ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 148 (2018). С. 122–129

УДК 514.763

ДЖЕТЫ ЛИ И ЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2018 г. **В. В. ШУРЫГИН**

Аннотация. Изучаются частичные связности высшего порядка. Найдены условия, при которых джет Ли поля геометрического объекта ξ в направлении поля $\mathbb{A}$-скоростей Вейля Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

Ключевые слова: алгебра Вейля, расслоение Вейля, частичная связность, связность высшего порядка, производная Ли, джет Ли.

AMS Subject Classification: 53C15, 58A20, 58A32

Введение. Джет Ли поля геометрических объектов на гладком многообразии в направлении поля $\mathbb{A}$-скоростей является обобщением производной Ли поля геометрических объектов в направлении векторного поля. Если $P^r M_n$ — расслоение реперов порядка r на гладком многообразии M_n, а F — многообразие, на котором задано гладкое правое действие дифференциальной группы G_n^r, то поле геометрических объектов типа $(P^r M_n, F)$ представляет собой гладкое эквивариантное отображение $\xi : P^r M_n \to F$ (см. [3]). Производная Ли поля ξ в направлении векторного поля v на M_n является полем геометрических объектов типа $(P^r M_n, TF)$, определенным эквивариантным отображением

$$\mathcal{L}_v \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T\xi \circ v^c)(X) \in TF,$$

где v^c — естественный лифт векторного поля v на расслоение $P^r M_n$ (см. [3]). Если в определении производной Ли поля ξ заменить векторное поле v на сечение $Y : M_n \to T^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения $\mathbb{A}$-скоростей ($\mathbb{A}$-близких точек) Вейля (см. [14]), определяемое локальной алгеброй $\mathbb{A}$ в смысле Вейля, а касательный функтор T заменить на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, получится поле

$$\mathcal{L}_Y \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T^{\mathbb{A}} \xi \circ Y^c)(X) \in TF$$

геометрических объектов типа $(P^r M_n, T^{\mathbb{A}} F)$, называемое *джетом Ли* поля ξ в направлении поля $\mathbb{A}$-скоростей Y (см. [13]).

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}} M_n$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ (см. [4, 12]), и обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathbb{A}$-диффеоморфизм расслоения $T^{\mathbb{A}} M_n$ на себя, порождаемый сечением Y, являлся симметрией поля геометрического объекта $T^{\mathbb{A}} \xi$ (см. [13]).

В. В. Вагнер рассматривал движение геометрического объекта на многообразии под действием однопараметрической группы преобразований, порождаемой векторным полем, как параллельное перенесение этого объекта по отношению к специального типа связности, определенной вдоль траекторий векторного поля, названной им *связностью Ли* (см. [2]). В этой связи с джетами Ли можно ассоциировать частичные связности высших порядков в смысле Эресмана (см. [6]), определенные вдоль сечений расслоений контактных элементов высших порядков. Плоские частичные связности вдоль слоев слоения на M_n естественно возникают в так называемых слоеных главных расслоениях над M_n (см. [7, 10]).

Работа посвящена нахождению условий, при которых джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ поля геометрических объектов ξ в направлении поля $\mathbb{A}$-скоростей Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

В п. 1 определяется частичная связность порядка q в главном расслоении P и рассматриваются некоторые отображения, ассоциированные с частичной связностью порядка q. В п. 2 рассматриваются частичные связности в расслоении реперов $P^r M_n$, определяется связность, сопряженная с частичной связностью порядка q в расслоении $P^r M_n$. Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ для любого поля геометрического объекта ξ тогда и только тогда, когда обращается в нуль ковариантная производная поля $\mathbb{A}$-скоростей Y по отношению к сопряженной связности.

