Анализ-III. Курс функционального анализа

Лапин А.В. (Казанский федеральный университет)

Содержание

§1 Метрические пространства

1.1 Основные понятия метрических пространств

1.1.1. Метрика, последовательности, топология

Определение 1. *(***Метрика и метрическое пространство***)*

1. *Пусть X – некоторое множество и пусть каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее для всех элементов $x, y, z \in X$ следующим условиям:*

$$\begin{array}{lcr} 1) & \rho(x,y) \geqslant 0 \text{ и } \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y; & \\ 2) & \rho(x,y) = \rho(y,x) & \text{(аксиома симметрии)}; \\ 3) & \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) & \text{(аксиома треугольника)}. \end{array} \qquad (1)$$

   Число $\rho(x,y)$ называется расстоянием между элементами x и y, функция $\rho(.,.)$, заданная на $X \times X$, называется метрикой. Непустое множество X, в котором задана метрика – метрическое пространство (X, ρ).

2. *Если $X_1 \subset X$, то (X_1, ρ) называется подпространством метрического пространства (X, ρ).*

Определение 2. *(***Ограниченные, сходящиеся и фундаментальные последовательности***)*

1. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ элементов пространства X называется ограниченной, если существует элемент $a \in X$ и число $R > 0$ такие, что $\rho(x_n, a) \leqslant R$.*

2. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется сходящейся, если существует элемент $x \in X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Элемент x – предел последовательности $\{x_n\}$.*

   Мы используем далее обозначения $x = \lim x_n$ и $x_n \to x$.

3. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$.*

4. *Пусть $\{x_n\}$ – последовательность в X и $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ – подпоследовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$, составленная из элементов $\{x_n\}$, называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$: $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.*

Лемма 1. *(***Основные свойства сходящихся последовательностей***)*

1. *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

3. *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

4. *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

5. *Если последовательность фундаментальна в X и какая-либо ее подпоследовательность сходится, то и вся последовательность сходится к тому же пределу.*

6. *Метрика является непрерывной функцией своих аргументов:*

$$\text{если } x = \lim x_n,\ y = \lim y_n,\ \text{ то } \rho(x,y) = \lim \rho(x_n, y_n).$$

Доказательство.

1. Допустим, что $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Тогда $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y)$ и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\rho(x,y) = 0$, поэтому $x = y$.

2. Пусть $x_n \to x$. Найдем номер N такой, что $\rho(x_n,x) \leqslant 1$ при $n > N$ и положим $R = \max\{\rho(x_1,x),\ldots,\rho(x_N,x),1\}$. Выберем точку $a = x$ в определении ограниченности $\{x_n\}$, тогда $\rho(x_n,x) \leqslant R$ для всех n.

3. Если $x_n \to x$, то $\rho(x_n,x_m) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x,x_m) \to 0$ при $n,m \to \infty$.

4. Пусть $x = \lim x_n$ и $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$. Поскольку числовая последовательность $\{\rho(x_n,x)\}$ стремится к нулю, то и ее подпоследовательность $\{\rho(x_{n_k},x)\}$ стремится к нулю.

5. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна в X и $x = \lim x_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $n(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho(x_{n_k},x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \rho(x_{n_k},x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n,n_k \geqslant n(\varepsilon).$$

Тогда $\rho(x_n,x) \leqslant \rho(x_n,x_{n_k}) + \rho(x_{n_k},x) < \varepsilon$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$, т.е. $x = \lim x_n$.

6. Докажем неравенство

$$|\rho(x',y') - \rho(x,y)| \leqslant \rho(x',x) + \rho(y',y). \tag{2}$$

Воспользовавшись несколько раз неравенством треугольника, получим:

$$\rho(x',y') - \rho(x,y) \leqslant \rho(x',x) + \rho(x,y') - \rho(x,y) \leqslant \rho(x',x) + \\ + \rho(x,y) + \rho(y,y') - \rho(x,y) = \rho(x',x) + \rho(y,y').$$

Поменяв местами x,y и x',y', приходим к неравенству противоположного знака, откуда следует (2). Остается применить это неравенство к парам x_n,y_n и x,y:

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| \leqslant \rho(x_n,x) + \rho(y_n,y) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

□

Определение 3. *(***Открытые и замкнутые множества***)*

1. *Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$ в метрическом пространстве $X = (X,\rho)$ называется множество $B(a,r) = \{x \in X : \rho(a,x) < r\}$.*

2. *Точка $x \in A$ множества $A \subset X$ называется его внутренней точкой, если существует открытый шар $B(x,r) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначатся $\mathrm{int}A$.*

3. *Множество A называется открытым, если $\mathrm{int}A = A$.*

4. *Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если любая ее окрестность $B(a,r) = \{x \in X : \rho(a,x) < r\}, r > 0$, содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от a:*
$$B(a,r) \cap (A \setminus a) \neq \emptyset \ \forall r > 0. \tag{3}$$

5. *Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

6. *Любое открытое множество $B \subset X$, содержащее точку $a \in X$ называется окрестностью a. В большинстве случаев в качестве окрестности точки a мы будем рассматривать открытый шар $B(a,r) = \{x \in X : \rho(a,x) < r\}$.*

Лемма 2. *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда замкнуто его дополнение $X \setminus A$.*

Доказательство. Пусть A открыто. Допустим, что множество $X \setminus A$ не замкнуто. Это означает, что у него существует предельная точка $a \notin X \setminus A$, а, значит, принадлежащая A. Тогда a должна быть внутренней точкой открытого множества A. Но по определению предельной точки множества $X \setminus A$ шар $B(a, r)$ при любом $r > 0$ имеет непустое пересечение с $X \setminus A$, т.е не может полностью входить в A, так что точка a не входит в A. Получено противоречие.

Пусть теперь множество $X \setminus A$ замкнуто. Возьмем произвольную точку $a \in A$ и докажем, что она внутренняя, т.е. найдется шар $B(a, r) \subset A$. Допустим, что это не так, тогда пересечение шара $B(a, r)$ любого радиуса $r > 0$ с множеством $(X \setminus A) \setminus \{a\}$ не пусто. Но это означает, что a – предельная точка множества $X \setminus A$, ему не принадлежащая. Снова получено противоречие. □

По определению пустое множество $\emptyset$ является одновременно открытым и замкнутым, поэтому из доказанной леммы следует, что все пространство X является одновременно открытым и замкнутым множеством.

Лемма 3. *Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.*

Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

Доказательство. Доказательство сформулированных утверждений опирается на определения открытого и замкнутого множеств и известный принцип дополнительности в теории множеств:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_\alpha), \quad X \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_\alpha).$$

□

Лемма 4. *Для того, чтобы $a \in X$ была предельной точкой множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \,\forall n$, сходящаяся к a.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a – предельная точка в смысле определения (3). Тогда для любого n множество $B(a, 1/n) \cap (A \setminus a)$ не пусто. Выбрав из него точку x_n, получим последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \,\forall n$, сходящуюся к a.

Достаточность. Пусть теперь существует последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \,\forall n$, сходящаяся к a. Для произвольного $r > 0$ найдётся номер n_1 такой, что $\rho(x_{n_1}, a) < r$, т.е. $x_{n_1} \in B(a, r) \cap (A \setminus a)$. □

Точки множества A, которые не являются предельными для A, называются изолированными. Объединение A и всех его предельных точек образует замыкание $\overline{A}$ множества A.

1.1.2. Сепарабельность и полнота

Определение 4. *(***Плотные множества и сепарабельные пространства***)*

1. *Пусть множества A, B принадлежат метрическому пространству (X, ρ). Множество A называется плотным в множестве B, если $B \subset \overline{A}$.*

   В том случае, когда $\overline{A} = X$ множество A называют всюду плотным в пространстве X.

2. *Пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.*

Ясно, что эквивалентными определениями всюду плотного в (X, ρ) множества A являются следующие:

1. Для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $a \in A$ такой, что $\rho(x, a) < \varepsilon$.

2. Для любого элемента $x \in X$ существует последовательность $\{x_n\} \in A$, сходящаяся к x.

Определение 5. (**Полные пространства**) *Метрическое пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.*

Если (X, ρ) – полное пространство и $X_1 \subset X$ – замкнутое множество, то (X_1, ρ) является полным пространством. Доказательство следует из определений полноты пространства и замкнутости множества .

Теорема 1. (**Принцип вложенных шаров**)

Пусть в полном метрическом пространстве (X, ρ) задана последовательность вложенных, замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

$$\bar{B}(a_{k+1}, r_{k+1}) \subset \bar{B}(a_k, r_k)\ \forall k,\ r_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда существует единственная точка $a \in \bigcap\limits_k \bar{B}(a_k, r_k)$.

Обратно, если в метрическом пространстве (X, ρ) любая последовательность вложенных, замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение, то это пространство полное.

Доказательство. Необходимость.

Последовательность центров шаров $\{a_k\}$ фундаментальна, так как при $m > k$ справедливо $a_m \in \bar{B}(a_m, r_m) \subset \bar{B}(a_k, r_k)$, т.е. $\rho(a_m, a_k) \leqslant r_k$. В силу полноты пространства (X, ρ) существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \in X$. Зафиксируем произвольное k. При $m > k$ справедливо включение $a_m \in \bar{B}(a_k, r_k)$, а из свойства замкнутости шара следует, что и предельная точка $a \in \bar{B}(a_k, r_k)$. В силу произвольности k имеем $a \in \bigcap\limits_k \bar{B}(a_k, r_k)$.

Докажем единственность точки a. Допустим, что существует еще одна точка $b \in \bigcap\limits_k \bar{B}(a_k, r_k)$. Тогда при любом k справедливо неравенство $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, a_k) + \rho(a_k, b) \leqslant r_k \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $\rho(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$.

Достаточность.

Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ и докажем, что она имеет предел. Возьмем подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ такую, что

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

и шары $\bar{B}_k = \bar{B}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Из неравенств $\rho(x, x_{n_k}) \leqslant \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$ следует, что $\bar{B}_{k+1} \subset \bar{B}_k$. Кроме того, очевидно, что радиусы шаров стремятся к нулю. По условию теоремы последовательность шаров $\bar{B}_k$ имеет общую точку $a \in \bigcap\limits_k \bar{B}_k$.

Поскольку a и x_{n_k} принадлежат $\bar{B}_k$, то $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$, т.е. точка a является пределом подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. В силу леммы 1, п.5, и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к a. □

Замечание 1. *Обозначим через*

$$\text{diam}A = \sup_{x,y\in A} \rho(x, y)$$

диаметр множества A в метрическом пространстве (X, ρ). Справедлива следующая теорема Кантора, являющаяся обобщением теоремы 1:

Теорема 2. *Метрическое пространство (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда любая последовательность непустых, вложенных и замкнутых множеств $A_a \supset A_2 \supset \cdots$, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение в X.*

1.1.3. Изометрия и пополнение

Определение 6. *(***Изометрия пространств***)*

Метрические пространства (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) называются изометричными, если существует биективное (взаимно однозначное) отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что

$$\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)\ \forall x, y \in X_1.$$

Отображение f называется изометрией.

Ясно, что все метрические соотношения в одном из изометричных пространств имеют место и в другом, поэтому различие между такими пространствами состоят лишь в конкретной природе элементов, но не в существенных свойствах пространств. Это обстоятельство служит основанием для отождествления изометричных пространств.

Определение 7. *(***Пополнение метрических пространств***)*

Метрическое пространство (X, ρ) называется пополнением метрического пространства (X_0, ρ_0), если

1. *пространство (X, ρ) – полное;*
2. *существует всюду плотное в X подмножество $\tilde{X}$ такое, что пространства (X_0, ρ_0) и $(\tilde{X}, \rho)$ изометричны.*

Пополнение (X, ρ) является в определенном смысле минимальным полным пространством, содержащим (X_0, ρ_0).

Теорема 3. *(***Теорема о пополнении***)*

Всякое метрическое пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрии.

Доказательство. Существование пополнения.

1) Пусть (X_0, ρ_0) – некоторое метрическое пространство. Разобьем все фундаментальные последовательности в этом пространстве на классы эквивалентности. Именно, назовем фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ эквивалентными (будем писать $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$), если $\rho(x_n, \tilde{x}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В один класс отнесем все эквивалентные между собой фундаментальные последовательности. Ясно, что если две фундаментальные последовательности эквивалентны третьей, то они эквивалентны между собой, поэтому одна и та же последовательность не может принадлежать разным классам. Отметим также, что если какой-то класс содержит сходящуюся последовательность, то и все фундаментальные последовательности из этого класса сходятся к тому же пределу. Действительно, если $x_n \to x$ и $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$, то

$$\rho(\tilde{x}_n, x) \leqslant \rho(\tilde{x}_n, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Множество всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей обозначим через X. Элементы X будем обозначать греческими буквами ξ, η, ζ.

Определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ следующим образом: пусть ξ, η – два элемента X и $\{x_k\} \in \xi$, $\{y_k\} \in \eta$ выбраны произвольным образом, тогда

$$\rho(\xi, \eta) = \lim_{k \to \infty} \rho_0(x_k, y_k). \tag{4}$$

Для обоснования корректности определения (4) следует доказать существование предела и его независимость от выбора последовательностей $\{x_k\} \in \xi$, $\{y_k\} \in \eta$. Воспользовавшись неравенством (2), получим

$$|\rho_0(x_k, y_k) - \rho_0(x_m, y_m)| \leqslant \rho_0(x_k, x_m) + \rho_0(y_k, y_m) \to 0 \text{ при } k, m \to \infty,$$

т.е. числовая последовательность $\{\rho_0(x_k, y_k)\}$ фундаментальна, а значит и сходится. Пусть теперь $\{x'_k\} \in \xi$, $\{y'_k\} \in \eta$ - две другие последовательности. Воспользовавшись в очередной раз неравенством (2), получим

$$|\rho_0(x_k, y_k) - \rho_0(x'_k, y'_k)| \leqslant \rho_0(x_k, x'_k) + \rho_0(y_k, y'_k) \to 0 \text{ при } k, k' \to \infty,$$

поэтому числовые последовательности $\{\rho_0(x_k, y_k)\}$ и $\{\rho_0(x'_k, y'_k)\}$ имеют один и тот же предел.

Докажем теперь, что функция ρ, определенная в (4) является в действительности метрикой в пространстве X. При доказательстве первой аксиомы метрики нужно доказать, что из равенства $\rho(\xi, \eta) = 0$ следует $\xi = \eta$. Сохранив прежние обозначения, мы видим, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_0(x_k, y_k) = 0$, т.е. последовательности эквивалентны, а тогда классы ξ и η совпадают. Условие симметрии выполняется очевидно. Неравенство треугольника $\rho(\xi, \eta) \leqslant \rho(\xi, \zeta) + \rho(\zeta, \eta)$ получается предельным переходом из неравенства

$$\rho_0(x_k, y_k) \leqslant \rho_0(x_k, z_k) + \rho_0(z_k, y_k),$$

где $\{x_k\} \in \xi$, $\{y_k\} \in \eta$ и $\{z_k\} \in \zeta$.

Итак, множество X классов эквивалентных фундаментальных последовательностей в пространстве X_0, оснащенное метрикой (4), является метрическим пространством.

2) Докажем, что построенное пространство (X, ρ) является пополнением (X_0, ρ_0).

Сначала покажем, что (X_0, ρ_0) изометрично $(\tilde{X}, \rho)$ с некоторым подмножеством $\tilde{X}$, плотным в X. Для произвольного элемента $x \in X_0$ обозначим через $\xi_x \in X$ класс последовательностей, эквивалентных стационарной последовательности $(x, x, \ldots, x, \ldots\}$, или, иначе говоря, класс последовательностей, сходящихся к x. Очевидно, что равенство $\xi_x = \xi_y$ равносильно равенству $x = y$. Далее, поскольку в определении $\rho(\xi_x, \xi_y) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_0(x_n, y_n)$ можно брать любые последовательности $x_n \in \xi_x$ и $y_n \in \xi_y$, то возьмем стационарные последовательности $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ и $(y, y, \ldots, y, \ldots)$. Тогда сразу получим равенство $\rho(\xi_x, \xi_y) = \rho_0(x, y)$. Таким образом, (X_0, ρ_0) изометрично подпространству $(\tilde{X}, \rho)$, где каждый элемент подмножества $\tilde{X}$ – это класс ξ_x сходящихся к $x \in X_0$ последовательностей.

Множество $\tilde{X}$ плотно в X: если $\xi \in X$, то взяв какую-либо фундаментальную последовательность $\{x_n\} \in \xi$, определяющую класс ξ, получим $\xi_{x_n} \in \tilde{X} : \xi_{x_n} \to \xi$ в X. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon)$ такой, что $\rho_0(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geqslant n(\varepsilon)$, поэтому

$$\rho(\xi_{x_n}, \xi) = \lim_{m\to\infty} \rho_0(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon). \tag{5}$$

Докажем полноту (X, ρ). Пусть $\{\xi_n\} \in X$ – фундаментальная последовательность. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Воспользовавшись (5), для каждого n найдем $\{x_n\} \in \xi_n$ так, что $\rho(\xi_{x_n}, \xi_n) < \varepsilon_n$. Тогда

$$\rho_0(x_n, x_m) = \rho(\xi_{x_n}, \xi_{x_m}) \leqslant \rho(\xi_{x_n}, \xi_n) + \rho(\xi_n, \xi_m) + \rho(\xi_m, \xi_{x_m}) <$$

$$< \varepsilon_n + \varepsilon_m + \rho(\xi_n, \xi_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Доказанное неравенство означает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X_0, поэтому определяет некоторый класс $\xi \in X$ и $\rho(\xi_{x_n}, \xi) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\rho(\xi_n, \xi) \leqslant \rho(\xi_n, \xi_{x_n}) + \rho(\xi_{x_n}, \xi) < \varepsilon_n + \rho(\xi_{x_n}, \xi) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. последовательность $\{\xi_n\} \in X$ сходится к $\xi \in X$.

Единственность пополнения.

Пусть (Y, ρ_y) – еще одно пополнение пространства (X_0, ρ_0). Докажем, что оно изометрично (X, ρ). Элементы Y будем обозначать $\tilde{x}, \tilde{y}, \ldots$.

Возьмем произвольный элемент $\tilde{x} \in Y$. Он является пределом последовательности из подмножества, изометричного X_0, пусть в X_0 этой последовательности соответствует последовательность $\{x_k\}$. Тогда $\{x_k\}$ фундаментальна и определяет единственный класс $\xi \in X$. Обратно, пусть $\eta \in X$ и $\{y_k\}$ –какая-либо фундаментальная последовательность из X_0, определяющая класс η. Изометричная ей последовательность в (Y, ρ_y) фундаментальна в полном пространстве, поэтому имеет единственный предел $\tilde{y} \in Y$. Итак, установлено взаимно-однозначное соответствие между X и Y. Осталось доказать его изометричность. Но она следует из равенств

$$\rho(\xi, \eta) = \lim_{n \to \infty} \rho_0(x_n, y_n) = \rho_y(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

□

1.2 Компактные множества

Определение 8. *(***Ограниченные и компактные множества** *)*
Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Множество $K \subset X$

1. *ограничено, если существует шар $B(a, r) \subset X$ с центром в некоторой точке $a \in X$ и конечного радиуса $r > 0$, содержащий K;*
2. *предкомпактно (относительно компактно), если любая последовательность $\{x_n\} \subset K$ содержит сходящуюся подпоследовательность;*
3. *компактно, если любая последовательность $\{x_n\} \subset K$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из K.*

Ясно из определений, что множество компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто. Компактное метрическое пространство называется компактом.

Из курса классического анализа известно, что в $\mathbb{R}^n$ компактность множества равносильна его ограниченности и замкнутости, соответственно, предкомпактность равносильна ограниченности множества. В бесконечномерных функциональных пространствах ограниченности множества недостаточно для его предкомпактности. Критерий компактности в произвольном метрическом пространстве дает доказанная ниже теорема Хаусдорфа. Прежде, чем ее формулировать, дадим определение ε-сети для множества метрического пространства.

Определение 9. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Множество $A_\varepsilon \subset X$ называется ε-сетью для множества $B \subset X$, если для любого элемента $x \in B$ найдется $y \in A_\varepsilon$ такой, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Теорема 4. *(***теорема Хаусдорфа***)*
Для предкомпактности $K \subset X$ необходимо, а в случае полноты пространства X и достаточно, чтобы у множества K для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть (т.е.состоящая из конечного числа элементов).

Доказательство. Необходимость
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольный элемент $x_1 \in K$. Если $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ для любого $x \in K$, то конечная (из одной точки) ε-сеть уже построена. Иначе существует точка $x_2 \in K$ такая, что $\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$. Если теперь x_1, x_2 образуют ε-сеть для K, то утверждение доказано. Иначе существует точка $x_3 \in K$: $\rho(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon$ и $\rho(x_3, x_2) \geqslant \varepsilon$. Продолжая этот процесс, мы либо построим конечную ε-сеть для K, либо последовательность $\{x_i\} \subset K$, для которой справедливы неравенства $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$

для всех $i \neq j$. Но из такой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит предкомпактности K.

Достаточность

Пусть $\{x_n\} \subset K$ – произвольная последовательность. Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$. Для каждого ε_k существует конечная сеть для множества K. Возьмем ε_1-сеть и опишем около каждой из точек этой сети шар радиуса ε_1. Каждая точка последовательности $\{x_n\}$ попадет по крайней мере в один из этих шаров. А поскольку шаров – конечное число, то найдется шар, содержащий бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Теперь опишем около каждой из точек ε_2-сети шар радиуса ε_2. Найдется шар, содержащий подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$. Продолжая этот процесс, построим подпоследовательности $\{x_n^{(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$, такие что $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$ для всех k. Применим процедуру диагонального выбора и построим последовательность $\{x_n^{(n)}\} \subset \{x_n\}$. По построению последовательность $\{x_n^{(n)}\} \subset \{x_n^{(k)}\}$ при $n \geqslant k$, поэтому принадлежит шару радиуса ε_k. Обозначим через a центр этого шара. Тогда при $n, m \geqslant k$ справедливы неравенства

$$\rho(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leqslant \rho(x_n^{(n)}, a) + \rho(a, x_m^{(m)}) < 2\varepsilon_k.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n^{(n)}\}$ фундаментальна. По условию теоремы пространство X полное, поэтому $\{x_n^{(n)}\}$ сходится. $\square$

Следствие 1. *Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует предкомпактная сеть для множества K, то оно предкомпактно.*

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть E – предкомпактная $\varepsilon/2$-сеть для K. По теореме 4 для E существует конечная $\varepsilon/2$-сеть, обозначим ее F. Тогда F – конечная ε-сеть для K, откуда снова в силу теоремы 4 следует предкомпактность K. $\square$

Следствие 2. *Предкомпактное множество ограничено.*

Доказательство. Пусть $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – конечная 1-сеть для K и $B(a, r)$ – шар радиуса $r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(a, a_i) + 1$ с центром в произвольной точке $a \in X$. Тогда $X \subset B(a, r)$. Действительно, для любой точки $x \in K$ найдется номер j такой, что $\rho(x, a_j) < 1$, поэтому

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, a_j) + \rho(a, a_j) \leqslant 1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(a, a_i),$$

т.е. $x \in B(a, r)$. $\square$

Определение 10. *(***Покрытия множеств***)*

1. *Пусть (X, ρ)– метрическое пространство и $A \subset X$– некоторое множество. Система множеств $\{C_i, i \in I\}$ из X покрывает A, если $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} C_i$.*

2. *Покрытие$\{C_i, i \in I\}$ называется*

   - конечным, если оно содержит конечное число множеств;

   - открытым, если все множества C_i – открытые.

3. *Подпокрытие покрытия $\{C_i, i \in I\}$ – это частичная система $\{C_{i_k}, i_k \in J \subset I\}$, которая покрывает множество A.*

Теорема 5. *(***теорема о конечном покрытии***) Множество K метрического пространства (X, ρ) является компактным тогда и только тогда, когда любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. Необходимость. Пусть K – компактное множество и система $\{C_i, i \in I\}$ образует открытое покрытие, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. По теореме 4 Хаусдорфа существует конечная 1-сеть $\{x_i^1, i = 1, 2, \ldots, N_1\}$ для множества K. Обозначим $A_i^1 = K \cap \bar{B}(x_i^1, 1)$. Здесь и далее $\bar{B}(a, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке a. Тогда $K = \bigcup\limits_{i=1}^{N_1} A_i^1$ и хотя бы одно из множеств $A_{i_1}^1$ не имеет конечного подпокрытия из системы $\{C_i, i \in I\}$. Аналогично, существует конечная 1/2-сеть $\{x_i^2, i = 1, 2, \ldots, N_2\}$ для множества $A_{i_1}^1$ и множество $A_{i_2}^2 = A_{i_1}^1 \cap \bar{B}(x_{i_2}^2, 1/2)$, которое не имеет конечного подпокрытия и т.д.

В результате построена система вложенных замкнутых множеств $A_{i_1}^1 \supset A_{i_2}^2 \supset \cdots$, диаметру которых стремятся к нулю. По теореме 2 существует точка x. принадлежащая K и пересечению множеств $A_{i_k}^k$. Эта точка принадлежит какому-либо открытому множеству C_i из покрытия, в которое она входит вместе с ε-окрестностью: $B(x, \varepsilon) \subset C_i$. Выберем $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$, тогда $A_{i_n}^n \subset C_i$. Но это невозможно, так как $A_{i_n}^n$ не имеет конечных подпокрытий из системы $\{C_i, i \in I\}$.

Достаточность. Предположим обратное. Тогда существует последовательность точек $\{x_n\}, x_n \in K$, у которой нет предельных точек. Можно считать, что элементы этой последовательности попарно различны. Тогда каждая точка $x \in K$ имеет окрестность $B(x, \varepsilon)$, в которой нет членов последовательности $\{x_n\}$ кроме, может быть, самой точки x. Совокупность всех таких окрестностей покрывает K. По условию теоремы найдется конечное число этих окрестностей, покрывающих K: $K \subset \bigcap\limits_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon_i)$. Тогда хотя бы одна из окрестностей $B(x_i, \varepsilon_i)$ должна содержать бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, но это невозможно по построению. □

Требование компактности пространства является весьма жестким и выделяет сравнительно узкий класс метрических пространств, в частности, более узкий, чем сепарабельные и полные пространства, как установлено в следующей теореме.

Теорема 6. *Компактное метрическое пространство (X, ρ) сепарабельно и полно.*

Доказательство. Установим сначала сепарабельность X. Обозначим через A_n конечные $1/n$-сети для X и положим $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Множество A счетное. Докажем, что оно всюду плотно в X. т.е. что замыкание $\bar{A}$ совпадает с X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и для любого натурального n найдем $x_n \in A_n : \rho(x, x_n) < 1/n$. Тогда последовательность $\{x_n\} \subset A$ сходится к x, т.е. x является предельной точкой A, что и требовалось доказать.

Докажем полноту X. Пусть $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальная последовательность в компактном пространстве X. Согласно определению компактности у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, предел который x_0 принадлежит X. Но тогда по лемме 1, п.5, и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0. □

1.3 Непрерывные отображения компактов и связных множеств

Пусть заданы два метрических пространства (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) и задано правило f, по которому каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие некоторая точка $y \in Y$. Тогда говорят, что задано отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Если задано отображение $f : X \to Y$, то точка $y \in Y$, которая ставится в соответствие точке $x \in X$, называется образом точки x и обозначается $f(x)$. Любая точка x, которой ставится в соответствие y, называется прообразом y. Множество всех прообразов точки y обозначается $f^{-1}(y)$ и называется полным прообразом точки y.

Для любого множества $M \subset X$ множество $f(M) = \{y \in Y : \exists x \in M, y = f(x)\} \subset Y$ – образ множества M. Для любого множества $N \subset Y$ множество $f^{-1}(N) = \{x \in X : y = f(x) \in N\} \subset X$ – (полный) прообраз множества N.

Определение 11. *(***Непрерывное отображение)**

Отображение $f(x)$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, если выполнено одно из следующих, эквивалентных, условий:

1. **(определение Коши)** *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*
$$\forall x \in X : \rho_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$$
2. **(определение Гейне)** *для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\} \subset Y$ сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство эквивалентности двух приведенных определений непрерывности отображения f в точке ("по Коши"и "по Гейне") такое же, как и для числовых функций в классическом анализе.

Если M – это множество в X и отображение $f : X \to Y$ непрерывно в каждой точке M, то оно называется непрерывным на множестве M.

Определение 12. *Отображение $f(x)$, определенное в метрическом пространстве и со значениями в $\mathbb{R}$, называется функционалом.*

Теорема 7. *Отображение f метрического пространства (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f непрерывно и пусть $G \subset Y$ – открытое множество. Если $x_0 \in f^{-1}(G)$, то $y_0 = f(x_0) \in G$ и входит в открытое множество G вместе с некоторой ε-окрестностью: $\{y : \rho_y(y, y_0) < \varepsilon\} \subset G$. Согласно определению непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что $\rho_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_y(y, y_0) < \varepsilon$. Это означает, что x_0 входит в $f^{-1}(G)$ вместе с δ-окрестностью, т.е. $f^{-1}(G)$ – открытое.

