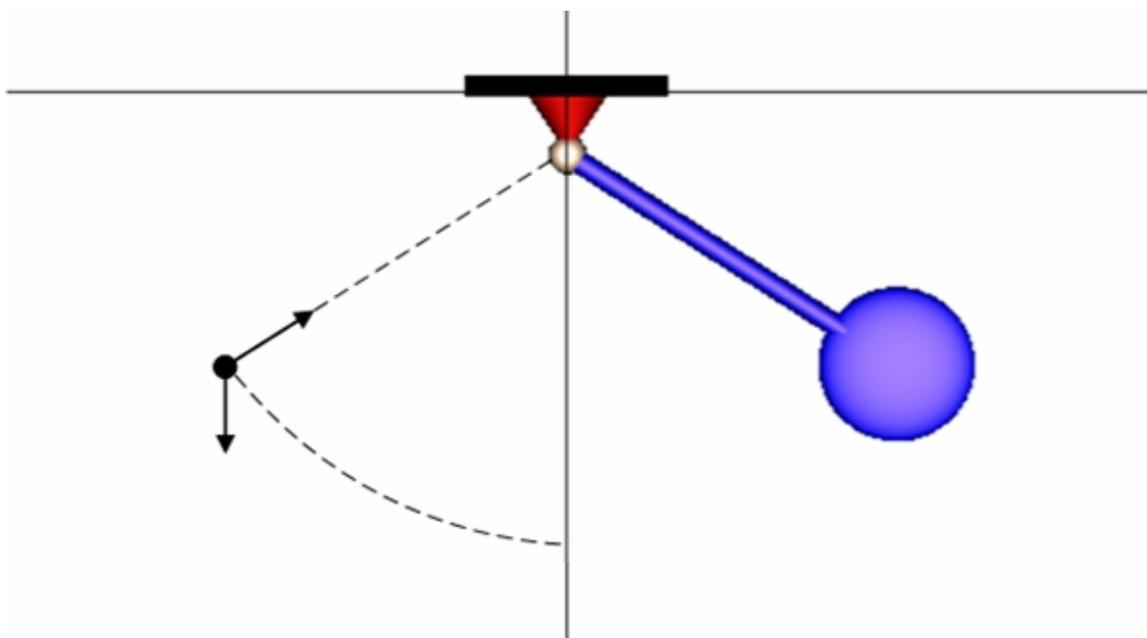


**Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Набережночелнинский институт (филиал)**

Д. Н. Демьянов

Основы математического моделирования

Учебно-методическое пособие



**Набережные Челны
2016**

УДК 51-7
ББК 22.1

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Набережночелнинского института (филиала)
Казанского (Приволжского) федерального университета

Рецензенты:

Асанов А. З., докт. техн. наук, профессор
Каримов В. С., канд. техн. наук, доцент

Демьянов Д. Н. Основы математического моделирования: учебно-методическое пособие / Д. Н. Демьянов. – Набережные Челны : изд.-полиграф. центр Набережночелнинского ин-та Казан. федер. ун-та, 2016. – 50 с.

В учебно-методическом пособии приведены необходимые теоретический, алгоритмический, программный материалы для получения знаний и навыков решения задач математического моделирования, выполнения лабораторных работ по дисциплинам «Математическое моделирование», «Моделирование систем».

Пособие разработано на кафедре "Системный анализ и информатика" и предназначено для организации и проведения лабораторных работ студентов по направлению подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" и направлению подготовки 27.03.03 "Системный анализ и управление".

Ил. 15, список лит. 6 назв.

УДК 51-7
ББК 22.1

© Набережночелнинский институт КФУ, 2016
© Д. Н. Демьянов, 2016

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение..... | 4 |
| Лабораторная работа № 1. Создание математической модели динамического процесса | 5 |
| Лабораторная работа № 2. Исследование математической модели динамического процесса | 14 |
| Лабораторная работа № 3. Разработка и исследование нелинейной математической модели динамического процесса..... | 30 |
| Список источников..... | 48 |

Введение

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для студентов, стремящихся закрепить теоретические знания и овладеть практическими навыками построения и исследования математических моделей. В пособии последовательно рассмотрены основные этапы математического моделирования: изучение объекта и постановка задачи, формирование математической модели, исследование математической модели с помощью ЭВМ, анализ полученных результатов. Отдельно рассмотрены особенности математического моделирования объектов и процессов в случае нелинейности их характеристик.

Пособие разбито на 3 раздела, в каждом из которых рассматривается тот или иной аспект математического моделирования, приводится краткая теоретическая справка, разбирается методический пример, а также даются варианты заданий для самостоятельного выполнения.

Лабораторная работа № 1.

Создание математической модели динамического процесса

Цель работы: практическое применение знаний в области математики и физики при создании математических моделей процессов различной природы.

Задание: разработать математическую модель динамического процесса согласно индивидуальному варианту.

Этапы работы:

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить рассматриваемый динамический процесс.
3. Сформулировать содержательную постановку задачи.
4. Сформулировать концептуальную постановку задачи.
5. Сформулировать математическую постановку задачи.
6. Проверить корректность поставленной задачи.
7. Оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет о работе должен содержать:

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Содержательную постановку задачи.
3. Концептуальную постановку задачи.
4. Математическую постановку задачи.
5. Анализ полученной системы уравнений.
6. Выводы и заключения по лабораторной работе.

Варианты заданий.

Провести математическое моделирование следующих динамических процессов:

1. Падение тела при отсутствии ветра.
2. Движение лодки по озеру при отсутствии течений.
3. Зарядка конденсатора, включенного последовательно с резистором.

4. Остывание тела малого объёма, погруженного в жидкость.
5. Вытекание жидкости из резервуара цилиндрической формы.
6. Качение колеса по наклонной плоскости без скольжения.
7. Скольжение тела по наклонной плоскости.
8. Движение лодки по реке при наличии течения.
9. Вертикальные колебания груза, подвешенного на пружине.
10. Вертикальные колебания груза, соединенного двумя пружинами с неподвижными стенками.
11. Всплытие тела малой плотности, изначально покоившегося на дне резервуара с жидкостью.
12. Крутильные колебания диска, закрепленного на невесомом деформируемом стержне.
13. Горизонтальные колебания груза, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.
14. Горизонтальные колебания груза, соединенного двумя пружинами с неподвижными стенками.
15. Подключение резистора и катушки индуктивности, соединенных последовательно, к источнику постоянного напряжения.
16. Движение по наклонной поверхности груза, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.
17. Скольжение тела по горизонтальной поверхности под действием ветра.
18. Движение лодки с парусом по реке при наличии попутного ветра и встречного течения.
19. Соскальзывание с гладкого крюка переброшенной через него металлической цепи.

20. Погружение в жидкость рыхлого тела (плотность тела меньше плотности жидкости).
21. Движение тела, брошенного под углом к горизонту с большой начальной скоростью.
22. Зарядка конденсатора, включенного последовательно с катушкой индуктивности и резистором, от источника постоянного напряжения.
23. Всплытие подводной лодки, движущейся при этом с постоянной продольной скоростью.
24. Вращение в горизонтальной плоскости тела, прикрепленного к оси вращения невесомым деформируемым стержнем.
25. Разрядка конденсатора, включенного параллельно двум ветвям, содержащим катушку индуктивности и резистор.
26. Нагрев теплоизолированного резистора, подключенного к разряжающемуся конденсатору.
27. Движение жидкости в U-образной трубке постоянного сечения с идеально гладкими стенками.
28. Погружение в жидкость плотного тела (плотность тела больше плотности жидкости).
29. Падение тела при наличии бокового ветра.
30. Горизонтальное движение колеса, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.

Теоретическая справка

Математическое моделирование – это такое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели производится с использованием тех или иных математических методов.

Математическое моделирование является частным случаем информационного (абстрактного, теоретического) моделирования, при котором описание модели осуществляется на одном из формальных языков кодирования информации.

Первым этапом построения математической модели является изучение рассматриваемого объекта, процесса или явления и **содержательная постановка задачи** – перечень интересующих нас вопросов об объекте моделирования, сформулированных в содержательной (словесной) форме.

Следующим этапом является **концептуальная постановка задачи** – перечень интересующих нас вопросов об объекте моделирования, сформулированных в терминах соответствующих дисциплин, а также перечень гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

Данные этапы являются наиболее важными в процессе построения модели, так как ошибки, допущенные при постановке задачи и формулировке гипотез, практически наверняка приведут к неадекватности полученной модели и невозможности её практического использования.

Третьим этапом построения математической модели является **математическая постановка задачи** – совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. При этом исходная физическая задача сводится, как правило, к одной из типовых математических задач: решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решению системы дифференциальных уравнений в частных производных, решению системы интегро-дифференциальных уравнений и т. д.

Перед тем, как решать тем или иным способом полученную математическую задачу, целесообразно провести её анализ. Для контроля правильности полученных соотношений требуется провести следующие проверки:

- контроль размерности (складывать и вычитать можно только величины, имеющие одинаковую размерность);

- контроль порядков (используемые величины должны иметь сходный порядок);
- контроль характера зависимостей (вид взаимосвязи параметров должен соответствовать физическому смыслу);
- контроль экстремальных ситуаций и особых точек (вид математических соотношений в случае предельных значений параметров);
- контроль граничных условий (все граничные условия должны быть указаны и использованы при составлении уравнений);
- контроль математической замкнутости (полученные математические соотношения позволяют получить единственное решение задачи).

Математическая модель называется **корректной**, если для неё осуществлён и получен положительный результат всех контрольных проверок.

Пример

Требуется построить математическую модель полёта брошенного камня.

Графическая иллюстрация рассматриваемого процесса представлена на рисунке 1.1.

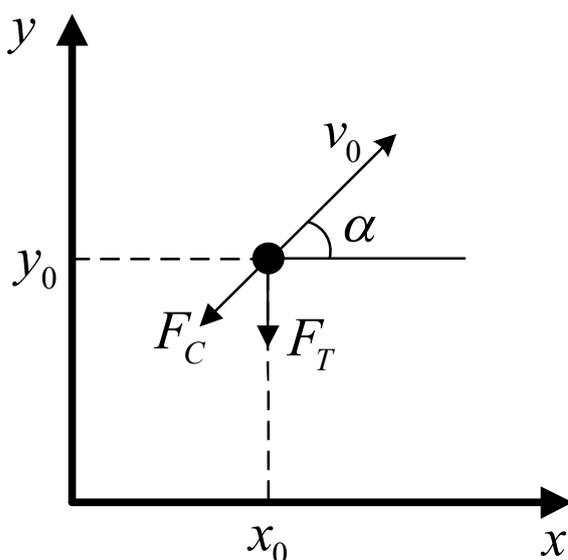


Рисунок 1.1 – Графическая иллюстрация изучаемого процесса

Содержательная постановка задачи: Разработать математическую модель движения камня, брошенного под углом к горизонту. Модель должна позволять определять координаты камня и его скорость в любой момент времени

Концептуальная постановка задачи: Определить закон движения материальной точки массой m , движущейся под действием внешних сил, если известны её начальные координаты (x_0, y_0) , начальная скорость v_0 и угол бросания α .