1. Связность в главном расслоении вдоль распределения высшего порядка. Расслоение $T^{(m,q)}M_n$ (m,q)-скоростей Эресмана (см. [5]) на гладком n-мерном многообразии M_n образовано q-джетами $j^q\tau$ гладких ростков $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$. Поскольку q-джет ростка $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$ можно отождествить с многочленом Тейлора степени q ростка f, то на расслоении (m,q)-скоростей $T^{(m,q)}\mathbb{R}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ возникает естественная структура алгебры над $\mathbb{R}$, изоморфной алгебре $\mathbb{R}(m,q) = \mathbb{R}[t^1, \dots, t^m; q]$ срезанных многочленов степени $\leqslant q$ от m переменных. Пусть $p^q : T^{(m,q)}M_n \to M_n$ — каноническая проекция.Локальные координаты $\{x^i\}$ на области $U \subset M_n$ индуцируют $\mathbb{R}(m,q)$-значные координаты $\{X^i\}$ на $(p^q)^{-1}(U)$, в результате чего на расслоении Эресмана $T^{(m,q)}M_n$ возникает структура гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(m,q)$ (см. [12]).

Локальной алгеброй в смысле А. Вейля (*алгеброй Вейля*; см. [8,14]) называется конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра $\mathbb{A}$ с единицей над $\mathbb{R}$, обладающая единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathbb{A})$, и такая, что факторалгебра $\mathbb{A}/\mathfrak{m}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Размерность m факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ называется *шириной* алгебры $\mathbb{A}$. Натуральное число q, определяемое соотношениями $\mathfrak{m}^q \neq 0$, $\mathfrak{m}^{q+1} = 0$, называется *порядком*, или *высотой* алгебры $\mathbb{A}$. Соответствие, относящее переменным $t^1, \dots, t^m$ элементы $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^m$ идеала $\mathfrak{m}$, порождающие базис факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, индуцирует эпиморфизм алгебр $\varphi : \mathbb{R}(m,q) \to \mathbb{A}$, поэтому алгебра Вейля $\mathbb{A}$ ширины m и высоты q изоморфна факторалгебре $\mathbb{R}(m,q)/\mathbb{I}$, где $\mathbb{I} = \ker\varphi$.

Факторизация координат $\mathbb{R}(m,q)$-значных координат $\{X^i\}$ на $T^{(m,q)}M_n$ по идеалу $\mathbb{I}$ алгебры $\mathbb{R}(m,q)$ расслаивает $T^{(m,q)}M_n$ над многообразием $T^{\mathbb{A}}M_n$, называемым *расслоением* $\mathbb{A}$*-скоростей Вейля* (см. [8,12,14]). $\mathbb{A}$-Скорость на M_n, определяемая ростком $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$, обозначается $j^{\mathbb{A}}f$.

Всякое гладкое отображение $\psi : M_n \to W_k$ продолжается до отображения

$$T^{\mathbb{A}}\psi : T^{\mathbb{A}}M_n \to T^{\mathbb{A}}W_k, \quad j^{\mathbb{A}}f \mapsto j^{\mathbb{A}}(\psi \circ f),$$

и соответствие $M_n \mapsto T^{\mathbb{A}}M_n$, $\psi \mapsto T^{\mathbb{A}}\psi$ представляет собой функтор, называемый *функтором Вейля* (см. [8,12]). Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ (см. [12]).

Отметим, что расслоение Эресмана $T^{(m,q)}M_n$ естественно эквивалентно расслоению Вейля $T^{\mathbb{R}(m,q)}M_n$, определяемому алгеброй $\mathbb{R}(m,q)$ срезанных многочленов степени $\leqslant q$ от m переменных.

Обозначим символом $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ подрасслоение в $T^{(m,q)}M_n$, образованное q-джетами ростков иммерсий $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$. При рассмотрении расслоения $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ предполагаем, что $m < n$. На $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ действует справа дифференциальная группа G^q_m q-джетов ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$. Фактор-многообразие $J^{(m,q)}M_n$ расслоения $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ по действию дифференциальной группы G^q_m является расслоенным многообразием m-мерных контактных элементов порядка q на M_n или q-джетов ростков m-мерных подмногообразий на M_n (см. [1]). Для обозначения q-джета ростка m-мерных подмногообразий на M_n, определяемого q-джетом ростка $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$, будем использовать символ $[j^q\tau]$. В [9] расслоение $J^{(m,q)}M_n$ изучалось под названием *m-грассманово продолжение порядка q многообразия M_n*. Каноническая проекция $p^q : T^{(m,q)}M_n \to M_n$ индуцирует проекцию

$$p^q : J^{(m,q)}M_n \to M_n, \tag{1}$$

для обозначения которой сохраним символ p^q.