Достаточность. Пусть прообраз каждого открытого множества является открытым множеством. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и пусть $y_0 = f(x_0)$. Прообраз ε-окрестности точки y_0 – это открытое множество $G \ni x_0$, поэтому существует δ-окрестность точки x_0, входящая в G. Отсюда следует, что $\rho_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, так что f непрерывно в т x_0. В силу произвольности $x_0 \in X$ отображение f непрерывно в X. □

Теорема 8. *Непрерывный образ компакта есть компакт.*

Доказательство. Пусть (X, ρ_x) – компакт, (Y, ρ_y) – метрическое пространство и отображение $f : X \to Y$ непрерывно на X. Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\} \subset f(X)$. Для каждого y_n возьмем один из его прообразов $x_n : y_n = f(x_n)$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ принадлежит компактному пространству X, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \to x_0$. Так как отображение f непрерывно, то
$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X).$$
Это и означает, что $f(X)$ – компакт. □

Следствие 3. (Теорема Вейерштрасса) *Пусть функционал $f(x)$ определен на метрическом компакте (X, ρ) и непрерывен. Тогда он ограничена и достигает своих максимального и минимального значений.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме $f(x)$ – компакт в $\mathbb{R}$, т.е. ограниченное и замкнутое множество. Отсюда следуют сформулированные утверждения. □

Определение 13. *Отображение $f : X \to Y$, определенное на некотором множестве M метрического пространства (X, ρ_x) со значениями в метрическом пространстве (Y, ρ_y) называется равномерно непрерывным на M, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\forall x, y \in M: \ \rho_x(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Теорема 9. *Непрерывное отображение метрического компакта (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть отображение $f(x)$ определено на метрическом компакте (X, ρ_x) и непрерывно. Допустим, что оно не является равномерно непрерывным. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого натурального n есть пара (x_n, y_n) в X, для которой

$$\rho_x(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \text{ в то время, как } \rho_y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon_0.$$

В силу компактности X из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда и подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ сходится к x_0. В силу непрерывности $f(x)$ справедливо предельное соотношение $\rho_y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0$, а по предположению $\rho_y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Следствие 4. (теорема Кантора) *Пусть функционал $f(x)$ определен на метрическом компакте (X, ρ) и непрерывен. Тогда он равномерно непрерывен.*

Определение 14. *Множество K метрического пространства называется несвязным, если существуют два непересекающихся открытых множества C_1 и C_2, каждое из которых пересекается с K и объединение которых содержит K. В противном случае множество K – связное.*

Теорема 10. *Пусть (X, ρ_x), (Y, ρ_y) – два метрических пространства, $K \subset X$ – связное множество и отображение $f : X \to Y$ непрерывно на K. Тогда $f(K)$ – связное множество.*

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть существуют два непересекающихся открытых множества C_1 и C_2 в (Y, ρ_y), каждое из которых пересекается с $f(K)$ и объединение которых содержит $f(K)$. Обозначим через $D_1 = f^{-1}(C_1)$ и $D_2 = f^{-1}(C_2)$ прообразы этих множеств в пространстве (X, ρ_x). Согласно теореме 7 эти множества открыты. Кроме того, они не пересекаются, каждое из них имеет непустое пересечение с K, а их объединение содержит K. Но это означает, что K несвязно, что противоречит условию теоремы. □

Следствие 5. (теорема Больцано-Коши) *Пусть функционал $f(x)$ определен на связном метрическом компакте (K, ρ) и непрерывен. Тогда он принимает все значения из отрезка $[m, M]$, где $m = \min\limits_{x \in K} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in K} f(x)$.*

Доказательство. Функционал f принимает на K свои минимальное m и максимальное M значения (см. следствие 3 к теореме 8), поэтому множество $f(K)$ входит в отрезок $[m, M]$ и точки m, M входят в это множество. Но $f(K)$ – связное множество, поэтому $f(K) = [m, M]$. □

1.4 Сжимающие отображения

Определение 15. *(***Сжимающие отображения и неподвижные точки***)*

1. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Отображение $A : X \to X$ называется сжимающим (или отображением сжатия), если*

$$\exists \alpha \in (0, 1): \ \forall x, y \in X \Rightarrow \rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y). \tag{6}$$

2. *Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $A : X \to X$, если $Ax = x$.*

Теорема 11. *(***Неподвижная точка сжимающего отображения***)*

Пусть (X,ρ) – полное метрическое пространство и $A : X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда A имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и по рекуррентной формуле

$$x_n = Ax_{n-1},\ n = 1, 2, \dots \tag{7}$$

построим последовательность $\{x_n\}$. Она является фундаментальной Действительно,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_n) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \dots \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1),$$

откуда

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots \alpha^{n+p-1})\rho(x_0, x_1) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \to 0 \text{ при } n \to \infty\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

В силу полноты X последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажем, что x^* – неподвижная точка A. Имеем

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, Ax^*) = \rho(x^*, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax^*) \leqslant \\ \leqslant \rho(x^*, x_n) + \alpha\rho(x^*, x_{n-1}) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда следует равенство $\rho(x^*, Ax^*) = 0$, поэтому $Ax^* = x^*$.

Докажем единственность неподвижной точки. Предположим, что существует вторая неподвижная точка $y = Ay$. Тогда $\rho(x^*, y) = \rho(Ax^*, Ay) \leqslant \alpha\rho(x^*, y)$, $\alpha < 1$. Это неравенство непротиворечиво только при $\rho(x^*, y) = 0 \Rightarrow x^* = y$. □

Доказанная теорема называется принципом сжимающих отображений. Рекуррентная формула (7) – метод последовательных приближений. Он предоставляет алгоритм нахождения единственной неподвижной точки отображения A. Переходя к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1),$$

мы получаем оценку скорости сходимости последовательности приближений x_n к решению x_∞ уравнения $x = Ax$:

$$\rho(x_n, x_\infty) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Теорема 12. *Пусть n-ая степень отображения $A : X \to X$, определенная равенством $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{n}$, $n \geqslant 1$, является отображением сжатия в X. Тогда A имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Поскольку A^n – это сжимающее отображение в X, то оно имеет единственную неподвижную точку x^*: $x^* = A^n x^*$. Из равенства $Ax^* = A(A^n x^*) = A^n(Ax^*)$ следует, что Ax^* – также неподвижная точка отображения A^n. Но в силу ее единственности $x^* = Ax^*$, так что x^* – это неподвижная точка и отображения A.

Единственность неподвижной точки отображения A следует из того, что она является неподвижной точкой A^n. □

1.5 Неравенства Гельдера и Минковского

Лемма 5. *Пусть два действительных числа* $p > 1$, $q > 1$ *связаны равенством* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *(числа* p *и* q *называются сопряженными). Тогда*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \forall u > 0, \forall v > 0. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x$ при $x \geqslant 0$. Так как $f'(x) = x^{p-1} - 1$ и $f"(x) = (p-1)x^{p-2}$, то $f'(1) = 0$, $f"(1) > 0$. Это значит, что в точке $x = 1$ функция $f(x)$ достигает минимума $f(1) = 0$, поэтому $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q}$. Положив в этом неравенстве $x = uv^{1-q}$ и затем умножив на v^q, получим неравенство (8). □

Теорема 13. *(Неравенства Гельдера и Минковского для сумм) Пусть* $p > 1$, $q > 1$ *и* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *а* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *– векторы с действительными или комплексными координатами. Тогда справедливы*

неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{1/q} \tag{9}$$

и неравенство Минковского

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{10}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство Гёльдера. Введем обозначения $A = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$, $B = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{1/q}$. Будем считать, что $A > 0$ и $B > 0$, потому что равенство нулю какого-либо из этих чисел равносильно равенству нулю соответствующего вектора x или y, а тогда неравенство Гёльдера очевидно выполнено. Применив (8) к числам $u = \dfrac{|x_i|}{A}$, $v = \dfrac{|y_i|}{B}$, придем к неравенству

$$\frac{|x_i y_i|}{AB} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{B^q} \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Просуммировав эти неравенства по $i = 1, 2, \ldots, n$, получим:

$$\frac{1}{AB} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{pA^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{qB^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

т.е. неравенство Гёльдера.

Перейдем к доказательству неравенства Минковского. Будем считать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \neq 0$, потому что иначе неравенство Минковского очевидно выполнено. Воспользуемся неравенством Гёльдера и равенством $(p-1)q = p$, справедливым для сопряженных показателей p и q, при проведении следующих оценок:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqslant$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} =$$

$$= \left(\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{1/p}\right)\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\Big)^{1/q}.$$

После деления обеих частей полученного неравенства на число $\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\Big)^{1/q}$ получим неравенство Минковского. □

Следствие 6. *(Неравенства Гельдера и Минковского для числовых рядов)*

Пусть $p > 1$, $q > 1$ *и* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, *а* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *и* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ *– последовательности действительных или комплексных чисел. Если сходятся ряды* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ *и* $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q$, *то сходятся также ряды* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|$ *и* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p$ *и справедливы*

неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\Big)^{1/q} \tag{11}$$

и неравенство Минковского

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{12}$$

Доказательство. В силу неравенства Гёльдера (9) при любом n справедлива оценка:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\Big)^{1/q} = \text{const}.$$

Из этой оценки по критерию сходимости рядов с неотрицательными членами следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|$ и неравенство (11).

Аналогично, в силу неравенства Минковского (10) при любом n справедлива оценка:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\Big)^{1/p},$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p$ и неравенство (12). □

Теорема 14. *(Неравенства Гельдера и Минковского для интегралов)*

Пусть $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ измеримы на отрезке $[a, b]$, а $|x(t)|^p$ и $|y(t)|^q$ интегрируемы по Лебегу на $[a, b]$. Тогда функции $|x(t)y(t)|$ и $|x(t) + y(t)|^p$ интегрируемы на $[a, b]$ и справедливы

неравенство Гёльдера

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |y(t)|^q dt\Big)^{1/q} \tag{13}$$

и неравенство Минковского

$$\Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |y(t)|^p dt\Big)^{1/p}. \tag{14}$$

Доказательство. Введем обозначения $A = \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p}$, $B = \Big(\int_a^b |y(t)|^q dt\Big)^{1/q}$. Эти числа неотрицательны. Если какое-либо из них равно нулю, то соответствующая функция $x(t)$ или $y(t)$ равна нулю почти всюду на $[a, b]$. Но тогда и $x(t)y(t)$ равна нулю почти всюду на $[a, b]$, так что $|x(t)y(t)|$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливо (13).

Далее рассматриваем вариант $A > 0$, $B > 0$. Применив (8) к числам $u = \dfrac{|x(t)|}{A}$, $v = \dfrac{|y(t)|}{B}$, придем к неравенству

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x(t)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|y(t)|^q}{B^q} \text{ при почти всех } t \in [a, b].$$

Из него следует интегрируемость функции $|x(t)y(t)|$, а после интегрирования по отрезку $[a, b]$ – неравенство Гёльдера (13).

Перейдем к доказательству интегрируемости функции $|x(t) + y(t)|^p$ и неравенства Минковского (14). Функция $f(u) = |u|^p$ выпукла при $p \geqslant 1$, поэтому

$$\left|\frac{u + v}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Применив это неравенство, получим:

$$|x(t) + y(t)|^p \leqslant 2^{p-1}(|x(t)|^p + |y(t)|^p) \text{ при почти всех } t \in [a, b],$$

откуда следует интегрируемость $|x(t) + y(t)|^p$ на $[a, b]$.

Проинтегрировав по отрезку $[a, b]$ неравенство

$$|x(t) + y(t)|^p \leqslant |x(t)|^p\, |x(t) + y(t)|^{p-1} + |y(t)|^p\, |x(t) + y(t)|^{p-1}$$

и применив неравенство Гёльдера (13), будем иметь:

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^{(p-1)q} dt\Big)^{1/q} +$$

$$+ \Big(\int_a^b |y(t)|^p dt\Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^{(p-1)q} dt\Big)^{1/q} =$$

$$= \left(\Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |y(t)|^p dt\Big)^{1/p}\right) \Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\Big)^{1/q}.$$

После деления обеих частей полученного неравенства на число $\big(\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\big)^{1/q}$ получим неравенство Минковского (14). $\square$

1.6 Примеры метрических пространств

1.6.1 Пространства чисел

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является метрическим пространством с метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$. Сходимость в $\mathbb{R}$ означает обычную сходимость числовых последовательностей. Пространство $\mathbb{R}$ – сепарабельное (в нем плотно множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$) и полное.

2. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с метрикой $\rho(z_1,z_2) = |z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ для $z_k = x_k + iy_k$ является сепарабельным и полным метрическим пространством. Сходимость в $\mathbb{C}$ равносильна сходимости вещественных и мнимых частей, поэтому сформулированные свойства следуют из соответствующих свойств $\mathbb{R}$.

3. Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ m-мерных действительных векторов с метрикой $\rho(x,y) = \big(\sum\limits_{i=1}^m(\xi_i-\eta_i)^2\big)^{1/2}$ для $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$ и $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$. В $\mathbb{R}^m$ при $m>1$ сходимость последовательности $\{x_n = (\xi_{n1},\xi_{n2},\ldots,\xi_{nm})\}$ к вектору $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$ равносильна координатной сходимости:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_{ni}-\xi_i| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенствами

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_{ni}-\xi_i| \leqslant \rho(x_n,x) \leqslant \sqrt{m}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_{ni}-\xi_i|.$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ является сепарабельным (в нем плотно множество векторов с рациональными координатами $\mathbb{Q}^m$) и полным. Это следует из установленной связи между сходимостью в метрике и координатной сходимостью, а также из соответствующих свойств $\mathbb{R}$.

1.6.2 Пространства последовательностей

Далее используем следующие обозначения: $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$, $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots)$ и $z = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n,\ldots)$ для последовательностей из вещественных или комплексных чисел.

1. **Пространство** s

   Через s обозначим пространство **всех** числовых последовательностей.

   Утверждение 1. *Функция ρ, определенная равенством*

   $$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}, \tag{15}$$

   является метрикой в пространстве s.

   Доказательство. Прежде всего, отметим, что определение корректно (15), так как ряд в правой части равенства сходится. Легко видеть, что функция $\rho(.,.)$ удовлетворяет первым двум аксиомам метрики. Докажем для нее неравенство треугольника. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$. Поскольку $f'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$, то эта функция возрастает, откуда следует неравенство

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} = f(|x-y|) \leqslant f(|x-z|+|z-y|) = \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}.$$

Применив это неравенство к каждому члену ряда, получим:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \gamma_k|}{1+|\xi_k - \gamma_k|} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\gamma_k - \eta_k|}{1+|\gamma_k - \eta_k|} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

□

Утверждение 2. *В пространстве s сходимость* $\{x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nm}, \ldots)\}$ *к* $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots)$ *равносильна координатной сходимости (в общем случае неравномерной относительно номеров координат):*

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow |\xi_{ni} - \xi_i| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Пусть $\rho(x_n, x) \to 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_{ni} - \xi_i|}{1+|\xi_{ni} - \xi_i|} < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon).$$

Но тогда при каждом фиксированном i

$$\frac{1}{2^i} \frac{|\xi_{ni} - \xi_i|}{1+|\xi_{ni} - \xi_i|} < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon)$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $|\xi_{ni} - \xi_i| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть, обратно, $|\xi_{ni} - \xi_i| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем m такое, что

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_{ni} - \xi_i|}{1+|\xi_{ni} - \xi_i|} < \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь при фиксированном m найдем $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_{ni} - \xi_i|}{1+|\xi_{ni} - \xi_i|} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon).$$

В результате $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$. □

Утверждение 3. *Пространство s – полное и сепарабельное.*

Доказательство. Полнота s следует из эквивалентности сходимости в метрике s координатной сходимости и полноты $\mathbb{R}$.

Для доказательства сепарабельности определим множество

$$R_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k = \{(\underbrace{r_1, r_2, \ldots, r_k}_{k \text{ чисел } \neq 0}, 0, 0, \ldots)\},\ r_i \in \mathbb{Q}. \tag{16}$$

Ясно, что оно счетно. Докажем, что его замыкание совпадает с s. Возьмем произвольный элемент $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in s$ и построим последовательность $\{x_k\} \in R_0$, сходящуюся к x. Для каждого ξ_n выберем последовательность рациональных чисел $\{r_{nk}\}$, $r_{nk} \to \xi_n$ при $k \to \infty$ и построим последовательность из R_0 по правилу:

$$x_k = (r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{kk}, 0, 0, \ldots).$$

Эта последовательность сходится к x покоординатно, так как для произвольной координаты n при достаточно большом $k > n$ справедливо неравенство $|\xi_n - r_{nk}| < \varepsilon$. Остается воспользоваться тем фактом, что сходимость в метрике s равносильна координатной сходимости. □

2. **Пространства** l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ такие, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ сходится, являются элементами пространства l_p при $1 \leqslant p < \infty$. Метрика задается равенством

$$\rho(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\Big)^{1/p}.$$

При доказательстве неравенства треугольника для метрики l_p при $p > 1$ следует воспользоваться неравенством Минковского (12).

Пространство l_∞ –это пространство ограниченных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, $\sup\limits_i |\xi_i| \leqslant c_x = \mathrm{const}$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i - \eta_i|. \tag{17}$$

Сходимость в l_∞ последовательности $\{x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nm}, \ldots)\}$ к $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots)$ означает равномерную координатную сходимость:

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_{ni} - \xi_i| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение 4. *Пространства l_p, $1 \leqslant p < \infty$, сепарабельны. Пространство l_∞ не сепарабельно.*

Доказательство. Доказательство сепарабельности нетрудно провести самостоятельно (см. задачу 8 данного параграфа).

Докажем несеперабельность l_∞. Обозначим через $A \subset l_\infty$ множество всех последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, у которых все члены ξ_k принимают значения либо 0, либо 1. Докажем, что это множество не счетно. Допустим противное. Тогда A эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, так что любому $n \in \mathbb{N}$ соответствует последовательность $(\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_k^n, \ldots) \in A$. Рассмотрим последовательность $(1 - \xi_1^1, 1 - \xi_2^2, 1 - \xi_3^3, \ldots, 1 - \xi_n^n, \ldots) \in A$. Допустим, что ей соответствует число n. Во взаимно однозначном соответствии $A \sim \mathbb{N}$ этому числу соответствует также последовательность $(\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_n^n, \dots)$, поэтому последовательности $(\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_n^n, \dots)$ и $(1-\xi_1^1, 1-\xi_2^2, 1-\xi_3^3, \dots, 1-\xi_n^n, \dots)$ должны совпадать. В частности, должно выполняться равенство $\xi_n^n = 1-\xi_n^n$, что невозможно. Полученное противоречие обосновывает несчетность множества A.

Предположим теперь, что l_∞ сепарабельно, так что в нем существует счетное, всюду плотное множество $M = \{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим счетную совокупность шаров $\{B(x_i, 1/3)\}$ с центрами в точках $x_i \in M$ и радиуса $1/3$. Так как множество M по определению всюду плотно, то эти шары покрывают l_∞, в частности, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B(x_i, 1/3)$. Но множество A не счетно, поэтому хотя бы в одном шаре $B(x_{i_0}, 1/3)$ содержатся более одного элемента из A, пусть это будут последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots)$. Расстояние между x и y не должно превышать диаметра шара $B(x_{i_0}, 1/3)$, т.е. $\rho(x, y) \leqslant 2/3$. С другой стороны, из определения последовательностей x и y как элементов A следует $\rho(x, y) = 1$. Получено противоречие. □

Утверждение 5. *Пространства $l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ – полные.*

Доказательство. Пусть $\{x_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n} \dots, \xi_{in}, \dots)\}$ – фундаментальная последовательность в l_p:

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_{in} - \xi_{im}|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{при } n, m \geqslant n_0 \quad \text{в случае } 1 \leqslant p < \infty; \\ &\sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_{in} - \xi_i| < \varepsilon \qquad \text{при } n, m \geqslant n_0 \qquad \text{в случае } p = \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда числовая последовательность $\{\xi_{in}\}$ для любого фиксированного индекса i фундаментальна, поэтому имеет предел ξ_i. Докажем, что последовательность $x = (\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_i, \dots)$ принадлежит l_p и $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть вначале $p < \infty$. Из (18) следует $\sum\limits_{i=1}^{M} |\xi_{in} - \xi_{im}|^p < \varepsilon^p$ при $n, m \geqslant n_0$ для любого M. В пределе при $m \to \infty$ получим $\sum\limits_{i=1}^{M} |\xi_{in} - \xi|^p \leqslant \varepsilon^p$ при $n \geqslant n_0$ для любого M. Перейдем теперь к пределу при $M \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_{in} - \xi|^p \leqslant \varepsilon^p \text{ при } n \geqslant n_0 \tag{19}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_{in_0}|^p$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_{in_0} - \xi|^p$ и неравенства Минковского (12) следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi|^p$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_{in_0}|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_{in_0} - \xi_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Это означает, что $x \in l_p$. Неравенство (19) равносильно утверждению $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть теперь $p = \infty$. Перейдя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (18), получим

$$\sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_{in} - \xi_i| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0,$$

откуда следует $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Осталось доказать, что x принадлежит l_∞, т.е. является ограниченной числовой последовательностью. Но последовательность $x_{n_0} = (\xi_{1n_0}, \xi_{2n_0} \dots, \xi_{in_0}, \dots)$

ограничена как элемент l_∞, так что существует постоянная k: $\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_{in_0}|\leqslant k$. Тогда $\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_i|\leqslant \sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_{in_0}|+\sup\limits_{1\leqslant i<\infty}|\xi_{in_0}-\xi_i|\leqslant k+\varepsilon$. □

3. **Пространство** c

Задав на множестве всех сходящихся числовых последовательностей метрику (17), получим метрическое пространство c.

Утверждение 6. *Пространство c – сепарабельное и полное.*

Доказательство. Сначала докажем сепарабельность c.Обозначим через A счетное множество всех сходящихся последовательностей с рациональными членами и докажем, что A плотно в c. Возьмем произвольный элемент $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n,\ldots)\in c$ и пусть $\xi^*=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$. Для $\varepsilon>0$ найдем номер m такой, что $|\xi^*-\xi_k|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $k>m$ и рациональное число $r^*:\ |\xi^*-r^*|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|\xi_k-r^*|<\varepsilon \ \text{ при } \ k>m.$$

Для вектора $(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_m)$ выберем вектор с рациональными координатами $(r_1,r_2,\ldots r_m)$, удовлетворяющий условию

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\xi_i-r_i|<\varepsilon.$$

Последовательность $x_r=(r_1,r_2,\ldots r_m,r^*,\ldots r^*,\ldots)$ принадлежит множеству A и $\rho(x,x_r)<\varepsilon$.

Докажем, что c является замкнутым подпространством l_∞, откуда следует его полнота. Пусть последовательность $\{x_n=(\xi_{n1},\xi_{n2},\ldots,\xi_{nm},\ldots)\}$ сходится к $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m,\ldots)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем вначале номер n_0 такой, что $\rho(x_{n_0},x)<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Затем, воспользовавшись фундаментальностью сходящейся последовательности $\{\xi_{n_0\,m}\}$, найдем $m_0=m_0(\varepsilon)$ такой, что $|\xi_{n_0\,i}-\xi_{n_0\,j}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $i,j\geqslant m_0$. В результате

$$|\xi_i-\xi_j|\leqslant|\xi_i-\xi_{n_0\,i}|+|\xi_{n_0\,i}-\xi_{n_0\,j}|+|\xi_{n_0\,j}-\xi_j|\leqslant$$
$$\leqslant 2\rho(x_{n_0},x)+|\xi_{n_0\,i}-\xi_{n_0\,j}|<\varepsilon \text{ при } i,j\geqslant m_0.$$

Это означает, что последовательность $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m,\ldots)$ фундаментальна, т.е. сходится, поэтому $x\in c$.

□

1.6.3 Пространства функций

1. **Пространство** $C[a,b]$

$C[a,b]$ – это пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций аргумента t с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

Сходимость в $C[a,b]$ означает равномерную на $[a,b]$ сходимость функциональной последовательности:

$$\rho(x_n,x)\to 0\Leftrightarrow\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Утверждение 7. *Пространство $C[a,b]$ является сепарабельным и полным.*

Доказательство. Сепарабельность.

Введем следующие обозначения: P_n – множество алгебраических многочленов степени n с действительными коэффициентами, $P_n^r \subset P_n$ – множество алгебраических многочленов степени n с рациональными коэффициентами, $P^r = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n^r$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольную функцию $x(t) \in C[a,b]$. По теореме Вейерштрасса найдется многочлен $p_{n_0}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n_0} t^{n_0} \in P_{n_0}$ степени $n_0 = n(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(x, p_{n_0}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - p_{n_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Пусть $M = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n_0} \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |t^i|$. Для каждого действительного коэффициента a_i многочлена $p_{n_0}(t)$ возьмем рациональное число $\tilde{a}_i$:

$$|\tilde{a}_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{2M(n+1)}$$

и обозначим через $p_{n_0}^r = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_2 t^2 + \cdots + \tilde{a}_{n_0} t^{n_0} \in P_{n_0}^r$ многочлен с рациональными коэффициентами. Легко проверить, что

$$\rho(p_{n_0}^r, p_{n_0}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |p_{n_0}^r(t) - p_{n_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда и из неравенства (20) следует

$$\rho(p_{n_0}^r, x) < \varepsilon,$$

т.е. любую функцию из $C[a,b]$ можно сколь угодно точно приблизить многочленом с рациональными коэффициентами. Это означает, что множество P^r всюду плотно в $C[a,b]$.

Осталось доказать, что множество P^r счетно. Для этого достаточно установить счетность P_n^r для любого n. Каждому многочлену $p_n^r = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_2 t^2 + \cdots + \tilde{a}_n t^n \in P_n^r$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ с рациональными коэффициентами, т.е. с $\tilde{a}_i \in Q$. Тогда множество P_n^r эквивалентно счетному множеству Q^{n+1}, откуда следует его счетность.

Полнота.

Пусть последовательность $\{x_n\} \in C[a,b]$ фундаментальна, т.е. $\rho(x_n, x_m) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Тогда по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности существует ее предел – непрерывная функция $x(t)$, к которой равномерно сходится последовательность $\{x_n\}$: $\rho(x_n, x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. □

2. **Пространства Лебега $L_p(a,b), 1 \leqslant p \leqslant \infty$**

$L_p(a,b)$ при $1 \leqslant p < \infty$ – это пространство измеримых на (a,b) функций, с интегрируемой по Лебегу p-ой степенью: $\exists \int\limits_a^b |x(t)|^p dt$. Метрика в $L_p(a,b)$ задается равенством

$$\rho(x,y) = \Big(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \Big)^{1/p}.$$

Элементами пространства $L_p(a,b)$ являются классы эквивалентных функций, т.е. функций, равных почти всюду на (a,b). При доказательстве неравенства треугольника для метрики L_p при $p>1$ следует воспользоваться неравенством Минковского (14) из дополнения 1.5.

$L_\infty(a,b)$ – это пространство измеримых и почти всюду ограниченных на (a,b) функций. Метрика в $L_\infty(a,b)$ задается равенством

$$\rho(x,y) = \operatorname{ess}\sup_{t\in(a,b)} |x(t)-y(t)| \equiv \inf_M \sup_{t\in(a,b)\setminus M} |x(t)-y(t)|, \tag{21}$$

где нижняя грань берется по всем подмножествам $M \subset (a,b)$ нулевой лебеговой меры.

Утверждение 8. *Нижняя грань в* (21) *достигается на некотором множестве* M_0 *нулевой лебеговой меры.*

Доказательство. Выберем множества M_n нулевой меры так, чтобы

$$\sup_{t\in(a,b)\setminus M} |x(t)-y(t)| < \rho(x,y) + \frac{1}{n}$$

и зададим множество $M_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. В силу σ-полуаддитивности меры множество M_0 имеет нулевую меру, значит

$$\sup_{t\in(a,b)\setminus M_0} |x(t)-y(t)| = \rho(x,y).$$

□

Теперь нетрудно проверить, что функция ρ в (21) определяет метрику. Действительно, первые две аксиомы метрики очевидно выполнены. Заметим только, что, как и в пространстве $L_p(a,b)$, элементами $L_\infty(a,b)$ являются классы эквивалентных функций. Докажем неравенство треугольника. Пусть $\rho(x,z) = \sup\limits_{t\in(a,b)\setminus M_{xz}} |x(t)-z(t)|$, $\rho(y,z) = \sup\limits_{t\in(a,b)\setminus M_{yz}} |y(t)-z(t)|$, где M_{xz}, M_{yz} – множества нулевой меры, и $M = M_{xz} \cup M_{yz}$. Тогда

$$\rho(x,y) \leqslant \sup_{t\in(a,b)\setminus M} |x(t)-y(t)| \leqslant \sup_{t\in(a,b)\setminus M_{xz}} |x(t)-z(t)| + \\ + \sup_{t\in(a,b)\setminus M_{yz}} |y(t)-z(t)| = \rho(x,z)+\rho(y,z),$$

т.е. неравенство треугольника выполнено.

