}.$$

Таким образом, неравенство $a \leqslant m \leqslant b$ означает, что

$$np + \alpha\sqrt{npq} \leqslant m \leqslant np + \beta\sqrt{npq}.$$

Если последнее неравенство разделить на n и из всех его частей вычесть p, то получится неравенство

$$\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \beta\frac{pq}{n}.$$

Последнее неравенство эквивалентно исходному. Следовательно,

$$P(a \leqslant m \leqslant b) = P\left(\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \beta\frac{pq}{n}\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Если интервал изменения числа m станет симметричным относительно np, т.е. $b - np = -(a - np)$, то данная формула перепишется в виде:

$$P(np + \alpha\sqrt{npq} \leqslant m \leqslant np + \beta\sqrt{npq}) =$$

$$= P\left(-\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \alpha\frac{pq}{n}\right) = 2\Phi(\alpha).$$

Если абсолютная величина отклонения относительной частоты $\omega = \dfrac{m}{n}$ от постоянной вероятности p мала, т.е. $\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon$, тогда имеем

$$\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}} = \varepsilon \quad \text{или } \alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

и, следовательно, формула для *оценки отклонения относительной частоты от постоянной вероятности* будет иметь вид:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Оценка близости частоты к вероятности важна для дальнейшего. Из экспериментальных статистических данных мы будем находить частоту появления некоторого события A в данной серии опытов. Полученное следствие теоремы Лапласа позволяет оценить, как велико отклонение этой частоты от вероятности A, как зависит точность приближения от числа испытаний.

Пример 9: Вероятность появления события A в отдельном испытании равна $p = 0,6$. Найти вероятность того, что при 150 испытаниях частота появления этого события будет отличаться от его вероятности не более чем на 0,03.

Решение: По условию задачи имеем $n = 150$; $p = 0,6$; $q = 0,4$; $\varepsilon = 0,03$. По формуле для оценки отклонения относительной частоты от постоянной вероятности находим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{150}{0,6 \cdot 0,4}}\right) =$$

$$= 2\Phi(0,75) = 2 \cdot 0,2734 = 0,5468,$$

где $\Phi(0,75)$ определяется по таблицам (Приложение 2).

В итоге получилось, что вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,03$ оказалась мало отличающейся от вероятности его невыполнения, равной $1 - 0,5468 = 0,4562$.

Если ослабить требование к точности приближения, т.е. положив $\varepsilon = 0,1$, то аргумент функции Лапласа изменится и будет равным $\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,1\sqrt{\frac{150}{0,6 \cdot 0,4}} = 2,5$, тогда вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,1$ будет равна $2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0.4938 = 0,9878$.

3.5. Задачи и упражнения

1. Вычислите:

   а) $\dfrac{14!}{7!3!4!}$;

   б) $\dfrac{7! - 8! + 6!}{8 \cdot 6!}$;

   в) $\dfrac{5 \cdot 6! + 6 \cdot 5!}{6 \cdot 6!}$.

2. Найти значение выражения:

а) $\dfrac{P_8}{P_7}$;

б) $\dfrac{A_8^4 - A_8^3}{A_7^3 - A_7^2}$;

в) $\dfrac{C_6^3 - C_6^2}{A_7^3}$;

г) $\dfrac{P_6(C_7^5 + C_7^4}{A_10^7}$.

3. Сократить дробь:

а) $\dfrac{n!}{(n+2)!}$;

б) $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$;

в) $\dfrac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!}$;

г) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$;

д) $\dfrac{(4n-1)!}{(4n-3)!}$.

4. Упростить выражение:

а) $\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$;

б) $\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{n^3-n}{(n+1)!}$;

в) $\dfrac{25n^5 - n^3}{(5n+1)!} \cdot \left(\dfrac{1}{5(5n-2)!}\right)^{-1}$.

5. Решить уравнение:

а) $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \dfrac{5}{6}$;

б) $(3x)! = 504(3x-23)!$;

в) $6C_n^{n-3} = 11A_{n-1}^2$;

г) $C_x^3 = 2C_x^2$;

д) $C_x^2 + C_{x+1}^2 = 49$.

6. Сколькими способами можно обить шесть стульев тканью, если имеются ткани шести разных цветов и все стулья должны быть разного цвета?

7. Сколькими способами можно выбрать пять делегатов из состава конференции, на которой присутствуют пятнадцать человек?

8. Сколькими способами можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря собрания, на котором присутствуют тридцать человек?

9. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице пять футбольных команд, если известно, что никакие две не набрали поровну очков?

10. При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было: а) трое; б) четверо; в) пятеро?

11. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали: а) трое; б) четверо; в) пятеро?

12. а) Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеются ткани шести разных цветов? Четырёх разных цветов? б) Те же задачи, если одна из полос – красная.

13. Сколькими способами можно рассадить вокруг круглого стола трёх мужчин и трёх женщин, так чтобы лица одного пола не сидели рядом?

14. В цехе работают семь токарей. Сколькими способами можно поручить трём из них изготовление трёх различных видов деталей (по одному на каждого)?

15. Сколькими способами можно из семи мальчиков и девяти девочек выбрать команду бегунов, если в ней должно быть четыре мальчика и четыре девочки?

16. В вазе стоят девять красных и семь розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:

    а) три гвоздики;

    б) пять гвоздик одного цвета;

в) четыре красных и три розовых гвоздики?

17. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

18. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра в изображении встречается только один раз?

19. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

20. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 если каждая цифра в изображении встречается только один раз?

21. Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

22. Сколько четырёхзначных чисел, составленных из 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры не повторяются)?

23. Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 8, 9 (цифры не повторяются)?

24. Сколько чётных трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9 (цифры не повторяются)?

25. Тридцать человек разбиты на три группы I, II, III по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

26. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д.Лондона, располагая их:

    а) в произвольном порядке;
    б) так, чтобы I, IV, IX тома стояли рядом (в любом порядке);
    в) так, чтобы I, II, III тома не стояли рядом (в любом порядке)?

27. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

28. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

29. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трёх членов ревизионной комиссии. Сколькими способами можно это сделать?

30. В фортепьянном кружке занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырёх чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

31. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретилось если известно, что:

    а) каждый здоровался с каждым;
    б) только один человек не здоровался ни с кем;
    в) только двое не поздоровались между собой;
    г) четверо поздоровались только между собой?

32. Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 5,6,7,8,9 при условии, что цифры повторяются.

33. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 1) 12; 2) 24; 3) 120.

34. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 слона, 2 коня, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

35. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены различные призы?

36. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены одинаковые призы?

37. Сколько существует четырёхзначных чисел (возможно, начинающихся с нуля), сумма цифр которых равна 5?

38. Сколькими способами можно разбить группу из 25 студентов на три подгруппы A, B и C по 6, 9 и 10 человек соответственно?

39. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

40. В цветочном магазине продаются цветы шести сортов. Сколько можно составить различных букетов из десяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

41. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

42. Подбрасывается два игральных кубика. Найти:

    а) вероятность того, что сумма выпавших очков на верхних гранях будет меньше шести очков;

    б) вероятность того, что хотя бы на одной кости появится чётное число очков;

    в) вероятность того, что произведение на выпавших гранях чётное;

    г) вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2;

    д) вероятность того, что сумма выпавших очков на верхних гранях больше их произведения.

43. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

44. Ребенок играет буквами разрезной азбуки. Какова вероятность того, что разложив буквы в ряд *К, И, Р, Д, А, Н, З, П*, ребёнок составит слово *праздник*?

45. Четырёхтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят в должном порядке?

46. На карточках выписаны цифры от 1 до 9. Наугад берут три цифры и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится чётное число?

47. Выпускники экономического факультета устроились на работу в три различные компании: 19 человек работают в банке «Вера», 28 человек – в фирме «Надежда» и 37 человек – в банке «Софья». Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

48. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок

докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

49. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии?

50. Девочка складывала в шкатулку только двухрублёвые монеты. Однажды она взяла из шкатулки 15 двухрублёвых монет и взамен положила туда 30 монет по одному рублю. После этого вероятность вытянуть из шкатулки наугад двухрублёвую монету стала равна $\frac{11}{26}$. Сколько монет было в шкатулке?

51. В ящике лежат 7 белых и 3 чёрных шара. Наудачу вынули 3 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары белые?

52. В ящике лежат 5 белых и 6 чёрных шара. Какова вероятность вынуть наудачу 3 белых и 2 чёрных шара?

53. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

54. В партии, содержащей 10 изделий, среди которых три бракованных, наудачу извлекают три изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

55. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определите вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

56. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 19 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

57. За круглый стол на 21 стул в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

58. У девочки в копилке 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых монеты. Девочка наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

59. Какова вероятность того, что в трёхзначном числе, наудачу выбранном из таблицы, содержится одна цифра 5, а две другие – различны, причём среди них нет цифры 0?

60. Вы находитесь в круглом зале с 10 дверьми, из которых какие-то четыре заперты. Вы выбираете две двери. Найдите вероятность того, что хотя бы через одну из них можно выйти из зала.

61. В ящике лежат пятнадцать деталей 1 сорта и шесть деталей 2 сорта. Наудачу вынимают три детали. Чему равна вероятность, если:

    а) все наудачу вытащенные детали 1 сорта?
    б) хотя бы одна из трёх вытащенных деталей 1 сорта?
    в) хотя бы одна из трёх вытащенных деталей 2 сорта?

62. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

63. Стрелок делает выстрел не целясь и попадает в квадратный лист бумаги со стороной 12 см, на котором нарисована мишень, состоящая из двух кругов. Известно, что радиусы кругов равны 1 и 6 см. Найдите вероятность события «стрелок попал в малый круг или не попал в большой».

64. После урагана телефонная связь между пунктами A и B, расстояние между которыми 10 км, нарушилась. Найти вероятность того, что разрыв произошёл между точками C, отстоящей от A на 5 км, и D, отстоящей от A на 8 км.

65. Фигура задана на координатной плоскости следующими условиями: $|\,x\,|\leqslant 7, |\,y\,|\leqslant 4$. Центр круга радиуса 1 принадлежит фигуре. Найдите вероятность того, что весь круг содержится в данной фигуре.

66. На плоскость, разграфлённую параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт ни одной из прямых.

67. В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в квадрат?

68. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Какова вероятность, что она попадёт в куб?

69. Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Студент, пришедший первым, ждёт второго 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент произвольно выбирает время своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

70. В прямоугольник с вершинами $K(-1;0), L(-1;5), M(2;5), N(2;0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты $(x;y)$ будут удовлетворять неравенствам $x^2+1 \leqslant y \leqslant x+3$?

71. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0.09.

72. Подбрасывается игральный кубик. Обозначим события: A – «выпадение шести очков», B – ≪выпадение трёх очков≫, C – ≪выпадение чётного числа очков≫, D – ≪выпадение числа очков, кратного трём≫. Каковы соотношения между событиями?