Сечение $D : M_n \to J^{(m,q)}M_n$ расслоения (1), т.е. поле q-джетов ростков m-мерных подмногообразий на M_n можно рассматривать как распределение порядка q на многообразии M_n.

Проекция

$$p_J : T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n \ni j^q\tau \mapsto [j^q\tau] \in J^{(m,q)}M_n \tag{2}$$

задает на многообразии $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ структуру главного расслоенного пространства над $J^{(m,q)}M_n$ со структурной группой G^q_m.

Рассмотрим теперь главное расслоение $P(M_n, G, \pi)$ над M_n со структурной группой Ли G и проекцией π. Пусть $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ — подрасслоение в $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}P$, образованное q-джетами горизонтальных ростков иммерсий $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \to P$, т.е. иммерсий, композиции которых с проекцией π также являются иммерсиями $\pi \circ \sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$. Проекция

$$\pi^q : T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P \ni j^q\sigma \mapsto j^q(\pi \circ \sigma) \in T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n \tag{3}$$

расслаивает $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ над $T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$. Действие группы G на P индуцирует действие G на $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ по закону

$$R_g(j^q\sigma) = j^q(R_g \circ \sigma).$$

Обозначим символом $J^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ фактор-многообразие расслоения $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ по действию группы G^q_m. Многообразие $J^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ расслоено над P; его можно также рассматривать как многообразие q-джетов m-мерных подмногообразий расслоения P, трансверсальных слоям расслоения P. Правое действие группы G на $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$ перестановочно с действием группы G^q_m и поэтому индуцирует правое действие G на $J^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P$.

Проекция (3) индуцирует проекцию (для которой сохраняем обозначение π^q)

$$\pi^q : J^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P \ni [j^q\sigma] \mapsto [j^q(\pi \circ \sigma)] \in J^{(m,q)}M_n. \tag{4}$$

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемое многообразие M_n допускает сечения расслоения (1).

Определение 1. *Связностью порядка* q в главном расслоении $P(M_n, G, \pi)$ вдоль сечения $D : M_n \to J^{(m,q)}M_n$ будем называть правоинвариантное сечение

$$\Gamma_D : P \to J^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P, \tag{5}$$

удовлетворяющее условию $\pi^q \circ \Gamma_D(X) = D(\pi(X))$, $X \in P$.

Таким образом, связность порядка q вдоль распределения D представляет собой правоинвариантное распределение m-мерных контактных элементов порядка q на главном расслоенном пространстве P, проектирующихся в распределение D на многообразии M_n. Связность (5) будем называть также *частичной связностью порядка* q.

Обозначим символом

$$p^q_D : P^q_D M_n \to M_n \tag{6}$$

обратный образ (pull-back) расслоения p_J (см. (2)) относительно сечения $D : M_n \to J^{(m,q)}M_n$. Расслоение (6) является главным расслоением со структурной группой G^q_m. Элементы расслоения $P^q_D M_n$ представляют собой q-джеты $j^q\tau$, классы эквивалентности которых образуют контактные элементы $D(x)$, $x \in M_n$. q-Джет $j^q\tau$ будем называть *q-репером*, принадлежащим $D(x) = [j^q\tau]$.