Принятые гипотезы:

- движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g ;
- сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости тела с коэффициентом пропорциональности k ;
- динамика объекта моделирования описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- скорость движения объекта моделирования много меньше скорости звука;
- влияние ветра на движение объекта моделирования не рассматривается;
- эффектами, вызванными собственным вращением камня вокруг центра масс, можно пренебречь;
- земная поверхность считается плоской, а её уровень соответствует значению $y = 0$.

Для нахождения математических соотношений, описывающих рассматриваемый процесс, спроектируем уравнения второго закона Ньютона на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x; \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y. \end{cases}$$

Дополним полученные уравнения известными из кинематики соотношениями между скоростями и координатами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases}$$

Начальные условия и ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; & x(0) = x_0; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; & y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, исходная задача свелась к решению задачи Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Проведём анализ полученной системы уравнений. Для этого последовательно осуществим ряд проверок.

1. Размерности правой и левой частей всех уравнений совпадают:

$$\begin{cases} \left[\frac{\cancel{M}}{c} \right] = \left[\frac{\cancel{kg}}{kg} \right] \left[\frac{M}{c} \right]; \\ \left[\frac{\cancel{M}}{c} \right] = \left[\frac{M}{c^2} \right] + \left[\frac{\cancel{kg}}{kg} \right] \left[\frac{M}{c} \right]; \\ \left[\frac{M}{c} \right] = \left[\frac{M}{c} \right]; \\ \left[\frac{M}{c} \right] = \left[\frac{M}{c} \right]. \end{cases}$$

2. Величины в правой части уравнения имеют схожие порядки.

3. Характер полученных зависимостей соответствует физическому смыслу рассматриваемого процесса:

- сопротивление воздуха тормозит движение во всех направлениях;
- сила тяжести способствует уменьшению вертикальной составляющей скорости;
- величина замедления прямо пропорциональна коэффициенту сопротивления воздуха;
- величина замедления обратно пропорциональна массе.

4. В пределе при $k \rightarrow 0$ (сопротивление воздуха не учитывается) получаемые зависимости имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = 0; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos \alpha; \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt; \\ x = x_0 + v_0 \cos \alpha t; \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \end{array} \right. y \geq 0.$$

Полученные результаты совпадают с известными теоретическими положениями о характере движения тела без учёта сопротивления воздуха.

5. Все граничные условия заданы.

6. Существование и единственность решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений показана теоретически.

Таким образом, получена корректная математическая модель, описывающая рассматриваемый динамический процесс.

Контрольные вопросы

1. Что такое математическая модель, математическое моделирование?
2. Опишите основные этапы построения математической модели.
3. Что называется содержательной постановкой задачи моделирования?
4. Что называется концептуальной постановкой задачи моделирования?
5. Что называется математической постановкой задачи моделирования?
6. В каком случае математическая модель называется корректной?

Лабораторная работа № 2.

Исследование математической модели динамического процесса

Цель работы: практическое применение знаний в области математики и физики при исследовании математических моделей процессов различной природы.

Задача: провести исследование математической модели заданного процесса.

Этапы работы:

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить полученную в лабораторной работе №1 математическую постановку задачи моделирования.
3. Найти аналитическое решение поставленной задачи.
4. Найти численное решение поставленной задачи.
5. Сравнить между собой результаты п. 3 и п. 4 при различных параметрах использованного численного метода.
6. Проверить адекватность полученной модели.
7. Исследовать динамику рассматриваемого процесса при различных сочетаниях параметров (2-3 комбинации по указанию преподавателя).
8. Оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет о работе должен содержать:

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Математическую постановку задачи.
3. Аналитическое решение поставленной задачи.
4. Численное решение поставленной задачи.
5. Сравнение аналитического и численного решения при различных значениях шага интегрирования.
6. Оценку адекватности полученной модели.

7. Результаты моделирования рассматриваемого процесса при различных сочетаниях параметров модели.
8. Выводы и заключения по лабораторной работе.

Варианты заданий.

Совпадают с тем, что были заданы при выполнении лабораторной работы № 1.

Теоретическая справка

Полученное в форме некоторой математической задачи описание изучаемого объекта, процесса или явления, как правило, является достаточно сложным для восприятия и не позволяет судить о качественных и количественных закономерностях протекания процесса. Поэтому для практического использования построенной модели сформированное уравнение (систему уравнений) требуется решить.

Методы реализации математической модели (способы решения поставленной математической задачи) подразделяются на аналитические и алгоритмические.

При **аналитическом** методе реализации математической модели сведения о подлежащих определению величинах представляются в форме явной функциональной зависимости от входных воздействий, параметров объекта моделирования и времени.

При **алгоритмическом** методе реализации математической модели сведения о подлежащих определению величинах представляются в виде некоторого алгоритма, выполнение которого позволяет получить значения интересующих нас величин.

Как правило, аналитические решения являются более предпочтительными с точки зрения удобства использования, однако они могут быть найдены только для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров. Алгоритмические решения менее точные и менее удобные в использовании, однако, они могут быть найдены практически для любых математических моделей, при этом основным ограничением являются характеристики используемой для расчётов ЭВМ.

При алгоритмическом решении задачи используется, как правило, два основных подхода: численный и имитационный.

При **численном** решении совокупность математических соотношений исходной модели заменяется её конечномерным аналогом. Это, чаще всего, достигается дискретизацией исходных соотношений, т. е. переходом от функции непрерывного аргумента к функции дискретного аргумента (при этом дифференциальные уравнения сводятся к алгебраическим). После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма – последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение дискретной задачи. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

При **имитационном** решении на отдельные составляющие разбивается сам объект исследования. При этом для каждого из его элементов задаётся закон функционирования, определяющий его реакцию на внешние воздействия и характер взаимодействия с другими элементами (реализация этого закона может быть как аналитической, так и алгоритмической). Имитационные модели используются, как правило, в тех случаях, когда создание единой модели объекта сопряжено с очень большими трудностями, имеющиеся математические методы не позволяют получить удовлетворительных аналитических или численных решений рассматриваемой задачи или же при описании объекта моделирования используется различный математический аппарат.

После получения модели в том или ином виде следует провести проверку её **адекватности**, под которой понимается степень соответствия результатов, получаемых с использованием созданной модели, результатам экспериментов или решениям тестовых задач.

Проверка адекватности преследует две основные цели:

1. Убедиться в справедливости принятой системы гипотез.
2. Установить точность получаемых результатов.

Решение вопроса о точности моделирования зависит от назначения модели и предъявляемым к ней требованиям. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных, предварительных расчётов, удовлетворительной может считаться точность 10-15%. В моделях, используемых в системах управления, требуемая точность может достигать 1-2%.

Различают качественное и количественное совпадение результатов сравнения.

Качественное совпадение результатов – совпадение некоторых характерных особенностей в распределении исследуемых параметров (наличие экстремальных точек, возрастание или убывание переменных, вид траектории). **Количественное** совпадение результатов – расхождение полученных данных и эталонных значений, выраженное в абсолютных показателях, долях или процентах.

Если по результатам проверки модель будет признана неадекватной, то использовать её в практической деятельности нельзя – требуется последовательно вернуться на предыдущие этапы и исправить допущенные на них ошибки.

Возможные причины неадекватности модели:

1. Одна или несколько исходных гипотез неверны.
2. Использованные значения параметров модели некорректны.
3. Задаваемые значения параметров не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез.
4. Использован некорректный численный метод или корректный численный метод с некорректными параметрами.
5. Допущены ошибки при решении полученной системы уравнений или при программной реализации численного метода.

После проверки и исправления допущенных ошибок следует повторно провести проверку адекватности модели. Только после того, как модель признана адекватной, возможно её практическое использование.

Пример

Ранее в лабораторной работе № 1 была получена математическая модель движения камня, брошенного под углом к горизонту. С учётом принятых ограничений и допущений, исходная задача свелась к решению задачи Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Требуется провести исследование этой математической модели.

Аналитическое решение задачи.

Первые два уравнения системы являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Чтобы найти их общее решение, осуществим разделение переменных:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt; \\ \frac{dv_y}{v_y + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt. \end{cases}$$

Проинтегрируем обе части полученных уравнений:

$$\begin{cases} \ln v_x = -\frac{k}{m}t + C_1; \\ \ln \left(v_y + \frac{mg}{k} \right) = -\frac{k}{m}t + C_2. \end{cases}$$

Здесь символами C_1 и C_2 обозначены некоторые константы интегрирования, конкретные значения которых определяются исходя из начальных условий.

Выразим в явном виде уравнения для продольной и поперечной составляющих скорости:

$$\begin{cases} v_x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} \\ v_y = C_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Определим константы интегрирования, подставив в полученные уравнения при $t = 0$ начальные значения скорости:

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = C_1 ; \\ v_0 \sin \alpha = C_2 - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Из полученной системы определим константы интегрирования:

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha ; \\ C_2 = v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Подставив найденные значения в полученное ранее общее решение, получим:

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} ; \\ v_y = \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в оставшиеся два уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} ; \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Осуществим разделение переменных:

$$\begin{cases} dx = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} dt ; \\ dy = \left(\left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \right) dt. \end{cases}$$

Теперь проинтегрируем обе части полученных уравнений:

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} + C_3; \\ y = -\frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + C_4. \end{cases}$$

Здесь символами C_3 и C_4 обозначены некоторые константы интегрирования, конкретные значения которых определяются исходя из начальных условий.

Определим константы интегрирования, подставив в полученные уравнения при $t = 0$ начальные координаты тела:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) + C_3; \\ y_0 = -\frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) + C_4. \end{cases}$$

Из полученной системы определим константы интегрирования:

$$\begin{cases} C_3 = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha); \\ C_4 = y_0 + \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right). \end{cases}$$

Подставив найденные значения в полученное ранее общее решение, получим:

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} + x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha); \\ y = -\frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + y_0 + \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right). \end{cases}$$

Для повышения удобства использования преобразуем полученные системы, приведя подобные:

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t}; \\ v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}; \\ x = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) - \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t}; \\ y = y_0 + \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) - \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t. \end{cases}$$

Полученные соотношения в явном виде определяют зависимость от времени скоростей и координат движущейся материальной точки, т. е. подставляя в полученную формулу конкретное значение t , мы можем получить значение скорости и координаты в любой момент времени.

Алгоритмическое решение задачи.

В рассматриваемом случае применение имитационного моделирования не целесообразно, так как рассматриваемый процесс является сравнительно простым и описывается только уравнениями динамики материальной точки. Поэтому будем искать численное решение поставленной задачи с использованием методов вычислительной математики.

Осуществим дискретизацию по времени, перейдя к рассмотрению исследуемого процесса только в некоторые фиксированные моменты времени, расстояние между которыми называется шагом дискретизации. При этом дифференциальные уравнения, описывающие динамику объекта, преобразуются в алгебраические уравнения.

Воспользуемся для решения задачи Коши одним из простейших численных методов – методом Эйлера. При этом значение производной может быть приближенно заменено отношением:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{h}.$$

Здесь $y(i)$ - значение функции в текущей точке, $y(i+1)$ - значение функции в следующей точке, а величина h равна интервалу времени между двумя отсчётами и называется **шагом интегрирования**.