73. Опыт состоит в том, что стрелок производит три выстрела по мишени. События A_1, A_2, A_3 – ≪попадание в мишень при первом, втором, третьем выстреле соответственно≫. Выразить через следующие события:

    а) A – ≪хотя бы одно попадание≫;
    б) B – ≪три попадания≫;
    в) C – ≪три промаха≫;
    г) D – ≪хотя бы один промах≫;
    д) E – ≪не меньше двух попаданий≫;
    е) F – ≪не более одного попадания≫;
    ж) G – ≪попадание после первого выстрела≫.

74. Пусть A, B, C – произвольные события. Записать выражения для следующих событий:

    а) произошло только событие A;
    б) произошло одно и только одно событие;
    в) произошло два и только два события;
    г) произошли все три события;
    д) произошло по крайней мере одно из этих событий;
    е) произошло не более двух событий.

75. Опыт – извлечение детали из ящика, в котором находятся изделия трёх сортов. Обозначения событий: A – «извлечена деталь первого сорта», B – «извлечена деталь второго сорта», C – «извлечена деталь третьего сорта». Что представляют собой следующие события: $A + B, \overline{A + C}, AC, AB + C$?

76. Опыт состоит в подбрасывании трёх монет. Монеты занумерованы и события $A_1,\ A_2,\ A_3$ означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монете. Выразите через $A_1,\ A_2,\ A_3$ следующие события:

    а) A – «выпадение одного герба и двух цифр»;
    б) B – «выпадение не более одного герба»;
    в) C – «число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр»;
    г) D – «выпадение хотя бы двух гербов»;
    д) E – «на первой монете выпал герб»;
    е) F – «а первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб».

77. Спортсмен стреляет по мишени, разделённой на три сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

78. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0,35, 0,20, 0,15. Какова вероятность попадания в мишень?

79. Найти вероятность совместного появления цифры при подбрасывании двух монет.

80. Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет не шесть очков?

81. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зелёных и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечён цветной шарик?

82. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 10 до 40. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным двум или трём?

83. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика на верхней грани окажется чётное или кратное трём число очков.

84. На десяти карточках напечатаны цифры от 0 до 9. Определить вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 357.

85. В урне шесть голубых, пять красных и четыре белых шара. Из урны поочерёдно извлекают шар, не возвращая его обратно. Какова вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар (событие A), при втором – красный (событие B), при третьем – белый (событие C)?

86. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается три шара. Найти вероятность того, что все шары голубые.

87. Все грани игрального кубика заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – голубой, грани 4, 5, 6 – красной. При подбрасывании кубика выпала красная грань. Определить вероятность того, что на этой грани стоит чётное число.

88. Грани игрального кубика сточены таким образом, что вероятность выпадения одной из граней с 1, 3 или 4 очками равна $\frac{1}{14}$, а вероятность выпадения одной из граней с 2 или 5 очками равна $\frac{2}{7}$. Найдите вероятность того, что за два бросания на кубике выпадет сумма 12 очков.

89. В некотором клубе – 19 членов, причём 9 из них блондины, а остальные – брюнеты. Гуляя по городу, один из блондинов, состоящих в клубе, встретил по очереди двух других членов клуба. Найдите вероятность того, что первый встреченный был блондином, а второй брюнетом.

90. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

91. В ящике имеются 7 белых и 5 чёрных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают один шар и, не опуская его обратно, вынимают ещё один шар. Какова вероятность того, что оба вынутых шара чёрные?

92. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом – 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

93. В ящике лежат 7 белых и 3 чёрных шара. Наудачу вынули три шара, какова вероятность того, что все они белые?

94. В урне a белых и b чёрных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, в другой чёрный (вынутый шар в урну не возвращается)?

95. В ящике пять выигрышных билетов и четыре проигрышных. Вы случайно вытаскиваете три билета. Найдите вероятность того, что:

    а) все билеты выигрышные;

    б) есть ровно два проигрышных билета;

    в) есть ровно два выигрышных билета;

    г) есть хотя бы один выигрышный билет.

96. Подбрасывается два игральных кубика. Какова вероятность того, что хотя бы на одной кости появится три очка?

97. Производится два выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом из них равна $p(A_1) = 0,6$, при втором $p(A_2) = 0,7$. Найти вероятность того, что в мишени после двух выстрелов будет хотя бы одна пробоина.

98. Пусть по мишени стреляют одновременно три стрелка, причём вероятность попадания у первого 0,9, второго – 0,8, а третьего – 0,6. Какова вероятность того, что после одного залпа в мишени окажется ровно две пробоины?

99. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, для первого равна 0,95, а для второго 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

100. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один спортсмен.

101. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

102. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку – 0,3. Определить вероятность того, что при трёх выстрелах стрелок наберёт не менее 29 очков.

103. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трёх выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

104. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что для правильного соединения ему придётся звонить не более трёх раз.

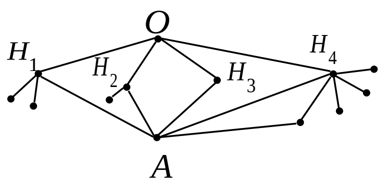
105. Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле равна 0,05. Сколько нужно сделать выстрелов для того, чтобы с вероятностью не менее 0,85 иметь хотябы одно попадание?

106. Имеются три урны с шарами. В первой находится 5 голубых и 3 красных шара, во второй – 4 голубых и 4 красных. В третьей – 8 голубых шаров. Наугад выбирается одна из урн и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется красным (событие A)?

107. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель из винтовки с оптическим прицелом 0,95, без такого прицела – 0,7. Найти вероятность поражения цели, если стрелок произведёт один выстрел из наудачу взятой винтовки.

108. На сборку поступило 12 деталей с завода №1, 20 деталей – с завода №2 и 18 деталей – с завода №3. На первом заводе 80 % деталей высшего качества, на втором – 60 % и на третьем – 90 %. Найти вероятность того, что произвольно взятая деталь окажется высшего качества.

109. На рисунке изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта O, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт A?



110. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Каковы вероятности того, что это а) мужчина; б) женщина (считать, что-их поровну)?

111. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадёт к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

112. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объём продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе $p_1 = 0,05$, на втором заводе – $p_2 = 0,01$. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

113. В пяти ящиках находятся одинаковые по весу и размеру шары. В двух ящиках – по 6 голубых и 4 красных шара (ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) – по 8 голубых и 32 красных шара. В одном ящике (состава H_3) – 2 голубых и 8 красных. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Извлечённый шар оказывается голубым. Какова вероятность того, голубой шар извлечён из ящика первого состава?

114. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

115. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырёх, или три партии из шести?

116. В урне 8 шаров, среди которых 5 белых. Из урны 8 раз вынимается шар и после регистрации его цвета возвращается обратно в урну. Найти вероятность того, что белый цвет был зарегистрирован 3 раза.

117. Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырёх посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трёх.

118. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди детей более двух мальчиков? Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

119. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0.4. Найти вероятность появления A:

    а) три раза в четырёх испытаниях;
    б) не менее трёх раз в четырёх испытаниях;
    в) не более двух раз в четырёх испытаниях;
    г) не менее двух раз и не более трёх раз в пяти испытаниях.

120. Среди некоторых изделий доля изделий высшего сорта составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий.

121. Сколько надо произвести испытаний для того, чтобы найвероятнейшее число наступлений события A в этих испытаниях было равно 30, если $p = p(A) = 0.3$?

122. На некотором поле повреждены гербицидами 15% растений мяты рассадной посадки. Найти наивероятнейшее число повреждённых гербицидами растений мяты среди 20 растений, отобранных с этого поля случайным образом.

123. Вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна 0,7. Сколько таких испытаний нужно произвести, чтобы наивероятнейшее число появлений события A в этих испытаниях было бы равно 20?

124. Вероятность того, что телефонный разговор прервётся по техническим причинам, равна 0,005. Какова вероятность того, что из 1000 телефонных разговоров прервутся по техническим причинам ровно 4?

125. Вероятность выпуска бракованной детали равна 0,008. Найти вероятности того, что среди 1000 выпущенных деталей будут: а) 8 бракованных; б) не более 2 бракованных.

126. Среднее число заказов такси в час равно трём. Найти вероятность того, что за два часа поступят: а) 4 заказа; б) менее 4 заказов; в) не менее 4 заказов.

127. Среднее число самолётов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно 4. Найти вероятность того, что за 3 минуты прибудут а) два самолёта; б) менее двух; в) не менее двух самолётов.

128. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

129. Вероятность события A в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,3. Найти вероятность следующих событий:

130. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 100 деталей 55 окажутся отполированными, если в общей массе деталей имеется поровну отполированных и неотполированных.

131. Пользуясь теоремой Лапласа, найти вероятность появления события A не менее 342 раза и не более 378 раз в 600 испытаниях, если в отдельном испытании вероятность появления события A равна 0,6.

132. При производстве некоторых деталей 20 % из них оказывается второго сорта. Пользуясь теоремой Лапласа, найти вероятность того, что в партии из 600 деталей окажется от 100 до 125 деталей второго сорта.

133. Найти вероятность того, что при 400 независимых испытаниях частота появления события A даст отклонение от $P(A) = 0,8$ не более чем на 0,06.

134. Вероятность наступления события A в каждом из 484 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота события A отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

135. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

136. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна $0,8$. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью $0,99$ абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности $0,8$ не превысила ε.

137. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,8. Найти минимальное число деталей, которые следует отобрать, чтобы с вероятностью не менее, чем 0,96, можно было утверждать, что относительная частота появления стандартных деталей среди отобранных отклоняется по абсолютной величине от вероятности 0,8 не более, чем на 0,04.

Глава 4

Случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания может принять различные числовые значения *в зависимости от случая.*

Наблюдаются *дискретные и непрерывные* случайные величины.

Число возможных значений *дискретной случайной величины* может быть конечным или бесконечным.

Например: Число шаров в урне, число студентов в аудитории и т.д.

Число возможных значений *непрерывной случайной величины* бесконечно.

Например:

1) Число, выпадающее на игральной кости, – дискретная случайная величина со значениями от 1 до 6.

2) Абсцисса точки, бросаемой на отрезок (0;1), – непрерывная случайная величина с бесконечным множеством значений из интервала (0;1).

Случайные величины будем обозначать заглавным буквами латинского алфавита X, Y, Z, а принимаемые ими значения — соответствующими строчными x, y, z, ...

Запись $X = x$ означает, что случайная величина X приняла значение x, запись $P(X = x)$ означает вероятность того, что величина X приняла значение x.

Соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

Другая форма закона распределения — *функция распределения.*

Пусть X — случайная величина, x — произвольное число. Тогда вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x, называется *функцией распределения вероятностей* данной случайной величины X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

Свойство 1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку [0;1], т.е. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Свойство 2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

Свойство 3. Если все возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$, $F(x) = 1$ при $x > b$.

Свойство 4: Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b)$, равна разности значений её функции распределения $F(x)$ на концах этого интервала:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

4.1. Дискретные случайные величины.

Дискретная случайная величина.

Определение: Дискретной случайной величиной называется величина X, принимающая отдельные (изолированные) возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно.

Определение: Законом распределения дискретной случайной величины X (ряд распределения) называется соответствие между возможными значениями этой величины x_1, x_2, x_3, ... и их вероятностями p_1, p_2, p_3, ...

Закон распределения ДСВ может быть задан при помощи:

а) таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

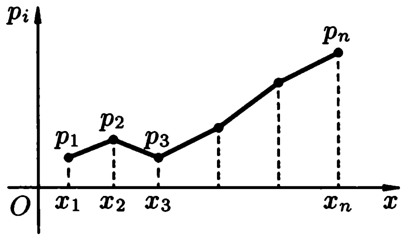
При этом сумма всех вероятностей второй строки таблицы равна единице, т.е. $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, так как принятие случайной величиной X какого-то значения из x_1, x_2, x_3, ..., x_n

— это достоверное событие.

б) аналитически(формулами):

$$P(X = x_k) = p_k; \qquad p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

в) графика: ломаная, соединяющая точки (x_k, p_k), отмеченные в прямоугольной системе координат по оси абсцисс и по оси ординат соответственно, называют *многоугольником (полигоном) распределения.*



г) *функции распределения вероятностей* $F(x) = P(X < x)$:

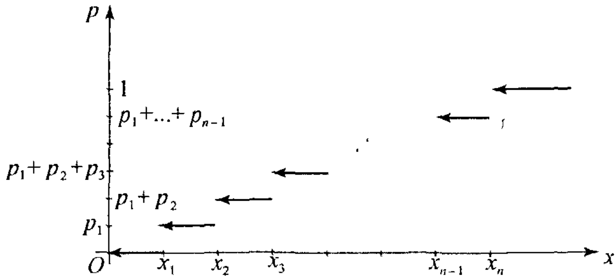
если задана дискретная случайная величина $X = x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_n$, то функция распределения $F(x)$ является кусочно-постоянной, представляется в виде формулы:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

или

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leqslant x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leqslant x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \leqslant x_4; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ p_1 + \ldots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leqslant x_n; \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

График фунции распределения дискретной случайной величины имеет *ступенчатый* вид:



Стрелки на графике $F(x)$ обозначают одностороннюю непрерывность функции $F(x)$ слева в каждой точке $x = x_i$.

Пример 1: Монета бросается четыре раза. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадения герба. Вычислить и построить функцию распределения $F(x)$.

Решение:

1) Вероятность выпадения герба в каждом испытании равна $p = 0,5$. Возможные значения случайной величины X – это целые числа от 0 до 4. Вероятности k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ появлений герба в четырёх испытания находим по формуле Бернулли.

   Соответствующий закон случайной величины X – числа выпадения герба распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	$p_4(0) = \frac{1}{16}$	$p_4(1) = \frac{4}{16}$	$p_4(2) = \frac{6}{16}$	$p_4(3) = \frac{4}{16}$	$p_4(4) = \frac{1}{16}$

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1$).

2) Вычислим функцию распределения $F(x)$:

   а) При $x \leqslant 0$, $F(x) = \sum\limits_{x_k<0} P(X = x_k) = 0$.

   б) При $0 < x \leqslant 1$, $F(x) = \sum\limits_{x_k<1} P(X = x_k) = P(X = 0) = \frac{1}{16}$.

в) При $1 < x \leqslant 2$, $F(x) = \sum\limits_{x_k<2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$.

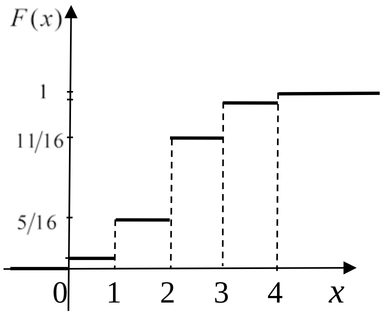
г) При $2 < x \leqslant 3$, $F(x) = \sum\limits_{x_k<3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$.

д) При $3 < x \leqslant 4$, $F(x) = \sum\limits_{x_k<4} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$.

е) При $x > 4$, $F(x) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$.

3) Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X и ее график имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases},$$



Пример 2: Урне находятся 9 шаров, из них 5 белых и 4 черных. Из урны наугад вынимаются 4 шара. Пусть случайная величина X — число белых шаров среди отобранных. Составить закон распределения дискретной случайной величины X.

Решение: По условию задачи имеем $N = 9; M = 5; n = 4;$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Случайная величина X может принять следующие значения $X = 0$, $X = 1$, $X = 3$, $X = 4$ соответствующие им значения p_i найдём из классического определения вероятности:

$$p_0(X = 0) = \frac{C_5^0 \cdot C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126} \approx 0,008;$$

$$p_1(X = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^3}{C_9^4} \approx 0,159; \quad p_2(X = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_4^2}{C_9^4} \approx 0,476;$$

$$p_3(X = 3) = \frac{C_5^3 \cdot C_4^1}{C_9^4} \approx 0,317; \quad p_4(X = 4) = \frac{C_5^4 \cdot C_4^0}{C_9^4} \approx 0,04.$$

Искомый закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,008	0,159	0,476	0,317	0,040

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i = 0,008 + 0,159 + 0,476 + 0,317 + 0,040 = 1$).

Пример 3: Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	-2	1	2	3
P	0,08	0,40	0,32	0,20

Найти вероятности следующих событий: $P(X < 2)$, $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$, $P(1 < X \leqslant 3)$.

Решение:

$P(X < 2) = P(X = -2) + P(X = 1) = 0,08 + 0,40 = 0,48;$

$P(1 \leqslant X < 3) = 0,4 + 0,32 = 0,72;$

$P(1 < X \leqslant 3) = 0,32 + 0,2 = 0,52.$

Эти же вероятности можно найти, используя формулы

$F(x) = P(X < x)$ и $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$, тогда имеем:

$P(X < 2) = P(2) = 0,48;$

$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = F(3) - F(1) = 0,8 - 0,08 = 0,72;$

$P(1 < X \leqslant 3) = P(1 \leqslant X \leqslant 3) - P(X = 1) + P(X = 3) = F(3)-$

$-F(1) - 0,40 + 0,2 = 0,72 - 0,2 = 0,52.$

Пример 4: Заданы законы двух независимых случайных величин X и Y:

X	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

Y	-2	-1
P	0,4	0,6

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение: Найдём всевозможные значения случайной величины Z, а именно $z_k = x_i + y_j$:

$1 + (-2) = -1;$ $1 + (-1) = 0;$ $2 + (-2) = 0;$ $2 + (-1) = 1;$

$3 + (-2) = 1;$ $3 + (-1) = 2,$ т.е $z_1 = -1,$ $z_2 = 0,$ $z_3 = 1,$ $z_4 = 2.$

Найдем вероятности вероятности для этих значений случайной величины:

$p_1 = P(Z = -1) = P(X = 1, Y = -2) = P(X = 1) \cdot P(Y = -2) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12;$

$p_2 = P(Z = 0) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 2, Y = -2) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,38;$

$p_3 = P(Z = 1) = P(X = 2, Y = -1) + P(X = 3, Y = -2) = 0,5 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,38;$

$p_4 = P(Z = 2) = P(X = 3, Y = -1) = P(X = 3) \cdot P(Y = -1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12;$

При нахождении p_1 мы воспользовались теоремой умножения двух независимых событий, а именно т.к. $P(X = 1, Y = -2)$ — означает вероятность появления двух независимых событий, поэтому $P(X = 1, Y = -2) = P(X = 1) \cdot P(Y = -2)$. Аналогично и для p_4.

При нахождении вероятности p_2 и p_3 мы воспользовались теоремой сложения двух несовместных событий, т.к. появление случайной величины $Z = 0$ соответствует несовместному появлению случайной величины $(X = 1, Y = -1)$ или $(X = 2, Y = -2)$.

В итоге получаем закон распределения случайной величины $Z = X + Y$ (контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 1$):

Z	-1	0	1	2
P	$0,12$	$0,38$	$0,38$	$0,12$

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение: Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений $x_1,\ x_2,\ ..., x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$, называется величина

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Математическое ожидание также обозначается m_k, a.

$M(X)$ — выражает «центр» дискретной случайной величины X. Если считать, что в точках $x_1,\ x_2,\ ..., x_n$ сосредоточены соответственно массы $p_1, p_2, ..., p_n$, то $M(X)$ задаёт центр масс (центр тяжести) этой системы материальных точек. Значения X распределены около $M(X)$.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

Свойство 1. $M(C) = C$, где C – постоянная величина.

Свойство 2. $M(CX) = C \cdot M(X)$.

Свойство 3. $M(X_1X_2...X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n)$,
где $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ – взаимно независимые случайные величины.

Свойство 4. $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$.

Если $M(X)$ — математическое ожидание X, то величина $X - M(X)$ называется отклонением случайной величины X от своего математического ожидания.

Отклонение случайной величины X есть случайная величина, принимающая как положительные, так и отрицательные значения. Нетрудно заметить, что математическое ожидание отклонения случайной величины X равно нулю, т.е. $M[X - M(X)] = 0$.

Поэтому характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат *дисперсия и* *среднеквадратичное отклонение.*

Определение: Дисперсией (или рассеянием) дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - M(X))^2.$$

Дисперсия дискретной случайной величины X также равна разности между средним квадратом случайной величины и квадратом ее среднего значения:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - M^2(X).$$

Дисперсия дискретной случайной величины X обладает следующими свойствами:

Свойство 1. $D(C) = 0$, где C – постоянная величина.

Свойство 2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

Свойство 3. $D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$.

Величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратическим отклонением* и выражает степень разброса случайной величины X около $M(X)$.

Определение: Начальным моментом порядка k дискретной случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой величины (рассматривают 4 момента):

$$M_k(X) = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k.$$

В частности, $M_1(X) = M(X)$.

Определение: Центральным моментом порядка k дискретной случайной величины X называется начальный момент порядка k отклонения случайной величины $X - M(X)$:

$$m_k(X) = M[X - M(X)]^k = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - M(X)]^k.$$

В частности, $m_2(X) = D(X)$.