Пусть, далее,

$$\pi^q_D : P^q_D P \to P^q_D M_n$$

— обратный образ расслоения π^q (см. (3)) относительно вложения $P^q_D M_n \to T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ и

$$\pi^q_P : P^q_D P \to P$$

— ограничение на $P^q_D P$ канонической проекции

$$T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}P \to P.$$

На многообразии $P^q_D P$ имеются правые действия группы Ли G и дифференциальной группы G^q_m, являющиеся ограничениями действий этих групп на $T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}} P$. Частичная связность Γ_D определяет отображение

$$\check{\Gamma}_D : P^q_D M_n \times_M P \to P^q_D P, \tag{7}$$

относящее q-реперу $j^q_x \tau$, принадлежащему $D(x) = [j^q_x \tau]$, и точке $X \in P$ горизонтальный лифт $j^q_X \sigma$ q-репера $j^q_x \tau$ на расслоении P в точке X. Отображение (7) эквивариантно относительно действия групп G и G^q_m, и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} P & P^q_D P \arrow[l, "\pi^q_P"'] \arrow[d, "\pi^q_D"] \\ P^q_D M_n \times_M P \arrow[u, "pr_2"] \arrow[ur, "\check{\Gamma}_D"] \arrow[r, "pr_1"'] & P^q_D M_n \end{tikzcd} \tag{8}$$

где символами pr_1 и pr_2 обозначены проекции расслоенного произведения $P^q_D M_n \times_M P$ на сомножители. Таким образом, отображение $\check{\Gamma}_D$ является сечением расслоения

$$\pi^q_D \times \pi^q_P : P^q_D P \to P^q_D M_n \times_M P. \tag{9}$$

Сечение (7) расслоения (9), эквивариантное относительно действия групп G и G^q_n, определяет такую связность Γ_D порядка q в главном расслоении P, что

$$\Gamma_D(X) = \bigl[\check{\Gamma}_D(j^q\tau, X)\bigr], \quad \text{где} \quad D(\pi(X)) = [j^q\tau].$$

Пусть $D(x) = [j^q\tau]$. Будем говорить, что $\mathbb{A}$-скорость $j^{\mathbb{A}}_x \alpha$ на M_n, где $\alpha : (\mathbb{R}^k, 0) \to (M, x)$, *принадлежит q-джету* $[j^q\tau] = D(x)$, $j^{\mathbb{A}}_x \alpha \in [j^q\tau]$, если существует такая $\mathbb{A}$-скорость $j^{\mathbb{A}}\alpha'$, где $\alpha' : (\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, что

$$j^{\mathbb{A}}\alpha = j^q\tau \circ j^{\mathbb{A}}\alpha'.$$

Естественно считать, что $k \leqslant m$, однако это требование не является обязательным.

Предположим теперь, что в главном расслоении P задана некоторая частичная связность Γ_D порядка q и $\Gamma_D(X) = [j^q\sigma]$, где $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \to (P, X)$. $\mathbb{A}$-Скорость $j^{\mathbb{A}}_X \beta$ на P, принадлежащую $\Gamma_D(X)$, будем называть *горизонтальным лифтом* $\mathbb{A}$-скорости $j^{\mathbb{A}}_x \alpha$, принадлежащей $D(x)$, $x = \pi(X)$, если $j^{\mathbb{A}}_x \alpha = j^{\mathbb{A}}_x(\pi \circ \beta)$. В соответствии с этим определением $\mathbb{A}$-скорость $j^{\mathbb{A}}\beta$ ростка $\beta : (\mathbb{R}^k, 0) \to (P, X)$ будем называть *горизонтальной* относительно связности Γ_D, если она является горизонтальным лифтом $\mathbb{A}$-скорости $j^{\mathbb{A}}(\pi \circ \beta)$.

Будем говорить, что поле $\mathbb{A}$-скорости $Y : M_n \to T^{\mathbb{A}} M_n$ на многообразии M_n принадлежит сечению D, если $Y(x)$ принадлежит $D(x)$ для любого $x \in M_n$. Если на многообразии M_n задано поле $\mathbb{A}$-скорости Y, принадлежащее сечению D, то можно построить поле $\mathbb{A}$-скорости $Y^h : P \to T^{\mathbb{A}} P$ на P — горизонтальный лифт поля Y относительно связности Γ_D, относя каждой точке $X \in P$ горизонтальную $\mathbb{A}$-скорость, являющуюся горизонтальным лифтом $\mathbb{A}$-скорости $Y(\pi(X))$ относительно связности Γ_D.