Перейдя от дифференциальных уравнений к разностным, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_x(i+1) - v_x(i)}{h} = -\frac{k}{m}v_x(i); \\ \frac{v_y(i+1) - v_y(i)}{h} = -g - \frac{k}{m}v_y(i); \\ \frac{x(i+1) - x(i)}{h} = v_x(i); \\ \frac{y(i+1) - y(i)}{h} = v_y(i). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Откуда в явном виде выразим значения функций в следующей точке:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(i+1) = v_x(i) - h\frac{k}{m}v_x(i); \\ v_y(i+1) = v_y(i) - h\left(g + \frac{k}{m}v_y(i)\right); \\ x(i+1) = x(i) + hv_x(i); \\ y(i+1) = y(i) + hv_y(i). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Полученные соотношения позволяют определить значения искомых функций в последующий момент времени, зная их значения в предыдущий момент времени.

Определив аналитическое и/или алгоритмическое решение задачи, мы можем провести исследование динамики изучаемого процесса.

Выберем для определенности следующие параметры процесса:

1. начальная скорость $v_0 = 10$ м/с;
2. угол бросания $\alpha = 30^\circ$;
3. масса $m = 1$ кг;
4. коэффициент сопротивления воздуха $k = 0,1$ кг/с;
5. начальные координаты $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ (точка бросания располагается в начале системы координат);
6. интервал времени между отсчётами $h = 0,01$ с;
7. ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Тогда формулы аналитического решения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} v_x = 8,66e^{-0,1t} ; \\ v_y = 103,1e^{-0,1t} - 98,1 ; \\ x = 86,6 - 86,6e^{-0,1t} ; \\ y = 1031 - 1031e^{-0,1t} - 98,1t. \end{cases} \quad y \geq 0.$$

Формулы численного решения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} v_x(i+1) = 0,99v_x(i); \\ v_y(i+1) = 0,99v_y(i) - 0,981; \\ x(i+1) = x(i) + 0,1v_x(i); \\ y(i+1) = y(i) + 0,1v_y(i). \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = 8,66; \\ v_y(0) = 5; \\ x(0) = 0; \\ y(0) = 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Для повышения наглядности восприятия построим графики изменения рассматриваемых величин. Это можно сделать с помощью любого доступного математического пакета (MATLAB, Mathematic, Maple, MathCAD и т. д.). Воспользуемся наиболее простым инструментом для проведения расчётов – программой Microsoft Excel из пакета Microsoft Office.

Результаты табулирования функций, задающих аналитическое и численное решение поставленной задачи, представлены на рисунке 2.1 и рисунке 2.2.

На рисунке 2.1 показано, как изменяется со временем продольная и поперечная составляющая скорости. При выбранном значении h результаты аналитического и численного решения весьма близки друг к другу (наибольшее расхождение составляет около 0,01 м/с и на графике не видно).

На рисунке 2.2 показаны 2 траектории движения: первая получена с использованием аналитического выражения, а вторая – численным методом.

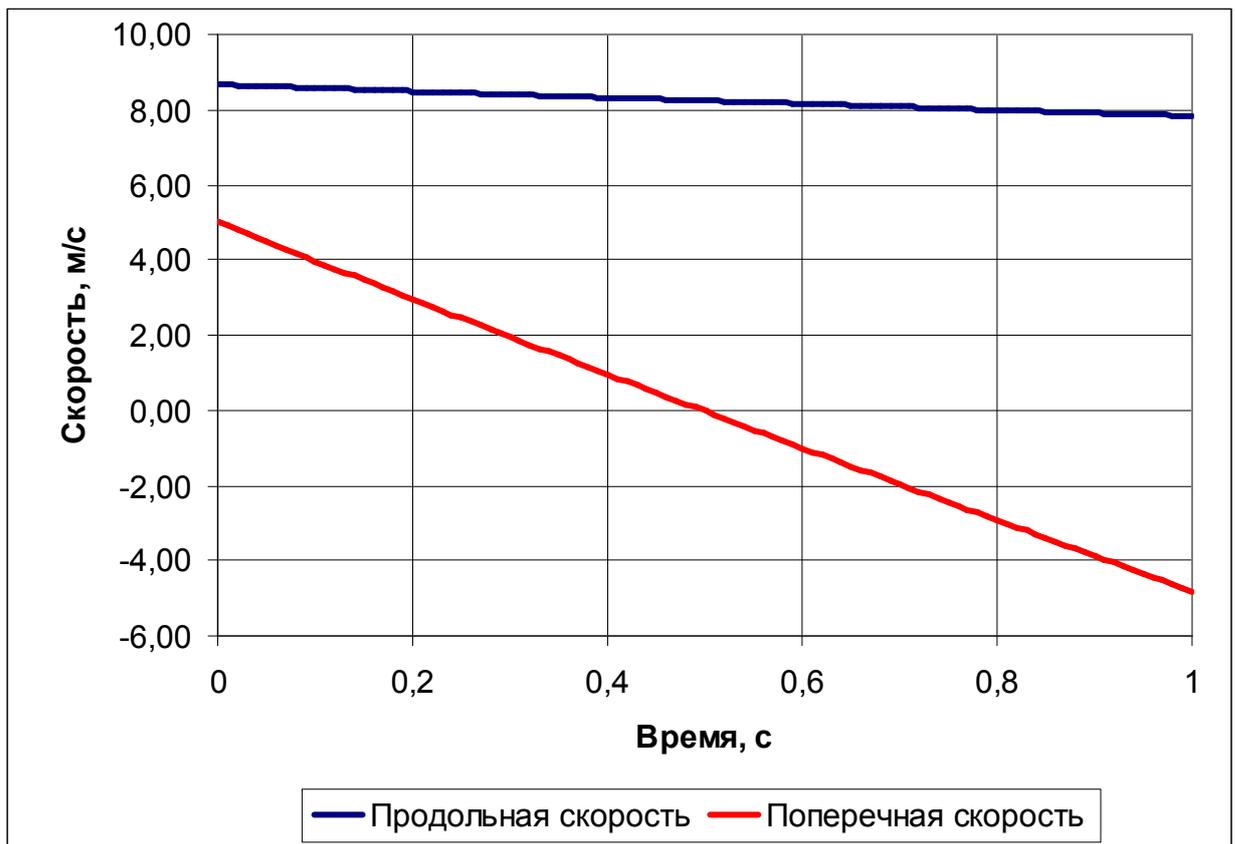


Рисунок 2.1 – Изменение скорости при $h = 0,01$ с

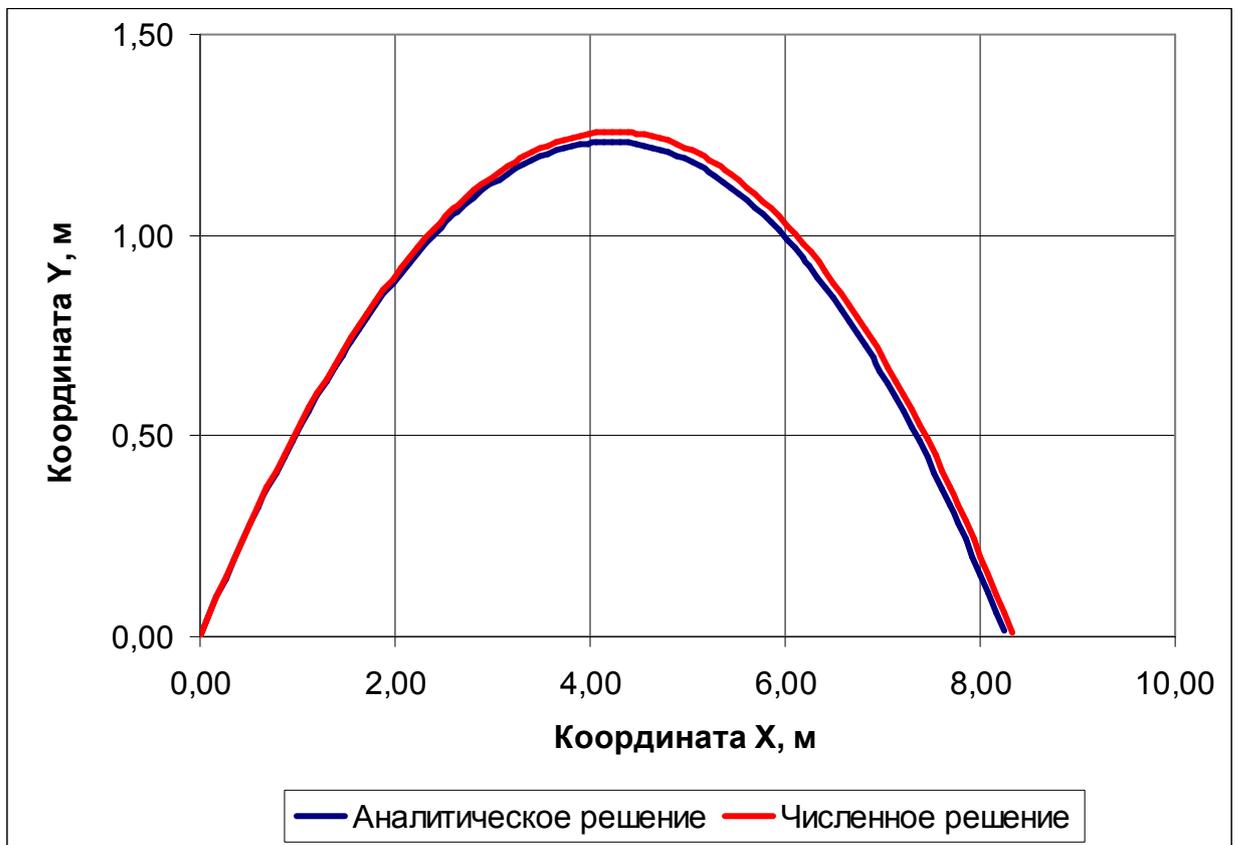


Рисунок 2.2 – Траектории при $h = 0,01$ с

Сравнение показывает, что графики аналитического и численного решения весьма близки друг к другу. При этом полученные результаты качественно совпадают с известными сведениями о движении тела, брошенного под углом к горизонту с малой начальной скоростью (траектория близка по своей форме к параболе).

Если мы увеличим расстояние между соседними точками, и выберем величину шага h равной 0,05 с, то график аналитического решения останется прежним, а график численного решения изменится. На рисунке 2.3 показаны результаты моделирования с новым значением шага. Качественно траектории по-прежнему близки, но количественное различие между ними уже весьма существенно. Этот факт обусловлен тем, что точность численного решения зависит от выбранной величины шага – чем она меньше, тем решение точнее (и тем ближе оно к аналитическому решению).