Пример 5: Монета бросается четыре раза. Закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	$p_4(0) = \frac{1}{16}$	$p_4(1) = \frac{4}{16}$	$p_4(2) = \frac{6}{16}$	$p_4(3) = \frac{4}{16}$	$p_4(4) = \frac{1}{16}$

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Решение:

$$M(X) = \frac{1}{16}\cdot 0 + \frac{4}{16}\cdot 1 + \frac{6}{16}\cdot 2 + \frac{4}{16}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot 4 = 2;$$

$$D(X) = (0-2)^2\cdot\frac{1}{16} + (1-2)^2\cdot\frac{4}{16} + (2-2)^2\cdot\frac{6}{16} + (3-2)^2\cdot\frac{4}{16} + {}$$
$$+ (4-2)^2\cdot\frac{1}{16} = 1;$$

или

$$D(X) = 0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{4}{16} + 2^2\cdot\frac{6}{16} + 3^2\cdot\frac{4}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} - 2^2 = 1.$$

4.2. Непрерывные случайные величины.

Непрерывные случайные величины.

Определение: Случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка, называется *непрерывной случайной величиной.*

Для непрерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения, т.к. непрерывные случайные величины на любом промежутке имеют бесчисленное множество значений. Составить таблицу, в которую входили бы все возможные значения случайной величины, нельзя.

Непрерывная случайная величина задаётся с помощью *функции распределения.*

Определение: Функцией распределения непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого x вероятность того, что величина X принимает значение меньшее чем x:

$$F(x) = p(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Непрерывная случайная величина X характеризуется *непрерывной функцией распределения.*

Функция распределения называется также *интегральной функцией распределения* и обладает теми же свойства, что и дискретная случайная величина.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[a, b)$, равна разности значений её функции распределения $F(x)$ на концах этого интервала:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

Причём, вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое значение, равна нулю:

$$P(X = x_1) = 0.$$

Действительно, если $a = x_1, b = x_1 + \Delta x$, тогда $P(x_1 \leqslant X \leqslant x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$. Пусть $\Delta x \to 0$, а т.к. X – непрерывная величина, то $F(x)$ непрерывна, следовательно в силу непрерывности $F(x)$ в точке x_1 разность $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ стремиться к нулю, а значит $P(X = x_1) = 0$.

На основании этого утверждения легко убедиться в справедливости равенств:

$$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b).$$

Помимо функции распределения $F(x)$ для непрерывных случайных величин, существует способ задания закона распределения с использованием другой характеристики – *плотности вероятности* $f(x)$.

Определение: Плотностью распределения вероятности, или *плотностью вероятности* $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность вероятности $f(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения.*

Свойства плотности вероятности:

Свойство 1. $f(x) \geqslant 0$ (свойство неотрицательности);

Свойство 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (свойство нормированности);

Свойство 3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$;

Свойство 4. $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt;$

Свойство 5. $F(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

График плотности вероятности $f(x)$ называется *кривой распределения.*

Пример 1: Точка бросается на отрезок [0;1]. Построить функцию распределения $F(x)$.

Решение: X – непрерывная случайная величина. Функция распределения $F(x)$ и ее график имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Пример 2: Задана непрерывная случайная величина X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ C(x-3)^2, & 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент C;

б) плотность вероятности $f(x)$ построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) вероятность попадания заданной случайной величины X в интервал [3;4).

Решение:

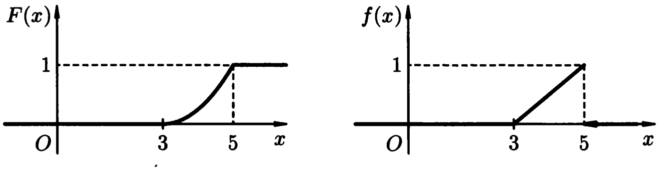
а) Так как случайная величина X – непреывна, то $F(x)$ должна быть непрерывна в любой точке, в частности, и при $x = 5$. Так как $F(5) = 1$, то $C(5-3)^2 = 1$, откуда получаем значение коэффициента $C = \dfrac{1}{4}$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \dfrac{1}{4}(x-3)^2, & 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

б) Так как плотность вероятности $f(x)$ выражается формулой $f(x) = F'(x)$, отсюда имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \dfrac{1}{2}(x-3), & 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ имеют вид:



в) Используем формулу $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, находим, что

$$P(3 \leqslant X < 4) = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}(x-3)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Или по другой формуле $P(3 \leqslant X < 4) = F(4) - F(3) = \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Определение: Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, \infty)$, т.е. всей числовой оси Ox, определяется равенством

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X.

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то математическое ожидание определяется формулой:

$$M(X) = \int\limits_a^b xf(x)\,dx.$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат *дисперсия и среднеквадратичное отклонение*.

Определение: Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(X).$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то дисперсию можно вычислить по формулам:

$$D(X) = \int\limits_a^b (x - M(X))^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D(X) = \int\limits_a^b (x^2 f(x)\,dx - M^2(X).$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, указанные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Определение: Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины X равен

$$M_k(X) = M(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx.$$

В частности, $M_1(X) = M(X)$.

Центральный момент порядка k непрерывной случайной величины X равен

$$m_k(X) = M_k[X - M(X)]^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)\,dx.$$

В частности, $m_2(X) = D(X)$.

Коэффициент асимметрии («скошенности») непрерывной случайной величины X равен

$$A_s(X) = \frac{m_3(X)}{\sigma^3(X)},$$

где m_3 –центральный момент 3-го порядка, σ – среднеквадратическое отклонение.

Коэффициент эксцесса («островершинности») непрерывной случайной величины X равен

$$E_k(X) = \frac{m_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3,$$

где m_4 –центральный момент 4-го порядка, σ – среднеквадратическое отклонение.

Определение: Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называется возможное значение $X = x$, соответствующее локальному максимуму плотности вероятности $f(x)$.

Если $f(x)$ имеет два локальных максимума, то X называется *бимодальной*, а если $f(x)$ максимума не имеет, то X не имеет моды.

Определение: Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется возможное значение $X = x$, такое, что

$$p((X < M_e(X)) = p((X > M_e(X)).$$

Пример 2: Для непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2, \\ 0,5(x-2), & 2 < x \leqslant 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Определить $M(X)$, $D(X)$, начальные и центральные моменты первых двух порядков.

Решение: Вычисляем начальные моменты $M_1(X)$ и $M_2(X)$:

$$M_1 = 0,5\int\limits_2^4 (x(x-2)\,dx = 0,5\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{10}{3};$$

$$M_2 = 0,5\int\limits_2^4 (x^2(x-2)\,dx = 0,5\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \\ = \frac{1}{2}\left(64 - \frac{128}{3} - 4 + \frac{16}{3}\right) = \frac{34}{3};$$

Зная, что $M(X) = M_1(X)$ находим математическое ожидание $M(X) = \frac{10}{3}$.

Вычисляем центральные моменты $m_1(X)$ и $m_2(X)$:

$$m_1(X) = 0,5\int\limits_2^4 \left((x - \frac{10}{3}\right)(x-2)\,dx = 0;$$

$$m_2(X) = 0,5\int\limits_2^4 \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 (x-2)\,dx = \frac{2}{9}.$$

Зная, что $D(X) = m_2(X)$ находим дисперсию $D(X) = \frac{2}{9}$.

4.3. Важнейшие распределения случайных величин

Распределения дискретных случайных величин.

1. *Биномиальное распределение (или распределение Бернулли).*

   Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону Бернулли, если она принимает конечное число значений $0, 1, 2, ...n$ с вероятностями, соответствующей формуле Бернулли:

   $$p_n(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n,$$

   где p – вероятность появления события k раз в n испытаниях.

   Биномиальный закон определяется двумя параметрами p и n.

   Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по *закону Бернулли*:

$$M(X) = np, \quad D(X) = np(1-p) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

2. *Распределение Пуассона.*

Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ, если она принимает конечное количество значений с вероятностями, соответствующей формуле Пуассона:

$$p_n(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k},$$

где $\lambda = np$ – параметр распределения Пуассона.

Это закон зависит от отдного параметра λ. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми, можно найти $P_n(X = k)$, зная k и λ.

Имеет место равенство: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_n(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k} = 1.$

Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по *закону Пуассона*:

$$M(X) = D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

3. *Геометрическое распределение.*

Дискретная случайная величина X распределена по *геометрическому закону* если она принимает конечное количество значений $k = 1, 2, ..., n$, с вероятностями

$$p_n(X = k) = p(1-q)^{k-1}, \qquad k = 0, 1, 2, ...n.$$

Геометрическое распределение определяется одним параметром p и описывает случайную величину X, определяющую число испытаний до наступления события, при условии, что его вероятность равна p.

Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по *геометрическому закону*:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Распределения непрерывных случайных величин.

1. *Равномерное распределение.*

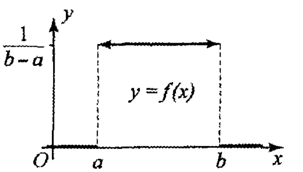
Непрерывная случайна величина X называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$), если *плотность распределения* этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне этого отрезка:

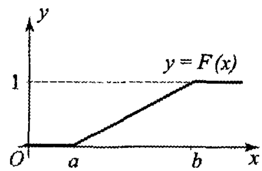
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X описывается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

Графики *плотности распределения* $f(x)$ *(кривая распределения) и функции распределения* $F(x)$ имеют следующий вид:





Вероятность попадания равномерно распределенной непрерывной случайной величины X*, в интервал* (a, b)*:*

$$P\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

или

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{x-a}{b-a}\bigg|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины X*:*

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \\ = \frac{b+a}{2}.$$

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, есть середина этого отрезка.

Дисперсия:

Дисперсия вычисляется по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Таким образом, вычисляя

$$M(X^2) = \int\limits_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \\ = \frac{b^2+ab+a^2}{3},$$ находим

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак,

$$M(X) = \frac{b+a}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 1: Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее 3 минут.

Решение: Случайная величина X равномерно распределена. Интервал движения 5 минут – это интервал в $(a;b) = (0;5)$, котором плотность вероятности случайной величины равно $f(x) = \frac{1}{b-a} = \\ = \frac{1}{5}$.

Таким образом, вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус не менее 3 минут будет равна:

$$P(2 < X < 5) = \int\limits_2^5 f(x)\,dx = \int\limits_2^5 \frac{1}{b-a}\,dx = \int\limits_2^5 \frac{1}{5}\,dx = \frac{3}{5} = 0,6.$$

2. *Показательное (экспоненциальное) распределение.*

Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью распределения:

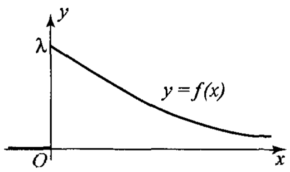
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases},$$

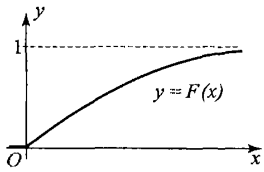
где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения $F(x)$ показательного закона описывается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases},$$

Графики *плотности распределения $f(x)$ (кривая распределения) и функции распределения $F(x)$* имеют следующий вид:





Вероятность попадания непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервал (a, b):

$$P(a < X < b) = \int\limits_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a}$$

или

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a}.$$

Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по показательному закону:

Математическое ожидание:
$$M(X) = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda};$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int\limits_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\, dx - M^2(X) = \left[-x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2x}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_0^\infty - $$
$$- \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак,

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 2: Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = 2e^{-2x}, x \geqslant 0$. Найти вероятность попадания X в интервал $(0,3;1)$.