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x по норме $L_\infty(a,b)$ означает, что найдется множество нулевой меры $A \subset (a,b)$ такое, что на $(a,b)\setminus A$ сходимость равномерная:

$$\sup_{t\in(a,b)\setminus A} |x_n(t)-x(t)| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Действительно, пусть множества A_n нулевой меры такие, что $\rho(x,x_n) = \sup\limits_{t\in(a,b)\setminus A_n} |x(t)-x_n(t)|$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда A – также множество нулевой меры и

$$\sup_{t\in(a,b)\setminus A} |x_n(t)-x(t)| \leqslant \rho(x,x_n) \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Утверждение 9. *Пространства* $L_p(a,b), 1\leqslant p<\infty$, *сепарабельны. Пространство* $L_\infty(a,b)$ *не сепарабельно.*

Утверждение 10. *Пространства $L_p(a,b), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ – полные.*

Доказательство. Случай $1 \leqslant p < \infty$.

Возьмем произвольную фундаментальную в $L_p(a,b)$ последовательность $\{x_n\}$ и докажем, что она имеет предел. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ такая, что

$$\rho(x_m, x_{n_k}) = \Big(\int_a^b |x_m(t) - x_{n_k}(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} < \frac{1}{2^k} \quad \text{при } m > n_k.$$

Применив неравенство Гельдера в случае $p > 1$, получим

$$\int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\,dt \leqslant (b-a)^{1/q}\Big(\int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} < (b-a)^{1/q}\frac{1}{2^k}.$$

Отсюда следует сходимость ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\,dt$. По следствию к теореме Беппо Леви для почти всех $x \in (a,b)$ сходится числовой ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$, а значит и ряд

$$x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)) = x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) - x_{n_1}(t) + x_{n_3}(t) - x_{n_2}(t) + \ldots$$

Таким образом, функции $x_{n_k}(t)$ почти всюду стремятся к некоторому пределу $x(t)$, а значит

$$|x_{n_k}(t)|^p \to |x(t)|^p \text{ почти всюду на } (a,b).$$

Кроме того, фундаментальная последовательность ограничена, поэтому

$$\int_a^b |x_{n_k}(t)|^p\,dt \leqslant \text{const}.$$

В силу теоремы Фату функция $|x(t)|^p$ интегрируема на (a,b).

Применив теперь теорему Фату к последовательности $\{|x_{n_l}(t) - x_{n_k}(t)|^p\}$ при фиксированном n_k и воспользовавшись неравенством

$$\Big(\int_a^b |x_{n_l}(t) - x_{n_k}(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} < \frac{1}{2^k} \text{ при } n_l > n_k,$$

в пределе при $n_l \to \infty$ получим

$$\Big(\int_a^b |x(t) - x_{n_k}(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Это неравенство означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в метрике $L_p(a,b)$ к x. Вместе с фундаментальностью последовательности $\{x_n\}$ отсюда следует, что и последовательность $\{x_n\}$ сходится в метрике $L_p(a,b)$ к x.

Случай $p = \infty$.

Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная в $L_\infty(a,b)$ последовательность. Пусть множества A_{nm} нулевой меры такие, что $\rho(x_n, x_m) = \sup\limits_{t\in(a,b)\setminus A_{nm}} |x_n(t) - x_m(t)|$ и $A = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}$ (см. утверждение 8). Тогда A – также множество нулевой меры и

$$\sup_{t\in(a,b)\setminus A} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \rho(x_n, x_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Это означает, что при любом $t \in (a,b) \setminus A$ числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна. Обозначим через $x(t)$ ее предел и доопределим функцию $x(t)$ нулем на A. Тогда $x(t)$ измерима и ограничена на (a,b), при этом

$$\rho(x_n, x) \leqslant \sup_{t\in(a,b)\setminus A} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$\square$

3. **Пример неполного пространства** $CL[a,b]$

На пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций определим интегральную метрику $\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|dt$ и обозначим полученное метрическое пространство через $CL[a,b]$. Докажем, что оно не полное.

Для доказательства достаточно указать одну фундаментальную последовательность, которая не будет иметь предела в $CL[a,b]$. Для простоты возьмем $[a,b] = [0,1]$, тогда пример такой последовательности:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leqslant t < -\dfrac{1}{n}, \\ nt & \text{при } -\dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{при } \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Действительно, легко проверить, что разрывная функция

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leqslant t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ 1 & \text{при } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

является пределом последовательности $\{x_n\}$ в интегральной метрике пространства $CL[-1,1]$. Допустим, что существует **непрерывная** функция $x(t)$, являющаяся пределом $\{x_n\}$ в метрике пространства $CL[-1,1]$. Тогда $\rho(x,y) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|dt = 0$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. На отрезке $[\delta,1]$ функция $x(t) - y(t)$ непрерывна и $\int\limits_\delta^1 |x(t) - y(t)|dt \leqslant \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|dt = 0$, поэтому $x(t) = y(t)$ на $[\delta, 1]$. Аналогично, $x(t) = y(t)$ на $[-1, -\delta]$. Таким образом, функция $x(t)$ должна равняться 1 в точке $t = \delta$ и -1 в точке $t = -\delta$ при любом $\delta > 0$. Но это противоречит ее непрерывности в точке 0.

1.6.4 Пополнение пространств

1. Возьмем пространство l_p^0, элементами которого являются последовательности с конечным числом ненулевых членов: $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)$, где ξ_i – произвольные действительные числа и k – произвольное натуральное число. На этом пространстве введем метрику l_p, именно, если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, 0, \ldots)$ и для определенности $m \geqslant k$, то

$$\rho(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k+1}^{m} |\eta_i|^p\Big)^{1/p}$$

Пространство l_p^0 является подпространством l_p, причем неполным. Действительно, например, последовательность элементов из l_p^0

$$x_1 = (1, 0\ldots),\ x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0\ldots),\ \ldots, x_m = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^m}, 0, \ldots), \ldots$$

в l_p^0 предела не имеет, но является фундаментальной, так как

$$\rho(x_{m+k}, x_m) = \Big(\sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{1}{2^{ip}}\Big)^{1/p} \to 0 \text{ при } m \to \infty\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Обозначим пополнение l_p^0 через X. Но очевидно, что l_p^0 всюду плотно в l_p. В силу теоремы 3 пополнение единственно с точностью до изометрии, поэтому X изометрично l_p.

2. Пусть X_0 – это пространство алгебраических многочленов $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_n t^n$, определенных на отрезке $[0, 1]$, с произвольными вещественными коэффициентами a_i и произвольной степени n. Метрику в X_0 зададим равенством $\rho_0(p, q) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |p(t) - q(t)|$. Это пространство не полно. Для доказательства достаточно взять какую-либо регулярную функцию, например, e^t, и последовательность частичных сумм ее равномерно сходящегося на отрезке $[0, 1]$ ряда Тейлора по степеням t (ряда Маклорена). Это последовательность алгебраических многочленов – элементов X_0, – которая фундаментальна в метрике ρ_0, но сходится к функции, не принадлежащей X_0.

   По теореме Вейерштрасса пространство X_0 всюду плотно в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций, поэтому пополнением X_0 является пространство, изометричное $C[0, 1]$.

3. Множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве Лебега $L_1(a, b)$, поэтому пополнение пространства $CL[a, b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt$ изометрично пространству Лебега $L_1(a, b)$.

1.7 Примеры компактных множеств

1.7.1 Компакт в пространстве n-мерных векторов

Утверждение 11. *Рассмотрим множество n-мерных векторов, на котором зададим метрику* $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p} \text{ при } 1 \leqslant p < \infty; \\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i| \text{ при } p = \infty. \end{cases}$$

Для предкомпактности множества K в этом пространстве необходима и достаточна его ограниченность (так что, для компактности необходима и достаточна его ограниченность и замкнутость).

Доказательство. Множество векторов $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ с целочисленными компонентами k_i образует (бесконечную) сеть в пространстве n-мерных векторов, при этом расстояние от произвольного вектора x до ближайшего узла этой сети $\rho_p(x, y) \leqslant n^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\rho_\infty(x, y) \leqslant 1$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{n^{1/p}}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ образует $\varepsilon > 0$-сеть для всего пространства при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пересечение $A_\varepsilon \cap K$ с ограниченным множеством K образует конечную ε-сеть для K, поэтому K предкомпактно. □

1.7.2 Компакт в l_p.

Утверждение 12. *Для предкомпактности множества $K \subset l_p, 1 \leqslant p < \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\exists M: \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{1/p} < M \ \forall x \in K, \tag{22}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon): \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon \ \forall x \in K. \tag{23}$$

Доказательство. Необходимость

Ограниченность (22) предкомпактного множества K отмечена в следствии 2. Пусть $A_\varepsilon = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ – конечная $\varepsilon/2$ - сеть для K. Найдем $n = n(\varepsilon)$ такой, чтобы равномерно по всем $y_j \in A_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\eta_{ji}|^p < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p, \quad y_j = (\eta_{j1}, \eta_{j2}, \ldots, \eta_{jn}, \ldots).$$

Для произвольного $x \in K$ возьмем $y \in A_\varepsilon, y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots) : \rho(x,y) < \varepsilon/2$. Использовав неравенство Минковского, получим

$$\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\eta_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i - \eta_i|^p\Big)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x,y) < \varepsilon,$$

так что условие (23) выполнено.

Достаточность.

Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ номер $n = n(\varepsilon)$ выбран так, что выполнено условие (23). По каждому $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in K$ построим "усеченную" последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, а этой последовательности поставим во взаимно-однозначное соответствие n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Множество усеченных последовательностей обозначим через A, а соответствующее ему множество векторов через $\tilde{A}$. Оснастим $\tilde{A}$ метрикой

$$\tilde{\rho}(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \eta_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Тогда метрические пространства (A, ρ) и $(\tilde{A}, \tilde{\rho})$ изометричны. В то же время, $\tilde{A}$ ограничено, поэтому предкомпактно (см. предыдущий пример). Но тогда предкомпактно и A в пространстве l_p. В силу неравенства (23) A является ε - сетью для K. Из следствия 1 к теореме Хаусдорфа следует предкомпактность K. □

Замечание 2. *Для предкомпактности множества $K \subset l_\infty$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\exists M: \sup_{1 \leqslant i \leqslant \infty}|\xi_i| < M \ \forall x \in K,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon): \sup_{n+1 \leqslant i \leqslant \infty}|\xi_i| < \varepsilon \ \forall x \in K.$$

1.7.3 Компакт в $C[a,b]$

Прежде всего, дадим определение равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций из множества в пространстве непрерывных функций.

Определение 16. *Пусть $K \subset C[a,b]$. Функции из множества K называются*

1. *равномерно ограниченными, если*

$$\exists c_0 : \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \leqslant c_0 \ \text{ для всех } \ x \in K; \tag{24}$$

2. *равностепенно непрерывными, если*

$$\begin{array}{l} \text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такой, что}: \\ \forall x \in K \ \forall t_1, t_2 \in [a,b], |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon. \end{array} \tag{25}$$

Ясно, что равномерная ограниченность всех функций из множества K есть просто ограниченность K по метрике $C[a,b]$. В то же время, равностепенная непрерывность этих функций - это существенно более жесткое требование, чем равномерная непрерывность каждой функции, которая по теореме Кантора следует из ее непрерывности на отрезке. Следует обратить внимание на то, что для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать **единое** $\delta > 0$ не только для всех $t_1, t_2 \in [a,b]$, но и для всех функций из K.

Утверждение 13. *(***теорема Арцела***)*

Для предкомпактности множества $K \subset C[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы функции множества K были равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными.

Доказательство. Необходимость

Пусть множество K предкомпактно. Тогда оно ограничено: существует шар $B(x_0, r) \supset K$. Пусть $d = \rho(x_0, 0)$, тогда для любой точки $x \in K$ справедливо неравенство $\rho(x, 0) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, 0) < r + d$, т.е. $K \subset B(0, r+d)$. Но это означает, что $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant r + d$ для всех $x \in K$, так что условие (24) выполнено с $c_0 = r + d$.

Докажем равностепенную непрерывность функций из K. Зададим $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 4 существует конечная $\varepsilon/3$-сеть для множества K, обозначим ее $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Функции $x_i(t)$ для любого i непрерывны на отрезке $[a,b]$, поэтому они равномерно непрерывны (теорема Кантора):

$$\exists \delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0 : \ \forall t_1, t_2 \in [a,b], |t_1 - t_2| < \delta_i \Rightarrow |x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$. Возьмем произвольную функцию $x(t) \in K$. Для нее найдется функция $x_i(t)$ из $\varepsilon/3$-сети такая, что

$$\rho(x, x_i) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

Если теперь взять произвольные точки $t_1, t_2 \in [a,b] : \ |t_1 - t_2| < \delta$, то из (26) и (27) следует:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x(t_2)| < 2\rho(x, x_i) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность функций из K установлена.

Достаточность.

Пространство $C[a,b])$ – полное, поэтому для доказательства предкомпактности K достаточно построить для K конечную ε-сеть. Согласно условиям (24) и (25) для всех $x \in K$ и всех $t \in [a,b]$ справедливо неравенство $|x(t)| \leqslant c_0$ и существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ при } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси x точками $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ на промежутки длины меньше δ и проведем через эти точки вертикальные прямые. Отрезок $[-c_0, c_0]$ на оси y разобьем точками $-c_0 = y_1 < y_2 < \dots < y_m = c_0$ на промежутки длины меньше $\varepsilon/5$ и проведем через эти точки горизонтальные прямые. В результате на прямоугольнике $[a,b] \times [-c_0, c_0]$ построена прямоугольная сетка ω с узлами (t_i, y_j). Обозначим через A множество непрерывных и кусочно-линейных функций, линейных на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ и принимающих значения y_j в узлах t_i. Графики функций из множества A – это ломаные линии, проходящие через узлы сетки (t_i, y_j). Очевидно, что A содержит конечное число элементов. Докажем, что множество A является ε-сетью для K.

Возьмем произвольную функцию $x(t)$ из K. По построению сетки ω для нее существует кусочно-линейная функция $y(t)$ из A, которая в узлах t_i уклоняется от $x(t)$ меньше, чем на $\varepsilon/5$. Так как

$$|x(t_i) - y(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5},\ |x(t_{i+1}) - y(t_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5},\ |x(t_i) - x(t_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5},$$

то

$$|y(t_i) - y(t_{i+1})| \leqslant |x(t_i) - y(t_i) + |x(t_i) - x(t_{i+1})| + |x(t_{i+1}) - y(t_{i+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Между точками t_i и t_{i+1} функция $y(t)$ линейна, поэтому

$$|y(t_i) - y(t)| < \frac{3\varepsilon}{5} \text{ при } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Пусть теперь t – произвольная точка отрезка $[a,b]$ и пусть она принадлежит отрезку разбиения $[t_i, t_{i+1}]$. Тогда

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - y(t_i)| + |y(t_i) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Итак, множество A является конечной ε-сетью для K, откуда следует предкомпактность K. □

Следствие 7. *Пусть функции множества $K \subset C[a,b]$ равномерно ограничены и удовлетворяют "равностепенному" условию Гёльдера:*

$$\begin{gathered} \textit{существуют постоянные } L > 0 \textit{ и } \alpha \in (0,1], \textit{ такие что} \\ \forall x \in K,\ \forall t_1, t_2 \in [a,b] \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|^\alpha. \end{gathered} \tag{28}$$

Тогда множество K предкомпактно в $C[a,b]$).

Доказательство. Достаточно заметить, что из условия (28) следует равностепенная непрерывность функций (25) с $\delta(\varepsilon) = \left(\dfrac{\varepsilon}{L}\right)^{1/\alpha}$. □

Следствие 8. *Пусть функции множества $K \subset C[a,b]$ равномерно ограничены и имеют на интервале (a,b) равностепенно ограниченные производные:*

$$\exists L:\ \forall x \in K,\ \forall t \in (a,b) \Rightarrow |x'(t)| \leqslant L. \tag{29}$$

Тогда множество K предкомпактно в $C[a,b]$).

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа конечных приращений $x(t_1) - x(t_2) = x'(\xi)(t_1 - t_2)$ где точка ξ лежит между t_1 и t_2, поэтому из условия (29) следует (28) с $\alpha = 1$. □

1.7.4 Компакт в $L_p(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$

Далее будем считать, что функции из пространства $L_p(a,b)$ продолжены нулем вне промежутка (a,b). Продолженные функции принадлежат $L_p(\tilde{a},\tilde{b})$ для любого промежутка $(\tilde{a},\tilde{b})$. Будем использовать обозначение

$$x^{+\Delta t}(t) = x(t+\Delta t).$$

Ясно, что если $x(t) \in L_p(a,b)$ и продолжена нулем вне (a,b), то функция $x^{+\Delta t}(t)$ также принадлежит $L_p(a,b)$.

Определение 17. *Пусть $K \subset L_p(a,b)$. Функции из множества K называются*

1. *равномерно ограниченными в $L_p(a,b)$, если существует постоянная c_0 такая, что*

$$\rho(x,0) = \Big(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant c_0 \text{ для всех } x \in K; \tag{30}$$

2. *равностепенно непрерывными в $L_p(a,b)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:*

$$\forall x \in K \text{ и } 0 < \Delta t < \delta \Rightarrow \Big(\int\limits_a^b |x(t+\Delta t) - x(t)|^p dt\Big)^{1/p} < \varepsilon. \tag{31}$$

Утверждение 14. *(теорема Рисса) Для предкомпактности множества $K \subset L_p(a,b)$ $1 \leqslant p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функции множества K были равномерно ограниченными (30) и равностепенно непрерывными (31) в пространстве $L_p(a,b)$.*

Доказательство. Для простоты изложения возьмем $[a,b] = [0,1]$.

Необходимость

Пусть множество K относительно компактно. Тогда оно ограничено и, как следствие, выполнено условие (30). Докажем равностепенную в среднем непрерывность функций из K. Зададим $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 4 существует конечная $\varepsilon/3$-сеть для множества K, обозначим ее $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Функции из $x_i(t) \in L_p[0,1]$ непрерывны в среднем, поэтому для любого i существует $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0$ такой, что

$$0 < \Delta t < \delta_i \Rightarrow \rho(x_i^{+\Delta t}, x_i) = \Big(\int\limits_0^1 |x_i(t+\Delta t) - x_i(t)|^p dt\Big)^{1/p} < \varepsilon/3. \tag{32}$$

Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$. Возьмем произвольную функцию $x(t) \in K$. Для нее найдется функция $x_i(t)$ из $\varepsilon/3$-сети такая, что

$$\rho(x, x_i) = \Big(\int\limits_0^1 |x(t) - x_i(t)|^p dt\Big)^{1/p} < \varepsilon/3. \tag{33}$$

Пусть $0 < \Delta t < \delta$. Проведем оценки, пользуясь неравенствами (32) и (33):

$$\rho(x^{+\Delta t}, x) \leqslant \rho(x^{+\Delta t}, x_i^{+\Delta t}) + \rho(x_i^{+\Delta t}, x_i) + \rho(x_i, x) < \rho(x^{+\Delta t}, x_i^{+\Delta t}) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Но функции $x(t)$ и $x_i(t)$ равны нулю вне $[0,1]$, поэтому

$$\rho(x^{+\Delta t}, x_i^{+\Delta t}) = \Big(\int\limits_0^1 |x(t+\Delta t) - x_i(t+\Delta t)|^p dt\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_{\Delta t}^1 |x(t) - x_i(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x, x_i) < \varepsilon/3.$$

Из двух последних оценок следует, что для всех $x \in K$ при $0 < \Delta t < \delta$ справедливо неравенство $\rho(x^{+\Delta t}, x) < \varepsilon$. Равностепенная непрерывность функций из K установлена.

Достаточность.

Как и ранее, считаем все функции продолженными нулем вне отрезка $[0,1]$. Для произвольной функции $x(t) \in L_p[0,1]$ определим так называемую среднюю функцию Стеклова

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau.$$

Пусть p и q – сопряженные показатели: $1/p + 1/q = 1$. Используя неравенство Гельдера, выведем следующие оценки для произвольного $t \in [0,1]$:

$$|x_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h} \Big(\int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau \Big)^{1/q} \Big(\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau \Big)^{1/p} \leqslant \Big(\frac{1}{2h}\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{0}^{1} |x(\tau)|^p d\tau \Big)^{1/p} \quad (34)$$

$$|x_h(t+\Delta t) - x_h(t)| = \frac{1}{2h} \Big| \int\limits_{t+\Delta t-h}^{t+\Delta t+h} x(\tau) d\tau - \int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau) d\tau \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau+\Delta t) - x(\tau)| d\tau \leqslant \Big(\frac{1}{2h}\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau+\Delta t) - x(\tau)|^p d\tau \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{1}{2h}\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{0}^{1} |x(\tau+\Delta t) - x(\tau)|^p d\tau \Big)^{1/p} \quad (35)$$

Из условий (30), (31) и неравенств (34), (35) следует, что средние функции из множества $K_h = \{x_h(t),\, x(t) \in K\}$ при каждом фиксированном параметре усреднения $h > 0$ являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными (в пространстве $C[0,1]$). Согласно теореме 13 множество K_h относительно компактно в $C[0,1]$.

Для непрерывных на $[0,1]$ функций справедливо неравенство

$$\Big(\int\limits_{0}^{1} |x(t)|^p dt \Big)^{1/p} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|,$$

поэтому из сходимости в метрике пространства $C[0,1]$ следует сходимость в метрике $L_p[0,1]$, а значит, из относительной компактности K_h в $C[0,1]$ его относительная компактность в $L_p[0,1]$.

Докажем, что K_h является ε-сетью для множества K. Пусть $x(t)$ – произвольная функция из K. Для почти всех $t \in [0,1]$ справедливо следующее неравенство:

$$|x(t) - x_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)| d\tau = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{1}{2h}\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau \Big)^{1/p}.$$

Проинтегрировав это неравенство и воспользовавшись теоремой Фубини и условием (31), при $0 < \tau < \delta$ получим:

$$\int\limits_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{2h} \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p d\tau \Big) dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \Big(\int\limits_0^1 |x(t) - x(t+\tau)|^p dt \Big) d\tau < \frac{1}{2h} \varepsilon^p \int\limits_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p$$

Таким образом, для любой функции $x(t) \in K$ ее средняя функция $x_h(t) \in K_h$ удовлетворяет неравенству $\rho(x, x_h) < \varepsilon$, так что K_h – это ε-сеть для K. Ранее была установлена относительная компактность K_h, поэтому из следствия 1 к теореме 4 следует относительная компактность K. $\square$

1.8 Примеры применения принципа сжимающих отображений

Принцип сжимающих отображений позволяет единым образом доказывать теоремы существования и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. Мы рассмотрим примеры применения этого принципа к системе линейных алгебраических уравнений, к задаче Коши для ОДУ первого порядка и к интегральному уравнению Вольтерры.

1.8.1 Система линейных алгебраических уравнений

Пусть $C = \{c_{ij}\}$ – $n \times n$ матрица с вещественными элементами c_{ij}, обладающая свойством строгого диагонального преобладания по строкам:

$$|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| \ \forall i = 1, 2, \ldots n. \tag{36}$$

Тогда система уравнений $Cx = d$ имеет единственное решение при любой правой части $d \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $C_0 = \mathrm{diag}(c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn})$ – диагональная матрица, составленная из диагональных элементов C. В силу условия (36) $|c_{ii}| > 0 \ \forall i$, поэтому матрица C_0 не вырождена. Запишем систему $Cx = d$ в эквивалентном виде:

$$x = x - C_0^{-1}(Cx - d)$$

и докажем, что отображение A, определенное равенством $Ax = x - C_0^{-1}(Cx - d)$ является сжимающим в пространстве n-мерных векторов с метрикой $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$. Тогда сформулированный результат будет следовать из теоремы 11.

Условие (36) можно записать в виде:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j \neq i} \frac{|c_{ij}|}{|c_{ii}|} \leqslant \alpha \text{ с некоторым } 0 < \alpha < 1.$$

Использовав это неравенство, получим:

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(x_i - y_i) - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij}}{c_{ii}} (x_j - y_j)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big| \sum_{j \neq i} \frac{c_{ij}}{c_{ii}} (x_j - y_j) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j \neq i} \frac{|c_{ij}|}{|c_{ii}|} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j| \leqslant \alpha \rho(x, y).$$

Таким образом, отображение A – сжимающее и утверждение о существовании решения системы линейных алгебраических уравнений следует из теоремы 11. $\square$

1.8.2 Задача Коши для ОДУ первого порядка

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ x \neq x_0; \ \ y(x_0) = y_0, \tag{37}$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области $G \in \mathbb{R}^2$, содержащей точку (x_0, y_0). Предположим, также, что $f(x, y)$ удовлетворяет в G условию Липшица по переменной y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Докажем, что задача (37) имеет единственное решение $y = \varphi(x)$ на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant d$.

Задача (37) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{38}$$

Пусть $\bar{G}' \subset G$ – некоторая ограниченная замкнутая подобласть G, содержащая точку (x_0, y_0). В силу непрерывности функции $f(x, y)$ она ограничена в $\bar{G}' \subset G$: $|f(x, y) \leqslant K \ \forall (x, y) \in \bar{G}'$. Пусть $d > 0$ настолько мало, что

1. $(x, y) \in \bar{G}'$, $|x - x_0| \leqslant d \Rightarrow |y - y_0| \leqslant Kd$;
2. $Ld < 1$.

Обозначим через C^* множество непрерывных на отрезке $[x_0 - d, x_0 + d]$ функций, таких что $|y(x) - y_0| \leqslant Kd$. Наделим C^* метрикой пространства $C[x_0 - d, x_0 + d]$. Тогда C^* – замкнутое подмножество полного метрического пространства $C[x_0 - d, x_0 + d]$ – само является полным метрическим пространством.

Правая часть уравнения (38) определяет отображение A. Докажем, что оно отображает C^* в себя и является сжимающим. Тогда утверждение о существовании решения задачи (37) будет следовать из принципа сжимающих отображений (теорема 11).

$A(C^*) \subset C^*$, так как для $y \in C^*$

$$|x - x_0| \leqslant d \Rightarrow |Ay(x) - y_0| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \leqslant K|x - x_0| \leqslant Kd.$$

A – сжимающее отображение, потому что для любых $y_1, y_2 \in C^*$ справедлива оценка:

$$|x - x_0| \leqslant d \Rightarrow |Ay_1(x) - Ay_2(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} \big(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\big)dt| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} L\,|y_1(t)) - y_2(t)|dt \leqslant Ld \max_{x \in [x_0 - d, x_0 + d]} |y_1(x)) - y_2(x)| = Ld\,\rho(y_1, y_2).$$

1.8.3 Уравнение Вольтерры

Пусть функция $K(s, t)$ определена и непрерывна в треугольнике $\triangle = \{(s, t) : a \leqslant t \leqslant s \leqslant b\}$, $\max\limits_{(s,t) \in \triangle} |K(s, t)| = K$ и задана функция $f(s) \in C[a, b]$. Будем искать решение $x(s) \in C[a, b]$ интегрального уравнения Вольтерры

$$x(s) = \int\limits_{a}^{s} K(s, t)x(t)dt + f(s) \ \text{ при } a \leqslant s \leqslant b. \tag{39}$$

Отображение A, определенное правой частью этого уравнения,

$$Ax(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)dt + f(s),$$

действует из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Докажем, что найдется натуральное число n такое, что A^n – сжимающее отображение.

Для произвольных функций $x_1, x_2 \in C[a,b]$ и любого $s \in [a,b]$ последовательно выводим следующие оценки:

$$|Ax_1(s) - Ax_2(s)| \leqslant K \int_a^s |x_1(t) - x_2(t)|dt \leqslant K(s-a) \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_1(t) - x_2(t)| =$$

$$= K(s-a)\rho(x_1, x_2);$$

$$|A^2x_1(s) - A^2x_2(s)| \leqslant K \int_a^s |Ax_1(t) - Ax_2(t)|dt \leqslant K\rho(x_1,x_2) \int_a^s (t-a)dt =$$

$$= K\frac{(s-a)^2}{2}\rho(x_1, x_2);$$

$$\ldots$$

$$|A^nx_1(s) - A^nx_2(s)| \leqslant K \int_a^s |A^{n-1}x_1(t) - A^{n-1}x_2(t)|dt \leqslant K\frac{(s-a)^n}{n!}\rho(x_1,x_2).$$

Отсюда следует, что

$$\rho(A^nx_1, A^nx_2) = \max_{s \in [a,b]} |A^nx_1(s) - A^nx_2(s)| \leqslant K\frac{(b-a)^n}{n!}\rho(x_1,x_2).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(b-a)^n}{n!} = 0$, то найдется n, при котором $K\dfrac{(b-a)^n}{n!} < 1$, т.е. отображение A^n – сжимающее. Теперь из теоремы 12 следует существование единственного решения уравнения (39).

1.9 Задачи и упражнения

1. Доказать, что в пространстве m-мерных действительных векторов функция

$$\rho(x,y) = \big(\sum_{i=1}^m |\xi_i - \eta_i|^p\big)^{1/p}$$

для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ является метрикой при любом $1 \leqslant p < \infty$.

2. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и l_p – множество последовательностей действительных или комплексных чисел таких, что для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^\infty |\xi_i|^p$. Для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ положим

$$\rho(x,y) = \big(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i - \eta_i|^p\big)^{1/p}.$$

Доказать, что это метрика.

3. Доказать, что пространство c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей с метрикой (17) является сепарабельным и полным.

4. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. На множестве интегрируемых по Риману (в собственном смысле) функций на отрезке $[a, b]$ зададим
$$\rho(x, y) = \Big(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}$$
Доказать, что это метрика.

5. Пусть Γ – простая, гладкая кривая на плоскости, $\Gamma = \{\overline{r} = \overline{r}(t), a \leqslant t \leqslant b\}$, $\overline{r} = (x, y)$ – ее гладкая параметризация. Доказать, что длина участка кривой между точками кривой $c_1 = \overline{r}(t_1)$ и $c_2 = \overline{r}(t_2)$
$$\rho(c_1, c_2) = \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt \Big)^{1/2}$$
определяет метрику на Γ.

6. Как связаны множества $\mathrm{int}(A \cup B)$ и $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$?

7. Как связаны множества $\mathrm{int}(A \cap B)$ и $\mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$?

8. Доказать сепарабельность пространств l_p при $1 \leqslant p < \infty$.

   Указание: использовать множество (16)

9. Пусть X – некоторое множество, содержащее больше одного элемента. Определим функцию
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ если } x \neq y \\ 0 \text{ если } x = y \end{cases}$$
Доказать, что $\rho(x, y)$ - это метрика.

   Какими свойствами обладает построенное пространство: сходимость и фундаментальность последовательностей, открытые и замкнутые множества, полнота, сепарабельность?

10. Пусть $B(a, b)$ – пространство всех ограниченных на интервале (a, b) функций с метрикой $\rho(x, y) = \sup\limits_{a<t<b} |x(t) - y(t)|$. Доказать, что это полное пространство.

11. Пусть $BC(a, b)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных на интервале (a, b) функций с метрикой $\rho(x, y) = \sup\limits_{a<t<b} |x(t) - y(t)|$. Доказать, что это полное пространство.

12. Пусть $C^1[a, b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой
$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|.$$
Доказать, что это полное пространство.

13. Пусть M – некоторое множество в метрическом пространстве (X, ρ) и $x_0 \in X$ – фиксированная точка. Расстоянием между x_0 и M называется величина $\rho(x_0, M) = \inf\limits_{y \in M} \rho(x_0, y)$. Доказать, что если M – компактное множество, то существует точка $y_0 \in M$ такая, что $\rho(x_0, y_0) = \rho(x_0, M)$.

14. Пусть (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) – два метрических пространства, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение X на все Y. Доказать, что если множество E плотно в X, то $f(E)$ плотно в Y.

15. Пусть (X, ρ_x) – метрическое пространство. Диаметр множества $A \subset X$ определяется равенством
$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$
Доказать, что диаметры множества A и его замыкания $\bar{A}$ равны.

16. Пусть A, B – два множества в метрическом пространстве (X, ρ). Расстоянием между A и B называется величина
$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$
Доказать, что если A – компактное множество, а B –замкнутое множество и $A \cap B = \emptyset$, то $\rho(A, B) > 0$.

17. Привести пример **замкнутых** множеств A и B таких, что $A \cap B = \emptyset$, но $\rho(A, B) = 0$.

18. Пусть два непустых множества удовлетворяют условию $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ (их замыкания не пересекаются). Доказать, что $A \cup B$ – несвязное множество.

19. Пусть A и B – связные множества метрического пространства и $A \cap B \neq \emptyset$. Доказать, что $A \cap B$ – связное множество.

20. Пусть A – связное множество метрического пространства и $A \subset B \subset \bar{A}$, где $\bar{A}$ – замыкание множества A. Доказать, что B – связное множество.

21. Пусть $C = \{c_{ij}\}$ – $n \times n$ матрица с вещественными элементами c_{ij}, обладающая свойством строгого диагонального преобладания **по столбцам**:
$$|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ji}| \ \forall i = 1, 2, \ldots n. \tag{40}$$
Доказать, что система уравнений $Cx = d$ имеет единственное решение при любой правой части $d \in \mathbb{R}^n$.

22. Привести пример полного метрического пространства (X, ρ) и **нерастягивающего** отображения
$$A: X \to X, \quad \rho(Ax, Ay) \leqslant \rho(x, y) \ \ \forall x, y \in X,$$
у которого нет неподвижной точки.

23. Привести пример полного метрического пространства (X, ρ) и отображения
$$A: X \to X, \quad \rho(Ax, Ay) < \rho(x, y) \ \ \forall x, y \in X,$$
у которого нет неподвижной точки.

1.10 *Сводка определений и основных результатов*

Метрика и метрическое пространство

1. Для произвольного множества X метрика - это функция $\rho(.,.) : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:
   - $\rho(x, y) \geqslant 0 \ \forall x, y \in X$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   - $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
   - $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

   Непустое множество X, в котором задана метрика – метрическое пространство (X, ρ).

2. Если $X_1 \subset X$, то (X_1, ρ) – подпространство пространства (X, ρ).

Последовательности

1. Последовательность $\{x_n\} \in X$ элементов пространства X называется
   - ограниченной, если существует элемент $a \in X$ и число $R > 0$ такие, что $\rho(x_n, a) \leqslant R$;
   - сходящейся, если существует элемент $x \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$;
   - фундаментальной, если $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$.
2. Если $\{x_n\}$ – последовательность в X и $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \cdots$ – подпоследовательность натуральных чисел, то последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$: $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

Утверждение (Основные свойства сходящихся последовательностей)

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел, ограничена и фундаментальна.
2. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.
3. Если последовательность фундаментальна в X и какая-либо ее подпоследовательность сходится, то и вся последовательность сходится к тому же пределу.
4. Если $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, то $\rho(x, y) = \lim \rho(x_n, y_n)$.

Открытые и замкнутые множества

1. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$ в метрическом пространстве $X = (X, \rho)$ называется множество $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$.
2. Точка $x \in A$ множества $A \subset X$ называется его внутренней точкой, если существует открытый шар $B(x, r) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначатся $\mathrm{int}A$.
3. Множество A называется открытым, если $\mathrm{int}A = A$.
4. Любое открытое множество $B \subset X$, содержащее точку $a \in X$, называется окрестностью a.
5. Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если любая ее окрестность $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}, r > 0$, содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от a: $B(a, r) \cap (A \backslash a) \neq \emptyset \ \forall r > 0$.
6. Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Утверждение (Свойства множеств)

1. Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда замкнуто его дополнение $X \setminus A$.
2. Пустое множество $\emptyset$ и все пространство X являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.
3. Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.
4. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.
5. Для того, чтобы $a \in X$ была предельной точкой множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \, \forall n$, сходящаяся к a.
6. Точки множества A, которые не являются предельными для A, называются изолированными. Объединение A и всех его предельных точек образует замыкание $\overline{A}$ множества A.

Сепарабельность и полнота

1. Множество A называется плотным в множестве B, если $B \subset \overline{A}$.
2. Множество A называется всюду плотным в пространстве X, если $X = \overline{A}$.

3. Пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.
4. Пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.

Утверждение (Критерий полноты: принцип вложенных шаров)
Пусть в полном метрическом пространстве (X, ρ) задана последовательность вложенных, замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

$$\bar{B}(a_{k+1}, r_{k+1}) \subset \bar{B}(a_k, r_k) \; \forall k, \; r_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда существует единственная точка $a \in \bigcap\limits_k \bar{B}(a_k, r_k)$.

Обратно, если в метрическом пространстве (X, ρ) любая последовательность вложенных, замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение, то это пространство полное.

Изометрия и пополнение

1. Метрические пространства (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) называются изометричными, если существует биективное (взаимно однозначное) отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что

$$\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y) \; \forall x, y \in X_1.$$

   Отображение f называется изометрией.

2. Метрическое пространство (X, ρ) называется пополнением метрического пространства (X_0, ρ_0), если
   (a) пространство (X, ρ) – полное;
   (b) существует всюду плотное в X подмножество $\tilde{X}$ такое, что пространства (X_0, ρ_0) и $(\tilde{X}, \rho)$ изометричны.

Утверждение (Теорема о пополнении)
Всякое метрическое пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрии.

Ограниченные и компактные множества

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

1. Множество $K \subset X$ называется ограниченным, если существует шар $B(a, r) \subset X$ с центром в некоторой точке $a \in X$ и конечного радиуса $r > 0$, содержащий K.
2. Множество $K \subset X$ называется относительно компактным (предкомпактным), если любая последовательность $\{x_n\} \subset K$ содержит сходящуюся подпоследовательность.
3. Множество $K \subset X$ называется компактным, если любая последовательность $\{x_n\} \subset K$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из K.
4. Компактное метрическое пространство называется компактом.
5. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Множество $A_\varepsilon \subset X$ называется ε-сетью для множества $B \subset X$, если для любого элемента $x \in B$ найдется $y \in A_\varepsilon$ такой, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Утверждение (Теорема Хаусдорфа)

Для относительной компактности $K \subset X$ необходимо, а в случае полноты пространства X и достаточно, чтобы у множества K для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть (т.е. ε-сеть, состоящая из конечного числа элементов).

Непрерывные отображения метрических пространств

1. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, если выполнено одно из следующих, эквивалентных, условий:
   - для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in X : \rho_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$$

   - для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\} \subset Y$ сходится к $f(x_0)$.

2. Если M – это множество в X и отображение $f : X \to Y$ непрерывно в каждой точке M, то оно называется непрерывным на множестве M.
3. Отображение $f : X \to Y$ называется равномерно непрерывным на X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что
$$\forall x, y \in X : \rho_x(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
4. Отображение $f(x)$, определенное в метрическом пространстве и со значениями в $\mathbb{R}$, называется функционалом.

Утверждение (Свойства непрерывных отображений компактов)

1. Отображение f метрического пространства (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества является открытым множеством.
2. Непрерывный образ компакта есть компакт.

   Следствие (теорема Вейерштрасса): непрерывный на метрическом компакте функционал ограничен и достигает своих максимального и минимального значений.
3. Непрерывное отображение метрического компакта (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) равномерно непрерывно.

   Следствие (теорема Кантора): непрерывный на метрическом компакте функционал равномерно непрерывен.

Непрерывные отображения связных множеств

Множество K метрического пространства называется несвязным, если существуют два непересекающихся открытых множества C_1 и C_2, каждое из которых пересекается с K и объединение которых содержит K. В противном случае множество K – связное.

Утверждение

Пусть (X, ρ_x), (Y, ρ_y) – два метрических пространства, $K \subset X$ – связное множество и отображение $f : X \to Y$ непрерывно на K. Тогда $f(K)$ – связное множество.

Следствие (теорема Больцано-Коши): непрерывный на связном метрическом компакте (K, ρ) функционал $f(x)$ принимает все значения из отрезка $[m, M]$, где $m = \min\limits_{x\in K} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in K} f(x)$.

Сжимающие отображения и неподвижные точки

1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Отображение $A : X \to X$ называется сжимающим (или отображением сжатия), если
$$\exists \alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in X \Rightarrow \rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y).$$
2. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $A : X \to X$, если $Ax = x$.

Утверждение (Неподвижные точки сжимающих отображений)

1. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство и $A : X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда A имеет единственную неподвижную точку.
2. Пусть n-ая степень отображения $A : X \to X$, определенная равенством $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{n}, n \geqslant 1$, является отображением сжатия в X. Тогда A имеет единственную неподвижную точку.

Пример: Пусть дано метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел и
$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m} & n \neq m, \\ 0 & n = m. \end{cases}$$
Определим последовательность вложенных шаров с центром в точке n и радиуса $1 + \dfrac{1}{2n}$: $B(n, 1 + \dfrac{1}{2n}) = \{m : \rho(m, n) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}\}, n = 1, 2, \dots$. Шары $B(n, 1 + \dfrac{1}{2n})$ замкнуты и вложены друг в друга, пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ - полно, так как каждая фундаментальная последовательность сходится в этом пространстве. Но условие стремления к нулю радиусов шаров нарушено, поэтому пересечение вложенных шаров пусто.

§2 Линейные нормированные и гильбертовы пространства

2.1 Линейное пространство

Пусть далее F означает числовое поле $\mathbb{R}$ действительных чисел или $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Определение 1. *(***Линейное пространство***)*
Множество X, элементы которого назовем векторами, называется линейным (или векторным) пространством над полем F, если в нем заданы две операции: сложения $x + y$ векторов $x, y \in X$ и умножения λx вектора $x \in X$ на число $\lambda \in F$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

- *коммутативность сложения* $x + y = y + x$;
- *ассоциативность сложения* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- *ассоциативность умножения* $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
- *дистрибутивность сложения* $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
- *дистрибутивность умножения* $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- *существование нулевого вектора* 0: $x + 0 = x$;
- *существование отрицательного вектора* $-x$: $x + (-x) = 0$;
- *умножение вектора на* 1: $1\,x = x$.

Рассмотренные ранее метрические пространства $\mathbb{R}^n$, $C[0, 1]$, $l_p\, \forall p \geqslant 1$ являются линейными, т.е. линейными метрическими пространствами.

Определение 2. (Линейно независимые системы; размерность пространства)

1. *Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется вектор*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n,\ \lambda_i \in F. \tag{1}$$

Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.

2. *Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, если существует нетривиальная линейная комбинация (1), равная нулю, и линейно независимы, если только тривиальная комбинация (1) равна нулю.*

3. *Произвольная система векторов из X называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.*

4. *Линейное пространство X имеет размерность n, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторы линейно зависимы.*

5. *Линейное пространство X – бесконечномерное, если для любого натурального n в нем существует n линейно независимых векторов.*

6. *Если линейное пространство X над полем F имеет размерность n, то любая линейно независимая система из n его векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ образует* **базис** *X: любой вектор $x \in X$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ x_i \in F$.*

Определение 3. (**Подпространство и линейная оболочка**)

1. *Непустое множество $X_0 \subset X$ в линейном пространстве X называется подпространством, если для любых $x, y \in X_0$ и $\lambda \in F$ справедливы включения $x + y \in X_0$, $\lambda x \in X_0$. Каждое подпространство $X_0 \subset X$ является линейным пространством относительно операций, определенных на всем пространстве X.*

2. *Наименьшее подпространство X_0, содержащее систему векторов $V \subset X$, называется линейной оболочкой этой системы и обозначается $\operatorname{span} V$. Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ состоит из всех векторов пространства X таких, которые представимы в виде конечной линейной комбинации: $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, где $\lambda_i \in F$ и $v_i \in X$.*

Определение 4. (**Изоморфные пространства**)
Пусть X_1 и X_2 – два линейных пространства над полем F.

1. *Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется линейным, если $f(\alpha + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $x, y \in X_1$ и любых чисел $\alpha, \beta \in F$.*

2. *Линейное взаимно однозначное отображение $f : X_1 \to X_2$ называется изоморфным, или изоморфизмом пространств X_1 и X_2.*

2.2 Линейное нормированное пространство

Определение 5. (**Аксиомы нормы**)
Пусть на линейном пространстве X над числовым полем F определена вещественнозначная функция $\|x\|$, $\forall x \in X$, удовлетворяющая для всех элементов $x, y \in X$ и чисел $\lambda \in F$ следующим условиям (аксиомам нормы):

1. $\|x\| \geqslant 0$ *и* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*нулевой элемент* X);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Тогда эта функция называется нормой, а линейное пространство X с нормой $\|.\|$ – нормированным пространством.

Как и в случае метрических пространств, если необходимо подчеркнуть, что на X определена норма $\|.\|$, мы будем писать $(X, \|.\|)$.

Легко видеть, что нормированное пространство является (линейным) метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y, \in X$. В частности, $\rho(x, 0) = \|x\|$, т.е. норма – это расстояние до нулевого элемента в соответствующей метрике.

Примерами линейных нормированных пространств являются все рассмотренные в 1.6 линейные метрические пространства $\mathbb{R}^n$, s, c, l_p, $C[a, b]$, $L_p(a, b)$.

Лемма 1. *Если в линейном метрическом пространстве (X, ρ) метрика удовлетворяет условиям*

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \ \forall x, y, z \in X, \quad \rho(0, \lambda x) = |\lambda| \rho(0, x) \ \forall x \in X \ \forall \lambda \in F,$$

то в X можно определить норму равенством $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Доказательство. Первая аксиома нормы для $\|x\| = \rho(x, 0)$ выполняется в силу первой аксиомы метрики. Аксиома положительной однородности следует из условия $\rho(0, \lambda x) = |\lambda| \rho(0, x)$. Наконец, из неравенства треугольника для метрики и условия $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ следует

$$\|x + y\| = \rho(x + y, 0) \leqslant \rho(x + y, y) + \rho(y, 0) = \rho(x, 0) + \rho(y, 0) = \|x\| + \|y\|.$$

$\square$

Отмеченная выше связь между нормой и метрикой, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, позволяет легко перенести большинство понятий и результатов теории метрических пространств на случай нормированных пространств. Далее многие из них мы перечисляем без доказательства.

Определение 6. *(***Ограниченные, сходящиеся и фундаментальные последовательности***)*

1. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ элементов нормированного пространства X называется сходящейся, если существует элемент $x \in X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

2. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется ограниченной, если существует число $R > 0$ такое, что $\|x_n\| \leqslant R \, \forall x \in X$.*

3. *Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется фундаментальной если $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.*

Справедливы следующие утверждения, которые являются простыми следствиями доказанных утверждений для последовательностей в метрическом пространстве:

Лемма 2. *(***Основные свойства сходящихся последовательностей***)*

1. *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

3. *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

4. *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

5. *Если последовательность фундаментальна в X и какая-либо ее подпоследовательность сходится, то и вся последовательность сходится к тому же пределу.*

6. *Норма является непрерывной функцией: если $x = \lim x_n$, то $\|x\| = \lim \|x_n\|$.*

В дополнение к перечисленным утверждениям приведем еще два свойства последовательностей, в которых используется линейность пространства:

Лемма 3.

1. *Если $x_n \to x$ в X и $\lambda_n \to \lambda$ в F, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;*

2. *Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в X, то $x_n + y_n \to x + y$.*

Доказательство. 1. Поскольку числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к конечному пределу λ, то она ограничена: $\exists M > 0 : \|\lambda_n\| \leqslant M \; \forall n$. Отсюда и из неравенства треугольника для нормы легко следует сформулированное утверждение:

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leqslant |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

2. Используя в очередной раз неравенство треугольника, получим

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

□

Определение 7. *(***Открытые и замкнутые множества***)*

1. *Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$ в нормированном пространстве $X = (X, \rho)$ называется множество $B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$.*

2. *Точка $x \in A$ множества $A \subset X$ называется его внутренней точкой, если существует открытый шар $B(x,r) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначатся* $\mathrm{int}A$.

3. *Множество A называется открытым, если* $\mathrm{int}A = A$.

4. *Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от a:*

$$B(a,r) \cap (A \setminus a) \neq \emptyset \; \forall r > 0.$$

5. *Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки*

Как и выше, приведенные далее утверждения следуют из соответствующих утверждений для метрических пространств.

Лемма 4. *(***Свойства открытых и замкнутых множеств***)*

1. *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда замкнуто его дополнение $X \setminus A$.*

2. *Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.*

3. *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

4. *Для того, чтобы $a \in X$ была предельной точкой множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \, \forall n$, сходящаяся к a.*

Определение 8. *(***Полные пространства, изометрия, пополнение***)*

1. *Нормированное пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел. Полное нормированное пространство принято называть пространством Банаха, или банаховым пространством.*

2. *Нормированные пространства $(X_1, \|.\|_1)$ и $(X_2, \|.\|_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$ (см. определение 4), сохраняющий норму:*

$$\|f(x)\|_2 = \|x\|_1 \; \forall x \in X_1.$$

3. *Нормированное пространство $(X, \|.\|_X)$ называется пополнением нормированного пространства $(X_0, \|.\|_{X_0})$, если*

   - *пространство $(X, \|.\|_X)$ – полное. т.е. банахово;*
   - *существует всюду плотное в X подпространство $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ такое, что $(X_0, \|.\|_{X_0})$ и $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ изометрически изоморфны.*

Пополнение (X, ρ) является в определенном смысле минимальным полным пространством, содержащим (X_0, ρ_0).

Теорема 1. *Всякое нормированное пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.*

Доказательство. Пусть X_0 – неполное нормированное пространство с нормой $\|.\|$. Поскольку X_0 является метрическим пространством с метрикой $\rho_0(x,y) = \|x-y\|$, то согласно теореме 3 оно имеет пополнение – метрическое пространство (X,ρ). Напомним, что элементы X – это классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, и если ξ, η – два элемента X и $\{x_k\} \in \xi$, $\{y_k\} \in \eta$ – фундаментальные в $(X_0, \rho_)$ последовательности из этих классов, то метрика в X определена равенством

$$\rho(\xi,\eta) = \lim_{k\to\infty} \rho_0(x_k, y_k).$$

Распространим алгебраические операции и норму, определенные только на X_0, на все X. Пусть $\{x_k\} \in \xi$, $\{y_k\} \in \eta$. Тогда последовательность $\{x_n + y_n\}$ – фундаментальная в X_0, пусть она принадлежит классу ζ. По определению положим $\zeta = \xi + \eta$. Нетрудно убедиться, что определение элемента ζ не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из классов ξ и η, соответственно. Аналогично определяется произведение элемента их X на число.

Положим теперь для $\xi \in X$

$$\|\xi\| = \rho_(x,0) = \lim_{k\to\infty} \rho_0(x_k, 0) = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

Аналогично тому, как это было сделано для метрики, можно проверить, что так определенная функция на X является нормой. Итак, построенное метрическое пополнение пространства X_0 является полным нормированным (банаховым) пространством. □

Определение 9. (Линеалы, подпространства, аффинные многообразия)

1. *Подмножество X_0 нормированного пространства X над полем F называется линейным (или линеалом), если для любых $x, y \in X_0$ и любых $\alpha, \beta \in F$ линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in X_0$.*

2. *Замкнутый линеал $X_0 \subset X$ называется подпространством X.*

   Подчеркнем здесь требование замкнутости. Напомним, что в линейном пространстве любой линеал является подпространством, что не так для нормированного пространства.

3. *Множество $L = x_0 + X_0 = \{x \in X : x = x_0 + y, y \in X_0\}$ с фиксированным элементом $x_0 \in X$ называется аффинным многообразием. Ясно, что при $x_0 = 0$ аффинное многообразие является линеалом.*

Определение 10. (Эквивалентные нормы)

Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют положительные постоянные m и M такие, что

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \;\; \forall x \in X.$$

Далее отношение эквивалентности норм обозначаем $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$.

Отметим, что отношение эквивалентности норм транзитивно: если $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ и $\|.\|_2 \sim \|.\|_3$., то $\|.\|_1 \sim \|.\|_3$.

Понятие эквивалентных норм является весьма существенным для анализа, поскольку линейные пространства $(X, \|.\|_1)$ и $(X, \|.\|_2)$ с эквивалентными нормами $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ обладают одними и теми же метрическими и топологическими свойствами. Например, если некоторое множество (или последовательность) ограничено (открыто, замкнуто) в $(X, \|.\|_1)$, то оно ограничено (соответственно, открыто или замкнуто) и в $(X, \|.\|_2)$; если последовательность сходится (фундаментальна) в $(X, \|.\|_1)$, то она также сходится (фундаментальна) в $(X, \|.\|_2)$; если пространство $(X, \|.\|_1)$ – полное, то и пространство $(X, \|.\|_2)$ с эквивалентной нормой – полное.

Теорема 2. *Все нормы в конечномерном линейном пространстве эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X – линейное пространство над полем F ($F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$) размерности n с базисом $\{e_i\}, i = 1, 2\ldots, n$. Определим на X норму $\|.\|_1$. Далее будем использовать обозначение $\beta_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|_1 > 0$. Возьмем произвольный элемент $x \in X$ и пусть $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n, \xi_i \in F$, – его разложение по данному базису. Поставим в соответствие элементу x вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \in F^n$ пространства F^n с нормой $\|\xi\|_\infty = \max\limits_i |\xi_i|$. Из аксиомы треугольника для норм следует неравенство

$$\|x\|_1 = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|_1 \, \|e_i\|_1 \leqslant \beta \|\xi\|_\infty.$$

Докажем теперь неравенства противоположного вида. Для этого определим функцию $f(\xi) = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1$. Она непрерывна, так как

$$|f(\xi) - f(\eta)| = \big| \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_1 - \|\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots \eta_n e_n\|_1 \big| \leqslant \\ \leqslant \|(\xi_1 - \eta_1) e_1 + (\xi_2 - \eta_2) e_2 + \ldots (\xi_n - \eta_n) e_n\|_1 \leqslant \beta_1 \|\xi - \eta\|_\infty \ \forall \xi, \eta \in F^n.$$

Пусть $S_1 = \{\xi \in F^n : \|\xi\|_\infty = 1\}$ –ограниченное и замкнутое множество в конечномерном пространстве F^n, т.е. компакт. По теореме Вейерштрасса (см. следствие 3 к теореме 8 в параграфе 1.3) непрерывная функция $f(\xi)$ достигает минимума на S_1:

$$\exists\, \xi^0 \in S_1 : f(\xi^0) = \min_{\xi \in S_1} f(\xi) = \alpha_1.$$

Число α_1 положительно. Действительно, если допустить, что $\alpha_1 = f(\xi^0) = 0$, то $\|\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \ldots \xi_n^0 e_n\|_1 = 0$, поэтому $\xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \ldots \xi_n^0 e_n = 0$ для ненулевого вектора ξ^0. Это противоречит линейной независимости системы $\{e_i\}, i = 1, 2\ldots, n$.

Пусть теперь ξ – любой ненулевой вектор и $\eta = \left(\dfrac{\xi_1}{\|\xi\|_\infty}, \dfrac{\xi_2}{\|\xi\|_\infty}, \ldots \dfrac{\xi_n}{\|\xi\|_\infty} \right) \in S_1$. Тогда

$$\|x\|_1 = f(\xi) = \|\xi\|_\infty f(\eta) \geqslant \alpha_1 \|\xi\|_\infty.$$

Итак, мы установили, что для любой нормы $\|.\|_1$ в пространстве X справедливы неравенства

$$\alpha_1 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta_1 \|\xi\|_\infty. \tag{2}$$

Для любой другой нормы $\|.\|_2$ в X справедливы аналогичные неравенства:

$$\alpha_2 \|\xi\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta_2 \|\xi\|_\infty \tag{3}$$

с постоянными $\alpha_2 = \min\limits_{\xi \in S_1} \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n\|_2 > 0$ и $\beta_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|_2 > 0$. Из неравенств (2) и (3) следует эквивалентность норм $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1} \|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

□

Следствие 1. *Конечномерное нормированное пространство полно.*

Доказательство. Пусть X – конечномерное нормированное пространство над полем F и $\{e_i\}, i = 1, 2\ldots, n$, – какой-либо его базис. При доказательстве теоремы установлено взаимно однозначное соответствие между X и пространством F^n, а также неравенства (2) для $X \ni x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots \xi_n e_n, \xi_i \in F$. Отсюда следует, что сходимость и фундаментальность последовательности в X равносильны, соответственно, сходимости и фундаментальности последовательности векторов из коэффициентов разложения по базису в F^n. В силу полноты F^n пространство X также полно. □

2.3 Гильбертово пространство

Пусть X - линейное пространство над полем F действительных или комплексных чисел.

Определение 11. *(***Скалярное произведение, предгильбертово и гильбертово пространства)**

1. *Скалярным произведением в X называется функция (x, y) двух переменных $x, y \in X$ со значениями в F, обладающая следующими свойствами:*

   (a) *линейность: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;*

   (b) *симметричность: $(x, y) = \overline{(y, x)}$;*

   (c) *положительность: $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$*

   для всех $x, y, z \in X$ и всех $\alpha, \beta \in F$.

2. *Линейное пространство X, в котором задано скалярное произведение, называется предгильбертовым (а также унитарным в комплексном случае и евклидовым в действительном случае).*

3. *Полное предгильбертово пространство называется пространством Гильберта, или гильбертовым пространством.*

Лемма 5. *Функция от $x \in X$*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{4}$$

определяет норму в предгильбертовом пространстве X.

Доказательство. Первые две аксиомы нормы легко проверить, используя свойства скалярного произведения:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\|x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2, \quad \|x\| > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Для доказательства неравенства треугольника для нормы прежде докажем следующее неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{5}$$

При $y = 0$ неравенство (5) очевидно, поэтому считаем $y \neq 0$. Для любого $\lambda \in F$ имеем

$$0 \leqslant (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2(y, y).$$

Положив в этом неравенстве $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(y, y)}$, получим

$$(x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)}\overline{(x, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y) \geqslant 0,$$

т.е. неравенство (5):

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0.$$

Теперь неравенство треугольника для нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ следует из неравенства Коши-Буняковского (5):

$$\|x + y\|^2 = (x, y) + 2Re(x, y) + (y, y) \leqslant (x, y) + 2\|x\|\|y\| + (y, y) \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$\square$

Из леммы 5 следует, что предгильбертово (гильбертово) пространство является частным случаем линейного нормированного (соответственно, банахова) пространства, что позволяет перенести на эти пространства основные понятия и результаты теории нормированных пространств. В следующих пунктах мы уделим внимание специфическим свойствам пространств со скалярным произведением, связанным с понятием ортогональности.