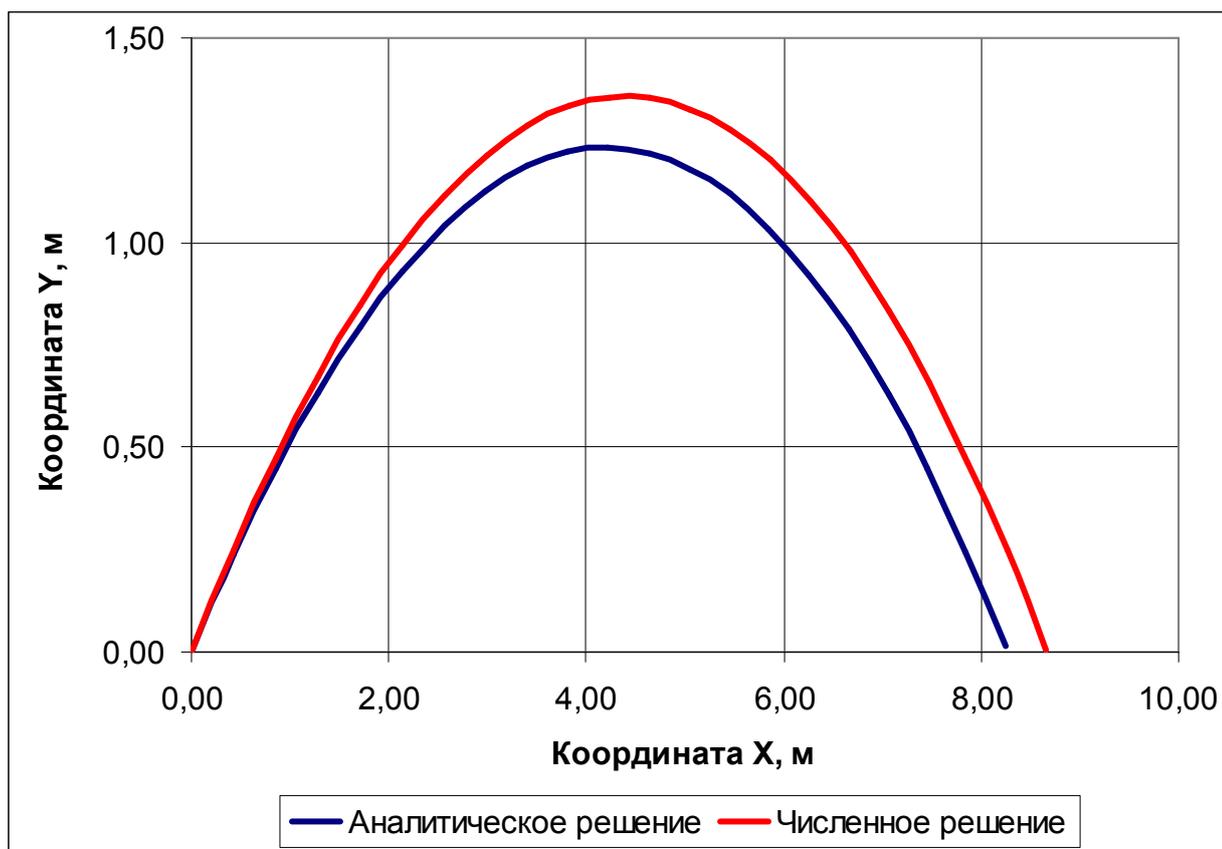


Рисунок 2.3 – Траектории при $h = 0,05$ с

Для сравнения на рисунке 2.4 приведён результат моделирования при шаге 0,5 с. Показатели численного решения (дальность полёта,

наибольшая высота подъёма) весьма существенно отличаются от результатов аналитического решения задачи.

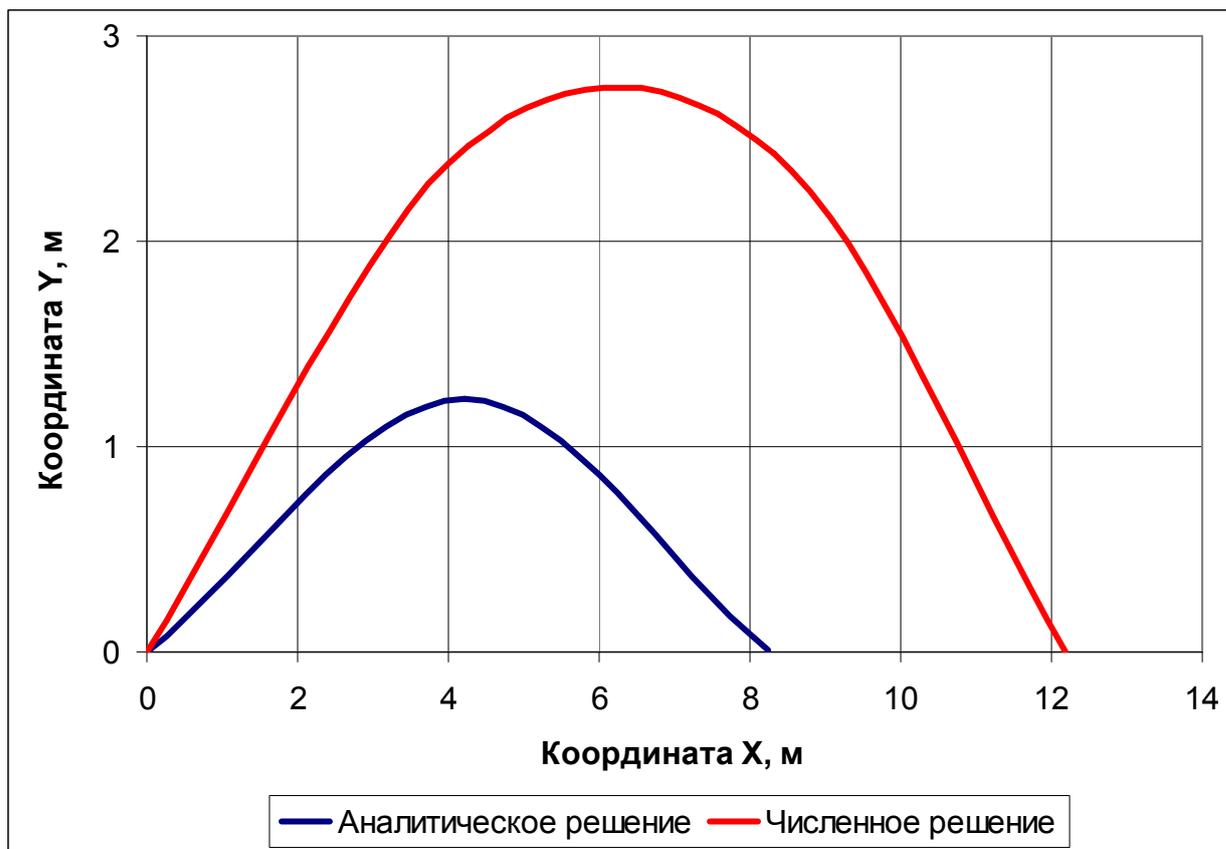


Рисунок 2.4 – Траектории при $h = 0,5$ с

Следует отметить, что в ряде случаев некорректно выбранный шаг численного метода может привести к получению некорректных результатов: и качественно, и количественно полученные зависимости будут отличаться от аналитического решения и от реальной динамики изучаемых процессов. Более подробные сведения о численном решении систем дифференциальных уравнений содержатся в специальных разделах соответствующих дисциплин учебного плана.

Так как форма траектории и характер зависимостей совпадает с известными теоретическими положениями и результатами экспериментов, можно утверждать, что полученная модель является адекватной.

Исследуем зависимость получаемых решений задачи от сочетания параметров модели. Для проведения исследований будем использовать аналитическое решение задачи как более точное.

Исследуем, как зависит траектория движения от угла бросания. На рисунке 2.5 показаны графики для трёх значений угла $\alpha=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$, $\alpha=60^\circ$. Результаты моделирования соответствуют известному теоретическому положению о том, что наибольшая дальность полёта брошенного тела достигается при угле бросания 45° .

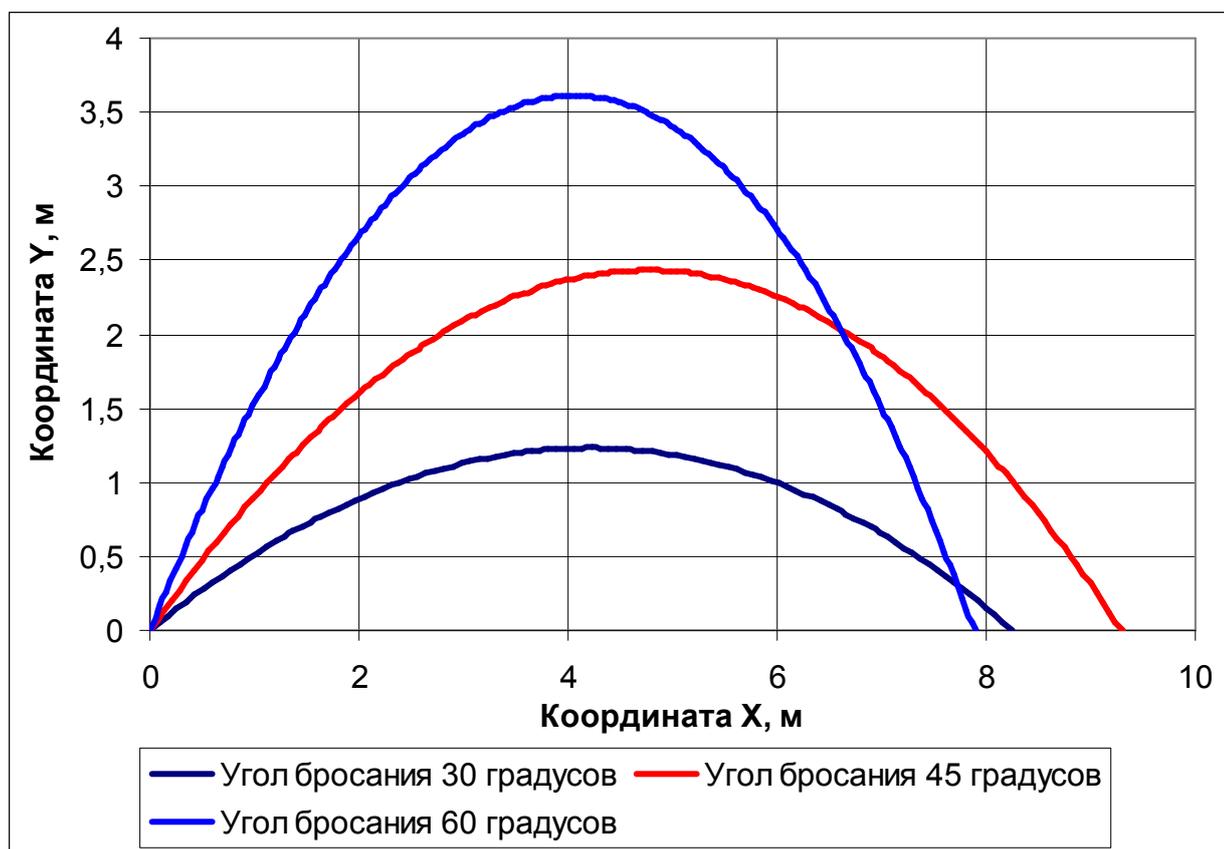


Рисунок 2.5 – Траектории при различных углах бросания.

Исследуем, как зависит траектория от других параметров. На рисунке 2.6 показаны графики для трёх значений массы $m=0,1$ кг, $m=1$ кг, $m=10$ кг. Результаты моделирования соответствуют известным сведениям из практики о том, что чем больше масса тела при неизменной начальной скорости и угле бросания, тем дальше оно улетит.