Решение: По условию $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a}.$$

В результате получим

$$P(0,3 \leqslant X < 1) = e^{-2\cdot 0,3} - e^{-2\cdot 1} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx.$$

$$\approx 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41.$$

3. *Нормальное распределение (распределение Гаусса).*

   Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».

   Большинство случайных величин подчиняется закону, который в силу своей значимости назван *нормальным.* Нормальный закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина X является результатом действия большого числа различных факторов. Основная особенность, выделяющая нормальный закон среди других, состоит в том, что он является предельным, к которому приближаются другие законы распределения. Например, распределение Пуассона при стремлении числа проведённых опытов к бесконечности $n \to \infty$ приближается к нормальному распределению.

   Нормальное распределение применяется в задачах, связанных в теорией измерений, теорией ошибок и пр.

   Нормальным распределением, или *распределением Гаусса*, называется распределение непрерывной случайной величины, плотность вероятности, которой описывается формулой:

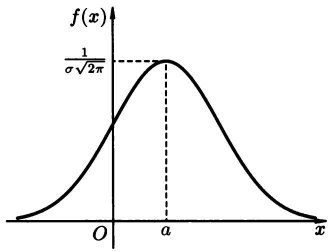
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

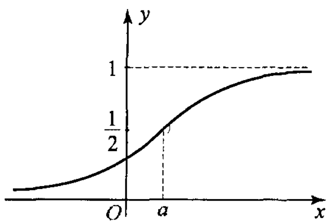
где $a = M(X)$ и $\sigma = \sigma(X)$ $(\sigma > 0)$ – параметры нормального распределения.

Функция распределения $F(x)$ распределения Гаусса описывается формулой:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

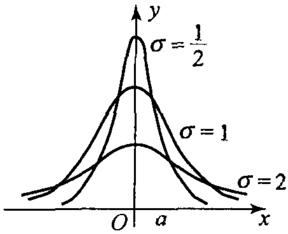
Графики *плотности распределения $f(x)$ (кривая распределения, нормальная кривая)* и *функции распределения $F(x)$* имеют следующий вид:





Влияние на форму и расположение *нормальной кривой* параметров a и σ:

- изменение величины параметра a не изменяет формы кривой нормальной кривой, а приводит лишь к сдвигу вдоль оси Ox: вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.
- при возрастании σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, т.е. график сжимается к оси Ox; при убывании σ нормальная кривая растягивается в положительном направлении вдоль оси Oy.



Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по нормальному закону:

Нормальное распределение определяется двумя параметрами:
$a = M(X)$ – математическое ожидание; $\sigma = \sqrt{D(X)}$ – среднеквадратическое отклонение, где

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx;$$

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

При $a = 0$ и $\sigma = 0$ нормальное распределение будет называться *нормированным (стандартным)*, а кривая распределения – *нормированной.*

В этом случае плотность вероятности $f(x)$ нормированного распределения принимает следующий вид:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \text{ – дифференциальная функция Лапласа.}$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X, подчинённой нормальному распределению, в интервал (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{-t^2}{2}} dx$ – *интегральная функция Лапласа (интеграл Лапласа).*

Функция Лапласа является нечётной функцией, т.е. $\Phi(x) = -\Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x > 5$.

С учётом обозначений, формула для определения вероятности попадания случайной величины X в заданный интервал перепишется в виде:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Для определения значения функции Лапласа используют специальные таблицы, представленные в Приложении данного пособия.

На практике часто требуется вычислить вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на участок, симметричный относительно математического ожидания.

В этом случае неравенство $m - \delta < X < m + \delta$ равносильно неравенству $|X - m| < \delta$.

Тогда формула попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал пример следующий вид:

$$P(|X - m| < \delta) = P\left(m - \delta < X < m + \delta\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m + \delta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \delta - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Учитывая нечётность функции Лапласа, будем иметь:

$$P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Положим $\delta = 3\sigma$. Тогда $P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi\left(3\right) = 0,99973$.

Таким образом, не менее 99,7% значений нормально распределенной случайной величины попадают в интервал $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$.

Правило трёх сигм: Если случайная величина нормально распределена, то практически достоверно, что абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Пример 3: Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны 15 и 81. Вычислить а) вероятность попадания случайной величины в интервал $(20, 35)$, б) вероятность того, что отклонение случайной величины X от среднего значения не превосходит 12, т.е. $p(|X - 15| \leqslant 12)$.

Решение:

а) По условию задачи имеем $a = 15$, $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{81} = 9$, тогда вероятность попадания в заданный интервал равна:

$$P(20 < X < 35) = \Phi\left(\frac{35-15}{9}\right) - \Phi\left(\frac{20-15}{9}\right) =$$

$$= \Phi\,(2,22) - \Phi\,(0,56) = 0,4868 - 0,2123 = 0,2745.$$

б) Воспользуемся формулой $P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, тогда искомая вероятность будет равна:

$$p(|X - 15| \leqslant 12) = 2\Phi\left(\frac{12}{9}\right) = 2\Phi\,(1,33) = 0,4082.$$

4.4. Закон больших чисел

В определённых условиях событие A можно считать практически невозможным, если $p \approx 0$ или практически достоверным, если $p \approx 1$. Под законом больших чисел понимается совокупность предложений, утверждающих с вероятностью, близкой к единице, что наступит некоторое событие, зависящее от большого числа случайных факторов, каждый из которых оказывает на это событие незначительное влияние.

Неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, математическое ожидание которой равно $M(X) = m_x$. Как известно, дисперсия для дискретной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i.$$

Если из этой суммы рассматривать только слагаемые, для которых отклонение случайной величины от математического ожидания больше некоторого положительного числа ε, а именно $|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon$, то сумма уменьшится, и будет иметь место неравенство

$$D(X) \geqslant \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i \geqslant \varepsilon^2 \cdot \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} p_i.$$

Сумма соответствующих p_i есть вероятность того, что $|X - m_x| \geqslant \varepsilon$.

Окончательно имеем:

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 \cdot P(|X - m_x| \geqslant \varepsilon), \quad \text{или} \quad P(|X - m_x| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Если от этого неравенства перейти к противоположному, то получаем *неравенство Чебышева:* вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - m_x| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

или

$$P(|X| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Неравенство Бернулли.

В случае, когда X – случайная величина, определяющая число появлений события A в n испытаниях, которое обозначим через m, то неравенство принимает вид:

$$P(|m - np| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Из этого неравенства, учитывая «размерность» дисперсии, после деления на n, получаем *неравенство Бернулли:*

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

где $\dfrac{m}{n}$ – относительная частота появления события, $\left(\dfrac{m}{n} - p\right)$ – отклонение относительной частоты появления события от вероятности.

Теорема Бернулли: Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Из этого утверждения следует статистическое определение вероятности как предела, к которому стремится частота появления события при как угодно большом числе испытаний.

Если число испытаний равно n, то отношение $\frac{m}{n}$ называют «статистической оценкой» вероятности p и обозначают $\frac{m}{n} = p^*$.

Пусть для некоторого параметра a опытным путём получена его оценка a^*. Зададим некоторую вероятность β (например, $\beta = 0,9$) и найдём такое $\varepsilon > 0$, что $P\left(|a - a^*| \leqslant \varepsilon\right) = \beta$.

Тогда интервал $(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$, в который с вероятностью β попадает искомый параметр a, называют *доверительным интервалом*, а число β – *доверительной вероятностью.*

В случае, когда неизвестным параметром является вероятность p, а в качестве оценки берётся частота, то нахождение доверительного интервала и доверительной вероятности при заданном числе n испытаний сводится к применению *теоремы Лапласа* и *неравенства Бернулли.*

Пример 1: Проведено 150 опытов и событие A появилось 93 раза, т.е. вероятность его появления равна $p^* = \frac{m}{n} = \frac{93}{150} = 0,62$. Зададим $\varepsilon = 0,1$ и вычислим с помощью теоремы Лапласа вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,1\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\ \sqrt{\frac{n}{p^* q^*}}\right),$$

где $p^* = 0,62$ и $q^* = 1 - p^* = 1 - 0,62 = 0,38$.

Таким образом

$$2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{150}{0,62 \cdot 0,38}}\right) = 2\Phi\left(2,52\right) = 2 \cdot 0,4941 = 0,9882.$$

Следовательно, доверительная вероятность равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,1\right) \approx 0,9882.$$

Это значение соответствует вероятности того, что истинная вероятность события A заключена в интервале $(p^* - \varepsilon; p^* + \varepsilon)$, а именно $(0,52; 0,72)$.

В этом примере мы задаём величину ε и находим доверительную вероятность для заданной точности. Используя те же формулы, можно, задавая доверительную вероятность, находить точность оценки.

Если решать эту же задачу, используя неравенство Бернулли, то для доверительной вероятности получим следующую оценку:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}\right| \leqslant 0,1\right) \geqslant 1 - \frac{0,62 \cdot 0,38}{150 \cdot 0,01} = 0,843,$$

т.е. доверительная вероятность не менее $0,843$.

Пример 2: При изготовлении костюмов брак составляет 2%. Вычислить вероятность того, что при осмотре партии из 800 костюмов выявится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 1%.

Решение: Вероятность изготовления костюмов с браком равна $p = 0,02$, заданная точность равна $\varepsilon = 0,01$.

Необходимо оценить вероятность $P\left(\left|\frac{m}{800} - 0,02\right| \leqslant 0,01\right)$, где m – число бракованных костюмов из 800, а $\frac{m}{800}$ – относительная частота появления бракованных костюмов (доля бракованных костюмов).

Используя неравенство Бернулли

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0,02\right| \leqslant 0,01\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

оцениваем требуемую вероятность:

$$1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2} = 1 - \frac{0,02 \cdot 0,98}{800 \cdot 0,01^2} = 1 - 0,245 = 0,755.$$

Ответ: Искомая вероятность не меньше, чем 0,755.

4.5. Система двух случайных величин

Наряду с одномерными случайными величинами в приложениях встречаются случайные величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя и т.д. числами.

Двумерная случайная величина. Закон распределения.

Двумерной называют случайную величину $(X,\ Y)$, возможные значения которой есть пары чисел $(x,\ y)$. Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему двух случайных величин.*

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X,\ Y)$ на плоскости xOy либо как случайный вектор OM.

Дискретной называют двумерную случайную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную случайную величину, составляющие которой непрерывны.

