УДК 517.983:517.986

ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ В АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $S(\mathscr{M},\tau)$ — *-алгебра τ-измеримых операторов. Получено достаточное условие положительности эрмитова оператора из $S(\mathscr{M},\tau)$ в терминах топологии $t_{\tau l}$ τ-локальной сходимости по мере. Доказано, что *-идеал $\mathscr{F}(\mathscr{M},\tau)$ элементарных операторов $t_{\tau l}$-плотен в $S(\mathscr{M},\tau)$. Если топология t_τ локально выпукла, то $t_{\tau l}$ локально выпукла; если топология $t_{\tau l}$ локально выпукла, то топология $t_{w\tau l}$ слабо τ-локальной сходимости по мере локально выпукла. Предложен метод построения F-нормированных идеальных пространств (далее F-НИП) на $(\mathscr{M},\tau)$, исходя из заданного F-НИП, сохраняющий (при наличии у исходного) полноту, локальную выпуклость, локальную ограниченность, нормируемость. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$ и $A\mathscr{X}\subseteq\mathscr{Y}$ для некоторого оператора $A\in S(\mathscr{M},\tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathscr{X}\subseteq\mathscr{Y}$ естественное вложение $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ непрерывно. Исследованы свойства убывающей последовательности F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, локальная сходимость по мере, локально выпуклое пространство.

Введение

Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$ с $\tau(I)=+\infty$. Эта работа продолжает исследования свойств топологий $t_{\tau l}$ τ-локальной и $t_{w\tau l}$ слабо τ-локальной сходимости по мере на *-алгебре $S(\mathscr{M},\tau)$ τ-измеримых операторов, начатые в [1–10]. Хорошо известно, что топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ лучше согласованы с порядковой структурой эрмитовой части *-алгебры $S(\mathscr{M},\tau)$, чем классическая топология t_τ сходимости по мере [2, 6, 7, 9].

В данной работе установлено одно достаточное условие положительности эрмитова оператора из $S(\mathscr{M},\tau)$ в терминах топологии $t_{\tau l}$ (теорема 1). Поиск таких условий является актуальной задачей и привлекает внимание большого числа исследователей (см., например, [11–13] и библиографию в них). Хорошо известно, что каждый τ-измеримый оператор является линейной комбинацией

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2022–882).

четырех положительных τ-измеримых операторов; для доказательства неравенства треугольника для F-нормированного идеального пространства (далее F-НИП) на $(\mathcal{M}, \tau)$ в силу операторного неравенства [14]

$$|X+Y| \leq U|X|U^* + V|Y|V^*, \quad X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau), \quad |X| = \sqrt{X^*X},$$

$U, V \in \mathcal{M}$ — некоторые подходящие частичные изометрии, достаточно проверить неравенство треугольника для F-нормы только для пар положительных τ-измеримых операторов.

Доказано, что *-идеал $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ элементарных операторов $t_{\tau l}$-плотен в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (теорема 2). Поэтому пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, $t_{\tau l}$-плотно в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (следствие 1). Напомним, что t_τ-замыкания *-идеала $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ и пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, совпадают с *-идеалом $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-компактных операторов.

Если топология t_τ локально выпукла, то $t_{\tau l}$ локально выпукла; если топология $t_{\tau l}$ локально выпукла, то $t_{w\tau l}$ локально выпукла (теорема 3). Предложен метод построения «весовых» F-НИП на $(\mathcal{M}, \tau)$ исходя из заданного F-НИП, сохраняющий (при наличии у исходного) полноту, локальную выпуклость, локальную ограниченность, нормируемость (теорема 4, следствия 4 и 5). «Весовые» F-НИП на абелевой алгебре фон Неймана (тогда $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\tau(f) = \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\, \mu$, где (Ω, Σ, μ) — локализуемое пространство с мерой) естественным образом возникают при исследовании интегральных операторов.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — F-НИП на $(\mathcal{M}, \tau)$ и $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ для некоторого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ естественное вложение $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ непрерывно (теорема 5), что дает новое доказательство (основной) леммы 4.3 из [15]. В теореме 6 исследованы свойства убывающей последовательности F-НИП на $(\mathcal{M}, \tau)$.

Бо́льшая часть результатов являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Проектор $P \in \mathcal{M}$ называется *минимальным* или *атомом*, если $Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $Q \leq P$ влечет $Q = 0$ или $Q = P$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *атомической*, если каждый ненулевой проектор в $\mathcal{M}$ мажорирует ненулевой минимальный проектор.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$ (см. [16, гл. V, § 2]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}_\tau = \{P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} : \tau(P) < \infty\}$.

Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathscr{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $\mathscr{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathscr{M}^{\rm pr}$, что $P\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathscr{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [17, гл. IX]. Для семейства $\mathscr{L} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ обозначим через $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^{\rm h}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathscr{M}, \tau)^{\rm h}$, порожденный собственным конусом $S(\mathscr{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathscr{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$.

В *-алгебре $S(\mathscr{M}, \tau)$ вводится топология t_τ сходимости по мере [17, гл. IX, § 2], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$\mathscr{U}(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \exists Q \in \mathscr{M}^{\rm pr} \ (\|XQ\| \leq \varepsilon \ \text{ и } \ \tau(Q^\perp) \leq \delta)\}, \ \varepsilon > 0, \ \delta > 0.$$

Известно, что $\langle S(\mathscr{M}, \tau), t_\tau\rangle$ является полной метризуемой топологической *-алгеброй, причем $\mathscr{M}$ плотно в $\langle S(\mathscr{M}, \tau), \ t_\tau\rangle$. Для обозначения сходимости сети $\{X_j\}_{j\in J} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ к $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ в топологии t_τ используется запись $X_j \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что $\{X_j\}_{j\in J}$ *сходится к X по мере τ*.

Через $\mu(X, t)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X, \cdot)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(X, t) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathscr{M}^{\rm pr}, \ \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ-компактных операторов $S_0(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \lim\limits_{t\to\infty} \mu(X, t) = 0\}$ является идеалом в $S(\mathscr{M}, \tau)$, множество элементарных операторов $\mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in \mathscr{M} : (\exists s > 0) \ \mu(X, t) = 0 \ \forall t > s\}$ — идеалом в $\mathscr{M}$. Топология t_τ определяется и F-нормой $\rho_\tau(X) = \inf\limits_{t>0} \max\{t, \mu(X, t)\}, \ X \in S(\mathscr{M}, \tau)$.

Лемма 1 [18]. *Пусть $X, Y, X_j \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $j \in J$. Тогда*
(i) $\mu(X, t) = \mu(|X|, t) = \mu(X^*, t)$ *для всех* $t > 0$;
(ii) $\mu(X^*X, t) = \mu(XX^*, t)$ *для всех* $t > 0$;
(iii) *если* $|X| \leq |Y|$, *то* $\mu(X, t) \leq \mu(Y, t)$ *для всех* $t > 0$;
(iv) *если* $X \in \mathscr{M}$, *то* $\lim\limits_{t\to+0} \mu(X, t) = \sup\limits_{t>0} \mu(X, t) = \|X\|$;
(v) $\mu(XY, t + s) \leq \mu(X, t)\mu(Y, s)$ *для всех* $t, s > 0$;
(vi) $\mu(|X|^\alpha, t) = \mu(X, t)^\alpha$ *для всех* $\alpha > 0$ *и* $t > 0$;
(vii) $X_j \xrightarrow{\tau} X \Longleftrightarrow \mu(X_j - X, t) \to 0$ *для каждого* $t > 0$.

Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с $(\mathscr{M}, \tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \mu(X, \cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X, \cdot)\|_p$, $X \in L_p(\mathscr{M}, \tau)$.

2. Топологии сходимости локально по мере на $S(\mathscr{M}, \tau)$

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathscr{M}^{\rm pr}_\tau$ определим множества

$$\mathscr{V}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \exists Q \in \mathscr{M}^{\rm pr} \ (Q \leq P, \ \|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P - Q) \leq \delta)\},$$

$$\mathscr{W}(\varepsilon,\delta,P)=\{X\in S(\mathscr{M},\tau):(\exists Q\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}})\ (Q\le P,\ \|QXQ\|\le\varepsilon \text{ и } \tau(P-Q)\le\delta)\}.$$

Пространство $S(\mathscr{M},\tau)$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ *τ-локальной* (соответственно $t_{w\tau l}$ *слабо τ-локальной*) *сходимости по мере*, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta=\{\mathscr{V}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$ (соответственно $\Theta=\{\mathscr{W}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$). Будем использовать символ $X_i\xrightarrow{\tau l}X$ (соответственно $X_i\xrightarrow{w\tau l}X$) для обозначения $t_{\tau l}$-сходимости (соответственно $t_{w\tau l}$-сходимости). С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [3, 6]), что $X_i\xrightarrow{\tau l}X$ (соответственно $X_i\xrightarrow{w\tau l}X$) тогда и только тогда, когда $X_iP\xrightarrow{\tau}XP$, ср. с [1, с. 114] (соответственно $PX_iP\xrightarrow{\tau}PXP$, ср. с [1, с. 114; 2, с. 746]) для всех $P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Ясно, что $t_{w\tau l}\le t_{\tau l}\le t_\tau$ и $t_{w\tau l}$-сходимость совпадает со сходимостью по мере относительно $\langle S(P\mathscr{M}P)=PS(\mathscr{M},\tau)P,\ t_{\tau(P\cdot P)}\rangle$ для всех $P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ можно определить и в терминах невозрастающих перестановок. Семейство $\widetilde{\Theta}=\{\widetilde{\mathscr{V}}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;\,P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$, где $\widetilde{\mathscr{V}}(\varepsilon,\delta,P)=\{X\in S(\mathscr{M},\tau):\mu(XP,\delta)<\varepsilon\}$, также задает базис окрестностей нуля для $t_{\tau l}$. Если $\tau(I)<\infty$, то $t_\tau=t_{\tau l}=t_{w\tau l}$.