На рисунке 2.7 показаны графики для трёх значений коэффициента сопротивления $k=0,01$ кг/с; $k=0,1$ кг/с; $k=1$ кг/с. Результаты моделирования также соответствуют известным сведениям из практики и теоретическим положениям (чем выше сопротивление среды, тем меньше дальность и высота полёта).

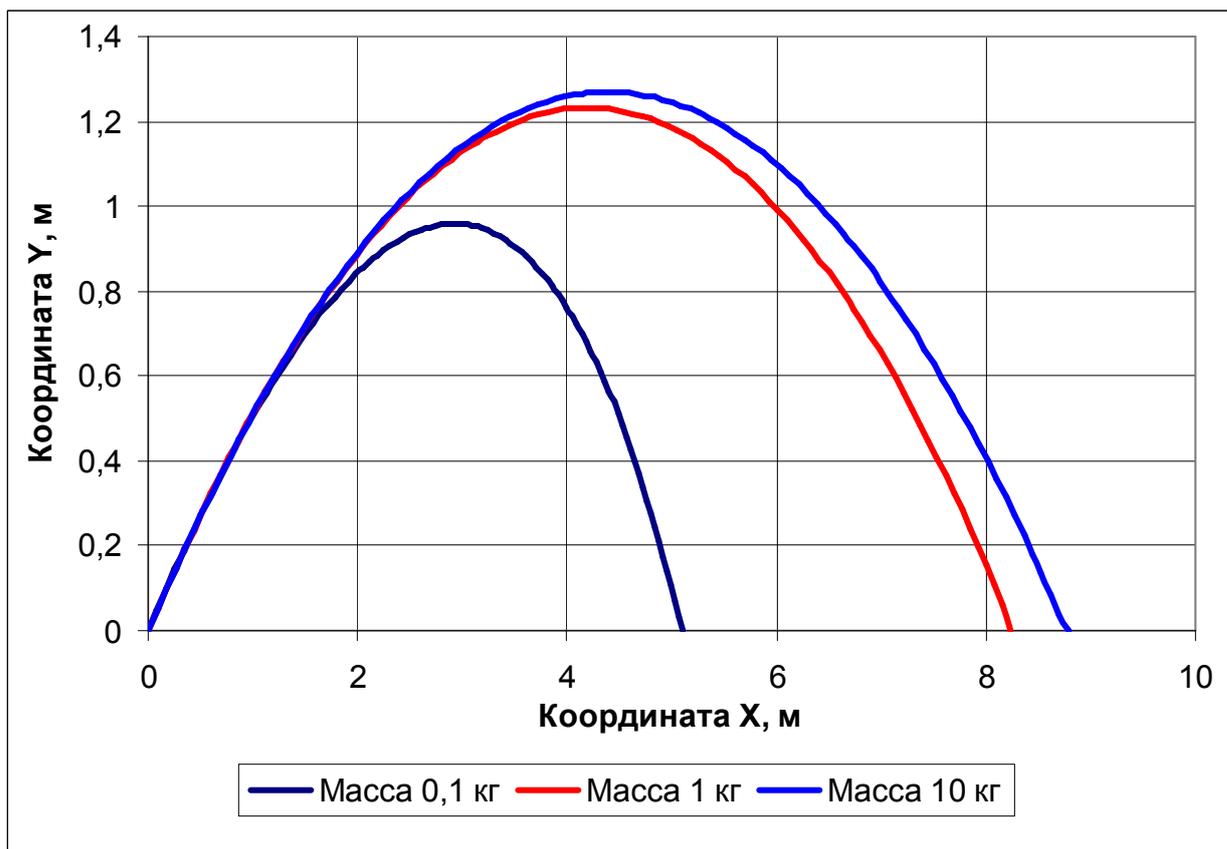


Рисунок 2.6 – Траектории при различных значениях массы

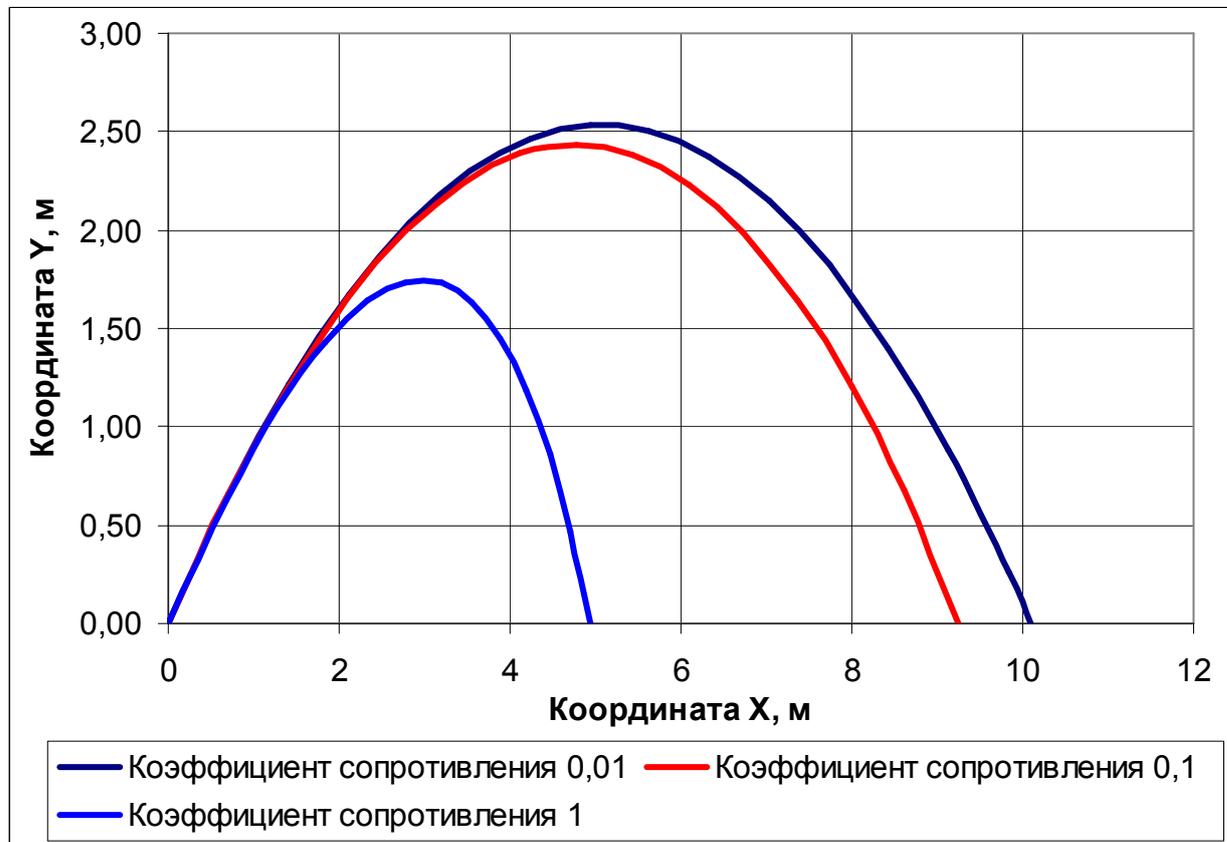


Рисунок 2.7 – Траектории при различных значениях k

Таким образом, сформированная математическая модель может быть использована для прогнозирования динамики исследуемого процесса при интересующих нас сочетаниях параметров, а также для оптимизации параметров с целью достижения требуемых показателей (например, подбор оптимального угла бросания для попадания в заданную точку при наличии ограничения по максимальной высоте).

Следует отметить, что в настоящее время для проведения численного исследования математических моделей чаще всего используются специализированные пакеты прикладных программ, позволяющие находить решение задачи с наименьшими затратами вычислительных ресурсов и наибольшей точностью.

Контрольные вопросы

1. Что называется аналитическим решением задачи?
2. Что называют численным решением задачи?
3. В каких случаях рекомендуется использовать аналитическое, а в каких – численное решение задачи?
4. Какая модель называется адекватной?
5. Как можно оценить адекватность модели?
6. Каковы возможные причины неадекватности модели?

Лабораторная работа № 3.

Разработка и исследование нелинейной математической модели динамического процесса

Цель работы: практическое применение знаний в области математики и физики при создании и исследовании нелинейных математических моделей процессов различной природы.

Задача: разработать нелинейную математическую модель заданного процесса, провести её линеаризацию и исследование.

Этапы работы:

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить рассматриваемый динамический процесс.
3. Разработать математическую модель изучаемого процесса и оценить принципиальную возможность аналитического решения полученного уравнения динамики.
4. Определить значения параметров процесса, соответствующие установившемуся режиму.
5. Линеаризовать полученную математическую модель в окрестностях установившегося режима.
6. Найти аналитическое решение линеаризованного уравнения динамики при некотором сочетании параметров.
7. Найти численное решение уравнения динамики в окрестностях установившегося режима.
8. Сравнить между собой результаты п. 7 и п. 8 при различных величинах отклонений от установившегося режима.
9. Оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет о работе должен содержать:

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Нелинейную математическую модель изучаемого процесса.
3. Условия установившегося режима.
4. Процедуру линеаризации полученной модели.

5. Аналитическое решение линейного уравнения динамики.
6. Численное решение нелинейного уравнения динамики.
7. Сравнение результатов, полученных для линейной и нелинейной модели, при различных отклонениях от установившегося режима.
8. Выводы и заключения по лабораторной работе.

Варианты заданий.

Провести математическое моделирование следующих динамических процессов:

1. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса.
2. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса.
3. Движение груза малого размера по внутренней поверхности идеально гладкого положенного на бок цилиндра.
4. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
5. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
6. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
7. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
8. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижного основания.
9. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при

помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижного основания.

10. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

11. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

12. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается внизу).

13. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается сверху).

14. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.

15. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.

16. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
17. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
18. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
19. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
20. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.
21. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.
22. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара конической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
23. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара сферической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
24. Движение рамки с протекающим по ней постоянным током в постоянном магнитном поле (учитывать крутильную жесткость проводов).

25. Движение поршня, закрывающего сверху газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
26. Движение поршня, закрывающего снизу разреженный газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
27. Вращение колеса, ось которого жестко закреплена, а одна из точек обода соединена идеальной пружиной с неподвижным основанием.
28. Движение в горизонтальной плоскости груза малого размера, способного перемещаться только в радиальном направлении и соединенного пружиной с осью вращения.
29. Изменение температуры резистора, подключенного к источнику постоянного напряжения и помещенного в вакуумную колбу (учитывать потери тепла за счёт излучения).
30. Подъём воздушного шара постоянного объёма и массы с учётом переменной плотности воздуха.

Теоретическая справка

Как показывает практика, лишь в очень редких случаях реальные объекты или процессы могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Как правило, такие уравнения получаются при описании либо очень простых объектов, либо в случае предельного упрощения рассматриваемых сложных объектов. Гораздо чаще в процессе математического моделирования используются нелинейные дифференциальные уравнения.

Нелинейной называется такая математическая модель, в которой для описания динамики изучаемого объекта, процесса или явления используются нелинейные дифференциальные уравнения. Примерами нелинейных моделей являются зависимости, описывающие кулоновское трение, зону нечувствительности (люфт), гистерезис и т. д.

