Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

**volodinstudent@gmail.com**

Естественно, вам придется, как это делается оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Если в ближайшее время студентам будет открыт доступ в университет, то вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

## Занятие 47

### Равномерная сходимость функциональных последовательностей.

Мы приступаем к наиболее важной и, возможно, наиболее трудной для усвоения проблеме исследования рядов, зависящих от дополнительного параметра, или, более коротко, функциональных рядов.

Центром этих исследований будет понятие равномерной сходимости функционального ряда. Чтобы усвоить это понятие, рассмотрим сначала более общий, чем ряд, объект – *функциональную последовательность* $\{f_n(x)\} = \{f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$, аргумент $x$ которой принадлежит множеству $E$ на числовой прямой R. Введем определение сходимости этой последовательности на множестве $E$ в каждой его точке, а также равномерной (глобальной) сходимости на $E$.

**Определение 1:** поточечная сходимость. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся на множестве* $E$, *если существует такая функция* $f(x)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in E,$$

*то есть* $\forall x \in E \;\; \exists f(x) \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N_\varepsilon(x), \;\; \forall n > N : \;\; |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$

В этом, знакомом для вас, определении предела последовательности существенным является зависимость $N$ не только от $\varepsilon$, но и от $x$, ибо скорость сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ зависит, естественно, от значения $x$.

Поточечная сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ на множестве E обозначается как

$$f_n(x) \underset{E}{\longrightarrow} f(x)$$

**Пример 1.** *Найти предел последовательности* $f_n(x) = x^n$ *на множестве* $E = [\,0;\,1\,]$.

*Решение.* Очевидно, $x^n \to 0$, если $0 \le x < 1$, и $x^n \to 1$, если $x = 1$. Таким образом,

$$f_n(x) \underset{E}{\to} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1\ . \end{cases} \qquad (1)$$

**Определение 2:** равномерная сходимость. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется равномерно сходящейся на множестве* $E$, *если в Определении* 1 *число* $N_\varepsilon(x)$ *можно выбрать независящем от* $x$, *то есть существует такое единое для всех* $x$ *из* $E$ *число* $N = N(\varepsilon)$, *что* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Другими словами, для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ на множестве E обозначается двойной стрелкой:

$$f_n(x) \underset{E}{\Longrightarrow} f(x)$$

Один из способ доказательства равномерной сходимости к известной функции $f(x)$, $x \in E$, состоит в построении мажорирующей разность $|f_n(x) - f(x)|$ числовой последовательности $\{a_n\}$, которая стремится к нулю, и, затем, в проверке выполнения следующего условия.

**Достаточное условие равномерной сходимости.** *Если существует такая, сходящаяся к нулю последовательность* $\{a_n\} \subset E$, *что* $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$*для любого* $x \in E$, *то* $f_n(x) \underset{E}{\Longrightarrow} f(x)$.

**Пример 2.** *Установить равномерную сходимость последовательности*

$$f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}$$

*на множестве* $E = [\,1,\,\infty\,)$.

*Решение.* Поточечный предел этой последовательности очевиден:

$$f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx} \underset{E}{\longrightarrow} \frac{1}{x} = f(x),$$

поскольку $\sin t \sim t$ при $t \to 0$. Для доказательства равномерной сходимости найдем мажоранту $a_n$ для разности по модулю

$$|f_n(x) - f(x)| = n\left|\,\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx}\,\right|.$$

Попытаемся оценить сверху модульную разность $|\sin t - t|$, – в нашем случае $t = 1/nx$. Вспомним разложение Тейлора для синуса:

$$\sin t = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

Если обратится к теме нашего предыдущего занятия, то мы имеем знакочередующийся ряд Лейбница для суммы $\sin t$ которого справедлива двусторонняя оценка

$$t - \frac{t^3}{3!} \le \sin t \le t$$

и модульная разность между суммой и частичной суммой не превосходит первого отброшенного члена, то есть

$$|\sin t - t| \le \frac{t^3}{3!} \le t^3.$$

Имеем:

$$|f_n(x) - f(x)| = n\left|\,\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx}\,\right| \le \frac{n}{(nx)^3} \le \frac{1}{n^2} = a_n$$

и мажорирующая последовательность $a_n = n^{-2} \to 0$, когда $\to \infty$.

Таким образом, равномерная на $E = [\,1,\,\infty\,)$ сходимость последовательности $\{n\sin(1/nx)\}$ установлена.

Определим теперь *неравномерную* сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве $E$, в том смысле, что существует поточечная сходимость, а единое $N = N(\varepsilon)$ выбрать невозможно.

**Определение 2:** **неравномерная сходимость.** *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится на множестве* $E$ *неравномерно, если* $\exists\varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \quad \exists n >$

$N \quad \exists x_0 \in E : \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon_0$, *но при этом имеет место поточечная сходимость* (см. Определение 1).

В этом определении важно заметить, что $x_0$ можно выбирать в зависимости от $n$ и с помощью такого выбора довольно просто доказывать неравномерную сходимость последовательности. В связи с этим приведем новое Определение эквивалентной формулировки неравномерной сходимости.

**Определение 3: неравномерная сходимость.** *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве $E$ неравномерно, если $\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \exists x_n \in E : \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon_0$, но при этом имеет место поточечная сходимость.*

Конечно, выбор $x_n$ формализовать не представляется возможным. Его выбор основан на интуитивном понимании значения $x$, при котором изменяется поведение последовательности $\{f_n(x)\}$ и, возможно, на изучении особых точек поточечного предела $f(x)$.

Проиллюстрируем этот поиск на изучении последовательности Примера 1.