Если $\mathscr{M}=\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$ и $\tau=\mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathscr{M},\tau)$, $S_0(\mathscr{M},\tau)$, $L_p(\mathscr{M},\tau)$ и $\mathscr{F}(\mathscr{M},\tau)$ совпадают с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, с идеалом $\mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H})$ компактных операторов, с идеалом $\mathfrak{S}_p(\mathscr{H})$ Шаттена — фон Неймана и с идеалом $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ конечномерных операторов в $\mathscr{H}$ соответственно. Топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$, $t_{\tau l}$ (соответственно $t_{w\tau l}$) совпадает с топологией сильной (соответственно слабой) операторной сходимости. Имеем $\mu(X,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t)$, $t>0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность s-чисел вполне непрерывного оператора X; χ_A — индикатор множества $A\subset\mathbb{R}$.

Если $\mathscr{M}$ — абелева (т. е. коммутативна), то $\mathscr{M}\simeq L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\tau(f)=\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\,\mu$, где (Ω,Σ,μ) — локализуемое пространство с мерой, алгебра $S(\mathscr{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,μ), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере и $t_{\tau l}$ совпадает с $t_{w\tau l}$ и с известной топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

Теорема 1. *Пусть $X,Y\in S(\mathscr{M},\tau)$, $Y=Y^*$ и $X^n\xrightarrow{\tau l}0$ при $n\to\infty$. Если $X^*YX\le Y$, то $Y\ge 0$.*

Доказательство. Предположение $X^*YX\le Y$ влечет цепочку неравенств

$$Y\ge X^*YX\ge X^{*2}YX^2\ge\dots\ge X^{*n}YX^n\ge\dots.$$

Пусть $Y=Y_+-Y_-$ — разложение Жордана на положительную и отрицательную части с $Y_+Y_-=0$ и $|Y|=Y_++Y_-$. Для произвольного проектора $P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ запишем равенства

$$PX^{*n}YX^nP=PX^{*n}Y_+X^nP-PX^{*n}Y_-X^nP,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для каждого $t>0$ в силу пп. (ii), (vi) и (v) леммы 1 имеем

$$\mu(PX^{*n}Y_+X^nP,t)=\mu(\sqrt{Y_+}X^nP,t)^2 \le\mu(\sqrt{Y_+},t/2)^2\mu(X^nP,t/2)^2\to 0\quad\text{при } n\to\infty.$$

Следовательно, $X^{*n}Y_+X^n \xrightarrow{w\tau l} 0$ при $n \to \infty$ (см. п. (vii) леммы 1). Аналогично получаем $X^{*n}Y_-X^n \xrightarrow{w\tau l} 0$ при $n \to \infty$. В силу $t_{w\tau l}$-непрерывности операции сложения $(A, B) \mapsto A + B$ из $S(\mathscr{M}, \tau) \times S(\mathscr{M}, \tau)$ в $S(\mathscr{M}, \tau)$ имеем $X^{*n}YX^n \xrightarrow{w\tau l} 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $Y \geq 0$. $\square$

Теорема 2. **-Идеал $\mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$ $t_{\tau l}$-плотен в $S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение. Если $(X_j)_{j\in J} \subset \mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$ и $X_j \xrightarrow{\tau l} |X|$, то в силу раздельной $t_{\tau l}$-непрерывности операции умножения [5, теорема 1] имеем $UX_j \xrightarrow{\tau l} U|X| = X$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\forall X \in S(\mathscr{M}, \tau)^+ \, \exists (Y_j)_{j\in J} \subset \mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau) \quad (Y_j \xrightarrow{\tau l} X).$$