Лемма 6. *Скалярное произведение является непрерывной функцией своих аргументов:*
если $x_n \to x$, $y_n \to y$ по норме $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, порожденной скалярным произведением, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Доказательство. Применив неравенство Коши-Буняковского (5), получим:

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leqslant \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|.$$

Поскольку сходящаяся по норме последовательность ограничена, то правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Определение 12. *Предгильбертовы (гильбертовы) пространства $(H_1, (.,.)_1)$ и $(H_2, (.,.)_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$ (см. определение 4), сохраняющий скалярное произведение:*

$$(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1 \quad \forall x, y \in H_1.$$

Теорема 3. *Всякое предгильбертово пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.*

Доказательство. Пусть X_0 – предгильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$. В силу теоремы 1 пространство X_0 имеет пополнение – нормированное пространство X, поэтому достаточно определить на X скалярное произведение. Положим

$$(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) \text{ для } \{x_n\} \in \xi, \{y_n\} \in \eta.$$

Убедимся, что предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из классов ξ и η. Действительно, в силу ограниченности фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ справедливо предельное соотношение

$$|(x_n, y_n) - (x_k, y_k)| = |(x_n - x_k, y_n) + (x_k, y_n - y_k)| \leqslant \|x_n - x_k\|\|y_n\| +$$
$$+ \|x_k\|\|y_n - y_k\| \to 0 \text{ при } n, k \to \infty.$$

Это значит, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ фундаментальна, поэтому имеет предел.

Если теперь $\{\tilde{x}_n\}$ и $\{\tilde{y}_n\}$ – другие последовательности из классов ξ и η, то

$$|(x_n, y_n) - (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| = |(x_n - \tilde{x}_n, y_n) + (\tilde{x}_n, y_n - \tilde{y}_n)| \leqslant \|x_n - \tilde{x}_n\|\|y_n\| +$$
$$+ \|\tilde{x}_n\|\|y_n - \tilde{y}_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

так как пары последовательностей $\{\tilde{x}_n\}$, $\{x_n\}$ и $\{\tilde{y}_n\}$, $\{y_n\}$ эквивалентны. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$.

□

Легко проверить, что для нормы, определенной в пространстве H со скалярным произведением равенством (4) $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, справедливо следующее соотношение (равенство параллелограмма):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \;\; \forall x, y \in H. \tag{6}$$

Оказывается, что это равенство является критерием того, что в нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой равенством (4):

Теорема 4. **(фон Нейман, Йордан)** *Если в нормированном пространстве* $(H, \|.\|)$ *выполнено равенство параллелограмма* (6)*, то* H*– предгильбертово пространство, т.е. в нем можно ввести (причем, единственным образом) скалярное произведение, связанное с нормой равенством* $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$.

Доказательство. Доказательство приведем только для случая вещественного пространства. [1]

Определим функцию двух переменных x и y равенством

$$(x, y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \tag{7}$$

и докажем, что если выполнено равенство (6), то эта функция является скалярным произведением. Поскольку при $y = x$ из (7) следует

$$(x, x) = \|x\|^2,$$

то это и будет то скалярное произведение, которое порождает норму.

Ясно, что аксиомы $(x, x) = \|x\|^2 \geqslant 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ следуют из соответствующих аксиом для норм. Кроме того, очевидно $(x, y) = (y, x)$. Таким образом, следует доказать аксиому линейности, т.е. аддитивность $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ и однородность $(cx, y) = c(x, y), c \in \mathbb{R}$.

Сначала докажем аддитивность. Для этого определи функцию трех аргументов

$$\Phi(x_1, x_2, y) = 4\big|(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)\big|, \; x_1, x_2 y \in H,$$

и докажем, что она тождественно равна нулю.

В силу определения (7) справедливо равенство

$$\Phi(x_1, x_2, y) = \|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 - \|x_1 + y\|^2 + \|x_1 - y\|^2 - \\ -\|x_2 + y\|^2 + \|x_2 - y\|^2. \tag{8}$$

Из (6) следуют равенства

$$\|x_1 + x_2 \pm y\|^2 = 2\|x_1 \pm y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 \pm y - x_2\|^2,$$

подставив которые в (8), получим:

$$\Phi(x_1, x_2, y) = -\|x_1 + y - x_2\|^2 + \|x_1 - y - x_2\|^2 + \|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \\ -\|x_2 + y\|^2 + \|x_2 - y\|^2. \tag{9}$$

Взяв теперь полусумму (8) и (9), придем к равенству

$$\Phi(x_1, x_2, y) = \frac{1}{2}\big(\|x_1 + y + x_2\|^2 - \|x_1 - y - x_2\|^2\big) - \frac{1}{2}\big(\|x_1 + x_2 - y\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2\big) - \\ -\|x_2 + y\|^2 + \|x_2 - y\|^2. \tag{10}$$

Заметим теперь, что в силу (6) первая скобка в (10) равна $\|x_1\|^2 + \|x_2 + y\|^2$, а вторая равна $\|x_1\|^2 + \|x_2 - y\|^2$. В силу этих равенств из (10) получим

$$\Phi(x_1, x_2, y) = 0 \;\forall x_1, x_2, y.$$

[1] Отметим, что в случае комплексного пространства скалярное произведение определяется равенством

$$(x, y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) + \frac{1}{4}i\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big).$$

Перейдем к доказательству однородности функции (x,y) по первому аргументу. При фиксированных x и y определим скалярную функцию

$$f(c) = (cx,y) - c(x,y),\ c \in \mathbb{R},$$

и докажем, что она тождественно равна нулю. Из доказанного свойства аддитивности следует равенство

$$(nx,y) = (x + x + \cdots + x, y) = n(x,y),$$

поэтому $f(n) = 0$ для натурального n. Ясно, что $f(0) = 0$ и в силу определения (7) $f(-1) = 0$. Теперь

$$f(-n) = (n(-x),y) + n(x,y) = n(-x,y) + n(x,y) = nf(-1) = 0.$$

Итак, $f(p) = 0$ для целых чисел p. Теперь для любого рационального числа $\dfrac{p}{q}$, $q \neq 0$

$$(\frac{p}{q}x,y) = p(\frac{1}{q}x,y) = \frac{p}{q}q(\frac{1}{q}x,y) = \frac{r}{q}(x,y),$$

откуда следует $f(c) = 0$ для любого рационального числа c. В силу непрерывности нормы функция (x,y) непрерывна, поэтому непрерывна функция $f(c)$, откуда $f(c) = 0$ для всех $c \in \mathbb{R}$. □

2.4 Ортогональность и ортогональная проекция

Пусть H – гильбертово пространство над полем F со скалярным произведением $(.,.)$.

Определение 13. *(***Ортогональность)**

1. *Векторы $x, y \in H$ ортогональны, если $(x,y) = 0$; далее используем обозначение $x \perp y$.*
2. *Ортогональное дополнение к множеству $S \subset H$ – это множество $S^{\perp} = \{x \in H : (x,y) = 0\ \forall y \in S\}$.*
3. *В случае вещественного гильбертова пространства ($F = \mathbb{R}$) определен угол α между векторами x и y с помощью равенства*

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},\ \alpha \in [0,\pi].$$

Лемма 7. *Для любого множества $S \subset H$ его ортогональное дополнение $S^{\perp}$ является подпространством H.*

Доказательство. Прежде всего, $S^{\perp}$ – линеал. Действительно, если $x, y \in S^{\perp}$, то для любых чисел $\alpha, \beta \in F$ справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) = 0\ \forall z \in S.$$

Докажем замкнутость $S^{\perp}$. Пусть последовательность $\{x_n\} \in S^{\perp}$ сходится к x. Тогда в силу леммы 6

$$(x,z) = \lim_{n\to\infty}(x_n,z) = 0\ \forall z \in S\ \Rightarrow x \in S^{\perp}.$$

□

Теорема 5. *(***Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства)**
Пусть H – гильбертово пространство и L – его подпространство. Тогда любой вектор $x \in H$ однозначно представим в виде

$$x = y + z,\ y \in L, z \in L^{\perp}. \tag{11}$$

Доказательство. Если $x \in L$, то $y = x$ и $z = 0$.

Пусть $x \notin L$ и

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2.$$

Обозначим через $\{y_n\}$ минимизирующую последовательность:

$$y_n \in L,\ d_n = \|x - y_n\|^2 \to d \text{ при } n \to \infty.$$

Для любого $h \in L$ и числа α элемент $y_n + \alpha h$ принадлежит подпространству L, поэтому

$$d \leqslant \|x - (y_n + \alpha h)\|^2 = \|x - y_n\|^2 - \overline{\alpha}(x - y_n, h) - \alpha\overline{(x - y_n, h)} + |\alpha|^2\|h\|^2.$$

Выбрав $\alpha = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$, получим $\|x - y_n\|^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geqslant d$, или

$$|(x - y_n, h)| \leqslant \|h\|\sqrt{d_n - d}. \tag{12}$$

Из этого неравенства следует

$$|(y_k - y_n, h)| \leqslant |(x - y_k, h)| + |(x - y_n, h)| \leqslant \left(\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_n - d}\right)\|h\| \ \ \forall h \in L.$$

Пусть теперь $h = y_k - y_n$, тогда

$$\|y_k - y_n\| \leqslant \sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_n - d} \to 0 \text{ при } k, n \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n\} \in L$ фундаментальна. Поскольку H – полное пространство, а L – замкнутое подпространство, то существует предел $y \in L$ последовательности $\{y_n\}$. Переходя к пределу при $n \to n\infty$ в неравенстве (12), получим $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$, т.е. вектор $z = x - y \perp L$.

Итак, разложение $x = y + z$ с $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$ построено. Осталось доказать его единственность. Допустим, что справедливо, также, равенство $x = \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{y} \in L, \tilde{z} \in L^{\perp}$. Тогда $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$, при этом $y - \tilde{y} \in L$, а $\tilde{z} - z \in L^{\perp}$. Поэтому

$$\|y - \tilde{y}\|^2 = (y - \tilde{y}, \tilde{z} - z) = 0 \ \Rightarrow y - \tilde{y} = 0 \text{ и } \tilde{z} = z.$$

□

Следствие 2. *Пусть L – линеал в гильбертовом пространстве H. Для того, чтобы L было всюду плотно в H, необходимо и достаточно, чтобы $L^{\perp} = \{0\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z – какой-либо вектор из $L^{\perp}$. Он ортогонален L, а значит, и замыканию этого множества $\overline{L}$, которое совпадает с H в силу плотности L. В частности, $z \perp z$, поэтому $z = 0$.

Достаточность. Допустим, что L не всюду плотно в H, т.е. $\overline{L} \neq H$. Тогда существует вектор $x \notin \overline{L}$ и по теореме 5 его можно представить в виде $x = y + z$ где $y \in \overline{L}$ и $z \in (\overline{L})^{\perp} = L^{\perp}$. При этом $z \neq 0$, так как $x \notin \overline{L}$. Но это противоречит условию $L^{\perp} = \{0\}$. □

2.5 Ортогональные системы и ряды Фурье

Определение 14. *(***Ортогональные системы)**

1. *Множество L векторов гильбертова пространства H называется ортогональной системой, если любые два различных вектора этой системы ортогональны:* $(x, y) = 0\ \forall x \neq y,\ x, y \in L$.

2. *Ортогональная система L называется ортонормированной, если $\|x\| = 1$ для любого $x \in L$.*

Любую конечную или счетную линейно независимую систему (см. определение 2 в 2.1) в H можно преобразовать в ортонормированную с помощью процесса ортогонализации Шмидта. Ниже приведено доказательство этого утверждения в случае счетной системы.

Лемма 8. (**Ортогонализация**) *Пусть $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\} \equiv \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ – линейно независимая система в H. Тогда существует ортонормированная в H система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая, что*

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} g_i, \text{ где } c_{nn} \neq 0, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Доказательство. Построим сначала ортогональную систему $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ полагая последовательно

$$f_1 = g_1, f_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1} d_{ni} f_i, \ n = 2, 3, \ldots$$

Коэффициенты d_{ni} выберем из условия ортогональности f_n всем векторам $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, т.е. как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(f_n, f_k) = (g_n, f_k) - d_{nk}\|f_k\|^2 = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

По построению каждый f_k есть линейная комбинация $g_1, g_2, \ldots, g_k$, при этом коэффициент при g_k равен 1, поэтому $f_k \neq 0$ и данная система уравнений имеет единственное решение:

$$d_{nk} = \frac{(f_n, f_k)}{\|f_k\|^2}, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее положим $e_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$ для всех n и получим ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Как и f_n, каждый вектор e_n является линейной комбинацией $g_1, g_2, \ldots, g_n$, поэтому имеет вид (13). □

Следствие 3. *При каждом n треугольная матрица C_n коэффициентов c_{ni} в равенстве (13) – треугольная с ненулевой диагональю, поэтому имеет обратную. Это означает, что каждый элемент g_n исходной линейно независимой системы $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ также является линейной комбинацией $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Отсюда следует, что линейные оболочки систем векторов $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ совпадают.*

Определение 15. (**Коэффициенты и ряд Фурье**) *Пусть H – (бесконечномерное) гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H.*

1. *Для любого $x \in H$ числа $x_k = (x, e_k)$ называются коэффициентами Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.*
2. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ называются рядом Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Теорема 6. (**Сумма ряда Фурье**)

1. *Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится по норме.*
2. *Если $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ – сумма ряда Фурье для вектора x, то разность $x - S$ ортогональна всем векторам системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$:*

$$(x - S, e_i) = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Доказательство. 1. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ –частичная сумма ряда Фурье и $y_n = x - S_n$. Поскольку векторы e_i образуют ортонормированную систему, то

$$(y_n, e_i) = (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, e_i) = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots n \ \Rightarrow (y_n, S_n) = 0, \tag{15}$$

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k,i=1}^{n} x_k \overline{x}_i (e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2. \tag{16}$$

Воспользовавшись соотношениями (15), (16), получим:

$$\|x\|^2 = \|y_n + S_n\|^2 = \|y_n\|^2 + \|S_n\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2 \ \forall n,$$

т.е. сходимость числового ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ и неравенство (т.н. неравенство Бесселя):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{17}$$

В силу неравенства Бесселя (17) последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм фундаментальна. Действительно,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Поскольку H – полное пространство, то последовательность $\{S_n\}$ имеет предел $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

2. Для доказательства того, что вектор $x - S$ ортогонален e_i для любого i, достаточно воспользоваться равенством (15) и непрерывностью скалярного произведения:

$$(x - S, e_i) = (x - \lim_{n\to\infty} S_n, e_i) = \lim_{n\to\infty} (x - S_n, e_i) = 0 \ \forall i.$$

□

Полные и замкнутые системы

Определение 16. (Полная система) *Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется полной в H, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1. *Не существует ненулевого вектора в H, ортогонального всем e_i, $i = 1, 2, \dots$:*

$$(x, e_i) = 0 \ \forall i \ \Rightarrow x = 0. \tag{18}$$

2. *Линейная оболочка $\mathrm{span}\{e_i\}$ системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна в H.*

Эквивалентность этих определений следует из того, что $x \perp e_i \ \forall i$ равносильно $x \perp \mathrm{span}\{e_i\}$, что, в свою очередь, равносильно плотности $\mathrm{span}\{e_i\}$ в пространстве H (следствие 2).

Теорема 7. **(Полные и замкнутые системы)**

Пусть H – гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в H.*
2. *Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится к x:*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \text{ где } x_i = (x, e_i).$$

3. *Для любой пары векторов $x, y \in H$ справедливо равенство*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i, \text{ где } x_i = (x, e_i), y_i = (y, e_i). \tag{19}$$

4. *Для любого вектора $x \in H$ справедливо равенство Парсеваля (уравнение замкнутости):*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2, \text{ где } x_i = (x, e_i). \tag{20}$$

Доказательство. Проведем "круговое" доказательство утверждений.

$1 \Rightarrow 2$. Утверждение следует из (14) и (24).

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда

$$(S_n, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

В пределе при $n \to \infty$ отсюда следует равенство (19).

$3 \Rightarrow 4$. Положив $y = x$ в равенстве (19), получим (20).

$4 \Rightarrow 1$. Пусть $x \in H$ такой, что $(x, e_i) = 0 \ \forall i$. Тогда $x_i = (x, e_i) = 0 \ \forall i$, поэтому из (20) следует равенство $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\square$

2.6 Примеры

2.6.1 Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ имеет размерность n, векторы
   $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

2. Пространство l_p – бесконечномерное. Элементы l_p (последовательности) $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots,)$,

   $i = 1, 2, \dots, \infty$ линейно независимы.

3. Пространство $C[0,1]$ – бесконечномерное. Так, например, в $C[0,1]$ система функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ для любого n является линейно независимой. Это следует из известного факта, что алгебраический полином степени n (не равный тождественно нулю) имеет не более n вещественных корней.

2.6.2 Нормированные пространства

Примерами линейных нормированных пространств являются все рассмотренные в 1.6 линейные метрические пространства $\mathbb{R}^n$, s, c, l_p, $C[a,b]$, $L_p(a,b)$. Как уже отмечалось ранее, все рассмотренные в 1.6 линейные метрические пространства n-мерных векторов, последовательностей s, c, $l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, и функций $C[a,b]$, $L_p(a,b), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, являются нормированными пространствами. Нормы в этих пространствах определены соответствующими метриками: $\|x\| = \rho(x, 0)$.

2.6.3 Метрика, не порождающая норму

В пространстве s с метрикой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

функция $\rho(x,0)$ не является нормой, так как $\rho(\lambda x, 0) \neq |\lambda| \rho(x,0)$, например, для $\lambda = 2$.

Более того, в этом пространстве нельзя определить норму так, чтобы топологические свойства построенного нормированного пространства совпадали с топологическими свойствами s с метрикой (15). Для доказательства этого утверждения приведем теперь пример последовательности, сходящейся к нулю в метрике (15), но не сходящейся к нулю ни в какой норме $\|.\|$, определенной на X.

Пусть $\|.\|$ – какая-либо норма на X, $\tilde{x}_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots)$ и $x_n = \|\tilde{x}_n\|^{-1} \tilde{x}_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{\|\tilde{x}_n\|^{-1}}_{n}, 0, \dots)$.

Ясно, что

$$\rho(x_n, 0) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 + \|\tilde{x}_n\|} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Но $\|x_n\| = 1$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ не сходится к нулю по норме $\|.\|$.

2.6.4 Пространства Гильберта и нормированные пространства, которые не являются гильбертовыми

1. В пространствах n-мерных действительных или комплексных векторов с нормами

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p}, \ p \neq 2; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

не выполнено равенство параллелограмма (6) для пары базисных векторов e_i, e_j при $i \neq j$, где $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0 \ldots, 0)$.

При $p = 2$ эти пространства гильбертовы со скалярные произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i.$$

2. Пространство последовательностей l_2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta}_i$$

для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$.

В пространствах последовательностей l_p с нормой $\|x\|_p = \big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\big)^{1/p}$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, $\xi_i \in \mathbb{C}$, при $p \neq 2$ не выполнено равенство параллелограмма (6) для пары векторов e_i, e_j при $i \neq j$, где $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0 \ldots, 0, \ldots)$.

3. Пространство $L_2(a, b)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_a^b x(t) y(t)\, dt.$$

Пространства $L_p(a, b)$ не являются гильбертовыми при $p \neq 2$. Для доказательства достаточно убедиться, что в $L_p(0, 1), p \neq 2$, равенство параллелограмма (6) не выполнено для пары линейных функций $x(t) = t$ и $y(t) = 1 - t$.

4. Норма $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ пространства $C[a, b]$ не порождает скалярного произведения. Например, в $C[0, 1]$ не выполнено равенство параллелограмма (6) для пары функций $x(t) = t$ и $y(t) = 1 - t$.

2.6.5 Линеалы и подпространства

1. Множество

$$P_\infty = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^k \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ \forall k\}$$

алгебраических полиномов произвольной степени с вещественными коэффициентами является линеалом, но не подпространством пространства $C[0, 1]$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса P_∞ всюду плотно в $C[0, 1]$. Тем самым, замыкание $\bar{P}_\infty$ совпадает с $C[0, 1] \neq P_\infty$. □

2. Множество $X_0 = \{u \in C[0, 1] : u(x_0) = 0,\ x_0 \in [0, 1]\}$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, равных нулю в некоторой фиксированной точке x_0, является бесконечномерным подпространством пространства $C[0, 1]$.

Доказательство. Ясно, что X_0 – линеал в $C[0,1]$. Далее, из сходимости последовательности $u_n \to u$ по норме $C[0,1]$ (т.е. равномерной сходимости на $[0,1]$) следует сходимость в точке x_0, поэтому предельная функция удовлетворяет условию $u(x_0) = 0$. Значит, X_0 – подпространство. Это подпространство имеет бесконечную размерность, так как содержит, например, бесконечное число линейно независимых функций

$$x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n, \dots$$

$\square$

3. Множество $P_k = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k, \ \forall a_i \in \mathbb{R}\}$ алгебраических полиномов степени не выше k с вещественными коэффициентами является подпространством $C[0,1]$ размерности $k+1$.

Доказательство. Ясно, что P_k – это линеал размерности $k+1$, в качестве его базиса можно взять функции $1, x, \dots, x^k$.

Докажем замкнутость P_k в $C[0,1]$. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждому многочлену $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ вектор из его коэффициентов $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Обозначив через $\|\vec{a}\|$ евклидову норму $\vec{a}$, докажем неравенства

$$\alpha\|\vec{a}\| \leqslant \|p\|_{C[0,1]} \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a}\| \quad \forall p \in P_k, \ \alpha > 0. \tag{21}$$

Для доказательства правого неравенства воспользуемся тем, что $\sum\limits_{i=0}^{k} |a_i| \leqslant \sqrt{k+1}\big(\sum\limits_{i=0}^{k} |a_i|^2\big)^{1/2} = \sqrt{k+1}\|\vec{a}\|$. Будем иметь:

$$\|p\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |a_i| \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a}\|.$$

Введем теперь в рассмотрение неотрицательную функцию

$$f(\vec{a}) = \|p\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k|.$$

Эта функция непрерывна, так как

$$|f(\vec{a}) - f(\vec{b})| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_k - b_k)x^k| \leqslant \sqrt{k+1}\|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Пусть $S_1 = \{\vec{a} : \|\vec{a}\| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^{k+1}$. Непрерывная функция f достигает минимума на компакте S_1:

$$\exists \vec{a}^* \in S_1 : \ f(\vec{a}^*) = \min_{\vec{a} \in S_1} f(\vec{a}) = \alpha.$$

Постоянная α положительна. Действительно, если допустить, что $f(\vec{a}^*) = 0$, то многочлен $a_0^* + a_1^* x + \ldots + a_k^* x^k = 0$ тождественно на отрезке $[0,1]$, поэтому соответствующий ему вектор коэффициентов $\vec{a}^* = 0$, что противоречит его принадлежности единичной сфере S_1. Используя положительную однородность функции F, для произвольного $\vec{a}$ получим:

$$f(\vec{a}) = \|\vec{a}\| f(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}) \geqslant \alpha\|\vec{a}\|,$$

т.е. левое неравенство в (21).

Пусть последовательность $\{p_n = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_k^n x^k\} \in P_k$ сходится в $C[0,1]$ при $n \to \infty$ к некоторой функции $u \in C[0,1]$. Докажем, что $u \in P_k$. Последовательность $\{p_n\}$ фундаментальна в $C[0,1]$. В силу левого неравенства (21) последовательность векторов $\vec{a}^n = (a_0^n, a_1^n, \ldots, a_k^n)$ также фундаметальна в $\mathbb{R}^{k+1}$, поэтому сходится к некоторому вектору $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Но из правого неравенства (21) следует, что тогда последовательность $\{p_n\}$ сходится в $C[0,1]$ к $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^k$. $\square$

2.6.6 Эквивалентные нормировки пространств

1. Согласно теореме 2 все нормы в пространстве n-мерных векторов эквивалентны. Примеры норм:

   евклидова норма $\|x\| = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2}$, максимум-норма $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, норма $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Для них справедливы следующие неравенства эквивалентности:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

2. Определим линейное пространство $X = \{u \in C^1[0,1]) : u(0) = 0\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, равных нулю в точке 0. Оснастим его нормой

$$\|u\|_1 = \big(\int_0^1 (u^2(x) + u'^2(x))dx\big)^{1/2}.$$

Наряду с этим пространством рассмотрим пространство X с нормой

$$\|u\|_2 = \big(\int_0^1 u'^2(x)dx\big)^{1/2}.$$

Докажем, что эти нормы эквивалентны. Ясно, что $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$, поэтому достаточно доказать противоположное неравенство.

В силу условия $u(0) = 0$ справедливо равенство

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \ \forall x \in [0,1].$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим:

$$u^2(x) = \big(\int_0^x u'(t)dt\big)^2 \leqslant x \int_0^1 u'^2(t)dt \leqslant \int_0^1 u'^2(t)dt \ \forall x \in [0,1].$$

Отсюда легко вывести два следующих неравенства:

$$\big(\int_0^1 u^2(x)dx\big)^{1/2} \leqslant \big(\int_0^1 u'^2(x)dx\big)^{1/2} \ \ \forall u \in X. \tag{22}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x)| \leqslant \Big(\int_0^1 u'^2(x)dx\Big)^{1/2} \quad \forall u\in X. \tag{23}$$

Из неравенства (22) следует $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|u\|_2$.

2.6.7 Примеры полных систем

1. Пусть $H = L_2(-\pi,\pi)$ и

$$\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\}$$

– тригонометрическая система функций. Она ортонормирована и полна. Первое свойство проверяется непосредственными вычислениями. Для доказательства полноты системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ докажем, что ее линейная оболочка $\operatorname{span}\{e_i\}$ всюду плотна в $L_2(-\pi,\pi)$.

Воспользуемся известным фактом: множество непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций всюду плотно в $L_2(-\pi,\pi)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для функции $v\in L(-\pi,\pi)$ найдем непрерывную функцию $u(x)$ такую, что

$$\|v-u\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $M = \max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|u(x)|$ и $\delta>0$ таково, что $\sqrt{\delta}2M < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Определим функцию $\tilde u(x)$ равенством

$$\tilde u(x) = \begin{cases} u(x) \text{ при } -\pi\leqslant x\leqslant \pi-\delta \\ \text{линейная функция, соединяющая точки } (\pi-\delta, u(\pi-\delta)) \text{ и } (\pi, u(-\pi)). \end{cases}$$

Тогда

$$\|u-\tilde u\|_{L_2} = \Big(\int_{\pi-\delta}^{\pi} |u(x)-\tilde u(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{\delta}2M < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Построенная функция $\tilde u$ непрерывна и удовлетворяет равенству $\tilde u(-\pi) = \tilde u(\pi)$, поэтому она может быть приближена сколь угодно точно тригонометрическим полиномом по норме пространства $C[-\pi,\pi]$:

$$\exists T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos k\pi x + b_k \sin k\pi x : \max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|\tilde u(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Ясно, что тогда

$$\|\tilde u - T_n\|_{L_2} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde u(x) - T_n(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|\tilde u(x)-T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Соединив полученные неравенства, придем к следующему результату: для любой функции $v\in L(-\pi,\pi)$ и любого $\varepsilon>0$ существует линейная комбинация тригонометрический полином T_n – линейная комбинация элементов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|v - T_n\|_{L_2} < \varepsilon,$$

т.е. $\operatorname{span}\{e_i\}$ всюду плотна в $L_2(-\pi,\pi)$.

Теперь можно сформулировать основной вывод, справедливый в силу теоремы 7:

тригонометрический ряд Фурье любой функции из $L_2[-\pi,\pi]$ сходится к этой функции по норме $L_2(-\pi,\pi)$.

2. Пусть $H = L_2(a,b)$ и $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty} = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ – линейно независимая система. Применив процесс ортогонализации (см. теорему 6), получим ортонормированную систему т.н. полиномов Лежандра $\{L_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$. Для доказательства полноты системы $\{L_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ достаточно доказать полноту системы $\{g_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, так как линейные оболочки этих систем совпадают (см. следствие 3). Но линейная оболочка $\operatorname{span}\{g_i(t)\}$ – это множество всех алгебраических полиномов, всюду плотное в $C[a,b]$. Поскольку, в свою очередь, непрерывные функции всюду плотны в $L_2(a,b)$, а для норм справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2} = \Big(\int\limits_a^b |u(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \leqslant (b-a)^{1/2} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |u(t)| = (b-a)^{1/2}\|u\|_C,$$

то $\operatorname{span}\{g_i(t)\}$ всюду плотно в $L_2(a,b)$.