Существуют различные способы классификации нелинейностей: статические и динамические, непрерывные и имеющие разрывы, стационарные и нестационарные, однозначные и неоднозначные и т. д.

Нестационарной называется такая математическая модель, в которой коэффициенты уравнения динамики изучаемого объекта,

процесса или явления изменяются с течением времени. В качестве примера нестационарных моделей можно привести движение тела переменной массы (полёт ракеты), процессы старения и износа конструкций, процессы разрушения материалов с течением времени и т. д.

Считается, что наиболее полно и точно объект, процесс или явление можно описать с помощью нелинейных нестационарных моделей. Однако, работа с такими моделями весьма сложна и чаще всего может проводиться только численными методами (аналитическое решение математической задачи получить, как правило, не представляется возможным). Поэтому для удобства исследования и практического использования сложные модели стараются упростить, используя процедуру линеаризации.

Линеаризацией называют процесс сведения нелинейного уравнения к линейному, описывающему поведение объекта в некоторой окрестности установившегося режима.

Установившимся называется такой режим, при котором интересующая нас выходная величина не изменяется с течением времени.

Полученные в ходе линеаризации уравнения называются линеаризованной математической моделью. Они достаточно хорошо описывают поведение изучаемого объекта, процесса или явления в окрестностях установившегося режима, но могут давать неточные или некорректные результаты при больших отклонениях от него.

Существуют различные методы линеаризации. Рассмотрим 2 метода линеаризации, наиболее широко используемых на практике.

Первый метод линеаризации. Если нелинейная функция, входящая в уравнение математической модели, является аналитической в некоторой области, то её можно разложить в ряд Тейлора.

Пусть, например, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

Здесь y – интересующая нас выходная величина, \dot{y} – её производная по времени, u – некоторое внешнее воздействие.

Будем полагать, что существует некоторый установившийся режим (u_0, y_0) , такой что $f(u_0, y_0) = 0$.

Разложим правую часть уравнения динамики в ряд Тейлора в окрестностях установившегося режима:

$$f(u, y) = f(u_0, y_0) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y + R_n.$$

Здесь $\Delta u = u - u_0$, $\Delta y = y - y_0$ – отклонения от установившегося режима, R_n – остаточный член.

Считая величину приращения малой, можно отбросить остаточный член. Кроме того, согласно принятому ранее допущению $f(u_0, y_0) = 0$. Тогда линеаризованное уравнение динамики можно записать следующим образом:

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y.$$

Таким образом, мы получили линейное дифференциальное уравнение, которое можно исследовать аналитическими методами.

Следует отметить, что в процессе линеаризации произошел переход к новой переменной – вместо абсолютного значения выходной величины мы рассматриваем закон её отклонения от установившегося значения.

Второй метод линеаризации. Пусть, как и в предыдущем случае, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

В исходном нелинейном уравнении заменим значения переменных величин следующими выражениями:

$$\begin{cases} y = y_0 + \Delta y ; \\ u = u_0 + \Delta u . \end{cases}$$

После этого получим:

$$\frac{d}{dt}(y_0 + \Delta y) = f(u_0 + \Delta u, y_0 + \Delta y).$$

В результате выполнения эквивалентных преобразований, в правой части уравнения динамики можно будет выделить 3 группы слагаемых: не содержащие приращение Δy или Δu , содержащие приращение Δy или Δu в виде простого множителя, содержащие некоторые степени приращения Δy или Δu . Полагая приращение малым, слагаемые третьей группы можно отбросить. При этом слагаемые первой группы будут описывать опорное движение объекта, а слагаемые второй группы – движение в отклонениях от опорной траектории.

Линеаризованная модель описывает поведение объекта лишь в малой окрестности установившегося режима (в малых отклонениях от опорной траектории). При больших отклонениях линеаризованная модель, как правило, становится неадекватной. Для корректного использования линеаризованной модели необходимо проводить оценку величины остаточного члена.

Линеаризованная модель всегда менее точна, чем нелинейная модель. Поэтому результаты, полученные для линеаризованной модели, лишь с некоторыми допущениями могут быть использованы при исследовании нелинейной модели.

Пример

Требуется провести математическое моделирование движения колеса, вращающегося вокруг своей оси в вертикальной плоскости при условии, что на его ободе жестко закреплён груз малых размеров.

Будем полагать, что масса ступиц пренебрежимо мала, а момент трения на валу пропорционален скорости вращения. Графическая иллюстрация описываемого процесса представлена на рисунке 3.1.

Получение нелинейного уравнения динамики. Составим для рассматриваемого колеса с грузом уравнение движения, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$(J + mR^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M_{TP} - M_T .$$

Здесь J – момент инерции колеса без учёта груза, m – масса груза, R – радиус колеса, α – угол отклонения груза от вертикали, $M_{тр}$ – момент сил трения на оси колеса, M_T – момент силы тяжести.

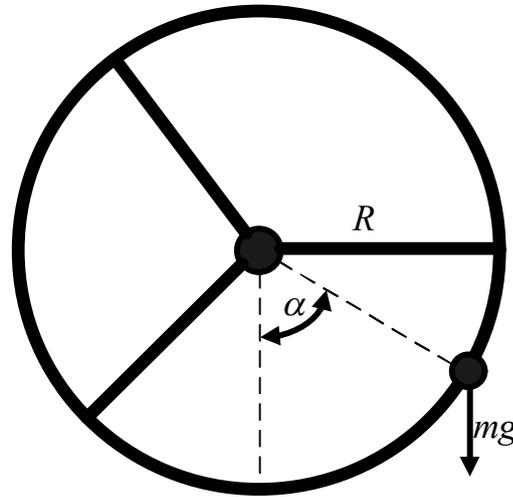


Рисунок 3.1 – Графическая иллюстрация динамического процесса

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0; \\ \dot{\alpha}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Учитывая сделанные ранее предположения, преобразуем уравнение динамики:

$$(J + mR^2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k \frac{d\alpha}{dt} - mgR \sin \alpha .$$

Здесь k – коэффициент трения.

Проведя эквивалентные преобразования, получим уравнение движения колеса:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha = 0 .$$

Несмотря на кажущуюся простоту, это нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого может быть получено только численными методами.

Определение установившегося режима. Если интересующие нас параметры динамического объекта, процесса или явления не изменяются с течением времени, то говорят, что имеет место

установившийся режим. Чтобы найти условия установившегося режима, все производные выходной величины приравнивают к нулю.

В нашем случае примем угловую скорость и угловое ускорение равными нулю:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha_0 = 0.$$

Откуда $\alpha_0 = 0$ (формально условие выполняется и при $\alpha_0 = 180^\circ$, но при этом малейшее отклонение от вертикали вызовет переворот конструкции – имеет место ситуация так называемого неустойчивого равновесия).

Линеаризация уравнения динамики. Для получения линеаризованной модели движения колеса разложим функцию $\sin \alpha$ в ряд Тейлора в окрестностях точки α_0 :

$$\sin \alpha = \Delta\alpha - \frac{(\Delta\alpha)^3}{3!} + \frac{(\Delta\alpha)^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\Delta\alpha)^{2n+1}.$$

Здесь обозначено $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$. В нашем случае, так как установившееся значение угла равно нулю, $\Delta\alpha = \alpha$. Но так бывает далеко не всегда.

Полагая члены ряда степени выше первой пренебрежимо малыми, получим: $\sin \alpha \approx \Delta\alpha$.

Тогда линеаризованное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} (\Delta\alpha) = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого может иметь различный вид в зависимости от соотношения коэффициентов. Рассмотрим все возможные варианты.

1. Если $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J + mR^2} > 0$, то характеристическое

уравнение имеет два различных действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры λ_1 и λ_2 задаются выражениями:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}; \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}. \end{cases}$$

При заданных значениях угла отклонения $\Delta\alpha_0$ и скорости его изменения ω_0 в начальный момент времени, можно определить константы интегрирования:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1 + C_2; \\ \omega_0 = -\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\omega_0 + \lambda_2 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ C_2 = \frac{\omega_0 + \lambda_1 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases}$$

2. Если $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2} = 0$, то характеристическое

уравнение имеет два одинаковых действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}.$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметр λ задаётся выражением:

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2}.$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1; \\ \omega_0 = -\lambda C_1 + C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 ; \\ C_2 = \omega_0 + \lambda\Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

3. Если $\left(\frac{k}{J+mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J+mR^2} < 0$, то характеристическое

уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = e^{-\beta t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)).$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры β и ω задаются выражениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \frac{k}{J+mR^2} ; \\ \omega = \sqrt{\frac{mgR}{J+mR^2} - \beta^2} . \end{cases}$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_2 ; \\ \omega_0 = -\beta C_2 + \omega C_1 . \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\omega_0 + \beta\Delta\alpha_0}{\omega} ; \\ C_2 = \Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

Найденные аналитические решения задачи в различных случаях позволяют качественно оценить динамику изучаемого процесса. Так, например, если коэффициент сопротивления относительно велик, то движение колеса с грузом будет представлять собой асимптотическое перемещение в положение равновесия. Если же коэффициент сопротивления сравнительно мал, то движение колеса с грузом будет представлять собой затухающие гармонические колебания вокруг положения равновесия. Как видно, все полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и общим физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Сравнительный анализ нелинейной и линеаризованной модели. Зададим конкретные числовые значения параметров и рассмотрим поведение исходной нелинейной и линеаризованной модели при различных начальных условиях. Пусть, например, $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 2 \text{ кг}$; $R = 0,5 \text{ м}$; $k = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$; $\alpha_0 = \pi/18$; $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$.

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 0,3636\dot{\alpha} + 1,7836 \sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Сведём полученное уравнение высокого порядка к системе уравнений первого порядка, для чего введём обозначение $\omega = \dot{\alpha}$. Получим:

$$\begin{cases} \dot{\omega} + 0,3636\omega + 1,7836 \sin \alpha = 0; \\ \dot{\alpha} = \omega. \end{cases}$$

Заменяем производную функции конечной разностью:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{h}.$$

Тогда расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(0,3636\omega(i) + 1,7836 \sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь h – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta \ddot{\alpha} + 0,3636\Delta \dot{\alpha} + 1,7836\Delta \alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. Так как корни характеристического уравнения в этом случае будут комплексно-сопряженными, то общее решение будет иметь вид:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (C_1 \sin(1,3231t) + C_2 \cos(1,3231t)).$$

Учитывая заданные начальные условия, получим расчётную формулу:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (0,0240 \sin(1,3231t) + 0,1745 \cos(1,3231t)).$$

Графики аналитического и численного решений при $h = 0,01$ представлены на рисунке 3.2. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения.