Шаг 2. Пусть $X \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $X = Y + Z$ с $Y \in \mathscr{M}^+$ и $Z \in S_0(\mathscr{M}, \tau)^+$ [19]. Если $Z = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ — спектральное представление, то оператор $Z_n = \int\limits_{1/n}^{n} \lambda\, dE_\lambda$ лежит в конусе $\mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)^+$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$Z - Z_n = \int\limits_{[0,1/n)} \lambda\, dE_\lambda + \int\limits_{(n,\infty)} \lambda\, dE_\lambda \equiv Z_{n,1} + Z_{n,2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $\|Z_{n,1}\| \leq \frac{1}{n}$, поэтому $Z_{n,1} \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$. Пусть $s_r(A)$ — проектор на носитель оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$. Имеем $s_r(Z_{n,2}) = E_n^\perp$; по условию τ-измеримости оператора Z и в силу нормальности следа τ получаем, что $\tau\bigl(E_n^\perp\bigr) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Z_{n,2} \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $Z_n \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}} = (P_j)_{j\in J}$, тогда $I = \bigvee\limits_{j\in J} P_j$ в силу полуконечности следа τ. Имеем $Y_j = YP_j \in \mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau)$ для всех $j \in J$. Так как $P_j \xrightarrow{\tau l} I$, для произвольного проектора $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ получаем $Y_jP \xrightarrow{\tau} YP$. Следовательно, $Y_j \xrightarrow{\tau l} Y$ и утверждение теоремы следует из $t_{\tau l}$-непрерывности операции сложения в $S(\mathscr{M}, \tau)$. $\square$

Поскольку $\mathscr{F}(\mathscr{M}, \tau) \subset L_p(\mathscr{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, имеем

Следствие 1. *Каждое из пространств $L_p(\mathscr{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, $t_{\tau l}$-плотно в $S(\mathscr{M}, \tau)$.*

Теорема 3. (i) *Если топология t_τ локально выпукла, то и $t_{\tau l}$ локально выпукла.*

(ii) *Если топология $t_{\tau l}$ локально выпукла, то и $t_{w\tau l}$ локально выпукла.*

Доказательство. (i) Если топология t_τ локально выпукла, то она задается определяющим семейством $(p_j)_{j\in J}$ полунорм на $S(\mathscr{M}, \tau)$ [20, 1.10.1]. Тогда семейство $(p_{j,P})_{j\in J; P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$ полунорм на $S(\mathscr{M}, \tau)$, где $p_{j,P}(X) = p_j(XP)$ для всех $j \in J$, $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ и $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, является определяющим семейством для топологии $t_{\tau l}$.

(ii) Если $t_{\tau l}$ локально выпукла, то она задается определяющим семейством $(q_j)_{j\in J}$ полунорм на $S(\mathscr{M}, \tau)$ [20, 1.10.1]. Тогда семейство $(q_{j,P})_{j\in J; P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$ полунорм на $S(\mathscr{M}, \tau)$, где $q_{j,P}(X) = q_j(PXP)$ для всех $j \in J$, $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ и $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, является определяющим семейством для топологии $t_{w\tau l}$. $\square$

Напомним [19], что следующие условия эквивалентны:
(i) $\mathscr{M} = S(\mathscr{M}, \tau)$;
(ii) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P) \neq 0\} > 0$;
(iii) топология t_τ совпадает с $\|\cdot\|$-топологией на $\mathscr{M}$.
Легко проверить, что при выполнении этих условий $\mathscr{M}$ атомическая.

Следствие 2. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ атомическая с $\inf\{\tau(P) : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P) \neq 0\} = 0$. Если*

$$\exists K > 0 \qquad \sum_{\tau(P)<K,\ P\,-\,\text{атом}} \tau(P) < \infty, \tag{1}$$

то топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ локально выпуклы.

Доказательство. Утверждение вытекает из [21, теорема 3.2] и теоремы 3. $\square$

Следствие 3. *Пусть абелева алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ атомическая и выполнено одно из условий:* (a) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P) \neq 0\} > 0$ *или* (b) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P) \neq 0\} = 0$ *и условие* (1). *Тогда топология $t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ локально выпукла.*

Доказательство вытекает из [21, следствия 3.5] и теоремы 3. $\square$

3. Последовательности F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. $*$-Линеал $\mathscr{X} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$, снабженный F-нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, называется *F-нормированным идеальным пространством* (F-НИП) на $(\mathscr{M}, \tau)$, если
1) $\|A\|_{\mathscr{X}} = \|A^*\|_{\mathscr{X}}$ для всех $A \in \mathscr{X}$;
2) из $A \in \mathscr{X}$, $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $|B| \leq |A|$ следует, что $B \in \mathscr{X}$ и $\|B\|_{\mathscr{X}} \leq \|A\|_{\mathscr{X}}$.
Естественное вложение $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ $t_{w\tau l}$-непрерывно ([22, теорема 1], см. также [15]). Об идеальных пространствах τ-измеримых операторов см. [23, 24] и библиографию в них.

Пример («весовое» F-НИП). Пусть $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$ — F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$. Если $X \in \mathscr{X}$, $T \in \mathscr{M}$ и $\|T\| \leq 1$, то

$$\|TX\|_{\mathscr{X}} \leq \|X\|_{\mathscr{X}}, \quad \|XT\|_{\mathscr{X}} \leq \|X\|_{\mathscr{X}}; \tag{2}$$

для $Y \notin \mathscr{X}$ пишем $\|Y\|_{\mathscr{X}} = +\infty$. Если $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, то для

$$\|X\|_{\mathscr{X}(A)} \equiv \left\| \frac{AX + XA}{2} \right\|_{\mathscr{X}}, \quad X \in \mathscr{X}(A) = \{Y \in S(\mathscr{M}, \tau) : AY + YA \in \mathscr{X}\},$$

имеем

$$\|X^*\|_{\mathscr{X}(A)} = \left\| \frac{AX^* + X^*A}{2} \right\|_{\mathscr{X}} = \left\| \frac{(AX^* + X^*A)^*}{2} \right\|_{\mathscr{X}} = \|X\|_{\mathscr{X}(A)}.$$

Если еще $AZ = ZA$ для всех $Z \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $|X| \leq |Y|$, то $|X| = T|Y|T^*$ для некоторого $T \in \mathscr{M}$ с $\|T\| \leq 1$ [25] и в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \||X|\|_{\mathscr{X}(A)} = \left\| \frac{A|X| + |X|A}{2} \right\|_{\mathscr{X}} &= \|A|X|\|_{\mathscr{X}} = \|AT|Y|T^*\|_{\mathscr{X}} \\ &\leq \|AT|Y|\|_{\mathscr{X}} = \|T|Y|A\|_{\mathscr{X}} \leq \||Y|A\|_{\mathscr{X}} = \||Y|\|_{\mathscr{X}(A)}. \end{aligned}$$

Если вдобавок оператор A обратим в $S(\mathscr{M}, \tau)$ (об обратимости в $S(\mathscr{M}, \tau)$ см. [26, 27]), то $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)} \rangle$ является F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$; если $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ — норма на $\mathscr{X}$, то $\|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}$ — норма на $\mathscr{X}(A)$. Для $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ положим $A^{-1} \cdot \mathscr{U} \equiv \{A^{-1}U : U \in \mathscr{U}\}$. Очевидно, $\mathscr{U}$ выпукло тогда и только тогда, когда $A^{-1} \cdot \mathscr{U}$ выпукло.

Теорема 4. *Пусть оператор* $A \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ *обратим в* $S(\mathscr{M},\tau)$ *и* $AZ = ZA$ *для всех* $Z \in S(\mathscr{M},\tau)$.

(i) F*-НИП* $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}\rangle$ *полно тогда и только тогда, когда* $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}\rangle$ *полно.*

(ii) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *является базисом Шаудера в* F*-НИП* $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $(A^{-1}X_n)_{n=1}^{\infty}$ *является базисом Шаудера в* $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}\rangle$.

(iii) $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ *— окрестность нуля в* F*-НИП* $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $A^{-1}\cdot\mathscr{U}$ *— окрестность нуля в* $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}\rangle$.

(iv) $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ *ограничено в* F*-НИП* $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $A^{-1}\cdot\mathscr{U}$ *ограничено в* $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}\rangle$.

Доказательство. Напомним, что $\mathscr{X}(A) = \{Y \in S(\mathscr{M},\tau) : \mathbf{M}_A Y = AY \in \mathscr{X}\}$, $A, A^{-1} \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ и $AZ = ZA$, $A^{-1}Z = ZA^{-1}$ для всех $Z \in S(\mathscr{M},\tau)$. Заметим, что $(\mathscr{X}(A))(A^{-1}) = \mathscr{X}$ и $\|\cdot\|_{(\mathscr{X}(A))(A^{-1})} = \|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Поэтому нужно установить только достаточность каждого из условий (i)–(iv).

(i) Если $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}(A)$ $\|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)}$-фундаментальна, то

$$\|X_n - X_m\|_{\mathscr{X}(A)} = \|A(X_n - X_m)\|_{\mathscr{X}} \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty,$$

т. е. последовательность $(AX_n)_{n=1}^{\infty}$ $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$-фундаментальна. В силу полноты F-НИП $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}\rangle$ найдется оператор $X \in \mathscr{X}$ такой, что $\|AX_n - X\|_{\mathscr{X}} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\|AX_n - A\cdot A^{-1}X\|_{\mathscr{X}} = \|X_n - A^{-1}X\|_{\mathscr{X}(A)} \to 0$ при $n \to \infty$.

(ii) Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$ — базис Шаудера в $\mathscr{X}$ [28, гл. II, § 5], т. е. для каждого $X \in \mathscr{X}$ существует единственное представление $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$ в виде $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$-сходящегося ряда с $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Если $Y \in \mathscr{X}(A)$, то $AY \in \mathscr{X}$ и по предположению $AY = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$. Поскольку этот ряд $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$-сходится, в силу [22, теорема 1] имеем

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n X_n \xrightarrow{w\tau l} AY \quad \text{при } k \to \infty.$$

Отсюда ввиду раздельной $t_{w\tau l}$-непрерывности операции умножения [5, теорема 1] получаем

$$A^{-1}\sum_{n=1}^{k} \lambda_n X_n = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y \quad \text{при } k \to \infty, \tag{3}$$

т. е. $Y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^{-1} X_n$.

Единственность. Предположим, что оператор $Y \in \mathscr{X}(A)$ допускает два различных представления

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^{-1} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A^{-1} X_n.$$

Тогда по теореме 1 из [22] имеем

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y, \quad \sum_{n=1}^{k} \alpha_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y \quad \text{при } k \to \infty.$$

Отсюда в силу раздельной $t_{w\tau l}$-непрерывности операции умножения [5, теорема 1] получаем (см. (3))

$$AY = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n;$$

противоречие.

(iii) Пусть $\mathscr{U}$ открыто в $\mathscr{X}$, т. е.

$$\forall X \in \mathscr{U}\ \exists \varepsilon = \varepsilon(X) > 0\ \forall Y \in \mathscr{X} \quad (\|X - Y\|_{\mathscr{X}} < \varepsilon \Rightarrow Y \in \mathscr{U}). \tag{4}$$

Нужно доказать, что

$$\forall \widetilde{X} \in A^{-1} \cdot \mathscr{U}\ \exists \widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\widetilde{X}) > 0\ \forall \widetilde{Y} \in \mathscr{X}(A) \quad (\|\widetilde{X} - \widetilde{Y}\|_{\mathscr{X}(A)} < \widetilde{\varepsilon} \Rightarrow \widetilde{Y} \in A^{-1} \cdot \mathscr{U}).$$

Для $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in A^{-1} \cdot \mathscr{U}$ найдутся такие $X, Y \in \mathscr{U}$, что $\widetilde{X} = A^{-1}X$, $\widetilde{Y} = A^{-1}U$; с учетом (4) имеем

$$\|\widetilde{X} - \widetilde{Y}\|_{\mathscr{X}(A)} = \|A(A^{-1}X - A^{-1}Y)\|_{\mathscr{X}} = \|X - Y\|_{\mathscr{X}} < \varepsilon.$$

Можно взять $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

(iv) Множество $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ ограничено в $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности нуля $\mathscr{V}$ найдется такое число $\lambda > 0$, что $\mathscr{U} \subset \lambda \mathscr{V}$. Иначе говоря, $\|\alpha_n X_n\|_{\mathscr{X}} \to 0$ при $n \to \infty$ для всех последовательностей $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{U}$ и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ [29, гл. 1, теорема 1.30]. Покажем, что множество $A^{-1} \cdot \mathscr{U}$ ограничено в $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)} \rangle$. Пусть $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A^{-1} \cdot \mathscr{U}$ произвольна и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда найдется такая последовательность $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{U}$, что $Y_n = A^{-1}X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|\alpha_n Y_n\|_{\mathscr{X}(A)} = \|\alpha_n A^{-1} X_n\|_{\mathscr{X}(A)} = \|\alpha_n A A^{-1} X_n\|_{\mathscr{X}} = \|\alpha_n X_n\|_{\mathscr{X}} \to 0$$

при $n \to \infty$. $\square$

Очевидно, если F-нормированное пространство $\langle \mathscr{E}, \|\cdot\|_{\mathscr{E}} \rangle$ имеет базис Шаудера, то оно сепарабельно. Топологическое векторное пространство, содержащее ограниченную окрестность нуля, называется *локально ограниченным.*

Следствие 4. *F-НИП $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$ локально ограничено (соответственно локально выпукло) тогда и только тогда, когда $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)} \rangle$ локально ограничено* (соответственно локально выпукло).

Следствие 5. *F-НИП $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\langle \mathscr{X}(A), \|\cdot\|_{\mathscr{X}(A)} \rangle$ нормируемо.*

Доказательство. Топологическое векторное пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля [29, гл. 1, теорема 1.39]. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$ и $\langle \mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}} \rangle$ полно, $\mathscr{Z}$ — всюду плотный в $\mathscr{X}$ линеал. Пусть оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такой, что $A\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{Y}$, причем мультипликатор $\mathbf{M}_A : \mathscr{Z} \to \mathscr{Y}$ непрерывен. Пусть $\overline{\mathbf{M}}_A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — продолжение $\mathbf{M}_A$ по непрерывности на все пространство $\mathscr{X}$. Тогда $\overline{\mathbf{M}}_A$ также будет мультипликатором на оператор A.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathscr{X}$, $X_i \in \mathscr{Z}$ и $X_i \to X$ в $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$. Тогда $\mathbf{M}_A X_i = \overline{\mathbf{M}}_A X_i \to \overline{\mathbf{M}}_A X$ в $\langle \mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}} \rangle$. В силу [5, теорема 1] имеем $X_i \xrightarrow{w\tau l}$

X, а также $\mathbf{M}_A X_i \stackrel{w\tau l}{\longrightarrow} \overline{\mathbf{M}}_A X$. Ввиду [22, теорема 1] мультипликатор $\mathbf{M}_A : S(\mathscr{M},\tau) \to S(\mathscr{M},\tau)$ $t_{w\tau l}$-непрерывен. Поэтому $\mathbf{M}_A X_i \stackrel{w\tau l}{\longrightarrow} \mathbf{M}_A X$, тем самым $\overline{\mathbf{M}}_A X = \mathbf{M}_A X = AX$. $\square$

Аналогичный результат верен и для мультипликатора $\mathbf{L}_A X = XA$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$ и $A\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ для некоторого оператора $A \in S(\mathscr{M},\tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ естественное вложение $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ непрерывно.*

Доказательство. Проверим, что график оператора $\mathbf{M}_A$ замкнут. Действительно, если $X_n \to X$ в $\mathscr{X}$ и $AX_n \to Y$ в $\mathscr{Y}$, то $X_n \stackrel{w\tau l}{\longrightarrow} X$ и $AX_n \stackrel{w\tau l}{\longrightarrow} Y$ в силу [22, теорема 1]. Тогда $Y = AX$ ввиду раздельной $t_{w\tau l}$-непрерывности операции умножения [5, теорема 1]. Остается применить теорему о замкнутом графике [29, гл. 2, теорема 2.15]. $\square$

Замечание 1. Топологическое пересечение не более чем счетного семейства F-НИП $\langle \mathscr{X}_n, \|\cdot\|_{\mathscr{X}_n}\rangle$ на $(\mathscr{M},\tau)$ также является F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$ с F-нормой

$$\|X\|_{\mathscr{X}} = \sum_{n\ge1} 2^{-n}\frac{\|X\|_{\mathscr{X}_n}}{1+\|X\|_{\mathscr{X}_n}}.$$

Напомним, что $\mathscr{X} = \bigcap\limits_{n\ge1} \mathscr{X}_n$; проективная (или инициальная) топология (см. [30, с. 35]), индуцируемая вложениями $\mathscr{X} \subset \mathscr{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$, будет линейной топологией, базис окрестностей нуля которой образуют множества вида $\mathscr{U}_{n_1} \cap \dots \cap \mathscr{U}_{n_m} \cap \mathscr{X}$, где $\mathscr{U}_n$ — окрестность нуля в $\mathscr{X}_n$. Пространство $\mathscr{X}$, наделенное этой топологией, называется *топологическим пересечением пространств $\mathscr{X}_n$*.

Теорема 6. *Пусть $(\mathscr{X}_n)_{n\ge1}$ — убывающая последовательность F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$ таких, что пространство $\mathscr{X} = \bigcap\limits_{n\ge1} \mathscr{X}_n$ плотно в каждом $\mathscr{X}_n$, $\mathscr{Y}$ — некоторое локально ограниченное F-НИП на $(\mathscr{M},\tau)$ и $A \in S(\mathscr{M},\tau)$. Тогда $A\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ в том и только в том случае, когда $A\mathscr{X}_n \subseteq \mathscr{Y}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $A\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$. Из теоремы 5 и замечания 1 вытекает, что мультипликатор $\mathbf{M}_A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывен. Пусть $\mathscr{V}$ — ограниченная окрестность нуля в $\mathscr{Y}$. Существует набор окрестностей нуля $(\mathscr{U}_k(\subset \mathscr{X}_k))_{k=1}^n$ такой, что $\mathbf{M}_A(\mathscr{X} \cap \mathscr{U}_1 \cap \dots \cap \mathscr{U}_n) \subseteq \mathscr{V}$. Из непрерывности вложений $\mathscr{X}_n \subset \mathscr{X}_k$, $k = 1,\dots,n$, следует, что существуют такие окрестности нуля $\mathscr{W}_k$ в $\mathscr{X}_k$, что $\mathscr{W}_k \subset \mathscr{U}_k$, $k = 1,\dots,n$. Полагая $\mathscr{U} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathscr{W}_k$, получаем окрестность нуля в $\mathscr{X}_n$, для которой $\mathbf{M}_A(\mathscr{U} \cap \mathscr{X}) \subseteq \mathscr{V}$. Ограниченность окрестности $\mathscr{V}$ эквивалентна тому, что система ее растяжений $\varepsilon\mathscr{V}$ $(\varepsilon > 0)$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathscr{Y}$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\mathbf{M}_A(\varepsilon\mathscr{U} \cap \mathscr{X}) \subseteq \varepsilon\mathscr{V}$, отображение $\mathbf{M}_A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно относительно топологии на $\mathscr{X}$, индуцируемой из $\mathscr{X}_n$. Продолжим это отображение по непрерывности до некоторого отображения из $\mathscr{X}_n$ в $\mathscr{Y}$. В силу леммы 2 продолженное отображение также будет мультипликатором на A, следовательно, $A\mathscr{X}_n \subseteq \mathscr{Y}$. $\square$