2.7 Задачи и упражнения

1. Пусть $C^{\alpha}[a,b]$, $\alpha \in (0,1]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера:
$$L_{\alpha}(x) \equiv \sup_{t_1,t_2\in[a,b];\, t_1\neq t_2} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}} < +\infty.$$
Проверить, что
$$\|x\|_{C^{\alpha}} = \|x\|_C + L_{\alpha}(x) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| + L_{\alpha}(x)$$
является нормой этого пространства.

2. Проверить, можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций использовать в качестве нормы следующие функционалы:
   (a) $|x(b)-x(a)| + \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$;
   (b) $|x(a)| + \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$;
   (c) $\int\limits_a^b |x(t)|\,dt + \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$.

3. Какие из норм предыдущего примера эквивалентны исходной норме пространства $C^1[a,b]$: $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| + \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|$?

4. Являются ли подпространствами пространства $C[-1,1]$ следующие множества:
   (a) монотонные функции;
   (b) четные функции;
   (c) непрерывно дифференцируемые функции;
   (d) функции, удовлетворяющие неравенству Липшица: $|x(t_1)-x(t_2)| \leqslant |t_1-t_2|\ \forall t_1,t_2 \in [-1,1]$?

5. Пусть $X = \{u \in C[a,b], \exists u' : \int\limits_a^b u'^2(x)dx < \infty\}$ – линейное множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, имеющих интегрируемую с квадратом производную.
Доказать, что на X эквивалентны следующие нормы:
   (a) $\|u\|_1 = \Big(\int\limits_a^b (u'^2(x)+u^2(x))dx\Big)^{1/2}$;
   (b) $\|u\|_2 = \Big(\int\limits_a^b u'^2(x)dx\Big)^{1/2} + \Big|\int\limits_a^b u(x)dx\Big|$;
   (c) $\|u\|_3 = \Big(\int\limits_a^b u'^2(x)dx\Big)^{1/2} + |u(x_0)|,\ x_0 \in [a,b]$.

6. Доказать, что множество $X_0 = \{u \in C[0,1] : \int\limits_0^1 u(x)dx = 0\}$ функций с нулевым средним значением является бесконечномерным подпространством $C[0,1]$.

7. Доказать, что на множестве непрерывных на $[a,b]$ функций нормы $\|x\|_C = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$ и $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt$ не эквивалентны.

8. Доказать, что конечномерный линеал нормированного пространства является подпространством.

9. Пусть $(X, \|.\|_x)$ и $(Y, \|.\|_y)$ – два линейных нормированных пространства. Произведением $Z = X \times Y$ называется линейное пространство пар $z = (x, y)$, $x \in X, y \in Y$ с линейными операциями
$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \text{ для } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2).$$
Доказать, что все перечисленные ниже функционалы являются эквивалентными нормами на пространстве Z:
$$\|z\| = \sqrt{\|x\|_x^2 + \|y\|_y^2},\ \|z\| = \|x\|_x + \|y\|_y,\ \|z\| = \max\{\|x\|_x,\ \|y\|_y\}.$$

10. Доказать, что если $(X, \|.\|_x)$ и $(Y, \|.\|_y)$ – банаховы пространства, то $Z = X \times Y$, оснащенное одной из приведенных в предыдущем примере норм, также банахово.

11. В линейном пространстве непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условию
$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} x^2(t)\,dt < +\infty$$
определим функцию
$$(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} x(t)\,y(t)\,dt.$$
Доказать, что это скалярное произведение.

12. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением два вектора y и x лежат на одной прямой (т.е. линейно зависимы) тогда и только тогда, когда
$$|(x, y)|^2 = \|x\|\,\|y\|.$$

13. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением два вектора y и x лежат на одно луче (т.е. $y = kx$ для некоторого $k \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

14. Доказать, что в сепарабельном гильбертовом пространстве любая его ортонормированная система не более чем счетна.

15. Доказать, что в сепарабельном гильбертовом пространстве существует счетный ортонормированный базис.

16. Пусть H_0 – (замкнутое) подпространство гильбертова пространства H. Доказать, что для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $y_0 \in H_0$ такой, что
$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in H_0} \|x - y\|.$$
(y_0 – это ортогональная проекция x на подпространство H_0).

17. Для любого множества A в гильбертовом пространстве H через $A^\perp$ обозначается его ортогональное дополнение:
$$x \in A^\perp \Leftrightarrow (x, y) = 0 \ \ \forall y \in A.$$
Пусть $A \subset B$. Доказать, что $A^\perp \supset B^\perp$.

18. Пусть A – подмножество гильбертова пространства H. Доказать, что
    (a) $A \subset (A^\perp)^\perp$;
    (b) $(A^\perp)^\perp$ совпадает с замыканием линейной оболочки A.

19. Пусть X – рефлексивное пространство и $f \in X^*$. Доказать, что существует такой ненулевой элемент $x \in X$, что $f(x) = \|f\| \, \|x\|$.

20. Пусть H – гильбертово пространство и последовательность $\{x_n\} \in H$ такова, что
$$(x_n, y) \to (x, y) \ \ \forall y \in H; \quad \|x_n\| \to \|x\|.$$
Доказать, что $\|x_n - x\| \to 0$.

21. Доказать, что предгильбертово пространство, изометрически изоморфное гильбертову пространству, также гильбертово.

22. Пусть H – гильбертово пространство, $A \subset H$ и $\bar{A}$ – замыкание множества A. Доказать, что $A^\perp = \bar{A}^\perp$.

2.8 *Сводка определений и основных результатов*

Линейное пространство

1. Множество X называется линейным (или векторным) пространством над полем F вещественных или комплексных чисел, если в нем заданы операции сложения $x + y$ векторов $x, y \in X$ и умножения λx вектора $x \in X$ на число $\lambda \in F$, удовлетворяющие следующим аксиомам:
    - коммутативность сложения $x + y = y + x$;
    - ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$;
    - ассоциативность умножения $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
    - дистрибутивность сложения $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
    - дистрибутивность умножения $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
    - существование нулевого вектора 0: $x + 0 = x$;
    - существование отрицательного вектора $-x$: $x + (-x) = 0$;
    - умножение вектора на 1: $1\,x = x$.
2. Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется вектор $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n, \ \ \lambda_i \in F$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.
3. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и линейно независимы, если только тривиальная комбинация равна нулю.
4. Произвольная система векторов из X называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.
5. Линейное пространство X имеет размерность n, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторы линейно зависимы.
6. Линейное пространство X – бесконечномерное, если для любого натурального n в нем существует n линейно независимых векторов.

7. Если линейное пространство X имеет размерность n, то любая линейно независимая система из n его векторов $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ образует базис X: любой вектор $x \in X$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ x_i \in F$.

Подпространство и линейная оболочка

1. Непустое множество $X_0 \subset X$ в линейном пространстве X называется подпространством, если для любых $x, y \in X_0$ и $\lambda \in F$ справедливы включения $x + y \in X_0$, $\lambda x \in X_0$. Каждое подпространство $X_0 \subset X$ является линейным пространством относительно операций, определенных на X.
2. Наименьшее подпространство X_0, содержащее систему векторов $V \subset X$, называется линейной оболочкой этой системы и обозначается $\operatorname{span} V$. Линейная оболочка $\operatorname{span} V$ состоит из всех векторов пространства X таких, которые представимы в виде конечной линейной комбинации: $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, где $\lambda_i \in F$ и $v_i \in X$.

Изоморфные пространства

Пусть X_1 и X_2 – два линейных пространства над полем F.

1. Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется линейным, если $f(\alpha + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $x, y \in X_1$ и любых чисел $\alpha, \beta \in F$.
2. Линейное взаимно однозначное отображение $f : X_1 \to X_2$ называется изоморфным, или изоморфизмом пространств X_1 и X_2.

Линейное нормированное пространство

Пусть на линейном пространстве X над числовым полем F определена вещественнозначная функция $\|x\|$, $\forall x \in X$, удовлетворяющая для всех элементов $x, y \in X$ и чисел $\lambda \in F$ следующим условиям (аксиомам нормы):

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (нулевой элемент X);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Тогда эта функция называется нормой, а линейное пространство X с нормой $\|.\|$ – нормированным пространством.

Нормированное пространство является (линейным) метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y, \in X$. В частности, $\rho(x, 0) = \|x\|$, т.е. норма – это расстояние до нулевого элемента в соответствующей метрике.

Последовательности

Последовательность $\{x_n\} \in X$ элементов нормированного пространства X называется

1. сходящейся, если существует элемент $x \in X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$;
2. ограниченной, если существует число $R > 0$ такое, что $\|x_n\| \leqslant R\ \forall x \in X$;
3. фундаментальной если $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Утверждение (Основные свойства сходящихся последовательностей)

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел, ограничена и фундаментальна.
2. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.
3. Если последовательность фундаментальна в X и какая-либо ее подпоследовательность сходится, то и вся последовательность сходится к тому же пределу.
4. Норма является непрерывной функцией: если $x = \lim x_n$, то $\|x\| = \lim \|x_n\|$.
5. Если $x_n \to x$ в X и $\lambda_n \to \lambda$ в F, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;
6. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в X, то $x_n + y_n \to x + y$.

Открытые и замкнутые множества

1. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$ в нормированном пространстве $X = (X, \rho)$ называется множество $B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$.
2. Точка $x \in A$ множества $A \subset X$ называется его внутренней точкой, если существует открытый шар $B(x, r) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначатся $\mathrm{int}A$.
3. Множество A называется открытым, если $\mathrm{int}A = A$.
4. Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от a:
$$B(a, r) \cap (A \setminus a) \neq \emptyset \; \forall r > 0.$$
5. Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки

Утверждение (Свойства открытых и замкнутых множеств)

1. Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда замкнуто его дополнение $X \setminus A$.
2. Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.
3. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.
4. Для того, чтобы $a \in X$ была предельной точкой множества $A \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a \, \forall n$, сходящаяся к a.

Полные пространства, изометрия, пополнение

1. Нормированное пространство называется полным (банаховым), если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.
2. Нормированные пространства $(X_1, \|.\|_1)$ и $(X_2, \|.\|_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$, сохраняющий норму: $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1 \; \forall x \in X_1$.
3. Нормированное пространство $(X, \|.\|_X)$ называется пополнением нормированного пространства $(X_0, \|.\|_{X_0})$, если
   - пространство $(X, \|.\|_X)$ – полное;
   - существует всюду плотное в X подпространство $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ такое, что $(X_0, \|.\|_{X_0})$ и $(\tilde{X}, \|.\|_X)$ изометрически изоморфны.

Утверждение (Теорема о пополнении)
Всякое нормированное пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.

Линеалы и подпространства
Подмножество X_0 нормированного пространства X над полем F называется линейным (или линеалом), если для любых $x, y \in X_0$ и любых $\alpha, \beta \in F$ линейная комбинация $\alpha x + \beta y \in X_0$. Замкнутый линеал $X_0 \subset X$ называется подпространством X.

Эквивалентные нормы
Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$, если существуют положительные постоянные m и M такие, что
$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \;\; \forall x \in X.$$

Утверждение

1. Все нормы в конечномерном линейном пространстве эквивалентны.
2. Конечномерное нормированное пространство полно.

Гильбертово пространство

Скалярное произведение, предгильбертово и гильбертово пространства

1. Скалярным произведением в X называется функция (x, y) двух переменных $x, y \in X$ со значениями в F, обладающая следующими свойствами:
   (a) линейность: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in F$;
   (b) симметричность: $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in X$;
   (c) положительность: $(x, x) > 0 \quad \forall x \in X$, если $x \neq 0$.
2. Линейное пространство X, в котором задано скалярное произведение, называется предгильбертовым (а также унитарным в комплексном случае и евклидовым в действительном случае).
3. Полное предгильбертово пространство называется пространством Гильберта, или гильбертовым пространством.

Утверждение

1. Функция $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ определяет норму в предгильбертовом пространстве X.
2. Скалярное произведение является непрерывной функцией своих аргументов: если $x_n \to x$, $y_n \to y$ по норме $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$, порожденной скалярным произведением, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Изометрия и пополнение

Предгильбертовы (гильбертовы) пространства $(H_1, (.,.)_1)$ и $(H_2, (.,.)_2)$ называются изометрически изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f : X_1 \to X_2$ (см. определение 4), сохраняющий скалярное произведение:
$$(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1 \quad \forall x, y \in H_1.$$

Утверждение
Всякое предгильбертово пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрического изоморфизма.

Утверждение (Характеристическое свойство гильбертова пространства)
Если в нормированном пространстве $(H, \|.\|)$ выполнено равенство параллелограмма
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \ \ \forall x, y \in H.$$
то H– предгильбертово пространство, т.е. в нем можно ввести (причем, единственным образом) скалярное произведение, связанное с нормой равенством $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$.

Ортогональность и ортогональная проекция

Пусть H – гильбертово пространство над полем F со скалярным произведением $(.,.)$.

1. Векторы $x, y \in H$ ортогональны, если $(x, y) = 0$; далее используем обозначение $x \perp y$.
2. Ортогональное дополнение к множеству $S \subset H$ – это множество $S^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.
3. В случае вещественного гильбертова пространства ($F = \mathbb{R}$) определен угол α между векторами x и y с помощью равенства
$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}, \ \alpha \in [0, \pi].$$

Утверждение

1. Для любого множества $S \subset H$ его ортогональное дополнение $S^\perp$ является подпространством H.
2. Пусть H – гильбертово пространство и L – его подпространство. Тогда любой вектор $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + z, \ y \in L, z \in L^\perp$.
3. Пусть L – линеал в гильбертовом пространстве H. Для того, чтобы L было всюду плотно в H, необходимо и достаточно, чтобы $L^\perp = \{0\}$.

Ортогональные системы и ряды Фурье

1. Множество L векторов гильбертова пространства H называется ортогональной системой, если любые два различных вектора этой системы ортогональны: $(x, y) = 0\ \forall x \neq y,\ x, y \in L$.
2. Ортогональная система L называется ортонормированной, если $\|x\| = 1$ для любого $x \in L$.

Утверждение (Ортогонализация)

Пусть $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\} \equiv \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ – линейно независимая система в H. Тогда существует ортонормированная в H система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая, что

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} g_i,\ \text{где } c_{nn} \neq 0,\ \text{для всех } n = 1, 2, \ldots.$$

Коэффициенты и ряд Фурье

Пусть H – (бесконечномерное) гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H.

1. Для любого $x \in H$ числа $x_k = (x, e_k)$ называются коэффициентами Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.
2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ называются рядом Фурье вектора x по системе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Полные и замкнутые системы

Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется полной в H, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. Не существует ненулевого вектора в H, ортогонального всем e_i, $i = 1, 2, \ldots$:
$$(x, e_i) = 0\ \forall i\ \Rightarrow x = 0. \tag{24}$$
2. Линейная оболочка $\operatorname{span}\{e_i\}$ системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна в H.

Пусть H – гильбертово пространство и $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H.

Утверждение (Сумма ряда Фурье. Полные и замкнутые системы)

1. Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится по норме.
2. Если $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ – сумма ряда Фурье для вектора x, то разность $x - S$ ортогональна всем векторам системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$:
$$(x - S, e_i) = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots$$
3. Следующие условия эквивалентны:
   (a) Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в H.
   (b) Для любого вектора $x \in H$ его ряд Фурье сходится к x:
   $$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i,\ \text{где } x_i = (x, e_i).$$
   (c) Для любой пары векторов $x, y \in H$ справедливо равенство
   $$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i,\ \text{где } x_i = (x, e_i), y_i = (y, e_i).$$
   (d) Для любого вектора $x \in H$ справедливо равенство Парсеваля (уравнение замкнутости):
   $$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2,\ \text{где } x_i = (x, e_i).$$

§3 Линейные операторы и функционалы

3.1 Непрерывность и ограниченность, норма оператора

Пусть заданы два нормированных пространства $(X, |.\|_X)$ и $(Y, \|.\|_Y$ над полем F вещественных или комплексных чисел.

Определение 1. **(Линейный оператор и линейный функционал)**

1. *Отображение* $A: X \to Y$ *называется линейным оператором, если оно*
   (a) *аддитивно:* $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ *для любых* $x_1, x_2 \in X$*;*
   (b) *однородно :* $A(\lambda x) = \lambda Ax$ *для любых* $x \in X$ *и* $\lambda \in F$*.*
2. *Частный случай линейного оператора* $f: X \to F$ *называется линейным функционалом.*

В этом параграфе мы будем изучать свойства линейных операторов, которые естественно справедливы и для линейных функционалов. Специфические свойства функционалов будут изучены в следующих параграфах.

Определение 2. **(Непрерывный оператор)** *Оператор* $A: X \to Y$ *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$*, если выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий (определения "по Коши" и "по Гейне"):*

1. *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что*
$$\forall x \in X: \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$
2. *для любой последовательности* $\{x_n\} \subset X$*, сходящейся к* x_0 *по норме пространства* X*, последовательность* $\{Ax_n\} \subset Y$ *сходится к* Ax_0 *по норме* Y*.*

Определение 3. **(Ограниченный оператор)** *Линейный оператор* $A: X \to Y$ *называется ограниченным, если существует число* $M > 0$ *такое, что*
$$\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X. \tag{1}$$

В общем случае отображение $A: X \to Y$ называется ограниченным, если оно переводит ограниченные множества в X в ограниченные множества в Y. В случае линейного оператора A это общее определение и определение 3 эквивалентны. Действительно, из (1) сразу следует, что A переводит ограниченные множества в X в ограниченные множества в Y. Докажем обратное утверждение. Обозначим через $S_X = \{\|x\|_X = 1\}$ единичную сферу в пространстве X. Оператор A переводит ограниченное множество S_X в ограниченное множество, поэтому существует $M > 0$ такое, что
$$\|Ax\|_Y \leqslant M \ \forall x \in S_X.$$
Но для любого $x \in X$ вектор $z = \dfrac{x}{\|x\|_X}$ принадлежит S_X, поэтому
$$\|Ax\|_Y = \|x\|_X \left\|Az\right\|_Y \leqslant M\|x\|_X.$$
Доказанные ниже результаты для непрерывных операторов опираются на свойство их линейности.

Лемма 1. *Для непрерывности линейного оператора на всем пространстве достаточно, чтобы он был непрерывен в одной точке этого пространства.*

Доказательство. Пусть оператор $A : X \to Y$ непрерывен в точке $x^* \in X$ и $x \in X$ – любая другая точка. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x. Тогда последовательность $\{x_n - x + x^*\}$ сходится к x^* и из линейности A и его непрерывности в точке x^* следует:

$$\|Ax_n - Ax\|_Y = \|A(x_n - x + x^*) - Ax^*\|_Y \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

□

Теорема 1. *Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен на X тогда и только тогда, когда он ограничен на X.*

Доказательство. Пусть A ограничен, x^* – произвольная точка X и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (1) и линейности A получим

$$\|Ax_n - Ax^*\|_Y = \|A(x_n - x^*)\|_Y \leqslant M\|x_n - x^*\|_X \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

так что A непрерывен в точке x^*.

Пусть теперь A непрерывен на X. Предположим, что он не удовлетворяет условию ограниченности (1). Это означает, что для любого натурального n существует $x_n \in X$ такой, что

$$\|Ax_n\|_Y \geqslant n\|x_n\|_X.$$

Но тогда последовательность $z_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}$ сходится к 0, в то время как

$$\|Az_n\|_Y = \frac{1}{n\|x_n\|_X}\|Ax_n\|_Y \geqslant 1,$$

т.е. последовательность $\{Az_n\}$ не стремится к $A0 = 0$, что противоречит непрерывности A в точке 0. □

Определение 4. *(***Норма оператора***) Наименьшая постоянная M в неравенстве* (1)*:*

$$\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X$$

называется нормой линейного ограниченного оператора $A : X \to Y$ и обозначается $\|A\|$.

Лемма 2. *Для нормы линейного ограниченного оператора $A : X \to Y$ справедливы следующие равенства:*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y. \tag{2}$$

Доказательство. Первое равенство следует из определений супремума как точной верхней грани и нормы линейного оператора. Второе равенство – очевидное следствие однородности нормы и оператора:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Для доказательства последнего равенства достаточно воспользоваться тем, что с одной стороны

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y \leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y,$$

а с другой, для любого $x \in X$ с $\|x\|_X \leqslant 1$ справедливо неравенство $\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|\|x\|_X \leqslant \|A\|$, поэтому

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y \leqslant \|A\|.$$

□

Следствие 4. *(***Норма функционала***)* *Наименьшая постоянная M в неравенстве*

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X$$

называется нормой $\|f\|$ линейного ограниченного функционала $f: X \to \mathbb{R}$. Справедливы следующие равенства:

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} |f(x)|.$$

3.2 Пространства $L(X;Y)$, X^* и кольцо операторов $L(X;X)$

3.2.1. Пространство $L(X;Y)$ и сопряженное пространство X^*

Пусть $(X, \|.\|_X)$ и $(Y, \|.\|_Y)$ – два линейных нормированных пространства над одним и тем же полем F ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). На множестве линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, определим операции сложения и умножения на число.

Определение 5. *Пусть $A : X \to Y$ и $B : X \to Y$ – линейные непрерывные операторы.*

1. *Суммой операторов A и B называется оператор $A + B$, заданный равенством*

$$(A + B)x = Ax + Bx \ \forall x \in X.$$

2. *Произведением числа $\lambda \in F$ на оператор A называется оператор λA, заданный равенством*

$$(\lambda A)x = \lambda Ax \ \forall x \in X.$$

Легко проверить, что множество линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, с введенными операциями становится линейным пространством. В частности, нулем этого пространства является тождественно равный нулю оператор $A : Ax = 0 \ \forall x \in X$, который мы будем обозначать символом 0, как и число. Проверим, что норма на этом пространстве, определенная в (2)

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \|Ax\|_Y,$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы.

1) $\|A\| \geqslant 0$; если $A = 0$, то $Ax = 0$ для всех $x \in X$, поэтому $\|A\| = 0$; обратно, если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\|_Y = 0 \ \forall x \in X$, откуда $Ax = 0 \ \forall x \in X$, т.е. $A = 0$.

2) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|\lambda Ax\|_Y = \lambda \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \lambda\|A\|$.

3) $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax + Bx\|_Y \leqslant \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y + \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Bx\|_Y = \|A\| + \|B\|$.

Определение 6. *Линейное нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, обозначается через $L(X;Y)$.*

Определение 7. *Пространство $L(X;F)$ линейных непрерывных функционалов в X называется сопряженным к X пространством и обозначается X^*.*

Теорема 2. *Если Y – полное пространство, то $L(X,Y)$ – также полное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ – фундаментальная последовательность в $L(X,Y)$: $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n,m \to \infty$. Тогда

$$\|A_nx - A_mx||_Y \leqslant \|A_n - A_m\| \, \|x\|_X \to 0 \text{ при } n,m \to \infty,$$

так что при любом $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в Y и в силу полноты Y имеет предел $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.

Изучим свойства оператора $A: X \to Y$. Прежде всего, он линейный, так как для любых $x_i \in X$ и $\lambda \in F$ справедливы следующие равенства:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2;$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n x = \lambda A x$$

Докажем, что A – ограниченный оператор. Так как $|\|A_n\| - \|A_m\|| \leqslant \|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна, значит и ограничена: $\exists M: \ \|A_n\| \leqslant M \ \forall n$. Отсюда следует неравенство

$$\|A_n x\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \ \forall n \, \forall x \in X.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, установим ограниченность оператора A:

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \ \forall x \in X.$$

Итак, оператор A принадлежит пространству $L(X, Y)$. Докажем теперь, что A является пределом последовательности $\{A_n\}$ по норме пространства $L(X, Y)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех $x \in X$: $\|x\|_X \leqslant 1$ найдём $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leqslant \|A_n - A_m\|\|x\|_X \leqslant \|A_n - A_m\| < \varepsilon \text{ при } n, m > n(\varepsilon).$$

Устремив $m \to \infty$, получим

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(A_n - A)x\|_Y \leqslant \varepsilon \text{ при } n > n(\varepsilon).$$

Последнее неравенство означает, что $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$. □

Следствие 5. *Сопряженное X^* пространство к любому нормированному пространству X является полным.*

3.2.2. Кольцо операторов $L(X; X)$

Лемма 3. *Пусть $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ и $(Z, \|.\|_Z)$ – три линейных нормированных пространства над одним и тем же полем F, $B \in L(X; Y)$ и $A \in L(Y; Z)$. Тогда произведение операторов $C = AB: X \to Z$:*

$$Cx = A(Bx) \ \ \forall x \in X,$$

принадлежит пространству $L(X; Z)$.

Доказательство. Линейность C следует из линейности A и B:

$$C(x_1 + x_2) = A(B(x_1 + Bx_2)) = A(Bx_1 + Bx_2) = ABx_1 + ABx_2;$$

$$C(\lambda x) = AB(\lambda x) = A(\lambda Bx) = \lambda ABx.$$

Оператор C ограниченный, так как

$$\|Cx\|_Z = \|ABx\|_Z \leqslant \|A\|\|Bx\|_Y \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \|x\|_X \ \ \forall x \in X.$$

Таким образом, $C \in L(X; Z)$ и

$$\|C\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

□

В пространстве $L(X;X)$ определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие аксиомам кольца, поэтому $L(X;X)$ является нормированным кольцом. В $L(X;X)$ определены степени оператора
$$A^0 = I,\ A^n = AA^{n-1}\ \forall n,$$
где I – тождественный оператор в X: $Ix = x\ \forall x \in X$.

Лемма 4. (Спектральный радиус оператора) *Пусть X – банахово пространство и $A \in L(X;X)$ – произвольный оператор. Тогда существует*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho(A),$$
называемый спектральным радиусом оператора A.

Операторный ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots \tag{3}$$
сходится в пространстве $L(X;X)$, если $\rho(A) < 1$, и расходится, если $\rho(A) > 1$.

Доказательство. Обозначим
$$a = \inf_n \sqrt[n]{\|A^n\|}$$
и докажем, что $a = \rho(A)$.

Для $\varepsilon > 0$ найдем $m = m(\varepsilon)$ такой, что $\sqrt[m]{\|A^m\|} < a+\varepsilon$ и положим $M = \max\{1, \|A\|, \ldots, \|A^{m-1}\|\}$. Произвольное натуральное число n представим в виде $n = km + l$, где $0 \leqslant l \leqslant m-1$. Воспользовавшись неравенством $\|A^s\| \leqslant \|A\|^s$ для любого натурального s, получим:
$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \sqrt[n]{\|A^l\|\|A^m\|^k} \leqslant M^{1/n}\|A^m\|^{k/n} = M^{1/n}(\sqrt[m]{\|A^m\|})^{km/n} < M^{1/n}(a+\varepsilon)^{(n-l)/n}.$$
При $n \to \infty$ правая часть полученного неравенства стремится к $a+\varepsilon$, поэтому найдется номер $n(\varepsilon)$ такой, что
$$a \leqslant \sqrt[n]{\|A^n\|} < a + 2\varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon).$$
Это означает существование $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf\limits_n \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Перейдем к исследованию сходимости операторного ряда (3). Пусть $\rho(A) < 1$. Тогда по признаку Коши сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$. Для частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$ операторного ряда справедлива оценка:
$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} A^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A^k\| \to 0 \text{ при } k \to \infty\ \forall p > 0$$
в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$. Это означает, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна в $L(X;X)$, и, в силу полноты этого пространства, имеет предел в $L(X;X)$:
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$
Пусть теперь $\rho(A) > 1$. Тогда при достаточно больших n имеет место неравенство $\|S_{n+1} - S_n\| = \|A^{n+1}\| > 1$ и не выполнено необходимое условие сходимости операторного ряда. □

3.3 Обратный оператор

3.3.1 Определение и критерий существования обратного оператора

Определение 8. *Пусть A – линейный оператор с областью определения $D(A)$ – линеал в нормированном пространстве X и областью значений $R(A)$ в нормированном пространстве Y.*

1. *Оператор $A : D(A) \to R(A)$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x \in D(A)$ для любого $y \in R(A)$.*

2. *Отображение, которое ставит в соответствие вектору y это решение x, называется обратным оператором $A^{-1} : R(A) \to D(A)$.*

Из определения обратного оператора следуют равенства:

$$A^{-1}Ax = x \; \forall x \in D(A); \quad AA^{-1}y = y \; \forall y \in R(A).$$

Лемма 5. *Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in R(A)$ и $x_1 = A^{-1}y_1, x_2 = A^{-1}y_2$. Для любых $\alpha, \beta \in F$ имеем $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$. Отсюда следует, что $\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$, т.е. $\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$, что и означает линейность A. □

Лемма 6. *Пусть $N(A) \equiv \{x \in D(A) : \; Ax = 0\}$ – ядро оператора A. Условие $N(A) = \{0\}$ необходимо и достаточно для биективности отображения $A : D(A) \to R(A)$, т.е. для существования обратного оператора $A^{-1} : R(A) \to D(A)$.*

Доказательство. Пусть $N(A) = \{0\}$. Допустим, что для некоторого $y \in R(A)$ существуют два решения уравнения $Ax = y$, а именно, $x_1 \neq x_2$. Тогда $A(x_1 - x_2) = 0$, поэтому $x_1 - x_2 \in N(A) = \{0\}$, так что x_1 и x_2 должны совпадать. Получено противоречие.