**Пример 3.** *Доказать, что последовательность $f_n(x) = x^n$ на множестве $E = [\,0;\,1\,]$ сходится неравномерно.*

*Решение.* Если рассматривать предельную функцию (1) в более широкой области значений аргумента $x$, то легко заметить "слом" в поведении последовательности $\{x^n\}$ в окрестности точки $x = 1$. Когда $n$ достаточно велико, то при подходе слева к этой точке функция $x^n$ начинает практически вертикально уходится к единице. В связи с этим введем некоторую последовательность $x_n$, сходящуюся слева (то есть на $E$) к единице и посмотрим предельное поведение разности $|f_n(x) - f(x)|$. Положим, к примеру, $x_n = 2^{-1/n}$. В этой точке предельная функция $f(x_n) = 0$, так что $|f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n^n = 1/2$. Следовательно, в силу Определения 3 с $\varepsilon = 1/2$, последовательность $\{x^n\}$ сходится на $E = [\,0;\,1\,]$ неравномерно.

Итак, *необходимое и достаточное условие равномерной сходимости на заданном множестве $E$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к своему поточечному пределу $f(x)$ состоит в утверждении*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Естественно, для равномерной сходимости и ее отрицании существует стандартный

**Критерий Коши.** $f_n(x) \underset{E}{\Longrightarrow} f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \;\; \forall n > N \;\; \forall p \geq 1 \;\; \forall x \in E: \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$

**Отрицание условия Коши:** $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \geq 1 \;\; \exists n > N \;\; \exists p \geq 1 \;\; \exists x_n \in E: \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| > \varepsilon.$

Практические рекомендации для доказательства или отрицания равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ :

Начинать надо всегда с вычисления поточечного предела

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

**I.** Для того, чтобы доказать равномерную сходимость на множестве $E$, надо: или найти максимальное значение $M_n$ разности $f_n(x) - f(x)$ на $E$, или оценить эту разность по модулю некоторым $a_n$ и затем показать, что при $M_n$ (или, соответственно, $a_n$) стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

**II.** Для того, чтобы доказать неравномерную сходимость на множестве $E$, надо подобрать такую последовательность $\{x_n\}$, чтобы

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0.$$

Рассмотрим пример типичной задачи на равномерную сходимость. Задачи такого типа вы будете решать в задании к Занятию 47 и в контрольной работе.

**Пример 4.** *Исследовать на поточечную и равномерную сходимости функциональную последовательность с общим членом* $f_n(x) = x\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx^2}$ *на множествах* $E_1 = [\,0;\,\infty\,)$ *и* $E_2 = [\,\delta;\,\infty\,), \quad \delta > 0.$

*Решение.* Поточечная сходимость имеет место при $x$, принадлежащим обеим множествам, и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \;\; (= f(x))$.

Обратимся теперь к вычислению максимума $|f_n(x) - f(x)| = x\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx^2}$. Эта функция принимает на положительной полуоси неотрицательные значения, обращается в нуль при $x = 0$, стремится к нулю при $x \to \infty$, имеет единственный максимум в точке $x_n = (2n)^{-1}$ (убедитесь в этом с помощью производной от этой функции) и

$$f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}. \tag{2}$$

После таких предварительных рассмотрений обратимся к выяснению равномерной сходимости на каждом из множеств $E$.

1). $E_1 = [\,0;\,\infty\,)$ : Точка $x_n = (2n)^{-1} > 0$ принадлежит этому множеству. Модульная разность (см. (2))

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}} > 0,$$

то есть о никаком стремлении к нулю речи быть не может. Следовательно, на $E_1$ сходимость неравномерная.

2). $E_2 = [\,\delta;\,\infty\,)$, $\delta > 0$ : Последовательность $x_n = (2n)^{-1} > 0$ с ростом $n$ уходит влево от множества $E_2$. Пусть $N$ таково, что $\forall n > N$ значение $x_n = (2n)^{-1} < \delta$. Тогда при $n > N$ функция $f_n(x)$ на множестве $E_2$ является убывающей и ее максимум достигается на левой границе $\delta$ этого множества. Таким образом, на множестве $E_2$

$$|f_n(x) - f(x)| \le \delta\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n\delta^2},$$

так что мажоранта модельной разности стремится к нулю при $n \to \infty$ и сходимость на $E_2$ равномерная.

## Задание 47

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

*Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на заданном множестве $E$.*

$$17.5(3).\quad f_n(x) == \frac{\ln(nx)}{nx^2},\quad E = [1,\,\infty)\,,$$

$$17.7(1).\quad f_n(x) = \sin\frac{x}{n^\alpha},\quad \alpha > 0,\quad E = \mathrm{R}\,.$$

В задачнике Кудрявцев, Кутасов и пр. требуется доказать, что следующая последовательность сходится равномерно. Это действительно так?

$$17.3(3). \quad f_n(x) = \sqrt{n}\sin\frac{x}{n\sqrt{n}}, \quad E = \mathrm{R}\,.$$

*Исследовать на поточечную и равномерную сходимости функциональные последовательности на множествах* $E_1$ *и* $E_2$.

$$17.8(4).\ f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{n}{x}, \quad E_1 = (0,\, a],\ 0 < a < \infty; \quad E_2 = (0,\infty)\,,$$

$$17.9(4).\ f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}, \quad E_1 = (0,\, 2), \quad E_2 = (0,\infty)\,.$$

*Найти значения* $\alpha$, *при которых а).* $f_n(x)$ *сходится на* $E$, *б). сходится равномерно на* $E$.

$$17.18(9)^*.\ f_n(x) = n^\alpha\left(sqrtx + \frac{1}{n} - \sqrt{x}\right), \quad E = (0,\infty)\,.$$