Следствие 6. *Пусть $(\mathscr{X}_n)_{n\ge1}$, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ такие же, как в теореме 6. Тогда $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y} \iff \mathscr{X}_n \subseteq \mathscr{Y}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Применить теорему 6 к оператору $A = I$. $\square$

Прошу ссылку в [20] дать на раздел, а не на страницу!!!

Теорема 7 (ср. с [20, с. 608?]). *Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}_1, \dots, \mathscr{Y}_n, \dots$ — произвольная последовательность F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$, причем $\langle \mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}} \rangle$ полно. Тогда $\mathscr{X} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{Y}_n$ в том и только в том случае, когда $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}_n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.* **?!**

Доказательство. Для $\mathscr{X}_n = \mathscr{X} \cap \mathscr{Y}_n$ имеем $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{X}_n$. Из теоремы Бэра о категории следует, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathscr{X}_n$ является множеством второй категории в $\mathscr{X}$. Пространство $\mathscr{X}_n$, рассматриваемое как топологическое пересечение пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}_n$, является F-НИП на $(\mathscr{M}, \tau)$, причем вложение $\mathscr{X}_n \subset \mathscr{X}$ непрерывно. Из теоремы Банаха [31, гл. III, теорема 3] имеем $\mathscr{X}_n = \mathscr{X}$, т. е. $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}_n$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.
2. *Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Pagter de B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.
3. *Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е.* Выпуклые множества в некоммутативных L^1-пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере // Изв. вузов. Математика. 1998. № 8. С. 48–55.
4. *Скворцова Г. Ш.* О слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства интегрируемых операторов // Изв. вузов. Математика. 2002. № 9. С. 71–74.
5. *Bikchentaev A. M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.
6. *Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Sukochev F. A., Tikhonov O. Ye.* A non-commutative Yosida-Hewitt theorem and convex sets of measurable operators closed locally in measure // Positivity. 2005. V. 9, N 3. P. 457–484.
7. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 41–54.
8. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 783–786.
9. *Bikchentaev A., Sukochev F.* When weak and local measure convergence implies norm convergence // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1414–1431.
10. *Бикчентаев А. М.* Сходимость по мере и τ-компактность τ-измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2020. № 5. С. 89–93.
11. *Cordero E., de Gosson M., Nicola F.* On the positivity of trace class operators // Adv. Theor. Math. Phys. 2020. V. 23, N 8. P. 2061–2091.
12. *Moslehian M. S., Kian M., Xu Q.* Positivity of 2×2 block matrices of operators // Banach J. Math. Anal. 2019. V. 13, N 3. P. 726–743.
13. *Бикчентаев А. М.* Обратимость операторов в гильбертовом пространстве и идеалы в C^*-алгебрах // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 3. С. 350–359.
14. *Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K.* Triangle inequalities in operator algebras // Linear Multilinear Algebra. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.
15. *Бер А. Ф., Левитина Г. Б., Чилин В. И.* Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов // Мат. тр. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–18.
16. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.
17. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and non-commutative geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.
18. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
19. *Stroh A., West G. P.* τ-Compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993. V. 93, N 1. P. 73–86.

20. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
21. *Conradie J., Crowther Ch.* The algebra of τ-measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications . Basel: Birkhäuser Verl., 2010. P. 103–119. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).
22. *Бикчентаев А. М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
23. *Бикчентаев А. М.* Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 309–320.
24. *Бикчентаев А. М.* Перенормировки идеальных пространств измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Уфим. мат. журн. 2019. Т. 11, № 3. С. 3–9.
25. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. V. 74, N 2. P. 257–268.
26. *Tembo I. D.* Invertibility in the algebra of τ-measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 2010. P. 245–256. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).
27. *Бикчентаев А. М.* Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282.
28. *Rolewicz S.* Metric linear spaces. Second ed. Warsaw: D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, 1984. PWN – Polish Sci. Publ.).
29. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
30. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
31. *Банах С.* Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Поступила в редакцию 29 марта 2022 г.
После доработки 28 октября 2022 г.
Принята к публикации 7 ноября 2022 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID ?) **?!**
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`