Пусть теперь A биективен, в частности, для любого $y \in R(A)$ существует единственное решение уравнения $Ax = y$. Допустим, что $N(A)$ содержит ненулевой элемент z. Возьмем какой-либо вектор $y \in R(A)$, обозначим через x решение уравнения $Ax = y$. Тогда вектор $x + z \neq x$ также является решением этого уравнения, так как $A(x+z) = Ax+Az = Ax = y$. Снова получено противоречие. □

3.3.2 Ограниченный обратный оператор

Теорема 3. *Оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда найдется постоянная $m > 0$:*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X \;\; \forall x \in D(A). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть A^{-1} существует и ограничен на $D(A^{-1}) = R(A)$. Это означает, что найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant c\|y\|_Y \;\; \forall y \in R(A).$$

Полагая в этом неравенстве $y = Ax$, получим неравенство (4) с $m = c^{-1}$.

Пусть теперь выполнено неравенство (4). Тогда, во-первых, из равенства $Ax = 0$ следует $x = 0$, поэтому $N(A) = \{0\}$. В силу леммы 6 существует A^{-1}, взаимно однозначно отображающий $R(A)$ на $D(A)$. Полагая в (4) $x = A^{-1}y$, получим неравенство

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant m^{-1}\|y\|_Y \;\; \forall y \in R(A),$$

т.е. ограниченность оператора A^{-1} на $R(A)$. □

Теорема 4. (Операторный ряд) *Пусть X – банахово пространство, $A \in L(X;X)$ и спектральный радиус $\rho(A) < 1$. Тогда существует $(I-A)^{-1} \in L(X;X)$ и*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

В частности, при $\|A\| < 1$ существует $(I-A)^{-1} \in L(X;X)$ и

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Доказательство. В силу леммы 4 операторный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится. Пусть S – его сумма. Тогда

$$S(I-A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I-A) = \lim_{n\to\infty}(I-A^n) = I,$$

поэтому $S = (I-A)^{-1}$.

В случае $\|A\| < 1$ имеем:

$$\|S\| = \lim_{n\to\infty}\|S_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

$\square$

Теорема 5. (Обратимость возмущенного оператора)

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A_0 \in L(X;Y)$ имеет обратный $A_0^{-1} \in L(Y;X)$ и оператор $\Delta A \in L(X;Y)$ (возмущение A_0) таков, что

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}.$$

Тогда существует $(A_0+\Delta A)^{-1} \in L(Y;X)$ и

$$\|(A_0+\Delta A)^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|}{1-\|A_0^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A_0^{-1}\|^2.$$

Доказательство. Пусть I_x - тождественный оператор в X. Тогда $A_0+\Delta A = A_0(I_x + A_0^{-1}\Delta A)$. Так как $\|A_0^{-1}\Delta A\| < 1$, то оператор $I_x + A_0^{-1}\Delta A \in L(X;X)$ имеет обратный в $L(X;X)$ и

$$(I_x + A_0^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A_0^{-1}\Delta A)^k.$$

Тогда оператор $(I_x + A_0^{-1}\Delta A)^{-1}A_0^{-1} \in L(Y;X)$ является обратным к $A_0(I_x + A_0^{-1}\Delta A)=A_0+\Delta A$.

Получим оценку близости обратных операторов $(A_0+\Delta A)^{-1}$ и A_0^{-1}. Имеем:

$$\|(A_0+\Delta A)^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \|A_0^{-1}\|\|(I_x + A_0^{-1}\Delta A)^{-1} - I_x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|A_0^{-1}\Delta A\|^k\|A_0^{-1}\| = \frac{\|A_0^{-1}\Delta A\|}{1-\|A_0^{-1}\Delta A\|}\|A_0^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|}{1-\|A_0^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A_0^{-1}\|^2.$$

$\square$

Теорема 6. (Теорема Банаха о существовании обратного оператора)

Пусть $A \in L(X;Y)$ взаимно однозначно отображает банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда $A^{-1} \in L(Y;X)$.

3.4 Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха

3.4.1 Продолжение линейного оператора

Теорема 7. *Пусть $(X, \|.\|_X)$ – нормированное пространство, $(Y, \|.\|_Y)$ – банахово пространство. Пусть линейный ограниченный оператор A_0 определен на всюду плотном в X линеале $D(A_0)$. Тогда его можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы, а именно, существует линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$ такой, что*

1) $Ax = A_0 x \ \ \forall x \in D(A_0)$;

2) $\|A\| = \|A_0\|$.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $x \in X$. В силу плотности $D(A_0)$ в X существует последовательность $\{x_n\} \in X_0$, сходящаяся к x: $\|x_n - x\|_X \to 0$ при $n \to \infty$ Последовательность $\{A_0 x_n\}$ фундаментальна в Y, так как

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\|_Y \leqslant \|A_0\| \|x_n - x_m\|_X \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Из полноты Y следует существование предела у последовательности $\{A_0 x_n\}$. Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \in X_0$, сходящейся к x. Действительно, если $\{\tilde{x}_n\} \in X_0$: $\|\tilde{x}_n - x\|_X \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\|A_0 \tilde{x}_n - A_0 x_n\|_Y \leqslant \|A_0\| \|\tilde{x}_n - x_n\|_X \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это означает, что можно определить оператор $A: X \to Y$ равенством

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n \text{ в } Y \text{ для } x_n \in D(A_0);\ x_n \to x \text{ в } X.$$

Если $x \in X_0$, то в качестве последовательности, сходящейся к x, можно взять стационарную последовательность $\{x, x, \ldots, x \ldots\}$, поэтому

$$Ax = A_0 x \text{ при } x \in D(A_0).$$

Докажем, что A – линейный оператор. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $x_n, y_n \in D(A_0)$. Тогда $x + y = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ и

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_0(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n + \lim_{n\to\infty} A_0 y_n = Ax + Ay.$$

Аналогично устанавливается равенство $A(\lambda x) = \lambda A x$.

Ограниченность оператора A следует из неравенств

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_0 x_n\|_Y \leqslant \lim_{n\to\infty} \|A_0\| \|x_n\|_X = \|A_0\| \|x\|_X.$$

Наконец, в силу определения нормы оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y \geqslant \sup_{x \in D(A_0), \|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y = \|A_0\|,$$

и из двух последних неравенств следует $\|A\| = \|A_0\|$. □

3.4.2 Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала

Теорема 8. *Пусть $(X, \|.\|_X)$ – нормированное пространство над полем F, $L = D(f)$ – линеал в X и $f_0 : L \to F$ – линейный ограниченный функционал. Тогда его можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы, т.е. существует линейный ограниченный функционал $f: X \to F$ такой, что*

1) $f(x) = f_0(x) \ \ \forall x \in L$;

2) $\|f\| = \|f_0\|$.

Доказательство. Доказательство проведем лишь для случая сепарабельного вещественного пространства $X(F=\mathbb{R})$.

Пусть $e_1 \in X \setminus L$ и L_1 – линейная оболочка L и e_1, т.е. множество векторов вида $z = t_1 x + t_2 e_1$ для произвольных $x \in X$ и $t_i \in \mathbb{R}$. Каждый элемент из L_1 однозначно представим в виде

$$z = x + te_1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Действительно, для $x \in X$ элемент $t_1 x$ принадлежит X, поэтому для любого $z \in L_1$ справедливо представление $z = x + te_1, x \in L, t \in \mathbb{R}$. Допустим, что существует еще одно представление $z = \tilde{x} + \tilde{t}e_1$ с $\tilde{x} \in L$ и $\tilde{t} \in \mathbb{R}$. Тогда $x - \tilde{x} = (\tilde{t} - t)\, e_1$. Если $\tilde{t} = t$, то и $\tilde{x} = x$. Если же допустить, что $\tilde{t} \neq t$, то $e_1 = (\tilde{t} - t)^{-1}(x - \tilde{x}) \in L$, что противоречит выбору вектора $e_1 \in X \setminus L$.

Продолжим функционал f_0 на L_1 так, чтобы выполнялись все утверждения теоремы, а именно:

$$f(x) = f_0(x) \text{ на } L,$$

$$\|f\|_{L_1} = \sup_{z \in L_1, \|z\|_X \leqslant 1} |f(z)| = \|f_0\| = \sup_{x \in L, \|x\|_X \leqslant 1} |f_0(x)|.$$

Возьмем два произвольных вектора $x, y \in L$. Из неравенств

$$f_0(x) + f_0(y) = f_0(x+y) \leqslant \|f_0\|(\|x+y\|) \leqslant \|f_0\|(\|x - e_1\| + \|y + e_1\|)$$

следует $f_0(x) - \|f_0\|\,\|x - e_1\| \leqslant \|f_0\|\,\|y + e_1\| - f_0(y)$ для всех $x, y \in L$. Поэтому найдется число $c_1 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$f_0(x) - \|f_0\|\,\|x - e_1\| \leqslant c_1 \leqslant \|f_0\|\,\|y + e_1\| - f_0(y) \ \ \forall x, y \in L.$$

Подставив в эти неравенства $\dfrac{x}{t}$ вместо x и y и умножив затем на $t > 0$, получим

$$f_0(x) \pm t\, c_1 \leqslant \|f_0\|\,\|x \pm t\, e_1\| \ \ \forall t > 0,\ \forall x \in L. \tag{5}$$

Определим на L_1 функционал по формуле

$$f(z) = f_0(x) + tc_1 \text{ для } z = x + te_1, \text{ где } x \in L \text{ и } t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что это линейный функционал. Далее, если $z \in L$, то $t = 0$, т.е. $z = x$ и $f(x) = f_0(x)$. Из (5) и (6) следует неравенство $f(z) \leqslant \|f_0\|\,\|z\|$ для всех $z \in L_1$. Поменяв здесь z на $-z$, получим $|f(z)| \leqslant \|f_0\|\,\|z\|\ \forall z \in L_1$, т.е.

$$\|f\|_{L_1} \leqslant \|f_0\|.$$

Но поскольку $L \subset L_1$ и $f = f_0$ на L, то

$$\|f\|_{L_1} = \sup_{z \in L_1, \|z\|_X \leqslant 1} |f(z)| \leqslant \sup_{x \in L, \|x\|_X \leqslant 1} |f_0(x)| = \|f_0\|.$$

Итак, функционал f является продолжением f_0 на L_1 и удовлетворяет всем утверждением теоремы.

Пусть $\tilde{X}$ – счетное и всюду плотное в X множество. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – его элементы, не принадлежащие L. Построим последовательно линейный ограниченный функционал f_1 – продолжение функционала f_0 на линейную оболочку L и e_1, затем линейный ограниченный функционал f_2 – продолжение функционала f_1 на линейную оболочку L_1 и e_2 и т. д. В результате получим линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$ продолжение f_0 на множество $\tilde{L} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i$. Это множество всюду плотно в X, поэтому, применяя теорему 7 в частном случае $Y = \mathbb{R}$, построим требуемое продолжение функционала f_0 на все пространство X. □

3.6.3 Следствия из теоремы Хана-Банаха

Следствие 6. *Пусть X – нормированное пространство над полем F и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.*

Доказательство. Обозначим $L = \{tx_0,\, t \in F\}$ и определим функционал $f_0 : L \to F$ равенством $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$. Легко видеть, что L – это линеал, а функционал f_0 обладает свойствами: $f_0(x_0) = \|x_0\|$ и

$$\|f_0\| = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \sup_{t \neq 0} \frac{|t|\|x_0\|}{\|tx_0\|} = 1.$$

По теореме 8 функционал f_0 можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы. Продолженный функционал обладает требуемыми свойствами: $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$. □

Следствие 7. *Пусть X – нормированное пространство над полем F и $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = 0\ \forall f \in X^*$. Тогда $x_0 = 0$.*

Доказательство. Если допустить, что $x_0 \neq 0$, то по предыдущему следствию 6 найдется функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$, что противоречит условию. □

Следствие 8. *Пусть X – нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ и L – его подпространство, а вектор $x_0 \in X \setminus L$. Тогда существует $f \in X^*$ такой, что*

$$f(x) = 0\ \forall x \in L, \ \ f(x_0) = 1, \ \ \|f\| = \frac{1}{d},$$

где $d = \inf\limits_{x \in L} \|x_0 - x\|$ – расстояние от x_0 до L.

Доказательство. Пусть L_1 – линейная оболочка L и вектора x_0. Тогда, как установлено в доказательстве теоремы 8, любой элемент $z \in L_1$ однозначно представим в виде $z = x + tx_0$, $x \in L, t \in \mathbb{R}$. Определим на L_1 функционал

$$f_0(z) = t \text{ для } z = x + tx_0.$$

По построению $f_0(x) = 0$ при $x \in L$ и $f_0(x_0) = 1$. Найдем норму f_0. Для $z \in L_1, z \neq 0$, имеем

$$|f_0(z)| = |t| = \frac{|t|\|z\|}{\|z\|} = \frac{\|z\|}{\|t^{-1}x + x_0\|} \leqslant \frac{\|z\|}{\|x_0 - (-t^{-1}x)\|} \leqslant \frac{\|z\|}{d},$$

поэтому $\|f_0\| \leqslant \dfrac{1}{d}$. Докажем противоположное неравенство. Пусть последовательность $\{x_n\} \in L$ такая, что $\|x_n - x_0\| \to d$ при $n \to \infty$. Тогда

$$|f_0(x_n - x_0)| = |f_0(x_n) - f_0(x_0)| = |f_0(x_0)| = 1,$$

поэтому

$$\|f_0\|\|x_n - x_0\| \geqslant |f_0(x_n - x_0)| = 1$$

и в пределе при $n \to \infty$ получим $\|f_0\| \geqslant \dfrac{1}{d}$. Итак, построен линейный функционал на линеале L_1, удовлетворяющий условиям

$$f_0(x) = 0\ \forall x \in L, \ \ f_0(x_0) = 1, \ \ \|f_0\| = \frac{1}{d}.$$

Осталось продолжить его на все пространство X с сохранением указанных свойств. □

Следствие 9. *Пусть X – нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ и L – его подпространство, а вектор $x_0 \in X \setminus L$. Тогда существует $f \in X^*$ такой, что*

$$f(x) = 0\ \forall x \in L, \ \ f(x_0) \neq 0, \ \ \|f\| = 1.$$

Доказательство. Это вариант утверждения предыдущего следствия 8, в котором надо построенный функционал умножить на постоянную d. $\square$

Следствие 10. *Если сопряженное пространство X^* – сепарабельное, то и X – сепарабельное.*

Доказательство. В силу сепарабельности X^* существует счетное множество $D = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$, которое всюду плотно в единичном шаре пространства X^*. Так как

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)|,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n найдется вектор x_n, $\|x_n\| = 1$ такой, что $|f_n(x_n) \geqslant (1-\varepsilon)\|f_n\|$. Возьмем для определенности $\varepsilon = 1/2$, так что

$$\|x_n\| = 1, \ |f_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}\|f_n\|. \tag{7}$$

Пусть L – подпространство, порожденное множеством $\{x_n\}$, т.е. замыкание линейной оболочки этих векторов. По построению L – сепарабельное пространство. Докажем, что $L = X$. Допустим противоположное, т.е. что существует $x_0 \in X \setminus L$. По следствию 9 существует функционал f такой, что

$$f(x) = 0 \ \forall x \in L, \ \ f(x_0) \neq 0, \ \ \|f\| = 1.$$

В частности, $f(x_n) = 0 \ \forall n$. Отсюда и из (7) получим

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leqslant |f_n(x_n)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|.$$

В силу плотности D в единичном шаре пространства X^* функционал f можно приблизить с любой точностью векторами из D. Не умоляя общности, можно считать, что $f_n \to f$ по норме, поэтому из последнего неравенства следует $f_n \to 0$. В результате

$$f_n \to f, \ f_n \to 0, \ \text{но} \ \|f\| = 1.$$

Получены противоречивые утверждения, которые доказывают что $L = X$ и X – сепарабельное пространство. $\square$

3.5 Второе сопряженное пространство. Рефлексивность

Определение 9. Второе сопряженное пространство

Пространство X^*, сопряженное к линейному нормированному пространству X, само является нормированным пространством. Пространство $(X^*)^*$ функционалов на X^* обозначается X^{**} и называется вторым сопряженным к X.

Лемма 7. Оператор вложения X в X^{**}

Отображение J, которое каждому вектору из X ставит в соответствие функционал на X^* по правилу:

$$J(x) = F_x, \ \text{где} \ F_x(f) = f(x) \ \forall f \in X^*, \tag{8}$$

принадлежит $L(X, X^{**})$ и

$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \|F_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \ \ \forall x \in X.$$

Доказательство. $\square$

Определение 10. Вложение, рефлексивность

1. *$J : X \to X^{**}$ называется оператором вложения X в X^{**}, пространство X изометрично подпространству X^{**}. Для простоты пишут $X \subset X^{**}$.*

2. *Симметричное обозначение $\langle f, x\rangle$ означает как значение функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$, так и значение функционала $x \in X \subset X^{**}$ на элементе $f \in X^*$.*

3. *Пространство, для которого $X = X^{**}$ (более точно, $J(X) = X^{**}$), называется рефлексивным.*

Примеры 1. 1.

2. Гильбертово пространство является рефлексивным.

3.6 Сопряженные операторы

Пусть X и Y – два нормированных пространства над полем F.

Определение. **Сопряженный оператор**
Если $A \in L(X; Y)$, то оператор $A^* : Y^* \to X^*$, определенный равенством

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle \ \ \forall x \in X \ \forall f \in Y^*,$$

называется сопряженным к A.

Утверждения. **Свойства сопряженных операторов**

Пусть $A \in L(X; Y)$ и $B \in L(X; Y)$. Тогда

1. A^* – линейный оператор.

2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

3. $(\lambda A)^* = \lambda A^*$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ или $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. $\|A\| = \|A^*\|$.

5. Пусть $A \in L(X; Y)$ и пространства X, Y – банаховы. Для существования $(A^*)^{-1} \in L(X^*; Y^*)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал обратный оператор A^{-1}, при этом $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

3.7 Операторы в гильбертовом пространстве

Определения. **Самосопряженные операторы**

Пусть H – гильбертово пространство и оператор $A \in L(H; H)$.

1. A называется самосопряженным в H, если $A = A^*$, т.е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \ \ \forall x \in H \ \forall y \in H.$$

2. A называется неотрицательным (или положительно полуопределенным), если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in H.$$

3. A называется положительно определенным, если

$$(Ax, x) > 0 \ \ \forall x \in H,\ x \neq 0.$$

Утверждения. **Свойства самосопряженных операторов**

Пусть A и B – самосопряженные в H операторы. Тогда

1. Для любых вещественных чисел α и β оператор $\alpha A + \beta B$ самосопряжен в H.
2. Оператор $AB \in L(H;H)$ самосопряжен в H тогда и только тогда, когда A и B перестановочны (коммутируют): $AB = BA$.
3. Число (Ax, x) – вещественное.
4. Для нормы самосопряженного в H оператора A справедливы равенства

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|(Ax,x)|}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(Ax,x)|.$$

Определение. **Унитарные операторы** (по Люстернику)

Пусть H – гильбертово пространство. Линейный оператор $U : H \to H$ называется унитарным, если

$$\|Ux\| = \|x\|.$$

Утверждения. **Свойства унитарных операторов**

1. U – взаимно-однозначное отображение H на H, существует U^{-1} – унитарный оператор.
2. $U^* = U^{-1}$.

Определение. **Операторы ортогонального проектирования** (по Треногину)

Пусть H – гильбертово пространство и L – его подпространство. Оператор P, который ставит в соответствие произвольному элементу $x \in H$ его ортогональную проекцию $y \in L$, называется оператором ортогонального проектирования, или коротко ортопроектором.

Утверждения. **Свойства ортопроекторов**

1. Пусть P – оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства H на подпространство L. Тогда
   - $P \in L(H;H)$ и $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.
   - $P^2 = P$.
   - P самосопряжен и положительно полуопределен, $(Px, x) = \|Px\|^2$.
   - $(Px, x) \leqslant \|Px\|^2 \ \ \forall x \in H$ и равенство достигается только при $x \in L$.
2. Если A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $A^2 = A$, то A – оператор ортогонального проектирования на некоторое подпространство $L \subset H$.

3.8 Примеры линейных операторов и функционалов

3.8.1 Операторы в конечномерных пространствах

1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ – вещественные пространства с евклидовыми нормами, а A – $m \times n$ матрица.

   Утверждение 15. *Матрица A определяет линейный непрерывный оператор из X в Y с нормой*
   $$\|A\| = \sqrt{\mu_{\max}(A)}.$$
   Здесь $\mu_{\max}(A) = \lambda_{\max}(A^T A) > 0$ – максимальное собственное число симметричной и неотрицательно определенной $n \times n$ матрицы $A^T A$, (называемое максимальным сингулярным числом матрицы A), A^T – транспонированная $n \times m$ матрица.

   Доказательство. Легко видеть, что A определяет линейный оператор из X в Y. Остановимся на выводе формулы для его нормы.

   Справедливо равенство $\|Ax\|^2 = (A^T Ax, x)$, где $(.,.)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, откуда
   $$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y^2 = \sup_{\|x\|_X = 1} (A^T Ax, x).$$
   Для любого вектора x с $\|x\|_X = 1$ справедливо неравенство $(A^T Ax, x) \leqslant \|A^T A\|$, поэтому
   $$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y^2 = \sup_{\|x\|_X = 1} (A^T Ax, x) \leqslant \|A^T A\| = \lambda_{\max}(A^T A).$$
   Поскольку на нормированном собственном векторе e_{i^*} матрицы $A^T A$, соответствующем максимальному собственному числу $\lambda_{\max}(A^T A)$, достигается равенство $\|Ae_{i^*}\|_Y^2 = (A^T Ae_{i^*}, e_{i^*}) = \lambda_{\max}(A^T A)$, то
   $$\|A\|^2 = \lambda_{\max}(A^T A).$$
   □

2. Пусть $(X, \|.\|_X)$ и $(Y, \|.\|_Y)$ – два конечномерных нормированных пространства над полем вещественных чисел с линейно независимыми базисами $\{e_j\}_{j=1}^m \in X$ и $\{g_i\}_{i=1}^n \in Y$.

   Пусть $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $y = Ax$ и $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m$, $y = y_1 g_1 + y_2 g_2 + \ldots + y_n g_n$ – разложения векторов x и y по базисам соответствующих пространств.

   Обозначим через a_{ij} коэффициенты разложения вектора Ae_j по базису пространства Y:
   $$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_i.$$
   Тогда справедливо представление
   $$y = Ax = \sum_{j=1}^{m} x_j Ae_j = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j) g_i,$$
   т.е. $y_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

   Таким образом, каждому линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ можно поставить в соответствие матрицу (a_{ij}), элементы которой однозначно определяются выбранными в пространствах X и Y базисами.

   Очевидно и обратное утверждение – каждая матрица $n \times m$ матрица определяет некоторый линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ для выбранных в этих пространствах базисах.

3. "Однострочечная" $1 \times n$ матрица $f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}$ определяет линейный непрерывный функционал в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой. Норма этого функционала равна

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right)^{1/2},$$

т.е. совпадает с евклидовой нормой вектора $\tilde{f} = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Действительно, неравенство $\|f\| \leqslant \big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\big)^{1/2}$ следует из неравенства Коши-Буняковского для сумм. Взяв теперь вектор

$$x = \big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\big)^{-1/2} (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

с единичной нормой, получим равенство $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\big)^{1/2}$, откуда следует утверждение.

3.8.2 Операторы в пространствах последовательностей

Пусть $X = Y = l_2$ – пространство последовательностей с элементами $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, где числа $\xi_i \in \mathbb{C}$ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$.

Утверждение 16. *Зададим оператор $A : l_2 \to l_2$ равенством*

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \text{ для } i = 1, 2, \dots,$$

где $a_{ij} \in \mathbb{C}$ и $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. Тогда A – линейный непрерывный оператор и справедлива оценка

$$\|A\| \leqslant \big(\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \big)^{1/2}.$$

Доказательство. Достаточно применить неравенство Гёльдера (11) (при $p = 2$) для рядов:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \big)^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \, \|x\|^2.$$

□

3.8.3 Интегральные и дифференциальные операторы в пространствах функций

1. Пусть $X = C[0,1]$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$ и $\phi(t) \in C[0,1]$. Функционал

$$f(x) = \int_0^1 \phi(t) x(t) dt$$

является линейным и непрерывным с нормой

$$\|f\| = \int\limits_0^1 |\phi(t)|dt.$$

Доказательство. Ясно, что f – линейный функционал. Из неравенства $|f(x)| \leqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \int\limits_0^1 |\phi(t)|dt$, справедливого для любой непрерывной функции $x(t)$, следует

$$\|f\| \leqslant \int\limits_0^1 |\phi(t)|dt.$$

Докажем противоположное неравенство. Непрерывная на $[0,1]$ функция $\phi(t)$ равномерно непрерывна, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, что колебание $\phi(t)$ на каждом $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ меньше ε:

$$\omega_{\Delta_i}(\phi) = \sup_{t_{i-1}\leqslant t,s\leqslant t_i} |\phi(t) - \phi(s)| < \varepsilon.$$

Обозначим через T_0 объединение промежутков Δ_i, на которых функция $\phi(t)$ обращается в нуль и через $T_+ = [0,1] \setminus T_0$ объединение тех, на которых функция $\phi(t)$ не меняет знак. Определим непрерывную функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\phi(t) \text{ при } t \in \Delta_i \subset T_+, \\ \text{линейна при } t \in \Delta_i \subset T_0. \end{cases}$$

Поскольку $|\tilde{x}(t)| \leqslant 1$, а функция $|\phi(t)| < \varepsilon$ точках $\Delta_i \subset T_0$, то

$$f(\tilde{x}) = \int\limits_0^1 \phi(t)\tilde{x}(t)dt = \int\limits_{T_+} |\phi(t)|dt + \int\limits_{T_0} \phi(t)\tilde{x}(t)dt \geqslant \int\limits_{T_+} |\phi(t)|dt - \int\limits_{T_0} |\phi(t)|dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 |\phi(t)|dt - 2\int\limits_{T_0} |\phi(t)|dt \geqslant \int_0^1 |\phi(t)|dt - 2\varepsilon$$

Отсюда следует $\|f\| \geqslant f(\tilde{x}) \geqslant \int_0^1 |\phi(t)|dt - 2\varepsilon$ и при $\varepsilon \to 0$ неравенство $\|f\| \geqslant \int_0^1 |\phi(t)|dt$. □

2.

Утверждение 17. *Пусть* $X = Y = C[0,1]$ *и* $K(t,s)$ *– непрерывная функция на квадрате* $[0,1] \times [0,1]$. *Оператор* $A : C[0,1] \to C[0,1]$, *заданный равенством*

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

является линейным и непрерывным с нормой

$$\|A\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\,ds.$$

Доказательство. Оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ является линейным и непрерывным, так как

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |(Ax)(t)| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)| ds \max_{0\leqslant s\leqslant 1} |x(s)| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds \|x\|.$$

Из приведенного неравенства следует оценка $\|A\| \leqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds$.

Для доказательства противоположного неравенства заметим, что $\int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds$ – непрерывная по t функция, которая достигает максимума на отрезке $[0,1]$ в некоторой точке t_0:

$$\int\limits_0^1 |K(t_0,s)| x(s)\, ds = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds.$$

Определим функционал

$$f(x) = \int\limits_0^1 K(t_0,s) x(s)\, ds.$$

В предыдущем примере (в рассматриваемом случае $\phi(s) = K(t_0,s)$) построена непрерывная функция $\tilde{x}(s)$, $|\tilde{x}(s)| \leqslant 1\ \forall s \in [0,1]$, такая, что

$$f(\tilde{x}) = \int\limits_0^1 K(t_0,s) x(s)\, ds \geqslant \int_0^1 |K(t_0,s)| ds - \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Это означает, что

$$\|A\|| \geqslant \|A\tilde{x}\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \Big| \int\limits_0^1 K(t,s) x(s) ds \Big| \geqslant \int\limits_0^1 K(t_0,s) x(s)\, ds \geqslant \int_0^1 |K(t_0,s)| ds - \varepsilon$$

и в пределе при $\varepsilon \to 0$

$$\|A\| \geqslant \int\limits_0^1 |K(t_0,s)| x(s)\, ds = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds.$$

Итак,

$$\|A\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\, ds.$$

$\square$

3. Пусть $Y = C[0,1]$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$, а $X = C^1[0,1]$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|x\|_{C^1} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|$. Оператор дифференцирования $A: C^1[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

является линейным и непрерывным,

$$\|A\| = 1.$$

Доказательство. Очевидна оценка $\|Ax\|_C = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)| \leqslant \|x\|_{C^1} \quad \forall x \in C^1[0,1]$, поэтому $\|A\| \leqslant 1$. Возьмем теперь функцию из $C^1[0,1]$ вида

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{n(1+nt)}.$$

Прямыми вычислениями получим $\|\tilde{x}\|_{C^1} = 1 + \dfrac{1}{n}$, $\|A\tilde{x}\|_C = 1$, поэтому

$$\|A\| \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

В силу произвольности n отсюда следует $\|A\| \geqslant 1$. □

4. Пусть $Y = C[0,1]$, а X – пространство непрерывно дифференцируемых функций с нормой $C[0,1]$: $\|x\|_C = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$. Отметим, что X является неполным нормированным пространством – подпространством $Y = C[0,1]$. Определим на X оператор дифференцирования $(Ax)(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. Это линейный, но неограниченный оператор. Для доказательства его неограниченности достаточно взять $x(t) = \sin nt$: $(Ax)(t) = n\cos \pi t \Rightarrow \|Ax\|_Y = n\|x\|_X$. Поскольку натуральное число n произвольно, то A – не ограничен.