Обозначим символом $T^{\mathbb{A}}_D M_n$ подрасслоение в $T^{\mathbb{A}} M_n$, состоящее из $\mathbb{A}$-скоростей на M_n, принадлежащих сечению D, а символом $T^{\mathbb{A}}_D P$ подрасслоение в расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}} P$, состоящее из таких $\mathbb{A}$-скоростей $j^{\mathbb{A}}_X \beta$ на P, что $j^{\mathbb{A}}_{\pi(X)}(\pi \circ \beta)$ принадлежит $D(\pi(X))$. Отображение

$$\pi^{\mathbb{A}}_D : T^{\mathbb{A}}_D P \ni j^{\mathbb{A}}_X \beta \mapsto j^{\mathbb{A}}_{\pi(X)}(\pi \circ \beta) \in T^{\mathbb{A}}_D M_n$$

является локально тривиальным расслоением. Отображение, осуществляющее горизонтальный лифт $\mathbb{A}$-скоростей, принадлежащих сечению D, на расслоение P относительно связности Γ_D, аналогично (7) задается сечением

$$\check{\Gamma}^{\mathbb{A}}_D : T^{\mathbb{A}}_D M_n \times_M P \to T^{\mathbb{A}}_D P. \tag{10}$$

Если F — многообразие с заданным на нем правым действием

$$F \times G \ni (z, a) \mapsto R_a(z) \in F \tag{11}$$

группы Ли G, то поле геометрического объекта типа (P, F) на многообразии M_n (см. [3]) задается G-эквивариантным отображением $\xi : P \to F$. Действие (11) индуцирует правое действие группы Ли G на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}F$, определяемое формулой $R_a(j^{\mathbb{A}}\gamma) = j^{\mathbb{A}}(R_a \circ \gamma)$ для $\gamma : (\mathbb{R}^k, 0) \to F$.

Определение 2. Пусть в главном расслоении $P(M_n, G)$ задана связность Γ_D вдоль сечения $D : M_n \to J^{(m,q)}M_n$ и пусть $Y : M_n \to T^{\mathbb{A}}_D M_n$ — поле $\mathbb{A}$-скоростей на M_n, принадлежащее сечению D. *Ковариантной производной* поля геометрического объекта ξ по отношению к полю $\mathbb{A}$-скоростей Y на многообразии M_n называется поле геометрического объекта типа $(P, T^{\mathbb{A}}F)$ на M_n, определяемое формулой

$$\nabla^D_Y \xi : T^{\mathbb{A}}M_n \times_M P \ni (Y_x, X) \longmapsto j^{\mathbb{A}}_x \xi \circ \check{\Gamma}^{\mathbb{A}}_D(Y_x, X) \in T^{\mathbb{A}}F. \tag{12}$$

Формула (12) остается справедливой, если $\mathbb{A}$-скорость $Y_x = j^{\mathbb{A}}_x \alpha$ задана только в одной точке x многообразия M_n. Используя функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, ковариантную производную (12) можно представить в виде

$$\nabla^D_Y \xi = T^{\mathbb{A}}\xi \circ Y^h_P. \tag{13}$$

Поскольку q-реперы, принадлежащие распределению D, могут рассматриваться как $\mathbb{R}(m, q)$-скорости, то тем самым определены ковариантные производные и по отношению к таким q-реперам.

2. Связности в расслоениях реперов и джеты Ли. В качестве главного расслоения P в рассуждениях предыдущего раздела можно использовать расслоение r-реперов $P^r M_n$ на многообразии M_n. Расслоение $P^r M_n$ образовано r-джетами $j^r_x \gamma$ ростков диффеоморфизмов $\gamma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (M_n, x)$ и совпадает с подрасслоением $T^{(n,r)}_{\mathrm{reg}} M_n$ в расслоении Эресмана $T^{(n,r)}M_n$.

Изоморфизм алгебр Вейля

$$\mathbb{R}(m, q) \otimes \mathbb{R}(n, r) \cong \mathbb{R}(n, r) \otimes \mathbb{R}(m, q)$$

индуцирует естественную эквивалентность расслоений Вейля (см. [8, 12])

$$\Phi : T^{(m,q)}(T^{(n,r)}M_n) \cong T^{(n,r)}(T^{(m,q)}M_n). \tag{14}$$

Ограничиваясь в (14) рассмотрением только джетов ростков, проектирующихся на M_n в ростки иммерсий, получим эквивалентность расслоений

$$\Phi : T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}(T^{(n,r)}_{\mathrm{reg}}M_n) \cong T^{(n,r)}_{\mathrm{hor}}(T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n). \tag{15}$$

Ограничение эквивалентных расслоений

$$T^{(m,q)}_{\mathrm{hor}}(T^{(n,r)}_{\mathrm{reg}}M_n), \quad T^{(n,r)}_{\mathrm{hor}}(T^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n)$$

в (15) на полные прообразы распределения D при проекции на $J^{(m,q)}_{\mathrm{reg}}M_n$ приводит к эквивалентности расслоений

$$P^q_D(P^r M_n) \cong P^r_{\mathrm{hor}}(P^q_D M_n), \tag{16}$$

где $P^r_{\mathrm{hor}}(P^q_D M_n)$ — расслоение r-джетов ростков $(\mathbb{R}^n, 0) \to P^q_D M_n$, которые в композиции с проекцией $p^q_D : P^q_D M_n \to M_n$ дают ростки диффеоморфизмов.

Частичная связность Γ_D порядка q в расслоении реперов $P^r M_n$ определяет отображение (см. (7))

$$\check{\Gamma}_D : P^q_D M_n \times_M P^r M_n \to P^q_D(P^r M_n), \tag{17}$$

осуществляющее горизонтальные лифты q-реперов, принадлежащих распределению D, на расслоение $P^r M_n$. Отображение (17) эквивариантно относительно действия групп G^r_n и G^q_m, и из его эквивариантности следует, что оно определяет частичную связность в расслоении $P^r M_n$.

Заменяя расслоение $P^q_D(P^rM_n)$ в диаграмме (8) для $P = P^rM_n$ и сечения (17) на расслоение $P^r_{\mathrm{hor}}(P^q_DM_n)$, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} P^q_DM_n & P^r_{\mathrm{hor}}(P^q_DM_n) \arrow[l, "p^r"'] \arrow[d, "(p^q_D)^r"] \\ P^rM_n \times_M P^q_DM_n \arrow[u, "pr_2"] \arrow[ur, "\check{\Gamma}^*_D"] \arrow[r, "pr_1"'] & P^rM_n \end{tikzcd} \tag{18}$$

в которой сечение

$$\check{\Gamma}^*_D : P^rM_n \times_M P^q_DM_n \to P^r_{\mathrm{hor}}(P^q_DM_n) \tag{19}$$

осуществляет горизонтальные лифты r-реперов с многообразия M_n на расслоение $P^q_DM_n$.

Определение 3. Связность Γ^*_D порядка r в расслоении $P^q_DM_n$, определяемую сечением (19), будем называть *связностью, сопряженной частичной связности* Γ_D порядка q в расслоении реперов P^rM_n.

Поскольку поля $\mathbb{A}$-скоростей порядка q, принадлежащие распределению D, являются полями геометрических объектов, ассоциированных с расслоением $P^q_DM_n$, то определены ковариантные производные таких полей $\mathbb{A}$-скоростей порядка q по отношению к связности Γ^*_D.

Пусть теперь F — многообразие с заданным на нем правым действием дифференциальной группы G^r_n и $\xi : P^rM_n \to F$ — поле геометрического объекта на многообразии M_n, ассоциированное с расслоением реперов P^rM_n, т.е. поле объекта типа (P^rM_n, F) (см. [3]). Производной Ли поля геометрических объектов ξ по отношению к векторному полю v на M_n называется отображение (см. [3, 13])

$$\mathcal{L}_v\xi : P^rM_n \ni X \mapsto \Big(T\xi \circ v^{\mathbb{R}(n,r)}\Big)(X) \in TF, \tag{20}$$

где $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ — естественный лифт векторного поля v на расслоение P^rM_n. Лифт $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ может быть получен применением к полю v функтора Вейля $T^{\mathbb{R}(n,r)}$ с последующим использованием естественной эквивалентности функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T \cong T \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$ (см. [8,12]), где T — касательный функтор. Касательный функтор T естественно эквивалентен функтору Вейля $T^{\mathbb{D}}$ для алгебры дуальных чисел $\mathbb{D}$. Заменим в формуле (20) касательный функтор T на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, определяемый алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, а $\mathbb{R}(n,r)$-продолжение векторного поля на $\mathbb{R}(n,r)$-продолжение поля $\mathbb{A}$-скорости Y и воспользуемся естественной эквивалентностью функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T^{\mathbb{A}} \cong T^{\mathbb{A}} \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$. Поскольку коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} P^rM_n \arrow[r, "T^{\mathbb{R}(n,r)}Y"] \arrow[d, "R_g"'] & T^{\mathbb{R}(n,r)}T^{\mathbb{A}}M_n \arrow[d, "T^{\mathbb{A}}R_g"] \\ P^rM_n \arrow[r, "T^{\mathbb{R}(n,r)}Y"] & T^{\mathbb{R}(n,r)}T^{\mathbb{A}}M_n \end{tikzcd} \tag{21}$$

в которой R_g — правый сдвиг расслоения r-реперов $\mathbb{R}(n,r)$ при действии элемента $g \in G^r_n$, то отображение $T^{\mathbb{R}(n,r)}Y$ эквивариантно по отношению к действию группы Ли G^r_n, и формула

$$\mathcal{L}_Y\xi = T^{\mathbb{A}}\xi \circ Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^rM_n \to T^{\mathbb{A}}F, \tag{22}$$

где $Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^rM_n \to T^{\mathbb{A}}P^r(n,r)$ — естественный лифт ($\mathbb{R}(n,r)$-продолжение) поля $\mathbb{A}$-скорости Y на расслоение r-реперов, определяет поле геометрических объектов на M_n, называемое *джетом Ли* поля ξ по отношению к полю $\mathbb{A}$-скоростей Y (см. [4, 13]).

Из коммутативности диаграммы (21) также следует, что естественный лифт $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля $\mathbb{A}$-скорости Y правоинвариантен относительно действия группы Ли G^r_n на расслоении r-реперов. Поэтому джет Ли $\mathcal{L}_Y\xi$ представляет собой поле геометрического объекта на многообразии M_n того же типа, что и ковариантная производная $\nabla_Y\xi$, определяемая формулой (13).

Пусть Γ_D — связность в расслоении r-реперов P^rM_n вдоль сечения $D : M_n \to J^{(m,q)}M_n$ и Y — поле $\mathbb{A}$-скорости на многообразии M_n, принадлежащее сечению D. Установим, при каких условиях для всякого поля геометрических объектов ξ имеет место совпадение джета Ли $\mathcal{L}_Y\xi$ с ковариантной производной $\nabla^D_Y\xi$. Поскольку при определении ковариантной производной и джета Ли можно рассматривать локально заданные поля геометрических объектов, то в качестве поля геометрических объектов ξ можно взять поле r-реперов на M_n. При этом совпадение отображений (22) и (13) для $P = P^r M_n$ повлечет совпадение естественного лифта $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля $\mathbb{A}$-скорости Y на расслоение $P^r M_n$ с его горизонтальным лифтом Y^h, а это эквивалентно тому, что поле $\mathbb{A}$-скорости Y ковариантно постоянно отношению к сопряженной связности (см. [4, теорема 8.2]). Поле $\mathbb{A}$-скорости Y является полем геометрического объекта типа $(P^q M_n, T^{\mathbb{A}}_0\mathbb{R}^n)$, а ковариантная производная поля Y по отношению к сопряженной связности Γ^*_D представляет собой поле геометрического объекта типа $(P^q M_n, T^{\mathbb{R}(n,r)}T^{\mathbb{A}}_0\mathbb{R}^n)$, т.е. эквивариантное отображение $\nabla^* Y : P^q M_n \to T^{\mathbb{R}(n,r)}(T^{\mathbb{A}}_0\mathbb{R}^n))$, и включает в себя поле Y. То, что поле Y ковариантно постоянно, означает, что значения отображения $\nabla^* Y$ являются нулевыми $\mathbb{R}(n,r)$-скоростями. Будем говорить, что в этом случае ковариантная производная поля Y равна нулю: $\nabla^* Y = 0$.

Как результат выше приведенных рассуждений получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть на многообразии M_n задана связность Γ_D порядка q в расслоении r-реперов $P^r M_n$ вдоль распределения $D : M_n \to J^{(m,q)}P^q M_n$, и пусть поле $\mathbb{A}$-скорости Y принадлежит распределению D. Тогда для совпадения производной Ли $\mathcal{L}_Y\xi$ и ковариантной производной $\nabla_Y\xi$ для всякого поля геометрического объекта $\xi : P^r M_n \to F$ на M_n необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль ковариантная производная $\nabla^* Y$ поля $\mathbb{A}$-скорости Y по отношению к сопряженной связности Γ^*_D.*

Замечание 1. $\mathbb{A}$-Скорость $j^{\mathbb{A}} f$, определяемая ростком иммерсии $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to M_n$, называется *регулярной.* Множество регулярных $\mathbb{A}$-скоростей образует открытое подмногообразие $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{reg}} M_n$ в расслоении $T^{\mathbb{A}} M_n$. На $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{reg}} M_n$ действует справа группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ автоморфизмов алгебры $\mathbb{A}$. Фактор-многообразие $J^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{reg}} M_n$ по действию группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ является расслоенным многообразием. В [11] элементы расслоения $J^{\mathbb{A}} M_n$ назывались $\mathbb{A}$-*джетами.*

Частичные связности Γ_D в главном расслоении P можно определить для сечений $D : M_n \to J^{\mathbb{A}} M_n$. Расслоение $J^{(m,q)} M_n$ при этом естественно эквивалентно расслоению $J^{\mathbb{R}(m,q)} M_n$, определяемому алгеброй срезанных многочленов $\mathbb{R}(m,q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии// Геометрия–1/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — М.: ВИНИТИ, 1988. — *28.* — С. 5–289.
2. *Вагнер В. В.* Теория составного многообразия// Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1950. — *8.* — С. 11–72.
3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1979. *9.* — С. 5–246.
4. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 75–106.
5. *Ehresmann C.* Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal// C. R. Acad. Sci. — 1951. — *233*, № 11. — C. 598–600.
6. *Ehresmann C.* Sur les connexions d'ordre supérieur// Atti del V Congr. Unione Math. Ital. — Roma, 1955. — C. 326–328.
7. *Kamber F. W., Tondeur Ph.* Foliated bundles and characteristic classes/ Lect. Notes Math. — Springer-Verlag, 1975. — *493.*
8. *Kolář I., Michor P. W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
9. *Krupka D., Krupka M.* Jets and contact elements// Proc. Semin. Differ. Geom. (Krupka D., ed.)/ Math. Publ. — Opava: Silesian Univ. in Opava, 2000. — *2.* — C. 39–85.
10. *Molino P.* Riemannian foliations. — Basel: Birkhäuser, 1988.
11. *Muñoz J., Rodriguez J., Muriel F. J.* Weil bundles and jet spaces// Czech. Math. J. — 2000. — *16 (125).* — C. 721–748.

12. *Shurygin V. V.* Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles// J. Math. Sci. — 2002. — *108*, № 2. — С. 249–294.
13. *Shurygin V. V.* Lie jets and symmetries of geometric objects// J. Math. Sci. — 2011. — *177*, № 5. — С. 758–771.
14. *Weil A.* Théorie des points proches sur les variététes différentiables// Coll. Int. Centre Nat. Rech. Sci. — Strasbourg, 1953. — *52*. — С. 111–117.

В. В. Шурыгин
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `Vadim.Shurygin@kpfu.ru`