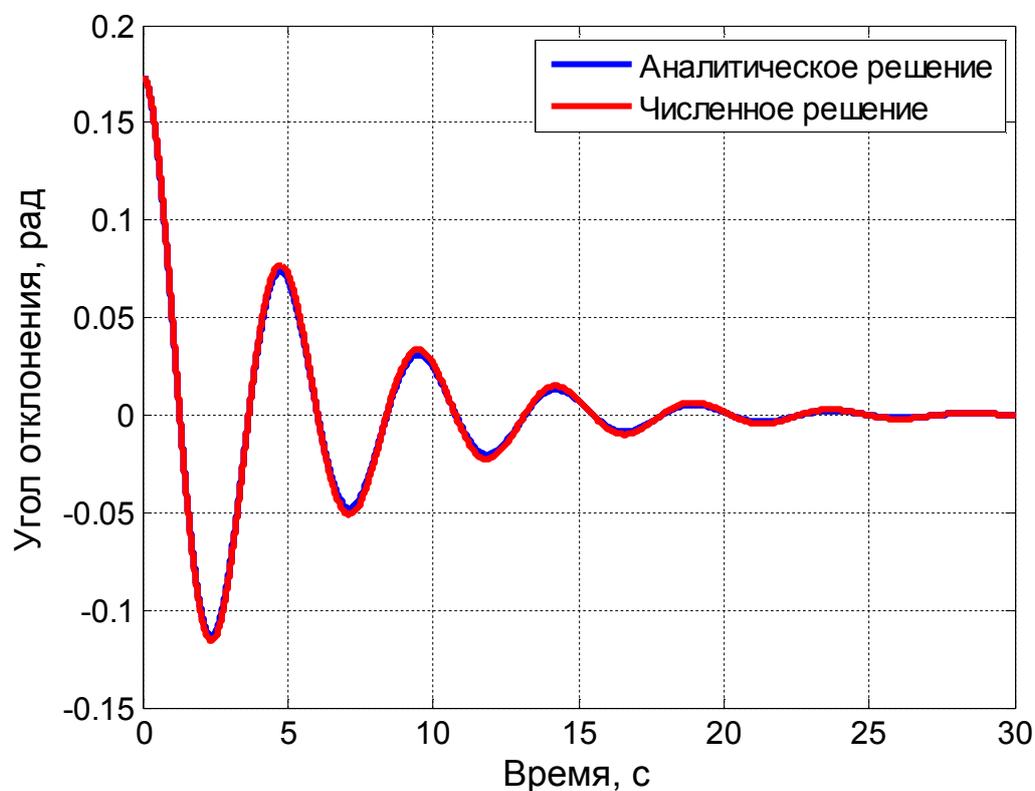


Рисунок 3.2 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/18$

Рассмотрим тот же процесс при иных начальных условиях: $\alpha_0 = \pi/2$; $\omega_0 = 0$ рад/с. Прделав аналогичные операции, определим зависимость угла отклонения груза от вертикали. Графики аналитического и численного решений представлены на рисунке 3.3. Видно, что они отличаются друг от друга, но это отклонение сравнительно мало.

На рисунке 3.4 представлены графики аналитического и численного решений задачи при начальных условиях $\alpha_0 = 5\pi/6$; $\omega_0 = 0$ рад/с. Видно, что графики аналитического и численного решения весьма существенно отличаются, т. е. линеаризованная модель описывает динамику процесса с большими погрешностями.

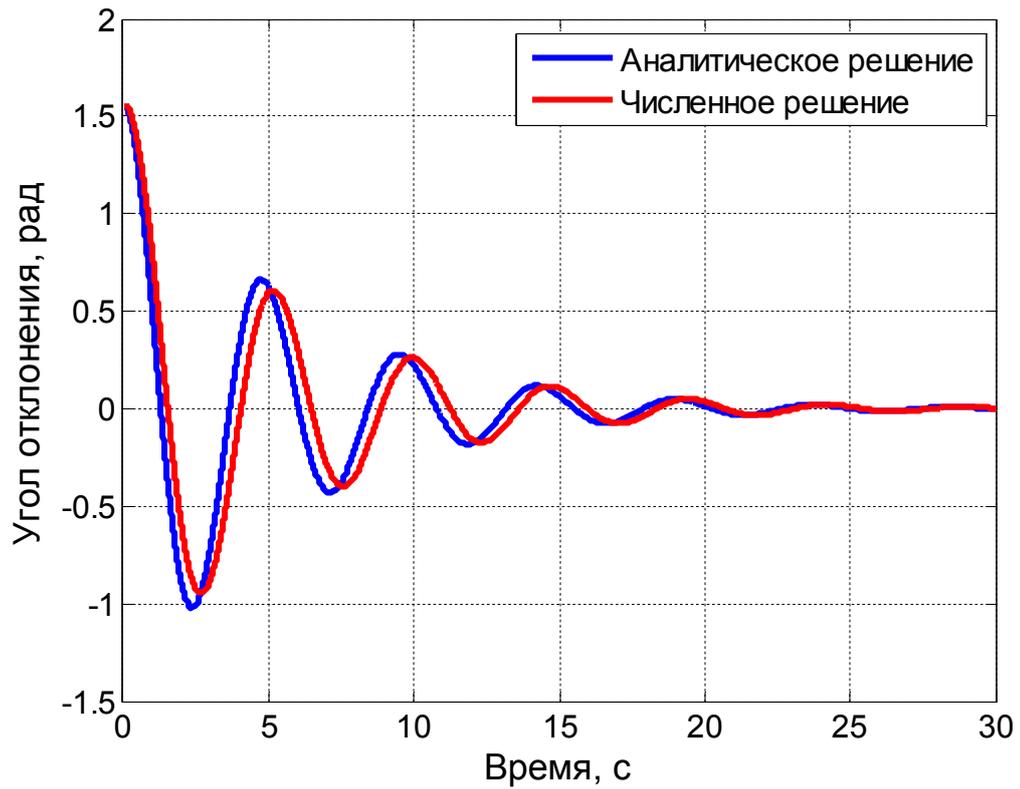


Рисунок 3.3 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/2$

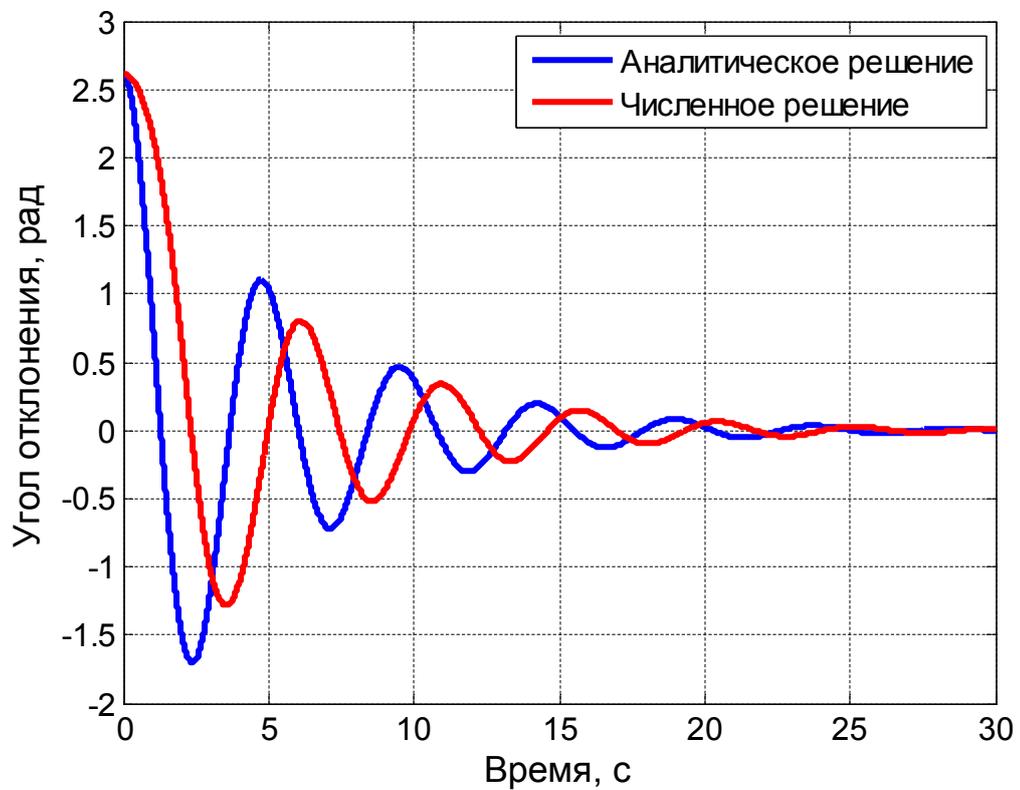


Рисунок 3.4 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = 5\pi/6$

Рассмотрим динамику изучаемого процесса при иных значениях параметров. Например, если $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 2 \text{ кг}$; $R = 0,5 \text{ м}$; $k = 15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$; $\alpha_0 = \pi/18$; $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$ (т. е. трение на оси колеса является весьма значительным).

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 2,7273\dot{\alpha} + 1,7836\sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(2,7273\omega(i) + 1,7836\sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь h – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta\ddot{\alpha} + 2,7273\Delta\dot{\alpha} + 1,7836\Delta\alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. С учётом заданных начальных условий, получим зависимость угла отклонения от времени:

$$\Delta\alpha = -0,3448e^{-1,6391t} + 0,5193e^{-1,0882t}.$$

Графики аналитического и численного решений при $h = 0,01$ представлены на рисунке 3.5. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения. На рисунках 3.6 и 3.7 представлены зависимости угла отклонения груза от времени при иных начальных условиях.

Как и в предыдущем случае, при увеличении амплитуды поведение линейной и нелинейной модели начинают всё больше и больше отличаться друг от друга.