Закон распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан в виде:

а) таблицы:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_k
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{k1}
...	...	...	...	...
y_n	p_{1n}	p_{2n}	...	p_{kn}

б) функции распределения $F(x, y)$.

Определение: Функцией распределения вероятностей (интегральная функция) двумерной дискретной величины называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Определение применимо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Свойства функции распределения:

Свойство 1. Функция распределения удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1.$$

Свойство 2. Функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y), \text{ если } x_1 > x_2,$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

Свойство 3. Имеют место предельные соотношения:

$$F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

Свойство 4. При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

Свойство 5. При $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2$:

$$P(x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2) =$$
$$= [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Плотность совместного распределения вероятностей (двумерная плотность вероятности) для непрерывной случайной величины:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Свойства двумерной плотности вероятности:

Свойство 1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна:

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Свойство 2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единицы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

В частности, если все возможные значения (X, Y) принадлежат конечной области D, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D:

$$P[(X, Y) \subset D] = \iint\limits_D f(x, y) dx dy.$$

Пример 1: Задано распределение вероятностей дискретной случайной величины:

$Y \backslash X$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение: Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений X: $p(3) = 0,27$, $p(10) = 0,43$, $p(12) = 0,30$.

Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p	$0,27$	$0,43$	$0,30$

Контроль: 0,37+0,42+0,30=1.

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдём распределение составляющей Y:

Y	4	5
p	$0,55$	$0,45$

Контроль: 0,55+0,45=1.

Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретных двумерных случайных величин.

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно возможные значения: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_n$.

Условное распределение X при $Y = y_j$ задаётся условными вероятностями:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(x_i\|y_j)$	$P(x_1\|y_j)$	$P(x_1\|y_j)$	$\ldots$	$P(x_n\|y_j)$

Аналогично определяется условное распределение Y при $X = x_i$.

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляются соответственно по формулам:

$$p(x_i|y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Плотности распределения и условные законы распределения составляющих непрерывных двумерных величин.

Плотности распределения составляющих X и Y вычисляются по формулам:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx,$$

где $f(x,y)$ – плотность совместного распределения системы.

Если все возможные значения принадлежат конечному интервалу, то в качестве пределов интегрирования принимают конечные числа.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}.$$

Если условные плотности распределения случайных величин X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы.

Равномерным называют распределение двумерной непрерывной величины (X,Y), если в области, которой принадлежат все возможные значения (x,y), плотность совместного распределения вероятностей сохраняет постоянное значение.

Числовые характеристики непрерывной системы двух случайных величин.

Математическое ожидание составляющих X и Y непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx, \quad M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy.$$

Дисперсия составляющих X и Y непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f_1(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx - [M(X)]^2;$$

$$D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [y - M(Y)]^2 f_2(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(x)\, dx - [M(Y)]^2.$$

Определение: Начальным моментом $\nu_{k,s}$ порядка $k+s$ системы (X, Y) называют математическое ожидание произведения $X^k Y^s$:

$$\nu_{k,s} = M[X^s Y^s].$$

В частности, $\nu_{k,0} = M(X)$, $\nu_{0,1} = M(Y)$.

Определение: Центральным моментом $\mu_{k,s}$ порядка $k+s$ системы (X, Y) называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно k-й и s-й степеней:

$$\mu_{k,s} = M\{[X - M(X)]^k \cdot [Y - M(Y)]^s\}.$$

В частности,

$$\mu_{1,0} = M[X - M(X)] = 0, \quad \mu_{0,1} = M[Y - M(Y)] = 0;$$
$$\mu_{2,0} = M[X - M(X)]^2 = D(X), \quad \mu_{0,2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y).$$

Определение: Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X, Y) называют центральный момент μ_{11} порядка $1+1$:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}.$$

Для непрерывных случайных величин X и Y корреляционный момент может быть найден по формулам:

$$\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]\ [y - M(Y)]\ f(x, y)\, dx\, dy$$

или

$$\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy - M(X) M(Y).$$

Определение: Коэффициентом корреляции X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, причём $|r_{xy}| \leqslant 1$. Коэффициент корреляции служит для оценки линейной связи между X и Y: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Определение: Коррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Определение: Некоррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины зависимы.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Из независимости следует их некоррелированность, но из некоррелированности ещё нельзя сделать вывод о независимости этих величин.

Пример 2: Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат. Доказать, что X и Y зависимы, но некоррелированны.

Решение: Так как непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат, т.е. плотность вероятности в этой области постоянна равна $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi r^2}$. Вычисляя безусловные и условные плотности распределения составляющих X и Y двумерной случайной величины (X, Y), получаем:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\pi r^2} = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2};$$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{dx}{\pi r^2} = \frac{2\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi r^2};$$

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}};$$

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что условные плотности распределения составляющих случайных величин X и Y не равны их безусловным плотностям, следовательно составляющие X и Y зависимы.

Вычислим корреляционный момент величин X и Y, для этого вычислим математические ожидания:

$$M(X) = \int_{-r}^{r} x \cdot \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}\, dx = 0;$$

$$M(Y) = \int_{-r}^{r} y \cdot \frac{2\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi r^2}\, dy = 0.$$

Таким образом, корреляционный момент равен:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy - M(X)M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xy}{\pi r^2}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\,dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy = 0.$$

Таким образом, корреляционный момент составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y) равен нулю, т.е. составляющие X и Y некоррелированны.

4.6. Задачи и упражнения

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0.2	0.4	0.6	0.8	1
P	$0,1$	$0,2$	$0,4$	p_4	$0,1$

   Найти вероятность $p_4 = P(X = 0.8)$. Построить многоугольник распределения.

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	p_1	$0,15$	p_3	$0,25$	$0.,35$

   Найти вероятность $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1?

3. В урне восемь шаров, из них пять красных и три белых. Наудачу отобраны три шара. Составить закон распределения величины X – числа красных шаров среди отобранных.

4. Монета бросается четыре раза. Составить закон распределения величины X – числа выпадения герба.

5. В партии из десяти деталей имеется восемь стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

6. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Построить многоугольник распределения.

7. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

8. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3
P	$0,2$	$0,4$	$0,3$	$0,1$

Найти функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность того, что $P(X<2)$, $P(X\geqslant 1), P(X>3)$, $P(X\leqslant 2)$, $P(X\geqslant 3)$, $P(1\leqslant X<3)$, $P(1<X\leqslant 3)$, $P(1\leqslant X\leqslant 3)$, $P(2<$ $<X<3)$.

9. В урне шесть шаров, из которых четыре белых и два чёрных. Извлекают три шара. Составить ряд распределения случайной величины X – числа появления белых шаров, записать функцию распределения, нарисовать её график. Найти вероятность $P(0,5\leqslant X<2,5)$.

10. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	2	3
P	$0,1$	$0,9$

Y	-1	1	2
P	$0,6$	$0,1$	$0,3$

Составить закон распределения случайной величины $Z = 2X - Y$. Найти математические ожидания и дисперсии величин X, Y и Z, а также $M(3X + 2Y)$, $D(3X + 2Y)$. Убедиться в том, что $M(Z) = 2M(X) - M(Y)$, $D(Z) = 4D(X) + D(Y)$.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	2
P	$0,2$	$0,8$

Y	$0,5$	1
P	$0,3$	$0,7$

Составить закон распределения случайной величины XY. Найти $M(XY)$ и $D(XY)$.

12. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	-4	6	10
P	$0,2$	$0,3$	$0,5$

б)

X	$0,21$	$0,54$	$0,61$
P	$0,1$	$0,5$	$0,4$

13. Задан закон распределения дискретной случайной величины

14. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z, если известны математические ожидания X и Y: а) $Z = X + 2X$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 6$.

15. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_4 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью x_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

16. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X : $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(X) = 0,1$, $M(X^2) = 0,9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

17. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

18. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди отобранных.

19. Является ли представленная функция функцией распределения некоторой случайной величины:

а) $F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{при } x \leqslant 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$,

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \\ \cos x, & \text{при } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$?

20. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключённое в интервале $(1, 2)$, т.е. $P(1 < x < 2)$.

21. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4}, & x \in \left(-1; \dfrac{1}{3}\right] \\ 1, & x > \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключённое в интервале $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

22. Случайная величина X задана на всей оси OX функцией распределения $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\pi}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина примет значение, заключённое в интервале (0;1).

23. Случайная величина X задана на всей оси OX функцией распределения $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. Найти такое значение x_1, зная, что случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1 с вероятностью $\dfrac{1}{4}$.

24. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

    Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\left(\dfrac{\pi}{6} < X < \pi\right)$.

25. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \dfrac{\pi}{6} \\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

    Найти функцию распределения $F(x)$.

26. Плотность распределения вероятностей случайной величины имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \leqslant 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$.

    Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение из интервала $(1; 2)$.

27. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси OX равенством $f(x) = \dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

28. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X внутри интервала $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x) = C\sin 2x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C.

29. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = Cx^2$ при $x \in (0;1)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin (0;1)$. Найти а) параметр C и функцию распределения $F(x)$ б) вероятность того, что в четырёх испытаниях случайная величина X ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $(0,25;\ 0,75)$.

30. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = C(x^2+2x)$ в интервале (0;1), вне этого и $f(x)=0$. Найти а) параметр C; б) вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу $(0,3;\ 0,8]$.

31. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{x}{2}$ в интервале (0;2), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание случайной величины X.

32. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{4}, & 0 < x \leqslant 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

33. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

34. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут:

    а) три повреждённых изделия;
    б) менее трёх поврежденных изделий.

35. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован не правильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

36. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка оказалась разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок:

    а) ровно две;
    б) менее двух;
    в) более двух;
    г) хотя бы одну.

37. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию равна 0,01. Найти вероятности следующих событий:

а) «в течение часа пять абонентов позвонят на станцию»;

б) «в течение часа не более четырёх абонентов позвонят на станцию»;

в) «в течение часа не менее трёх абонентов позвонят на станцию».

38. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2;7]. Записать плотность распределения $p(x)$ этой случайной величины.

39. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [-3;2]. Записать функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

40. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно на интервале (0;1).

41. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

42. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,3;1). Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

43. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x \geqslant 0$ плотностью распределения $f(x) = 0,04 \cdot e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функцией $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (1;2).

44. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a = 3$, среднее квадратичное отклонение равно $\sigma = 2$. Написать плотность распределения величины X.

45. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

46. Случайная величина X распределена по нормальному закону, $M(X) = 30$, $\sigma(X) = 10$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10;50).

47. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключённое в интервале (12;14).

48. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причём $M(X) = 10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если известно $P(10 < X < 20) = 0,3$.

49. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0.1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

50. Применяя теорему Бернулли, оценить, начиная с какого числа n независимых испытаний, имеет место вероятность

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0.1\right) \geqslant 0.97$, если в отдельном испытании $P(A) = 0,8$.

51. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,06$ превысила 0,78, если в отдельном испытании $p = 0,7$?

52. Проведено n испытаний, событие A появилось m раз. Найти вероятность того, что неизвестная вероятность p события A содержится в доверительном интервале $\left(\dfrac{m}{n} - \varepsilon, \dfrac{m}{n} + \varepsilon\right)$.

   а) $n = 300;\ m = 250;\ \varepsilon = 0,07;$
   б) $n = 250;\ m = 32;\ \varepsilon = 0,05;$
   в) $n = 360;\ m = 270;\ \varepsilon = 0,03;$

53. Проведено 100 испытаний, событие A появилось 82 раза. Найти доверительный интервал для вероятности события A при доверительной вероятности $\beta = 0,86$.

54. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X) = 0,01$ и неравенство $P(|X - M(X)| < a) > 0,96$. Найти значение a.

55. Задана функция распределения двумерной случайной величины:
$F(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right],\ y \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x < 0,\ y > 0 \end{cases}$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{6},\ y = \dfrac{\pi}{3}$.

56. Найти функцию распределения системы двух случайных величин, если задана плотность их совместного распределения: $f(x, y) = \dfrac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$.

57. В круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ двумерная плотность совместного распределения равна $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$; вне круга $f(x, y) = 0$. Найти:

    а) постоянный множитель C;

    б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиуса единица с центром в начале координат, если $R = 2$.

58. Задан закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y):

$Y \backslash X$	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0,4$	$0,15$	$0,30$	$0,35$
$y_2 = 0,8$	$0,05$	$0,12$	$0,03$

    Найти:

    а) безусловные законы распределения составляющих;

    б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $Y = Y_1 = 0,4$;

    в) условный закон распределения Y при условии, что $X = X_2 = 5$.

59. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) равна $f(x, y) = C \cdot e^{-x^2-2xy-4y^2}$ Найти:

    а) постоянный множитель C;

    б) плотности распределения составляющих;

    в) условные плотности распределения составляющих.

60. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям. Найти:

    а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности распределения составляющих.

61. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y) = 2\cos x \cos y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти математические ожидания составляющих.

62. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x, y) = \dfrac{sinx \cdot siny}{4}$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти:

    а) математические ожидания и дисперсии составляющих;

    б) корреляционный момент.

63. Доказать, что если X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице.

Глава 5

Элементы математической статистики

5.1. Основные понятия и определения

Основные понятия и определения.

Математическая статистика — это наука, устанавливающая закономерности, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений.

Основным методом статистики является *выборочный метод.*

Выборочной совокупностью или *выборкой* называют совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Генеральной совокупностью N называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Если выборка сформирована по правилам статистики, то ее называют *репрезентативной (представительной).* Такая выборка представляет всю совокупность, правильно отражает ее основные черты.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Например: Из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, объем выборки $n = 100$.

Статистическая информация о результатах наблюдений может быть представлена в различных формах.

Простейшей из них является запись результатов в порядке их появления $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, который называется *простым статистическим рядом* или *выборкой.*

Отдельные значения $x_1,\ x_2,\ ...$, составляющие этот ряд, называют вариантами, количество вариант в ряду n называют *объемом ряда* или *объемом выборки.*

Упорядоченный статистический ряд, в котором варианты располагаются в порядке их возрастания, называют *вариационным рядом.*

Варианты в ряду могут иметь как различные, так и одинаковые, повторяющиеся значения.

Например: Из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз, $x_3 - n_3$ раз, $x_k - n_k$ раз.

Количество наблюдений варианта называют *частотами* n_i, их отношения к объему выборки $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ — *относительными частотами.*

Статистическим распределением выборки (статистическим рядом) называют соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами, представленное в виде таблицы:

а) соответствие между вариантами и их частотами:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_k

,

где $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$ – объем выборки.

б) соответствие между вариантами и их относительными частотами.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	$\ldots$	ω_k

,

где $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n = 1.$

Эмпирической функцией распределения (выборочная функция распределения) называют $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $x_i < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – сумма частот числа вариант, меньших x; n – объем выборки.

Свойства эмпирической функции распределения:

Свойство 1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1].

Свойство 2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

Свойство 3. Если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Пример 1: Игральный кубик бросили 12 раз и записали выпавшие числа в порядке их появления: 3, 4, 5, 6, 6, 6, 5, 1, 4, 6, 1, 4. Составить вариационный ряд, статистическое распределение частот и статистическое распределение относительных частот.

Решение:

а) количество измерений: $n = 12$;

б) вариационный ряд: 1, 1, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6;

в) статистическое распределение частот:

x_i	1	3	4	5	6
n_i	2	1	3	2	4

,

г) статистическое распределение относительных частот:

вычислим относительную частоту появления варианты $x_1 = 1, \omega_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; аналогично вычислим относительные частоты для других значений вариант $\omega_2 = \frac{1}{2}$, $\omega_3 = \frac{1}{4}$, $\omega_4 = \frac{1}{6}$, $\omega_5 = \frac{1}{3}$ и результаты занесем в таблицу:

x_i	1	3	4	5	6
ω_i	1/6	1/2	1/4	1/6	1/3

Пример 2: Имеется N ящиков с приборами — генеральная совокупность, выбрали 10 ящиков — выборочная совокупность. Измеряется количество деталей, пострадавших при транспортировке. По результатам измерений составить статистический ряд частот и относительных частот.

Решение:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	2	1	1	1
ω_i	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1

Графическое представление статистических данных.

Дискретное распределение признака X.

Полигоном частот для данного распределения выборки называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, $\ldots$, $(x_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i.

Полигоном относительных частот для данного распределения выборки называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1;\ \omega_1)$, $(x_2;\ \omega_2)$, $\ldots$, $(x_k;\ \omega_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты ω_i.

Непрерывное распределение признака X.

При непрерывное распредели признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$– плотность частоты.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $\dfrac{n_i}{h}\cdot h = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала. Следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.*

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\dfrac{\omega_i}{h}$ – плотность относительной частоты.

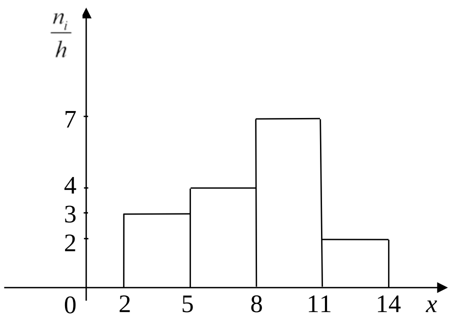
Площадь i-го частичного прямоугольника равна $\dfrac{\omega_i}{h}\cdot h = \omega_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.*

Если число опытов в статистической совокупности увеличивать, то гистограмма будет приближаться к графику плотности распределения случайной величины X.

Пример 3: Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению:

Частичный интервал	$2 < x < 5$	$5 < x < 8$	$8 < x < 11$	$11 < x < 14$
Сумма частот вариант интервала n_i	9	12	21	6

Решение: Длина частичного интервала равна $h = 3$. Вычисляем плотность частоты для интервала $(2;5)$: $\dfrac{n_i}{h} = \dfrac{9}{3} = 3$; аналогично для интервала $(5;8)$: $\dfrac{n_i}{h} = 4$; для интервала $(8;11)$: $\dfrac{n_i}{h} = 7$; для интервала $(11;14)$: $\dfrac{n_i}{h} = 2$. По полученным результатам строим гистограмму:



Числовые характеристики статистического распределения.

Выборочная средняя (математическое ожидание): $\overline{x}_{\text{в}} = m^* = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i, $n = \sum\limits_{i=1}^{k}$ – объем выборки.

Генеральная средняя — это среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности: $\bar{x}_{\text{г}} = M^* = \dfrac{\sum x_i N_i}{N}$.

Выборочная дисперсия: $D^*(X) = \dfrac{(x_i - m^*)^2 n_i}{n}$.

Ошибка репрезентативности (представительности) для среднего значения или *статистическое математическое ожидание:* $M^* - m^*$.

5.2. Элементы теории корреляции

При введении основных понятий статистики постоянно проводились параллели с теорией дискретных случайных величин. Аналогичные параллели имеются у теории корреляции (статистика) и теории систем двух случайных величин (теория вероятностей).

Пусть у нас имеются результаты измерений двух случайных величин, по которым требуется выяснить, как распределена каждая величина в отдельности и как они связаны между собой.

Известно, что для составления простого статистического ряда для одномерной случайной величины X каждому значению x_k нужно сопоставить n_k – число появлений этого значения, или соответствующую частоту $\frac{n_k}{n}$, где n – общее число появлений случайной величины X. Для результатов измерений двух случайных величин в статистическую таблицу необходимо занести значения n_{ij}, соответствующие числу появлений значений (x_i, y_j).

Методы исследования статистических данных, характеризующих систему двух случайных величин, рассмотрим на конкретном примере, который является простой «моделью» того, что может на самом деле встретиться в приложениях. На практике приходится обрабатывать результаты достаточно большого числа измерений, иметь дело с большими числами, сложными вычислениями, но для их выполнения существуют готовые компьютерные программы, а наша задача – понять основные идеи, усвоить применяемые термины.

Пример: Проведём 15 измерений двух случайных величин X и Y. Полученные значения этих величин и частота их появления (n_{ij}) представлены в таблице:

Y \ X	-1	1	2	3	n_y
0	—	—	1	1	2
1	—	2	1	—	3
2	1	3	2	—	6
3	2	2	—	—	4
n_x	3	7	4	1	15

По результатам этой таблицы составим безусловные законы распределения для каждой координаты («покоординатные» статистические ряды для случайных величин X и Y):

X	-1	1	2	3
n_x	3	7	4	1

Y	0	1	2	3
n_y	2	3	6	4

Найдем средние значения для случайных величин X и Y:

$$m_x^* = \frac{-1\cdot 3 + 1\cdot 7 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1}{15} = 1 \text{ и}$$

$$m_y^* = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4}{15} = 1.8.$$

Точка с координатами $(m_x^*;\ m_y^*) = (1;\ 1,8)$ называется *центром рассеивания системы.*

Выясним вопрос о зависимости случайной величины X от случайной величины Y (или, наоборот, Y от X), т.е. о наличии корреляции. Для этого составим таблицу, отражающую связь между значениями случайной величины X и «средними» значениями случайной величины Y при данных случайной величины X (условные средние значения случайной величины Y).

Вычислим условные средние значения случайной величины Y: при $X = -1$, $\bar{y}(X = -1) = \dfrac{2\cdot 1 + 3\cdot 2}{3} = \dfrac{8}{3} \approx 2,7$, аналогично вычисляются $\bar{y}(X = 1) = 2$, $\bar{y}(X = 2) = 1,25$, $\bar{y}(X = 3) = 0$.

Результаты вычислений представлены в таблице:

X	-1	1	2	3
$\bar{y}_i$	$2,7$	2	$1,25$	0

Полученная таблица представляет приближённую зависимость условного среднего значения Y от X.

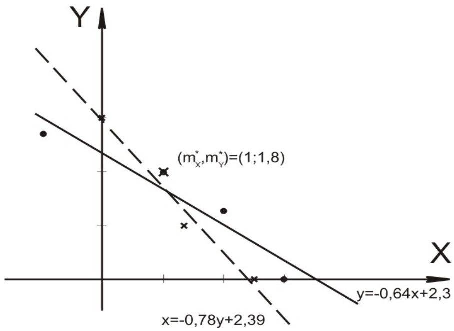
Полученные точки с соответствующими координатами наносим на координатную плоскость и проводим наиболее близкую к ним прямую, которая называется *линией регрессии y по x*: $\bar{y}_x = k_x x + b$. Используя метод наименьших квадратов, можно найти уравнение прямой. Оставляя вычисления читателям, приведём результат: $y = -0,64x + 2,3$.

Аналогично проводятся вычисления для выяснения зависимости «среднего значения случайной величины X» от Y. Таблица, связывающая значения случайной величины Y со «средними» значениями случайной величины X при данных Y, будет иметь вид:

Y	0	1	2	3
$\bar{x}_i$	2.5	1.3	1	0

По данным таблицы строим *линию регрессии x по y* и находим ее уравнение $\bar{x}_y = k_y y + b : x = -0,78y + 2,39$.

Результаты вычислений продемонстрированы на рисунке:



Приведём без доказательства следующие утверждения:

а) точкой пересечения линий регрессии является центр рассеивания;

б) величина угла между линиями регрессии характеризует степень зависимости X и Y: если угол мал, то связь достаточно тесная;

в) коэффициент корреляции равен $r_{xy} = \sqrt{k_x k_y}$, где k_x, k_y — угловые коэффициенты линий регрессии y *по* x и x *по* y соответственно; близость значения коэффициента корреляции к единице говорит о наличии зависимости между X и Y (в рассмотренном примере коэффициент корреляции равен: $r_{xy} = \sqrt{(-0,64)\cdot(-0,78)} \approx \approx 0,7$.

5.3. Понятие о критериях согласия

Одной из задач математической статистики является отыскание закона распределения случайной величины по известным данным выборки или проверка гипотезы о том или ином законе распределения изучаемой случайной величины. Приведём для начала очень простой пример проверки гипотезы *о равномерном распределении случайной величины.*

Бросается игральная кость $n = 600$ раз. Если эта кость «правильная», то в идеале все значения от 1 до 6 должны выпадать равномерно, то есть теоретические частоты $np_i = \dfrac{600}{6} = 100$. На практике получились значения, занесённые в таблицу:

X	1	2	3	4	5	6
np_i	100	100	100	100	100	100
$n*_i$	108	93	94	105	88	112
$n*_i - np_i$	8	-7	-6	5	-12	12

Чтобы оценить значимость полученных отклонений от исходной гипотезы можно применять различные критерии. Самым изученным в теории и удобным для применения является *критерий Пирсона*, который называют ещё «*критерием χ–квадрат*».

Критерий состоит в следующем:

Шаг 1: рассматривают сумму $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(n*_i - np_i)^2}{np_i}$ — эта величина с ростом n приближается к распределению Пирсона с $r = k-1$ степенью свободы, где k – число значений случайной величины (в примере имеем: $n = 600,\ k = 6,\ \chi^2 = 4,62$).

Шаг 2: задают уровень значимости α — это вероятность отвергнуть верную гипотезу; обычно принимают уровень значимости $\alpha = 0,05; 0,01$ и т.п. (в примере положим $\alpha = 0,05$);

Шаг 3: находят по таблицам, составленным для распределения Пирсона, «критическое» значение $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k-1) = \chi^2_{\text{кр}}(0,05, 6-1) = 11,07$, т.к. экспериментальное значение $4,62 < 11,07$, гипотеза о том, что игральная кость «правильная» не отвергается.

Подобное рассуждение можно распространить и на проверку других распределений.

В случае непрерывного распределения сравнивают не частоту принятия отдельных значений, а частоту попадания этих значений в тот или иной интервал. Количество интервалов, как и ранее количество значений, принято обозначать буквой k. Кроме того, если некоторые параметры предполагаемого распределения приходится приближённо находить из экспериментальных данных, то число степеней свободы $r = k-1$ в аргументе χ^2 заменяется на $r = k-1-m$, где m – число параметров, определяемых их опыта.

Пример: Проверим гипотезу о нормальном распределении случайной величины X, для которой известно математическое ожидание $M(X) = m_x = 5$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$ (т.е. из эксперимента они не находятся и число степеней свободы $r = k-1$, где k – число разрядов равное восьми).

Теоретические вероятности p_i находятся, исходя из интегральной теоремы Лапласа, например $p_4 = P(4 \leqslant X < 5) = \Phi\left(\dfrac{5-5}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{4-5}{2}\right) = 0,191$. Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$, находим по таблице критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 7) = 14,07$, и так как значение $5,31 < 14,07$, то гипотезу о нормальном распределении случайной величины принимаем.

Пример 2: Проведем теперь такое же вычисление для случая, когда параметры нормального распределения нам не известны. В этом случае мы заменяем параметр $a = m_x$ на $\bar{x} = 5,195$, а параметр σ на $s = 2,03$ (a, σ – параметры нормального распределения). При этом число степеней свободы уменьшится на 2 (по числу неизвестных параметров).

Имеем $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 7-2) = 11,07$. В силу того, что $3,13 < 11,07$, и в этом случае гипотеза о нормальном законе принимается.

Конечно, не следует слишком серьёзно относиться к результатам такого исследования. Мы только можем сказать (как и всегда при проверке статистических гипотез), что данные не противоречат гипотезе о нормальном законе.

5.4. Задачи и упражнения

1. Выборка дана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0.2	0.1	0.1	0.2	0.4

x_i	1	4	5	8	9
ω_i	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал	$1 < x < 5$	$5 < x < 9$	$9 < x < 13$	$13 < x < 17$	$17 < x < 20$
Сумма частот вариант интервала n_i	10	20	50	12	8

6. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал	$0 < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 6$
Сумма частот вариант интервала n_i	20	30	50

Частичный интервал	$2 < x < 5$	$5 < x < 8$	$8 < x < 11$	$11 < x < 14$
Сумма частот вариант интервала n_i	6	10	4	5

7. Найти выборочные средние для данных распределений выборки:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

8. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	1	2	5	8	9
n_i	3	4	6	4	3

9. В итоге четырёх измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную дисперсию ошибок прибора.

10. В таблице приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Рост	154 – – 158	158 – – 162	162 – – 166	166 – – 170	170 – – 174	174 – – 178	178 – – 182
Число студентов n_i	10	14	26	28	12	8	2

Указание: Найти середины интервала и принять их в качестве вариант.

11. Найти:

   а) безусловные законы распределения составляющих, центр рассеивания системы;

   б) законы распределения условных средних $\bar{y}_x$ в зависимости от X и условных средних $\bar{x}_y$ в зависимости от Y

   Построить линии регрессии y по x и x по y, оценить зависимость между X и Y по данным, приведенным в корреляционной таблице:

Y \ X	-1	1	2
1	1	1	0
3	2	1	2
5	2	2	4

12. Найти:

   а) безусловные законы распределения составляющих, центр рассеивания системы;

   б) законы распределения условных средних $\bar{y}_x$ в зависимости от X и условных средних $\bar{x}_y$ в зависимости от Y

Построить линии регрессии y по x и x по y, оценить зависимость между X и Y по данным, приведенным в корреляционной таблице:

$Y \backslash X$	-2	0	1	2
0	—	1	2	1
1	1	2	2	—
2	2	3	1	—
3	3	2	—	—

13. Используя критерий согласия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении случайной величины X с эмпирическим распределением выборки объёма $n = 300$:

Интервал	$(3;8)$	$(8;13)$	$(13;18)$	$(18;23)$	$(23;28)$	$(28;33)$	$(33;38)$
Частота, n_i	6	8	15	40	16	8	7

14. Используя критерий согласия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении случайной величины X с эмпирическим распределением выборки объёма $n = 300$:

Интервал	$(-20;10)$	$(-10;0)$	$(0;10)$	$(10;20)$	$(20;30)$	$(30;40)$	$(40;50)$
Частота, n_i	20	47	80	89	40	16	8

Приложение

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dx$

X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,238	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$	X	$\Phi(X)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499999
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Приложение 3

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы, k	Уровень значимости, α				
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,150	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,640	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,170	1,240
8	20,1	17,5	15,5	2,730	1,650
9	21,7	19,0	16,9	3,330	2,090
10	23,2	20,5	18,3	3,940	2,560
11	24,7	21,9	19,7	4,570	3,050
12	26,2	23,3	21,0	5,23	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,890	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,570	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,260	5,23

Литература

[1] **Ганичева А.В., Козлов В.П.** Математика для психологов: Учеб. пособие для студентов вузов. / А.В.Ганичева, В.П.Козлов. — М: Аспект Пресс, 2005.

[2] **Шахмейстер А.Х.** Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. / Под ред. Б.Г. Зива. — М.:МЦНМО: СПб.: Петроглиф. Виктория плюс, 2014.

[3] **Виленкин Н.Я.** Рассказы о множествах. / Н.Я.Виленкин. — М.:МЦНМО, 2005.

[4] **Грес П.В.** Математика для гуманитариев. Учебное пособие. / П.В.Грес — М:Логос, 2009.

[5] **Воронов М.В., Мещерякова Г.И.** Математика для гуманитариев. / М.В.Воронов, Г.И.Мещерякова. — М.: Ростов на Дону: 2002.

[6] **Берков В.Ф.** Логика: Задачи и упражнения. Практикум. Учебное пособие. / В.Ф.Берков. — Мн:ТетраСистемс, 2002.

[7] **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика./ В.Е.Гмурман. — М.:Высшая школа, 2014.

[8] **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика./ В.Е.Гмурман. — М.:Высшая школа, 2017.

[9] **Гусак А.А., Бричикова Е.А.** Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач. / А.А.Гусак, Е.А.Бритчикова. — Мн.:Тетрасистемс, 2006.

[10] **Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.** Элементарное введение в теорию вероятностей. / Б.В.Гнеденко, А.Я.Хинчин. — М.:Едиториал URSS. 2012.

[11] **Лунгу К.Н., Макаров Е.В.** Высшая математика. Руководство к решению задач. Часть 2 / К.Н.Лунгу, Е.В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н.В. Калачева, В.А. Сочнева

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебное пособие