3.9 Примеры сопряженных пространств

3.9.1 Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пространство (вещественное или комплексное) со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|.\| = (.,.)^{1/2}$. При фиксированном $y \in H$ скалярное произведение (x, y) определяет линейный функционал от x. Более того, в силу неравенства $|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|$ этот функционал непрерывный. Докажем, что функционалами такого вида исчерпываются все линейные непрерывные функционалы в H.

Теорема 9. *Всякий линейный непрерывный функционал в H имеет вид*

$$f(x) = (x, y),$$

где элемент $y \in H$ однозначно определяется функционалом f и

$$\|f\| = \|y\| \tag{9}$$

Доказательство. Пусть f - произвольный линейный непрерывный функционал в H и $H_0 = \{x \in H : f(x) = 0\}$ – его ядро. В силу линейности и непрерывности f множество H_0 является подпространством H.

Если $H_0 = H$, то f – нулевой функционал и можно взять $y = 0$, поэтому в дальнейшем считаем, что $H_0 \neq H$.

Возьмем какой-либо элемент $y_0 \perp H_0$, $y_0 \neq 0$. Очевидно, что $f(y_0) = c_0 \neq 0$. Положим $y_1 = \dfrac{y_0}{c_0}$, тогда $y_1 \neq 0$ и $f(y_1) = 1$. Пусть теперь x – произвольный вектор из H и $f(x) = \alpha$. Тогда $f(x - \alpha y_1) = f(x) - \alpha = 0$, т.е. $x - \alpha y_1 = z \in H_0$, или

$$x = \alpha y_1 + z.$$

Это равенство показывает, что H равно ортогональной сумме H_0 и одномерного пространства, порожденного элементом y_1.

Так как $y_1 \perp z$, то $(x, y_1) = \alpha\|y_1\|^2$, откуда

$$\alpha = f(x) = (x, \frac{y_1}{\|y_1\|^2}).$$

Обозначив $y = \dfrac{y_1}{\|y_1\|^2}$, мы получим требуемое представление функционала $f(x) = (x, y)$.

Поскольку $|f(x)| \leqslant \|y\|\|x\|$, то $\|f\| \leqslant \|y\|$. С другой стороны, $f(y) = \|y\|^2$, поэтому $\|f\|$ не может быть меньше $\|y\|$ и равенство (9) доказано.

Если предположить, что существует еще один вектор $\tilde{y} \in H$ такой, что $f(x) = (x, \tilde{y})\ \forall x \in H$, то $(x, y - \tilde{y}) = 0\ \forall x \in H$, откуда следует равенство $y = \tilde{y}$. □

3.9.2 Сопряженные к пространствам последовательностей

1. **Общий вид линейного функционала в** l_p, $1 \leqslant p < \infty$.

   В пространстве l_p, $1 \leqslant p < \infty$, возьмем базис $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0 \ldots)$. Если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_p$, то существует предел по норме пространства l_p

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_i e_i = \lim_{n\to\infty} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots, 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

   Для $f \in (l_p)^*$, положим $f(e_i) = \eta_i$. Тогда в силу линейности и непрерывности f существует предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\big(\sum_{k=1}^{n} \xi_i e_i\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \eta_i e_i = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_i e_i.$$

   Отсюда ясно, что общая форма линейного функционала в l_p дается равенством

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_i e_i, \tag{10}$$

   в котором следует определить необходимые и достаточные условия на последовательность $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$, чтобы это равенство давало линейный ограниченный функционал.

Утверждение 18. *Для того, чтобы* (10) *было линейным ограниченным функционалом в* l_p *при* $1 \leqslant p < \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ *принадлежала* l_q, *где* q *– сопряженный показатель:* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ($q = \infty$ *в случае* $p = 1$). *При этом*

$$\|f\| = \|y\|_{l_q}. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть последовательность $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ такова, что равенство (10) определяет функционал в l_p.

Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Поскольку $\|e_i\|_{l_1} = 1$, то $|\eta_i| = f(e_i) \leqslant \|f\|$, откуда

$$\|y\|_{l_\infty} = \sup_i |\eta_i| \leqslant \|f\|.$$

Пусть теперь $p > 1$. Возьмем элемент $\tilde{x} \in l_p$ вида

$$\tilde{x} = (|\eta_1|^{q-1} \operatorname{sign} \eta_1, |\eta_2|^{q-1} \operatorname{sign} \eta_2, \ldots, |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sign} \eta_k, 0, 0, \ldots),$$

тогда $f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^q$. С другой стороны,

$$\|\tilde{x}\|_{l_p} = \big(\sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^{(q-1)p}\big)^{1/p} = \big(\sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^q\big)^{1/p},$$

поэтому неравенство $f(\tilde{x}) \leqslant \|f\|\|\tilde{x}\|$ принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^q \leqslant \|f\| \big(\sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^q \big)^{1/p}.$$

В силу произвольности k в пределе получим неравенство

$$\big(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \big)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

Итак, при любом $p \geqslant 1$, если последовательность $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$ такова, что равенство (10) определяет функционал в l_p, то $y \in l_p$ и справедливо неравенство

$$\|y\|_{l_q} \leqslant \|f\|. \tag{12}$$

Достаточность.

Пусть $p = 1$. Возьмем $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots) \in l_\infty$ и $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_1$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$ и неравенства $|\eta_i| \leqslant \|y\|_{l_\infty}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i$ и неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \leqslant \|y\|_{l_\infty} \|x\|_{l_1}.$$

Линейность функционала, определенного равенством (10), очевидна. Из доказанного неравенства следует его ограниченность и неравенство

$$|f(x)| \leqslant \|y\|_{l_\infty} \|x\|_{l_1} \ \ \forall x \in l_1 \ \Rightarrow \|f\| \leqslant \|y\|_{l_\infty}.$$

Сопоставляя это неравенство с (12), получим равенство $\|f\| = \|y\|_{l_\infty}$ в случае пространство l_1.

Доказательство для случая пространства l_p, $p > 1$ аналогично. Надо лишь воспользоваться неравенством Гельдера (11), откуда следует:

$$|f(x)| = \big| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \big| \leqslant \big(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \big)^{1/q} \big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \big)^{1/p} = \|y\|_{l_q} \|x\|_{l_p} \ \Rightarrow \|f\| \leqslant \|y\|_{l_q}.$$

Отсюда и из (12) получим равенство $\|f\| = \|y\|_{l_q}$. □

Из доказанного утверждения следует, что сопряженное к $l_p, 1 \leqslant p < \infty$ пространство изоморфно и изометрично пространству l_q при $q = \dfrac{p}{p-1}, q = +\infty$ при $p = 1$.

2. **Сопряженное пространство к c_0**

В пространстве c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей с нормой $\|x\|_{c_0} = \sup\limits_n |\xi_n|$ для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ равенство (10) при $y \in l_1$ дает общий вид линейного ограниченного функционала f и $\|f\| = \|y\|_{l_1}$.

Доказательство почти дословно повторяет приведенное выше доказательство для случая пространств l_p. При обосновании необходимости следует взять элемент

$$\tilde{x} = (\operatorname{sign} \eta_1, \operatorname{sign} \eta_2, \ldots, \operatorname{sign} \eta_k, 0, 0, \ldots) \in c_0.$$

Таким образом, c_0^* изоморфно и изометрично l_1.

3. **Сопряженное пространство** $l_\infty^* \supset l_1$

Построим функционал $\psi \in l_\infty^*$ такой, что его нельзя представить в виде

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \ \ \forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_\infty \tag{13}$$

для некоторого $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots) \in l_1$. Рассмотрим множество $M \subset l_\infty^*$ таких $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

M является линеалом в l_∞^*. Зададим на M функционал

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \ \ \forall x \in M.$$

Это линейный функционал, так как для любых $x, y \in M$ и чисел α, β справедливы следующие равенства:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \big(\alpha\psi_n(x) + \beta\psi(y)\big) = \alpha\psi_n(x) + \beta\psi(y).$$

Докажем, что функционал ψ ограничен на M. имеем:

$$|\psi(x)| = |\lim_{n\to\infty} \psi_n(x)| \leqslant \sup_n \psi_n(x) \leqslant \sup_n \frac{|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|}{n} \leqslant \|x\|_{l_\infty}.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение ψ все пространство l_∞, сохраним за продолженным функционалом то же обозначение ψ. Допустим, что для построенного функционала ψ выполнено равенство (13) для некоторого $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots) \in l_1$. Тогда в силу (13) при $x = e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0 \ldots)$ получим $\psi(e_i) = \eta_i$. С другой стороны, так как $e_i \in M$, то $\psi(e_i) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(e_i) = 0 \ \forall i$. В результате $y = 0$, поэтому $\psi(x) \equiv 0$ для всех $x \in l_\infty$. Но при $x_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in M$ имеем $\psi(x_0) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = 1$. Получено противоречие, поэтому ψ нельзя представить в виде (13).

3.10 Примеры обратных операторов

1. Пусть $X = Y = l_2$ – пространство последовательностей с элементами $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, где числа $\xi_i \in \mathbb{C}$ таковы, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$. Зададим оператор $A : l_2 \to l_2$ равенством

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \text{ для } i = 1, 2, \ldots,$$

где $a_{ij} \in \mathbb{C}$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. В примере 16 установлено, что A – линейный непрерывный оператор и справедлива оценка $\|A\| \leqslant \big(\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\big)^{1/2}$. Отсюда следует (теорема 4), что если $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$, то бесконечная система уравнений

$$\xi_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j = \eta_i, \ i = 1, 2 \ldots, n, \ldots$$

имеет единственное решение $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ при любой правой части $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots) \in l_2$.

2. Пусть $X = Y = C[a,b]$ и $K(t,s)$ – непрерывная функция на квадрате $[a,b] \times [a,b]$. В примере 17 установлено, что оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$, заданный равенством $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds,\ a \leqslant t \leqslant b$, является линейным и непрерывным с нормой

$$\|A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

   В силу теоремы 4 интегральное уравнение

$$x(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

   имеет единственное решение $x(t) \in C[a,b]$ при любой правой части $y(t) \in C[a,b]$, если параметр λ удовлетворяет условию:

$$|\lambda| \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds < 1.$$

3. Пусть $X = Y = C[0,1]$ и оператор A задан на X равенством $y(t) = Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$. Оператор A – линейный и его область значений $R(A) = \{y \in C^1[0,1] : y(0) = 0\}$. Справедливы следующие соотношения:

$$Ax = 0 \Rightarrow \int\limits_0^t x(s)\,ds = 0\ \forall t \Rightarrow x(t) = 0\ \forall t \Rightarrow x = 0 \text{ в } C[0,1].$$

   Согласно лемме 6 существует обратный оператор $A^{-1} : R(A) \to C[0,1]$. Отметим, что A^{-1} – неограниченный оператор дифференцирования $A^{-1}y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$.

4. Рассмотрим так называемую двухточечную краевую задачу

$$-u''(x) = f(x) \text{ при } 0 < x < 1;\ \ u(0) = u(1) = 0. \tag{14}$$

   Пусть функция G определена равенством

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x) \text{ при } 0 < s < x, \\ x(1-s) \text{ при } x < s < 1. \end{cases} \tag{15}$$

   Функция G называется функцией Грина для задачи (14). Для любой $f \in C[0,1]$ равенство

$$u(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)f(s)ds \tag{16}$$

определяет решение задачи (14). Действительно, подставляя выражение для G из (15) в (16), получим:

$$u(x) = (1-x)\int\limits_0^x sf(s)\,ds + x\int\limits_x^1 (1-s)f(s)\,ds.$$

Легко видеть, что $u(0) = u(1) = 0$. Прямыми вычислениями можно убедиться, также, что $-u''(x) = f(x)$ при $0 < x < 1$. Таким образом, при любой правой части $f \in C[0,1]$ существует решение задачи (14). В рамках общей теории это означает следующее. Пусть $X = C[0,1]$, $D(A) = \{u \in C[0,1] \cap C^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$ – линеал в $C[0,1]$, на котором определен дифференциальный оператор второго порядка $Au(x) = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$. Тогда $R(A) = C[0,1]$.

Далее, функция G неотрицательна и

$$\int\limits_0^1 G(x,s)ds = \frac{1}{2}x(1-x).$$

Используя эти свойства, получим оценку:

$$\|u\|_C = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x)| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}|f(s)| \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(x,s)ds \leqslant \frac{1}{8}\|f\|_C, \tag{17}$$

которую можно записать в виде

$$\|Au\|_C \geqslant 8\|u\|_C \quad \forall u \in D(A).$$

В соответствии с теоремой 6 это означает, что существует ограниченный обратный оператор

$$A^{-1}f(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)f(s)ds$$

на всем пространстве $C[0,1]$.

3.11 Задачи и упражнения

1. Доказать, что в пространстве l_∞ ограниченных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ оператор A, заданный равенством

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j,\ i = 1, 2, \ldots$$

является линейным ограниченным оператором, если выполнено условие

$$\sup_{1\leqslant i<\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty.$$

2. Пусть операторы $A, B, C \in L(X; X)$ (линейные и ограниченные из нормированного пространства X в X). Доказать равенства

$$A(BC) = (AB)C;\ (A + B)C = AC + BC;\ C(A + B) = CA + CB.$$

3. Зададим в пространстве операторы $A, B : C[0, 1] \to C[0, 1]$ равенствами

$$(Ax)(t) = \int_0^1 tsx(s)\, ds, \quad (Bx)(t) = t\, x(t).$$

Доказать, что они не коммутируют: $AB \neq BA$.

4. Пусть X и $\tilde{X}$ – пространства с эквивалентными нормами. Аналогично, Y и $\tilde{Y}$ – пространства с эквивалентными нормами. Доказать эквивалентность норм пространств операторов $L(X; Y)$ и $L(\tilde{X}; \tilde{Y})$.

5. Пусть X – рефлексивное пространство, $x, y \in X$ и $x \neq y$. Доказать, что существует $f \in X^*$: $f(x) \neq f(y)$.

6. Пусть l_2 – гильбертово пространство числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < +\infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i\eta_i$. Найти сопряженные к операторам

   (a) $Ax = (0, 0, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots)$,
   (b) $Ax = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots)$,
   (c) $Ax = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \xi_{n+1}, 0, 0, \ldots)$.

7. Доказать существование непрерывного обратного оператора к оператору

$$A : C[0, 1] \to C[0, 1]; \quad Ax(t) = \int_0^1 x(s)\, ds + x(t).$$

8. Пусть X – линейное нормированное пространство, элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$|f(x_0) \leqslant 1\ \ \forall f \in X^* :\ \|f\| = 1.$$

Доказать, что $\|x_0\| \leqslant 1$.

9. Пусть $A, B \in L(H; H)$. Доказать, что

$$(A + B)^* = A^* + B^*;\ \ (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*,\ \lambda \in \mathbb{C};\ (AB)^* = B^* A^*.$$

10. Пусть A и B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. Доказать, что для самосопряженности AB необходимо и достаточно равенство $AB = BA$.

3.12 *Сводка определений и основных результатов*

Непрерывность и ограниченность линейного оператора

Пусть заданы два нормированных пространства $(X, |.\|_X)$ и $(Y, \|.\|_Y$ над полем F вещественных или комплексных чисел.

1. Отображение $A : X \to Y$ называется линейным оператором, если оно
   (a) аддитивно: $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ для любых $x_1, x_2 \in X$;
   (b) однородно : $A(\lambda x) = \lambda Ax$ для любых $x \in X$ и $\lambda \in F$.

   Частный случай линейного оператора $f : X \to F$ называется линейным функционалом.
2. Оператор $A : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий (определения "по Коши" и "по Гейне"):
   (a) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что
   $$\forall x \in X : \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$
   (b) для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к x_0 по норме пространства X, последовательность $\{Ax_n\} \subset Y$ сходится к Ax_0 по норме Y.
3. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется ограниченным, если существует число $M > 0$ такое, что
   $$\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X.$$

Утверждение

1. Для непрерывности линейного оператора на всем пространстве достаточно, чтобы он был непрерывен в одной точке этого пространства.
2. Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен на X тогда и только тогда, когда он ограничен на X.

Норма линейного оператора

1. Наименьшая постоянная M в неравенстве
   $$\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X$$
   называется нормой линейного ограниченного оператора $A : X \to Y$ и обозначается $\|A\|$.
2. Наименьшая постоянная M в неравенстве
   $$|f(x)| \leqslant M\|x\|_X \ \forall x \in X$$
   называется нормой $\|f\|$ линейного ограниченного функционала $f : X \to \mathbb{R}$.

Утверждение

1. Для нормы линейного ограниченного оператора $A : X \to Y$ справедливы следующие равенства:
   $$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$
2. Для нормы линейного ограниченного оператора функционала $f : X \to \mathbb{R}$ справедливы следующие равенства:
   $$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |f(x)|.$$

Пространство $L(X;Y)$ и сопряженное пространство X^*

Пусть $A : X \to Y$ и $B : X \to Y$ – линейные непрерывные операторы.

1. Суммой операторов A и B называется оператор $A+B$, заданный равенством

$$(A+B)x = Ax + Bx \ \forall x \in X.$$

2. Произведением числа $\lambda \in F$ на оператор A называется оператор λA, заданный равенством

$$(\lambda A)x = \lambda Ax \ \forall x \in X.$$

Утверждение

1. Множество линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, с введенными операциями становится линейным пространством.
2. Норма на этом пространстве, определенная равенством

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \|Ax\|_Y,$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Линейное нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, обозначается через $L(X;Y)$. Пространство $L(X;F)$ линейных непрерывных функционалов в X называется сопряженным к X пространством и обозначается X^*.

Утверждение

Если Y – полное пространство, то $L(X,Y)$ – также полное пространство.
Следствие: сопряженное X^* пространство к любому нормированному пространству X является полным.

Утверждение (Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве)
Пусть H – гильбертово пространство (вещественное или комплексное) со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|.\| = (.,.)^{1/2}$. Всякий линейный непрерывный функционал в H имеет вид

$$f(x) = (x,y),$$

где элемент $y \in H$ однозначно определяется функционалом f и

$$\|f\| = \|y\|.$$

Кольцо операторов $L(X;X)$

Утверждение

Пусть $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ и $(Z, \|.\|_Z)$ – три линейных нормированных пространства над одним и тем же полем F, $B \in L(X;Y)$ и $A \in L(Y;Z)$. Тогда произведение операторов $C = AB : X \to Z$:

$$Cx = A(Bx) \ \ \forall x \in X,$$

принадлежит пространству $L(X;Z)$.

В пространстве $L(X;X)$ определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие аксиомам кольца, поэтому $L(X;X)$ является нормированным кольцом. В $L(X;X)$ определены степени оператора

$$A^0 = I, \ A^n = AA^{n-1} \ \forall n,$$

где I – тождественный оператор в X: $Ix = x \ \forall x \in X$.

Утверждение (Спектральный радиус оператора. Операторный ряд)

1. Пусть X – банахово пространство и $A \in L(X;X)$ – произвольный оператор. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho(A),$$

называемый спектральным радиусом оператора A.

2. Операторный ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$$
сходится в пространстве $L(X;X)$, если $\rho(A) < 1$, и расходится, если $\rho(A) > 1$.

Обратный оператор

Пусть A – линейный оператор с областью определения $D(A)$ – линеал в нормированном пространстве X и областью значений $R(A)$ в нормированном пространстве Y.

1. Оператор $A : D(A) \to R(A)$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x \in D(A)$ для любого $y \in R(A)$.
2. Отображение, которое ставит в соответствие вектору y это решение x, называется обратным оператором $A^{-1} : R(A) \to D(A)$.

Из определения обратного оператора следуют равенства:
$$A^{-1}Ax = x \ \forall x \in D(A); \quad AA^{-1}y = y \ \forall y \in R(A).$$
Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.

Утверждение (Существование обратного оператора)

Пусть $N(A) \equiv \{x \in D(A) : \ Ax = 0\}$ – ядро оператора A. Условие $N(A) = \{0\}$ необходимо и достаточно для биективности отображения $A : D(A) \to R(A)$, т.е. для существования обратного оператора $A^{-1} : R(A) \to D(A)$.

Утверждение (Существование ограниченного обратного оператора)

1. Оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда найдется постоянная $m > 0$:
$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X \ \ \forall x \in D(A).$$
2. Пусть X – банахово пространство, $A \in L(X;X)$ и спектральный радиус $\rho(A) < 1$. Тогда существует $(I - A)^{-1} \in L(X;X)$ и
$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$
В частности, при $\|A\| < 1$ существует $(I - A)^{-1} \in L(X;X)$ и
$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$
3. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A_0 \in L(X;Y)$ имеет обратный $A_0^{-1} \in L(Y;X)$ и оператор $\Delta A \in L(X;Y)$ (возмущение A_0) таков, что
$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}.$$
Тогда существует $(A_0 + \Delta A)^{-1} \in L(Y;X)$ и
$$\|(A_0 + \Delta A)^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A_0^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A_0^{-1}\|^2.$$
4. Пусть $A \in L(X;Y)$ взаимно однозначно отображает банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда $A^{-1} \in L(Y;X)$.

Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха

Утверждение Продолжение линейного оператора

Пусть $(X, \|.\|_X)$ – нормированное пространство, $(Y, \|.\|_Y)$ – банахово пространство. Пусть линейный ограниченный оператор A_0 определен на всюду плотном в X линеале $D(A_0)$. Тогда его можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы, а именно, существует линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$ такой, что

1) $Ax = A_0 x \ \ \forall x \in D(A_0)$;
2) $\|A\| = \|A_0\|$.

Утверждение Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала

Пусть $(X, \|.\|_X)$ – нормированное пространство над полем F, $L = D(f)$ – линеал в X и $f_0 : L \to F$ – линейный ограниченный функционал. Тогда его можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы, т.е. существует линейный ограниченный функционал $f : X \to F$ такой, что

1) $f(x) = f_0(x) \ \ \forall x \in L$;
2) $\|f\| = \|f_0\|$.

Утверждение Следствия из теоремы Хана-Банаха

1. Пусть X – нормированное пространство над полем F и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.
2. Пусть X – нормированное пространство над полем F и $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = 0 \ \forall f \in X^*$. Тогда $x_0 = 0$.
3. Пусть X – нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ и L – его подпространство, а вектор $x_0 \in X \setminus L$. Тогда существует $f \in X^*$ такой, что
$$f(x) = 0 \ \forall x \in L, \ \ f(x_0) = 1, \ \ \|f\| = \frac{1}{d},$$
где $d = \inf\limits_{x \in L} \|x_0 - x\|$ – расстояние от x_0 до L.
4. Пусть X – нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ и L – его подпространство, а вектор $x_0 \in X \setminus L$. Тогда существует $f \in X^*$ такой, что
$$f(x) = 0 \ \forall x \in L, \ \ f(x_0) \neq 0, \ \ \|f\| = 1.$$
5. Если сопряженное пространство X^* – сепарабельное, то и X – сепарабельное.

Второе сопряженное пространство

Пространство X^*, сопряженное к линейному нормированному пространству X, само является нормированным пространством. Пространство $(X^*)^*$ функционалов на X^* обозначается X^{**} и называется вторым сопряженным к X.

Утверждение (Оператор вложения X в X^{**})

Отображение J, которое каждому вектору из X ставит в соответствие функционал на X^* по правилу:
$$J(x) = F_x, \text{ где } F_x(f) = f(x) \ \forall f \in X^*, \tag{18}$$
принадлежит $L(X, X^{**})$ и
$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \|F_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \ \ \forall x \in X.$$

Вложение, рефлексивность

1. $J : X \to X^{**}$ называется оператором вложения X в X^{**}, пространство X изометрично подпространству X^{**}. Для простоты пишут $X \subset X^{**}$.
2. Симметричное обозначение $\langle f, x \rangle$ означает как значение функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$, так и значение функционала $x \in X \subset X^{**}$ на элементе $f \in X^*$.
3. Пространство, для которого $X = X^{**}$ (более точно, $J(X) = X^{**}$), называется рефлексивным.

Сопряженный оператор

Если $A \in L(X;Y)$, то оператор $A^* : Y^* \to X^*$, определенный равенством
$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle \ \ \forall x \in X \ \forall f \in Y^*,$$
называется сопряженным к A.

Утверждение Свойства сопряженных операторов

Пусть $A \in L(X;Y)$ и $B \in L(X;Y)$. Тогда

1. A^* – линейный оператор.
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \lambda A^*$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ или $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\|A\| = \|A^*\|$.
5. Пусть $A \in L(X;Y)$ и пространства X, Y – банаховы. Для существования $(A^*)^{-1} \in L(X^*;Y^*)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал обратный оператор A^{-1}, при этом $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пространство и оператор $A \in L(H;H)$.

1. A называется самосопряженным в H, если $A = A^*$, т.е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \ \ \forall x \in H \ \forall y \in H.$$

2. A называется неотрицательным (или положительно полуопределенным), если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in H.$$

3. A называется положительно определенным, если

$$(Ax, x) > 0 \ \ \forall x \in H, \ x \neq 0.$$

Утверждение Свойства самосопряженных операторов

Пусть A и B – самосопряженные в H операторы. Тогда

1. Для любых вещественных чисел α и β оператор $\alpha A + \beta B$ самосопряжен в H.
2. Оператор $AB \in L(H;H)$ самосопряжен в H тогда и только тогда, когда A и B перестановочны (коммутируют): $AB = BA$.
3. Число (Ax, x) – вещественное.
4. Для нормы самосопряженного в H оператора A справедливы равенства

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|.$$

Унитарные операторы

Пусть H – гильбертово пространство. Линейный оператор $U : H \to H$ называется унитарным, если

$$\|Ux\| = \|x\|.$$

Утверждение Свойства унитарных операторов

1. U – взаимно-однозначное отображение H на H, существует U^{-1} – унитарный оператор.
2. $U^* = U^{-1}$.

Операторы ортогонального проектирования

Пусть H – гильбертово пространство и L – его подпространство. Оператор P, который ставит в соответствие произвольному элементу $x \in H$ его ортогональную проекцию $y \in L$, называется оператором ортогонального проектирования, или коротко ортопроектором.

Утверждение Свойства ортопроекторов

1. Пусть P – оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства H на подпространство L. Тогда

- $P \in L(H; H)$ и $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.
- $P^2 = P$.
- P самосопряжен и положительно полуопределен, $(Px, x) = \|Px\|^2$.
- $(Px, x) \leqslant \|Px\|^2 \ \ \forall x \in H$ и равенство достигается только при $x \in L$.

2. Если A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $A^2 = A$, то A – оператор ортогонального проектирования на некоторое подпространство $L \subset H$.

Дополнение

Резольвентное множество и спектр линейного оператора.

Определение. Точка называется регулярной точкой оператора , если оператор непрерывно обратим. Совокупность регулярных точек оператора называется резольвентным множеством оператора и обозначается .

Если , то оператор и называется резольвентой оператора , - комплексное банахово пространство, плотно в , - комплексное число (в общем случае).

Теорема: Резольвентное множество оператора А - всегда открыто.

Доказательство: Пусть , значит, непрерывно обратим. Рассмотрим оператор . Т.к. непрерывно обратим, то и непрерывно обратим, если непрерывно обратим По теореме об обратном операторе, оператор будет непрерывно обратим, если . Следовательно, если , то открытый шар , где будет тоже принадлежать множеству и по определению будет открытым. Определение. Совокупность всех значений , не являющихся регулярными, называется спектром оператора . В частности, все собственные значения принадлежат спектру оператора, т.е.сам спектр - это некоторое множество, дополнительное (в комплексной плоскости) к резольвентному множеству, обозначается . Теорема: Пусть , тогда . Доказательство: Так как оператор можно определить: , тогда если то и будет непрерывно обратим и . Следствие. Если ограничен, то резольвентное множество неограниченно. Пример: Если пространство X конечномерно, то спектр линейного оператора состоит только из его собственных значений. В n-мерном евклидовом пространстве всякий самосопряженный оператор имеет ровно n собственных значений. Все собственные значения вещественны, а соответствующие им собственные векторы составляют ортонормированный базис пространства X. Определение. Конечный предел вида называется спектральным радиусом оператора . Теорема: Пусть , комплексное банахово пространство. Если спектральный радиус , то оператор непрерывно обратим и ряд сходится абсолютно. Если , то ряд расходится.