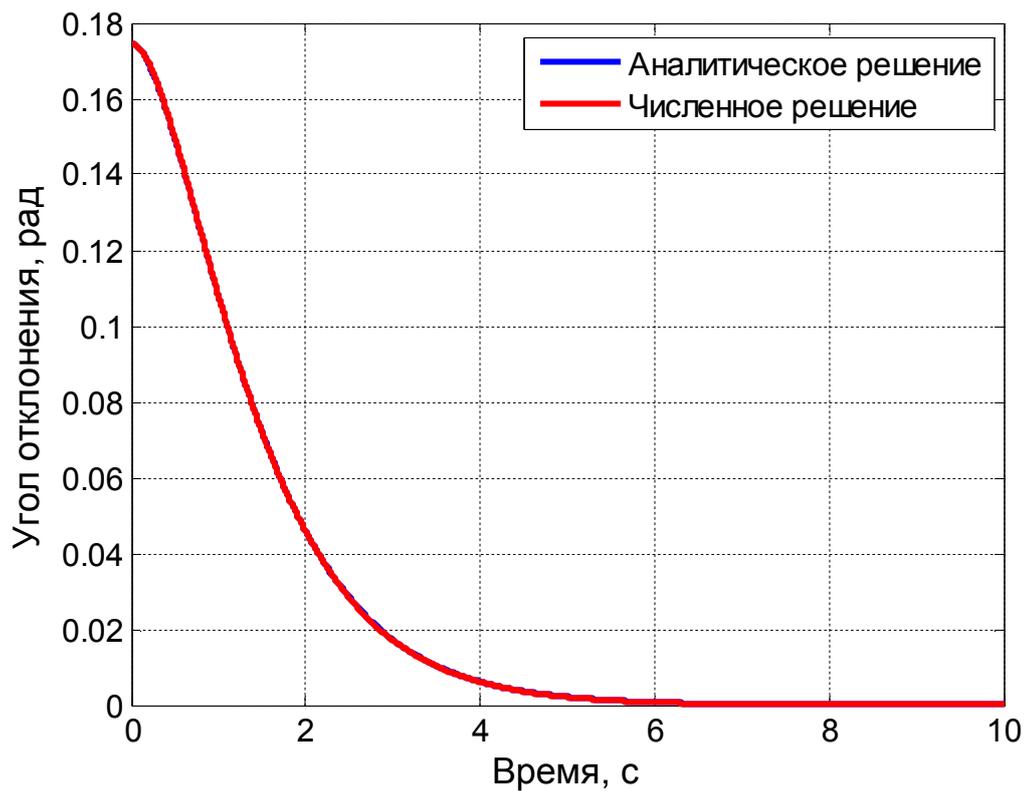


Рисунок 3.5 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/18$

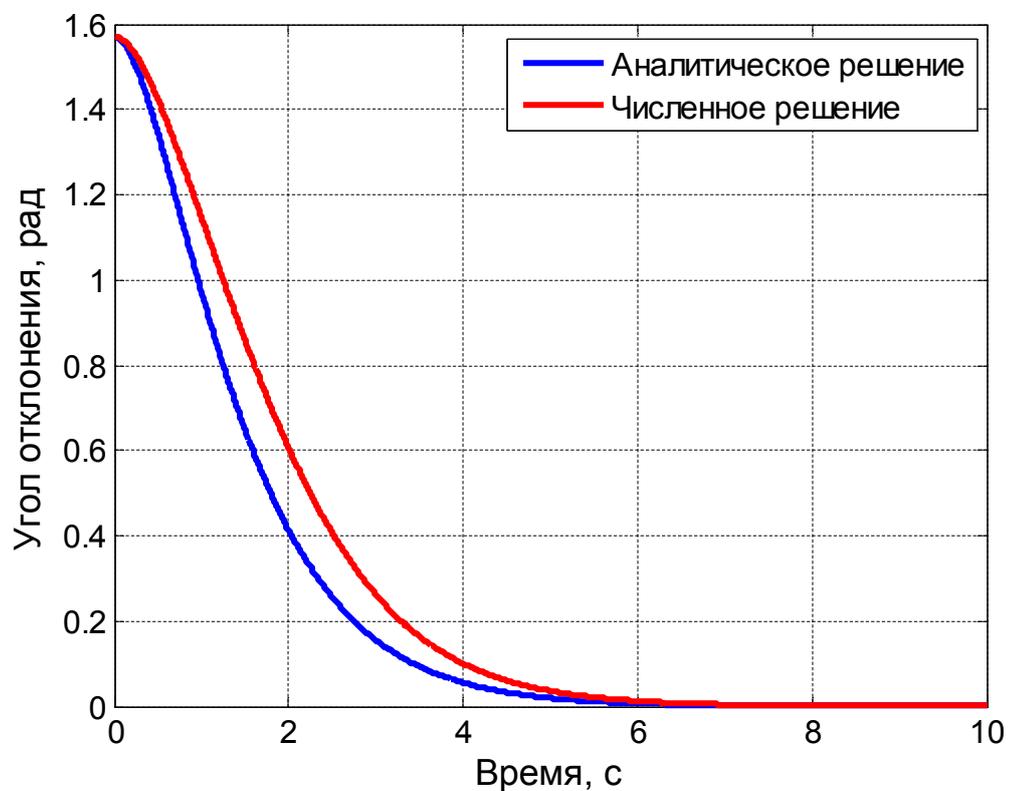


Рисунок 3.6 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/2$

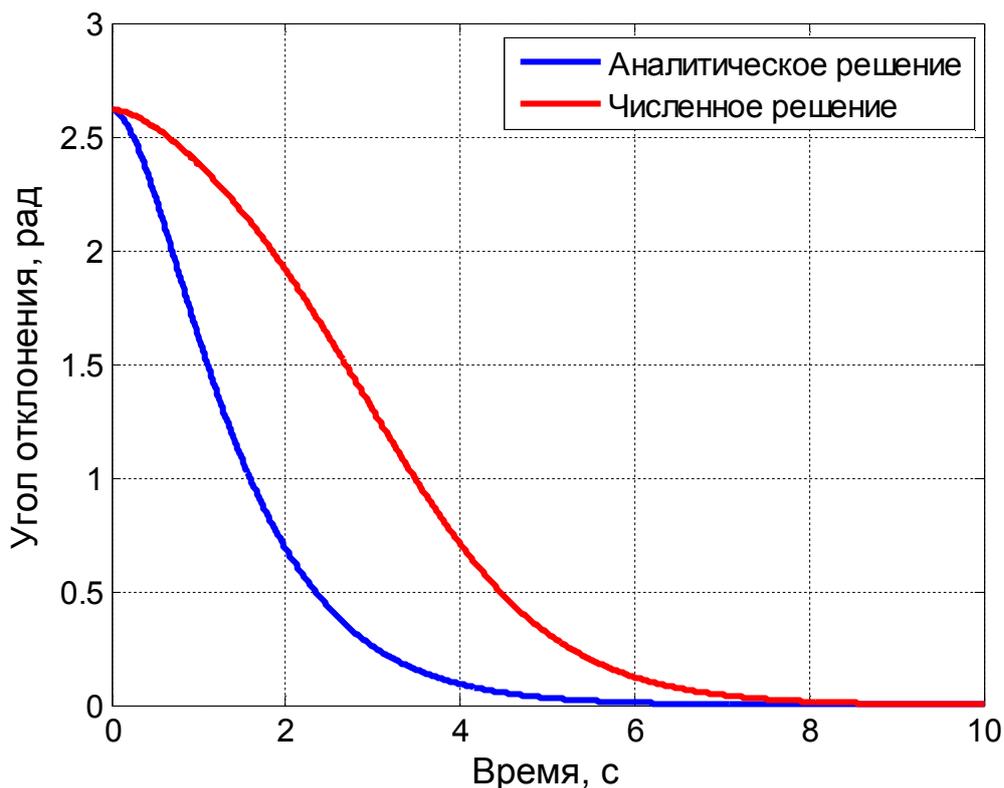


Рисунок 3.7 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = 5\pi/6$

Таким образом, была построена нелинейная модель динамического процесса и проведена его линеаризация. Линеаризованная модель более удобна для изучения и практического использования, чем нелинейная, так как позволяет находить аналитическое решение задачи. Однако, линеаризованная модель хорошо описывает поведение динамического объекта только лишь в малой окрестности установившегося режима – и чем больше величина отклонения, тем больше отличаются друг от друга линейная и нелинейная модель.

Контрольные вопросы

1. Какие математические модели называются нелинейными?
2. Какие математические модели называются нестационарными?
3. В чем состоит суть процедуры линеаризации?
4. Что называется установившимся режимом?
5. Опишите основные способы линеаризации нелинейных уравнений динамики.

Список источников

1. Асанов А. З. Математические модели динамических систем. Казань: изд-во Казан. гос. ун-та, 2007. 204 с.
2. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2005. 440 с.
3. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов. СПб.: Лань, 2013. 192 с.
4. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Серия «Библиотека профессионала». М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.
5. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
6. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Минск: Новое знание, 2013. 584 с.

РЕЦЕНЗИЯ

на учебно-методическое пособие «Основы математического моделирования»
доцента Демьянова Д.Н.

Рецензируемое пособие направлено на ознакомление студентов направлений подготовки "Прикладная математика и информатика" и "Системный анализ и управление" с основами математического моделирования при выполнении лабораторных работ. Приведены базовые сведения об этапах математического моделирования, тщательно подобраны и подробно показаны/разобраны последовательности выполнения этих этапов при решении методических задач и пр. Каждое описание лабораторной работы сопровождается теоретической справкой и контрольными вопросами.

Представленный в пособии материал дает достаточные сведения студентам для выполнения лабораторных работ, а в совокупности – представление о математическом моделировании технических объектов и явлений природы, об основных этапах мат. моделирования и особенностях выполнения отдельных этапов математического моделирования.

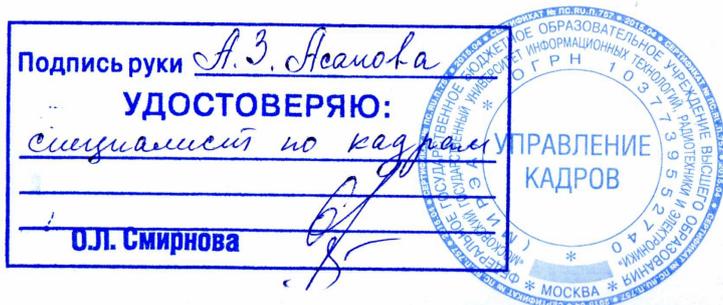
Материал пособия методически корректно выстроен, хорошо структурирован, он последовательно вводит студентов в задачи и методы математического моделирования объектов и процессов физико-технической природы. Материал пособия изложен корректным научно-литературным языком, легко читается и, будем надеяться, будет достаточно легко восприниматься основными читателями – студентами.

Рекомендую рецензируемое пособие к изданию и использованию учебном процессе.

Профессор кафедры «Автоматические системы», института Кибернетики Московского государственного университета информационных технологий, радиотехники, электроники,

доктор техн. наук, профессор

 А.З. Асанов



Рецензия

на учебно-методическое пособие Д. Н. Демьянова «Основы математического моделирования»

Учебно-методическое пособие «Основы математического моделирования» предназначено для студентов, обучающихся в высших профессиональных учебных заведениях по направлениям подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" и 27.03.03 "Системный анализ и управление" очной формы обучения.

Основой пособия является изложение материалов для получения знаний, навыков моделирования динамических систем и выполнения лабораторных работ по дисциплинам «Математическое моделирование», «Моделирование систем».

Достоинством пособия является доступное и последовательное изложение материала. В пособии приводятся 3 лабораторные работы с подробными, иллюстрированными примерами выполнения и теоретической частью. В конце пособия содержится список использованных источников. Приведенное изложение позволяет студентам лучше усваивать содержание курсов, грамотно выполнять лабораторные работы, аргументировано отвечать на поставленные вопросы и понимать основные способы и приемы моделирования динамических систем.

По своему содержанию, структуре и оформлению учебно-методическое пособие автора Д. Н. Демьянова «Основы математического моделирования» по дисциплинам «Математическое моделирование» и «Моделирование систем» основной образовательной программы по направлениям подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" и 27.03.03 "Системный анализ и управление" очной формы обучения соответствует требованиям, предъявляемым к работам такого рода. Рекомендую данную рукопись к изданию.

Кандидат технических наук, доцент кафедры САИ Набережночелнинского института КФУ



Каримов В.С.

Учебное издание

Основы математического моделирования

Демьянов Дмитрий Николаевич

Подписано в печать 09.02.2016

Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная Печать ризографическая

Усл. печ. л. 3,25 Уч.- изд. л. 3,0 Тираж 100 экз.

Заказ № 695

Издательско-полиграфический центр

Набережночелнинского института (филиала)

Казанского (Приволжского) федерального университета

423823, Республика Татарстан, г. Набережные Челны, пр. Мира 68/19

тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru

