Казанский федеральный университет

Е.М. Карчевский, И.Л. Александрова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для практических занятий

Казань
2024

Оглавление

Стр.

Глава 1. Евклидовы пространства

1.1 Определение евклидова пространства (занятие 1)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.[1]

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/SAjhxgxcGQYBlg

https://disk.yandex.ru/i/Z1dQSuAAPzhcEg

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/TT2UShIGf5xEVw

https://disk.yandex.ru/i/4S2IiZ_stsPhhQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §1, 2

Говорят, что на вещественном линейном пространстве $\mathbb{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов $x\,y$ этого пространства поставлено в соответствие вещественное число (x,y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

1) $(x,x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{X}$, равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x,y) = (y,x)$ для любых $x, y \in \mathbb{X}$;

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y, z)$ для любых x, y, $z \in \mathbb{X}$ и любых чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Если на вещественном линейном пространстве $\mathbb{X}$ введено скалярное произведение, его называют *вещественным евклидовым пространством.*

Говорят, что на комплексном линейном пространстве $\mathbb{X}$ введено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов x, y этого пространства поставлено в соответствие комплексное число (x,y), и при этом выполнены *аксиомы скалярного произведения*:

1) $(x,x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{X}$, равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ для любых $x, y \in \mathbb{X}$, напомним, что черта означает переход к комплексно сопряженному числу, и отметим, что скалярное произведение на комплексном пространстве некоммутативно;

[1] Все материалы курса https://disk.yandex.ru/d/X873mjn97T3SDA

3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y, z)$ для любых x, y, $z \in \mathbb{X}$ и любых чисел α, $\beta \in \mathbb{C}$.

Если на комплексном линейном пространстве $\mathbb{X}$ введено скалярное произведение, его называют *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным пространством.*

Упражнение 1. Пространство $\mathbb{C}^n$ превращается в комплексное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{C}^n$, например, по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{y}_k, \tag{1.1}$$

где ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_n — заданные положительные числа. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Решение. Убедимся, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

1) Ясно, что

$$(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k |x_k|^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in \mathbb{C}^n$, а равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны.

2) Вторая аксиома также справедлива. Действительно,

$$\overline{(y,x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \overline{y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{y}_k$$

для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$.

3) Проверим справедливость третьей аксиомы:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k (\alpha x_k + \beta y_k) \overline{z}_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \overline{z}_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k \overline{z}_k = \alpha(x,z) + \beta(y, z)$$

для любых x, y, $z \in \mathbb{C}^n$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

Упражнение 2. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^3$ задаваться следующим образом:

$$(x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2?$$

Решение. Имеем $(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 \geqslant 0$. Левая часть последнего неравенства равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 0$. Если $x \in \mathbb{R}^3$, то при этом x_3 может быть любым вещественным числом. Следовательно, $(x,x) = 0$, когда $x = (0,0,x_3) \neq 0$. Итак, первая аксиома скалярного произведения не выполняется, и определенное таким образом число не является скалярным произведением на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 3. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^2$ задаваться следующим образом:
a) $3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,
b) $x_1y_1 + x_2$?

Ответ. *a*) Нет, *b*) нет.

Упражнение 4. Сопоставим произвольной паре векторов x, y из геометрического пространства $\mathbb{V}_3$ число $|x||y|$. Можно ли принять его за скалярное произведение векторов?

Указание. Нет. Для ответа на поставленный вопрос надо обратить внимание на то, что $|\alpha x + \beta y| \neq \alpha|x| + \beta|y|$.

Упражнение 5. Доказать, что выражение

$$(X,Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{j,k} y_{j,k}$$

определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ вещественных матриц размера $m \times n$.

Указание. Заметить, что указанное число в точности соответствует определению скалярного произведения на пространстве $\mathbb{R}^{mn}$ векторов длины mn.

Упражнение 6. *Следом* квадратной матрицы A порядка m называется число

$$\mathrm{tr} A = \sum_{j=1}^{m} a_{j,j}.$$

Доказать, что равенство

$$(X,Y) = \mathrm{tr}(XY^T)$$

определят скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ вещественных матриц размера $m \times n$.

Решение. Пусть матрицы X, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда транспонированная матрица $Y^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а произведение $XY^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Вычислим диагональные элементы матрицы XY^T:

$$(XY^T)_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{j,k} y^T_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{j,k} y_{j,k}, \quad j = 1, 2\ \ldots, m.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr}(XY^T) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{j,k} y_{j,k},$$

что в точности соответствует определению скалярного произведения из предыдущего упражнения.

Упражнение 7. Рассматривается пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число $\det(XY)$. Можно ли так определить скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Указание. Нет. Приведите пример из пространства матриц второго порядка, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, нарушающий первую аксиому.

Упражнение 8. Доказать, что для любой пары $P_n(z)$, $Q_n(z)$ элементов пространства $\mathbb{Q}_n$ можно определить скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} P_n(z_j)\overline{Q_n}(z_j),$$

где z_0, z_1, $\ldots$, z_n — попарно различные числа.

Указание. При проверке первой аксиомы использовать то, что если полином степени n в $n+1$ различных точках равен нулю, то и все его коэффициенты равны нулю.

Упражнение 9. Может ли скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^n$ задаваться следующим образом:
$a)$ $x_1y_1 + x_2y_3$, если $n = 3$;
$b)$ $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, если $n = 2$?

Ответ. $a)$ Нет; $b)$ нет.

Упражнение 10. Пусть a — фиксированный ненулевой вектор в геометрическом пространстве $\mathbb{V}_3$. Сопоставим каждой паре векторов x, $y \in \mathbb{V}_3$:
$a)$ смешанное произведение (a, x, y);

b) скалярное произведение $(x + a, y + a)$.
Можно ли так определить скалярное произведение на $\mathbb{V}_3$?

Ответ. a) Нет; b) нет.

Упражнение 11. Пусть на вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$. Доказать, что для любых чисел $\lambda \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$, не равных одновременно нулю, равенство

$$(x,y) = \lambda(x,y)_1 + \mu(x,y)_2$$

определяет скалярное произведение на этом пространстве.

Указание. Проверить аксиомы скалярного произведения, опираясь на то что для скалярных произведений $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$ аксиомы выполнены.

Упражнение 12. Рассматривается пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число $\mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y$. Можно ли так определить скалярное произведение на пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Ответ. Нет.

1.2 Ортогональные системы векторов, матрица Грама (занятие 2)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/DnMPDMbbpPaIMQ

https://disk.yandex.ru/i/5RjUdPXYRCNc6w

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/GBH8Mi6KmQXvSA

https://disk.yandex.ru/i/mc1bbjPcp0Djsg

Учебник:

https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §4, 5

Два вектора x и y евклидова пространства $\mathbb{X}$ называются *ортогональными*, если скалярное произведение $(x,y) = 0$.

Величина $|x| = \sqrt{(x,x)}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора x.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{X}$ называется *ортогональной*, если все векторы a^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, не нули и $(a^i, a^k) = 0$ при $i \neq k$.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если скалярные произведения $(a^i, a^k) = \delta_{ik}$ для i, $k = 1, 2, \ldots, m$. Все векторы ортонормированной системы имеют длину, равную единице.

Матрица

$$G = \begin{pmatrix} (a^1,a^1) & (a^2,a^1) & \ldots & (a^m,a^1) \\ (a^1,a^2) & (a^2,a^2) & \ldots & (a^m,a^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a^1,a^m) & (a^2,a^m) & \ldots & (a^m,a^m) \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Грама* системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ евклидова пространства $\mathbb{X}$.

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ее матрица Грама невырождена. Матрица Грама ортогональной системы — диагональная невырожденная матрица. Матрица Грама ортонормированной системы — единичная матрица.

Упражнение 1. Доказать, что в унитарном пространстве из условия $(x,y) = 0$ следует *тождество Пифагора*

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2, \tag{1.2}$$

а из равенства (1.2) вытекает, что $\mathrm{Re}(x,y) = 0$.

Решение. Справедливы равенства

$$|x + y|^2 = (x + y,x + y) = (x,x) + (y,y) + (x,y) + (y,x) =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} = |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y).$$

Отсюда следует доказываемое утверждение.

Упражнение 2. Доказать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{X}$ нулевой вектор — единственный ортогональный ко всем векторам пространства.

Указание. Воспользоваться тем, что, по первой аксиоме скалярного произведения, из равенства $(x,x) = 0$ следует, что $x = 0$.

Упражнение 3. Доказать, что если векторы a, b принадлежат евклидову пространству $\mathbb{X}$ и для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $(a,x) = (b,x)$, то $a = b$.

Указание. Использовать результат предыдущего упражнения.

Упражнение 4. Доказать, что если $\{a^i\}_{i=1}^m$ — ортогональная система векторов, то для любых ненулевых чисел $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, система векторов $\{x_i a^i\}_{i=1}^m$ также будет ортогональной.

Указание. Воспользоваться определением ортогональной системы векторов и аксиомами скалярного произведения.

Упражнение 5. Доказать, что если вектор b ортогонален к каждому из векторов системы $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он ортогонален и к любой линейной комбинации этих векторов.

Указание. Записать линейную комбинацию векторов системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ с произвольными коэффициентами x_i, $i = 1, \ldots, m$; показать, что скалярное произведение вектора b и этой линейной комбинации равно нулю.

Упражнение 6. Доказать, что в вещественном евклидовом пространстве

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(|x + y|^2 - |x - y|^2\right).$$

Справедливо ли это равенство в унитарном пространстве?

Указание. В унитарном пространстве равенство не имеет места. Запишите $|x + y|^2$ и $|x - y|^2$ и используйте коммутативность скалярного произведения в вещественном евклидовом пространстве.

Упражнение 7. Пусть на вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$, и любой вектор имеет одинаковые длины в каждом из них: $(x,x)_1 = (x,x)_2$. Доказать, что скалярные произведения совпадают.

Указание. Использовать результат предыдущего упражнения.

Упражнение 8. Доказать, что в вещественном евклидовом пространстве

$$(x,y) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2).$$

Справедливо ли это равенство в унитарном пространстве?

Указание. В унитарном пространстве равенство не имеет места. Запишите $|x + y|^2$ через скалярное произведение и используйте коммутативность скалярного произведения в вещественном евклидовом пространстве.

Упражнение 9. Доказать, что любая ортогональная система векторов линейно независима.

Указание. Использовать то, что если матрица Грама системы векторов невырождена, то эта система линейно независима.

Упражнение 10. Вычислить матрицу Грама системы векторов

$$a^1 = (1,2,3), \quad a^2 = (3,6,7),$$

используя стандартное скалярное в $\mathbb{R}^3$, и ее определитель. Что можно сказать о линейной независимости этих векторов?

Решение. Ясно, что векторы $a^1 = (1,2,3)$, $a^2 = (3,6,7)$ не пропорциональны, т. е. система линейно независима. Вычислим определитель матрицы Грама этой системы, используя стандартное скалярное произведение:

$$G = \begin{pmatrix} (a^1,a^1) & (a^2,a^1) \\ (a^1,a^2) & (a^2,a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 94 \end{pmatrix},$$

$$\det(G) = \begin{vmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 94 \end{vmatrix} = 14 \cdot 94 - 36 \cdot 36 = 20.$$

Матрица Грама невырождена, что подтверждает линейную независимость исходной системы векторов.

Покажем, как выполнить это упражнение в Python https://colab.research.google.com/drive/11_1i27FE0_7Zlj33lTlSH8hWFwxN4_c1?usp=sharing

Упражнение 11. Выяснить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов. Вычислить матрицы Грама этих систем векторов, используя стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.
$a)$ $a^1 = (4, -2{,}6)$, $a^2 = (6, -3{,}9)$;
$b)$ $a^1 = (2, -3{,}1)$, $a^2 = (3, -1{,}5)$, $a^3 = (1, -4{,}3)$.

Указание. $a)$ Линейно зависимая система. Проверьте, пропорциональны ли векторы. Кроме того, вычислите определитель матрицы Грама этой системы векторов, используя стандартное скалярное произведение.

$b)$ Линейно независимая система. Указание. Вычислите определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы.

Упражнение 12. Даны полиномы $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Найти матрицу Грама этой системы векторов, если скалярное произведение в пространстве полиномов задается формулой

$$(P,Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx. \tag{1.3}$$

Решение. Вычислим элементы матрицы Грама. Интеграл от единицы равен длине отрезка интегрирования:

$$(Q_0,Q_0) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2.$$

Интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку равен нулю, поэтому два интеграла обращаются в нуль:

$$(Q_0,Q_1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x\, dx = 0,$$

$$(Q_1,Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x^3\, dx = 0.$$

Вычислим еще три интеграла:

$$(Q_0,Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$(Q_1,Q_1) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot x\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$(Q_2,Q_2) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Теперь можно записать матрицу Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 13. Выяснить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов. Вычислить матрицы Грама этих систем векторов, используя стандартное скалярное произведение.
a) $a^1 = (5,4,3)$, $a^2 = (3,3,2)$, $a^3 = (8,1,3)$;
b) $a^1 = (1,0,0,2,5)$, $a^2 = (0,1,0,3,4)$, $a^3 = (0,0,1,4,7)$,
$a^4 = (2,-3,4,11,12)$?

Ответ. *a*) Линейно зависима, *b*) линейно независима.

Упражнение 14. Пусть $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$, $Q_3(x) = x^3$ являются полиномами вещественной переменной x. Найти матрицу Грама этой системы векторов, если скалярное произведение в пространстве полиномов задается формулой

$$(P,Q) = \int\limits_{0}^{1} P(x)Q(x)dx. \tag{1.4}$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$

1.3 Процесс ортогонализации Грама — Шмидта (занятие 3)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/UZ8Ygyt5C8zFjg

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/qVNRFFHLivGUUw

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §6

Опишем *процесс ортогонализации Грама — Шмидта.* По всякой линейно независимой системе $\{a^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортогональную систему векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$ следующим образом:

$$h^1 = a^1,$$

$$h^2 = \alpha_{2,1}h^1 + a^2, \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(a^2,h^1)}{(h^1,h^1)},$$

$$h^3 = \alpha_{3,1}h^1 + \alpha_{3,2}h^2 + a^3, \quad \alpha_{3,1} = -\frac{(a^3,h^1)}{(h^1,h^1)}, \ \alpha_{3,2} = -\frac{(a^3,h^2)}{(h^2,h^2)},$$

$$\dots$$

$$h^m = \alpha_{m,1}h^1 + \alpha_{m,2}h^2 + \dots + \alpha_{m,m-1}h^{m-1} + a^m, \quad \alpha_{m,j} = -\frac{(a^m,h^j)}{(h^j,h^j)},$$

где $j = 1, 2, \dots, m-1$. Далее по ортогональной системе $\{h^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортонормированную систему $\{b^i\}_{i=1}^m$, полагая

$$b^i = \frac{h^i}{|h^i|}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Упражнение 1. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта, используя стандартное скалярное произведение, ортонормировать следующую систему векторов:

$$a^1 = (1,2,2,-1), \quad a^2 = (1,1,-5,3), \quad a^3 = (3,2,8,-7).$$

Решение. Построим ортонормированную систему векторов по векторам a^1, a^2, a^3. Положим $h^1 = a^1$. Найдем h^2. Вычислим коэффициент

$$\alpha_{2,1} = -\frac{(a^2,h^1)}{(h^1,h^1)} = -\frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} = 1.$$

Получим

$$h^2 = \alpha_{2,1}h^1 + a^2 =$$

$$= (1{,}2{,}2,-1) + (1{,}1,-5{,}3) = (2{,}3,-3{,}2).$$

Далее,

$$\alpha_{3,1} = -\frac{(a^3,h^1)}{(h^1,h^1)} = -\frac{30}{10} = -3, \quad \alpha_{3,2} = -\frac{(a^3,h^2)}{(h^2,h^2)} = -\frac{-26}{26} = 1.$$

Тогда

$$h^3 = \alpha_{3,1}h^1 + \alpha_{3,2}h^2 + a^3 =$$

$$= -3(1{,}2{,}2,-1) + (2{,}3,-3{,}2) + (3{,}2{,}8,-7) = (2,-1,-1,-2).$$

Построим по ортогональной системе векторов h^1, h^2, h^3 ортонормированную систему b^1, b^2, b^3, разделив каждый вектор на его длину:

$$b^1 = \frac{h^1}{|h^1|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1{,}2{,}2,-1),$$
$$b^2 = \frac{h^2}{|h^2|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(2{,}3,-3{,}2),$$
$$b^3 = \frac{h^3}{|h^3|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2).$$

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1lRqQQ97BWDENS51UTH1vZsMnVkAACzjY?usp=sharing

Упражнение 2. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта ортонормировать следующие системы векторов, используя стандартное скалярное произведение:

a) $a^1 = (1{,}3,-2)$, $a^2 = (3{,}7,-2)$,

b) $a^1 = (1{,}3{,}1)$, $a^2 = (5{,}1{,}3)$, $a^3 = (1{,}6,-8)$,

c) $a^1 = (1{,}2{,}3)$, $a^2 = (2{,}1{,}1)$, $a^3 = (6,-7,-2)$,

d) $a^1 = (2{,}1{,}3,-1)$, $a^2 = (7{,}4{,}3,-3)$, $a^3 = (1{,}1,-6{,}0)$, $a^4 = (5{,}7{,}7{,}8)$.

Ответ.

a) $\frac{1}{\sqrt{14}}(1{,}3,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1{,}1{,}2)$;

b) $\frac{1}{\sqrt{11}}(1{,}3{,}1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1{,}1)$, $\frac{1}{\sqrt{66}}(4{,}1,-7)$;

c) $\frac{1}{\sqrt{14}}(1{,}2{,}3)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(3{,}0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{35}}(1,-5{,}3)$;

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}(2{,}1{,}3,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{23}}(3{,}2,-3,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{127}}(1{,}5{,}1{,}10)$.

Упражнение 3. С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта ортонормировать следующие системы векторов, используя стандартное скалярное произведение:

a) $a^1 = (2{,}1{,}0,-1)$, $a^2 = (3{,}6{,}2{,}6)$;
b) $a^1 = (2{,}1{,}2)$, $a^2 = (6{,}2{,}2)$, $a^3 = (1{,}4,-3)$;
c) $a^1 = (1{,}2{,}1{,}2)$, $a^2 = (4{,}0{,}4{,}1)$, $a^3 = (1{,}13,-1,-3)$;
d) $a^1 = (1{,}1,-1,-2)$, $a^2 = (5{,}8,-2,-3)$, $a^3 = (3{,}9{,}3{,}8)$;
e) $a^1 = (1,-1,-1{,}1)$, $a^2 = (2{,}3{,}3{,}2)$, $a^3 = (4{,}4{,}0{,}2)$,
$a^4 = (1,-5,-5,-1)$.

Ответ.

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2{,}1{,}0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{79}}(1{,}5{,}2{,}7)$;

b) $\frac{1}{3}(2{,}1{,}2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1{,}0,-1)$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1{,}4,-1)$;

c) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1{,}2{,}1{,}2)$, $\frac{1}{\sqrt{23}}(3,-2{,}3,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{117}}(2{,}7{,}0,-8)$;

d) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1{,}1,-1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{39}}(2{,}5{,}1{,}3)$;

e) $\frac{1}{2}(1,-1,-1{,}1)$, $\frac{1}{2}(1{,}1{,}1{,}1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1{,}2,-2,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1{,}1,-2)$.

Упражнение 4. Даны полиномы вещественной переменной x:

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = 1 + x, \quad Q_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k, \tag{1.5}$$

где $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Решение. Построим по полиномам Q_0, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ ортогональные в смысле скалярного произведения (1.5) полиномы $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$. Положим

$$\tilde{P}_0(x) = Q_0(x) = 1.$$

Найдем $\tilde{P}_1(x) = \alpha_{1,0}\tilde{P}_0(x) + Q_1(x)$, где

$$\alpha_{1,0} = -\frac{(Q_1,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)} = -\frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0} = -1.$$

Получим

$$\tilde{P}_1(x) = -\tilde{P}_0(x) + Q_1(x) = x.$$

Вычислим $\tilde{P}_2(x) = \alpha_{2,0}\tilde{P}_0(x) + \alpha_{2,1}\tilde{P}_1(x) + Q_2(x)$, где

$$\alpha_{2,0} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)} = -\frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0} = -1,$$
$$\alpha_{2,1} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_1)}{(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)} = -\frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0} = -1.$$

Тогда

$$\tilde{P}_2(x) = -\tilde{P}_0(x) - \tilde{P}_1(x) + Q_2(x) = x^2.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$:

$$P_0(x) = \frac{\tilde{P}_0(x)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)^{1/2}} = \frac{1}{(1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0)^{1/2}} = 1,$$

$$P_1(x) = \frac{\tilde{P}_1(x)}{(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)^{1/2}} = \frac{x}{(0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0)^{1/2}} = x,$$

$$P_2(x) = \frac{\tilde{P}_2(x)}{(\tilde{P}_2,\tilde{P}_2)^{1/2}} = \frac{x^2}{(0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1)^{1/2}} = x^2.$$

Упражнение 5. Пусть $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x - 1$, $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ — полиномы вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой (1.5).

Ответ. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2$.

Упражнение 6. Даны полиномы вещественной переменной x:

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2.$$

Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить полиномы, ортонормированные в смысле скалярного произведения, определяемого формулой

$$(P,Q) = \sum_{j=0}^{2} P(x_j)Q(x_j), \tag{1.6}$$

где $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Решение. Построим по полиномам $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ ортогональные в смысле скалярного произведения (1.6) полиномы $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$. Положим

$$\tilde{P}_0(x) = Q_0(x) = 1.$$

Найдем $\tilde{P}_1(x) = \alpha_{1,0}\tilde{P}_0(x) + Q_1(x)$, где

$$\alpha_{1,0} = -\frac{(Q_1,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)} = -\frac{-1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = 0.$$

Получим

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) = x.$$

Вычислим $\tilde{P}_2(x) = \alpha_{2,0}\tilde{P}_0(x) + \alpha_{2,1}\tilde{P}_1(x) + Q_2(x)$, где

$$\alpha_{2,0} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)} = -\frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = -\frac{2}{3},$$
$$\alpha_{2,1} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_1)}{(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)} = -\frac{1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1}{(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = 0.$$

Тогда

$$\tilde{P}_2(x) = -\frac{2}{3}\tilde{P}_0(x) + Q_2(x) = -\frac{2}{3} + x^2.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$:

$$P_0(x) = \frac{\tilde{P}_0(x)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)^{1/2}} = \frac{1}{(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$P_1(x) = \frac{\tilde{P}_1(x)}{(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)^{1/2}} = \frac{x}{((-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1)^{1/2}} = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$P_2(x) = \frac{\tilde{P}_2(x)}{(\tilde{P}_2,\tilde{P}_2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{-2/3 + x^2}{((1/3)\cdot(1/3) + (2/3)\cdot(2/3) + (1/3)\cdot(1/3))^{1/2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x^2.$$

Упражнение 7. Пусть $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = x + 1$, $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ — полиномы вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить ортонормированные полиномы в смысле скалярного произведения, определяемого формулой (1.6).

Ответ. $P_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $P_2(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x^2$.

Упражнение 8. Доказать, что определитель матрицы Грама не изменится при применении к линейно независимой системе двух векторов a^1 и a^2 процесса ортогонализации Грама — Шмидта без нормировки векторов.

Решение. Покажем, что если в результате ортогонализации (без окончательной нормировки векторов) линейно независимые векторы a^1, a^2 перейдут в векторы h^1, h^2, то определитель матрицы Грама системы векторов a^1, a^2 совпадет с определителем матрицы Грама системы векторов h^1, h^2. Определитель матрицы Грама G_1 системы векторов a^1, a^2 вычисляется по формуле

$$\det(G_1) = \begin{vmatrix} (a^1,a^1) & (a^2,a^1) \\ (a^1,a^2) & (a^2,a^2). \end{vmatrix}$$

Построим ортогональные векторы h_1, h_2:

$$\begin{aligned} h^1 &= a^1, \\ h^2 &= \alpha h^1 + a^2. \end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы Грама G_2 системы векторов h^1, h^2:

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (h^1,h^1) & (h^2,h^1) \\ (h^1,h^2) & (h^2,h^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a^1,a^1) & (\alpha a^1 + a^2,a^1) \\ (a^1,\alpha a^1 + a^2) & (\alpha a^1 + a^2,\alpha a^1 + a^2) \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения и свойствами определителя. Упростим определитель матрицы G_2 — вычтем первую строку определителя, умноженную на α, из второй строки, получим

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (a^1,a^1) & \alpha(a^1,a^1) + (a^2,a^1) \\ (a^1,a^2) & \alpha(a^1,a^2) + (a^2,a^2) \end{vmatrix}.$$

Вычтем первый столбец, умноженный на α из второго столбца:

$$\det(G_2) = \begin{vmatrix} (a^1,a^1) & (a^2,a^1) \\ (a^1,a^2) & (a^2,a^2) \end{vmatrix} = \det(G_1).$$

Напомним, что, если рассматривается пространство $\mathbb{V}_3$, то определитель матрицы G_1 равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах a^1 и a^2, а $\det(G_2)$ — квадрату площади прямоугольника, построенного на векторах h^1 и h^2. Таким образом, в результате ортогонализации Грама — Шмидта (без окончательной нормировки векторов) эта площадь остается неизменной.

1.4 Подпространства (занятие 4)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/9H1_dGruq2V2Kw

https://disk.yandex.ru/i/K3tuacYZtaunxw

https://disk.yandex.ru/i/-VYNKpjUFdbRZg

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/iiesdkL3slnHjA

https://disk.yandex.ru/i/i9RtNhXpOzlt1w

https://disk.yandex.ru/i/DT7f9I_ylgv9HQ

Учебник:

https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 8, §1–3

Множество L векторов комплексного линейного пространства $\mathbb{X}$ называется *подпространством*, если из того, что векторы x и y принадлежат L, вытекает, что вектор $\alpha x + \beta y$ при любых комплексных числах α, β также принадлежит множеству L.

Тривиальные примеры подпространств: все пространство $\mathbb{X}$ является подпространством; множество $\{0\}$, состоящее только из одного вектора, равного нулю, является подпространством. Поскольку по определению наряду с вектором x подпространству должен принадлежать и вектор $0x$, то всякое подпространство содержит нулевой вектор.

Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства $\mathbb{X}$. *Пересечением подпространств* L_1 и L_2 называется множество всех векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2. Используют обозначение: $L = L_1 \cap L_2$.

Множество L всех векторов вида $x^1 + x^2$, где $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$ называется *суммой подпространств* L_1 и L_2 и обозначается следующим образом: $L = L_1 + L_2$.

Сумма подпространств L_1 и L_2 называется *прямой*, если для любого вектора $x = x^1 + x^2 \in (L_1 + L_2)$ составляющие $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ определяются однозначно. Прямая сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается следующим образом: $L = L_1 \dotplus L_2$.

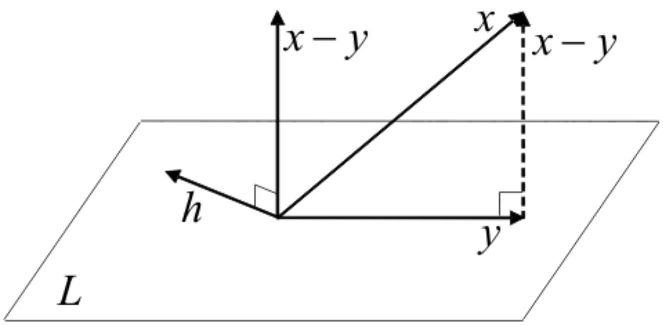


Рисунок 1.1 — Ортогональная проекция y вектора x и перпендикуляр $x - y$

Справедливы следующие критерии того, что сумма двух подпространств является прямой.

Для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $x^1 + x^2 = 0$ для $x^1 \in L_1$ и $x^2 \in L_2$ вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$.

Для того, чтобы сумма двух подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Говорят, что подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства *ортогональны* (пишут $L_1 \perp L_2$), если $(x,y) = 0$ для всех $x \in L_1$, $y \in L_2$. Сумму ортогональных подпространств будем называть *ортогональной* и обозначать через $L_1 \oplus L_2$. Ортогональная сумма двух подпространств является прямой.

Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbb{X}$. Вектор y, удовлетворяющий условию

$$(x - y,h) = 0 \quad \forall\, h \in L,$$

называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L, вектор $z = x - y$ — *перпендикуляром*, опущенным из точки x на подпространство L (см. рис. 1.1).

Если подпространство L конечномерно, а $\{e^k\}_{k=1}^m$ — его базис, то компоненты η_1, η_2, …, η_m разложения вектора $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i e^i$ по базису $\mathcal{E}_m$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i (e^i,e^k) = (x,e^k), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Матрица этой системы — матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^m$.

Упражнение 1. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы

$$e^1 = (1, 0, 1, 1), \quad e^2 = (0, 1, 1, 1).$$

Найти ортогональную проекцию y вектора

$$x = (0, 0, 0, 5)$$

на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на L.

Решение. Векторы $e^1 = (1, 0, 1, 1)$, $e^2 = (0, 1, 1, 1)$ линейно независимы, следовательно, образуют базис подпространства L. Компоненты η_1, η_2 вектора y — проекции вектора $x = (0, 0, 0, 5)$ в базисе e^1, e^2 — могут быть найдены как решение системы уравнений

$$\eta_1(e^1,e^1) + \eta_2(e^2,e^1) = (x,e^1),$$
$$\eta_1(e^1,e^2) + \eta_2(e^2,e^2) = (x,e^2).$$

Вычислим скалярные произведения:

$$(e^1,e^1) = 3, \quad (e^2,e^1) = 2, \quad (e^2,e^2) = 3,$$

$$(x,e^1) = 5, \quad (x,e^2) = 5.$$

Решением системы

$$3\eta_1 + 2\eta_2 = 5,$$
$$2\eta_1 + 3\eta_2 = 5$$

являются числа $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$. Итак,

$$y = 1 \cdot e^1 + 1 \cdot e^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

есть ортогональная проекция вектора x на подпространство L,

$$z = x - y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

есть перпендикуляр, опущенный из точки x на подпространство L.

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1e4tWK_sHpKz-Ajr9qPeu6AA3AiUAGLSU?usp=sharing

Упражнение 2. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы

$$e^1 = (1, 3, 3, 5), \quad e^2 = (1, 3, -5, -3), \quad e^3 = (1, -5, 3, -3).$$

Найти ортогональную проекцию y вектора

$$x = (2, -5, 3, 4)$$

на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на подпространство L.

Указание. $y = (0, -3{,}5{,}2)$, $z = (2, -2, -2{,}2)$. Начните выполнение упражнения с вычисления матрицы Грама системы векторов $\{e^k\}_{k=1}^3$ и убедитесь, что она невырождена, т. е. эта система является базисом подпространства L.

Упражнение 3. Пусть L — подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы $\{e^k\}_{k=1}^3$. Найти ортогональную проекцию y вектора x на подпространство L и перпендикуляр z, опущенный из точки x на подпространство L, если:

a) $x = (5, 2, -2, 2)$, $e^1 = (2, 1, 1, -1)$, $e^2 = (1, 1, 3, 0)$, $e^3 = (1, 2, 8, 1)$;
b) $x = (4, -1, -3{,}4)$, $e^1 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $e^2 = (1{,}2{,}2, -1)$, $e^3 = (1{,}0{,}0{,}3)$.

Ответ.

a) $y = 2e^1 - e^2 = (3{,}1, -1, -2)$, $z = (2{,}1, -1{,}4)$;

b) $y = 3e^1 - 2e^2 = (1, -1, -1{,}5)$, $z = (3{,}0, -2, -1)$.

Упражнение 4. Пусть L — множество всех матриц размера $m \times n$ с комплексными элементами и нулевой первой строкой. Доказать, что L является подпространством пространства прямоугольных матриц $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Решение. Действительно, пусть матрицы A, $B \in L$, т. е. их первая строка нулевая. Тогда при любых α, $\beta \in \mathbb{C}$ первая строка матрицы $C = \alpha A + \beta B$ также состоит из нулей, т. е. $C \in L$.

Упражнение 5. Образуют ли подпространство пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$a)$ все матрицы A порядка n, у которых $\mathrm{tr}A = 0$;
$b)$ все симметричные матрицы порядка n;
$c)$ все кососимметричные матрицы порядка n;
$d)$ все невырожденные матрицы порядка n;
$e)$ все верхние (нижние) треугольные матрицы порядка n;
$f)$ все матрицы порядка n с нулевой главной диагональю?

Указание. $a)$ Да, $b)$ да, $c)$ да, $d)$ нет, $e)$ да, $f)$ да. Использовать определение подпространства линейного пространства.

Упражнение 6. Доказать, что пространство квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ является прямой суммой подпространства симметричных матриц и подпространства кососимметричных матриц порядка n.

Указание. Проверьте, что пересечение подпространств есть $\{0\}$, а это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы сумма двух подпространств была прямой.

Упражнение 7. Образуют ли подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ все векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых:
$a)$ являются целыми числами;
$b)$ являются четными числами;
$c)$ являются нечетными числами;
$d)$ удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;
$e)$ удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$;
$f)$ удовлетворяют условию $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$?

Указание. $a)$ Нет, $b)$ нет, $c)$ нет, $d)$ да, $e)$ нет, $f)$ да. Использовать определение подпространства линейного пространства.

Упражнение 8. Пусть L_1 — подпространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов, все компоненты которых равны между собой. Пусть $L_2 \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство векторов, сумма компонент которых равна нулю. Доказать, что сумма подпространств L_1 и L_2 является прямой.

Указание. Проверьте, что в рассматриваемом случае $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, а это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы сумма двух подпространств L_1 и L_2 была прямой.

Упражнение 9. Образуют ли подпространство пространства $\mathbb{P}_n$ многочленов с вещественными коэффициентами все полиномы $p(t) \in \mathbb{P}_n$, для которых выполняются следующие условия:

a) $p(1) = 0$;

b) $p(-t) = p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;

c) $p(-t) = -p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;

d) $p(1) = 1$;

e) $2p(0) = 3p(1)$;

f) $p(\alpha t) = \alpha p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — фиксированное число?

Указание. *a*) Да, *b*) да, *c*) да, *d*) нет, *e*) да, *f*) да. Использовать определение подпространства линейного пространства.

Упражнение 10. Доказать, что пространство $\mathbb{P}_n$ является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

Указание. Проверьте, что пересечение подпространств есть $\{0\}$.

Глава 2. Линейные операторы и матрицы

2.1 Линейные операторы (занятие 5)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео: https://disk.yandex.ru/i/2sLg7mwq9B6vFA
Презентация: https://disk.yandex.ru/i/Kli7_xFTPChNIQ
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §1

Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — линейные пространства. Говорят, что задано *отображение* φ пространства $\mathbb{X}$ в пространство $\mathbb{Y}$ (пишут $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$), если каждому вектору x из $\mathbb{X}$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x)$ из $\mathbb{Y}$. Говорят также в этом случае, что на пространстве $\mathbb{X}$ задана *функция* φ со значениями в пространстве $\mathbb{Y}$. Подчеркнем, что при этом, вообще говоря, не каждый вектор из $\mathbb{Y}$ должен быть результатом отображения некоторого вектора x из $\mathbb{X}$.

Отображение φ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и любых чисел α, β выполняется равенство

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y). \tag{2.1}$$

Линейные отображения обычно называют *линейными операторами* (или просто операторами) и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут. Так, равенство (2.1) применительно к оператору $\mathcal{A}$ запишется в виде

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y. \tag{2.2}$$

Если оператор действует из пространства $\mathbb{X}$ в пространство $\mathbb{X}$, то говорят, что он действует в пространстве $\mathbb{X}$ или является *преобразованием* пространства $\mathbb{X}$.

Отображение $0 : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, которое каждый вектор $x \in \mathbb{X}$ переводит в нулевой вектор $0 \in \mathbb{Y}$, является линейным и называется *нулевым оператором.*

Отображение $I : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, которое оставляет без изменений все векторы пространства $\mathbb{X}$, является линейным и называется *единичным (тождественным) оператором.*

Из определения линейного отображения вытекает, что $\mathcal{A}0 = 0$ для любого оператора $\mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть линейное пространство $\mathbb{X}$ есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2. Тогда каждый вектор $x \in \mathbb{X}$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1, \; x^2 \in L_2,$$

причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{P} : \mathbb{X} \to L_1$, полагая

$$\mathcal{P}x = x^1. \tag{2.3}$$

Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть *оператор проектирования* пространства $\mathbb{X}$ на подпространство L_1 (параллельно подпространству L_2). Если $\mathbb{X}$ — евклидово пространство, и оно представлено как ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2, то оператор $\mathcal{P}$ называют *оператором ортогонального проектирования.* Доказать, что оператор $\mathcal{P}$ линеен.

Решение. Пусть x, $y \in \mathbb{X}$ и

$$x = x^1 + x^2, \quad y = y^1 + y^2, \quad x^1, y^1 \in L_1, \quad x^2, y^2 \in L_2.$$

Тогда для любых α, $\beta \in C$, очевидно, справедливо равенство

$$\alpha x + \beta y = \alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

Вследствие того, что L_1 и L_2 есть подпространства, получаем, что

$$\alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y \in L_1, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 \in L_2,$$

поэтому

$$\mathcal{P}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{P}x + \beta \mathcal{P}y.$$

Это и означает, что $\mathcal{P}$ — линейный оператор.

Упражнение 2. Выяснить геометрический смысл ортогонального проектирования пространства $\mathbb{V}_3$ относительно двумерного подпространства π.

Решение. Пусть π — плоскость, проходящая через начало координат, натянутая на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2:

$$\pi = \{x \in \mathbb{V}_3 : x = x_1 e^1 + x_2 e^2, \, x_1, x_2 \in R\}.$$

Обозначим через e^3 некоторый вектор, ортогональный плоскости π, и проведем через начало координат прямую l в направлении вектора e^3:

$$l = \{x \in \mathbb{V}_3 : x = x_3 e^3,\ x_3 \in R\}.$$

Тогда $\mathbb{V}_3 = \pi \oplus l$, и каждому вектору

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$$

оператор проектирования $\mathcal{P}$ ставит в соответствие вектор

$$\mathcal{P}x = x_1 e^1 + x_2 e^2.$$

Сделайте рисунок.

Упражнение 3. Пусть линейное пространство $\mathbb{X}$ есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2. Тогда каждый вектор $x \in \mathbb{X}$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2 \in L_2,$$

причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{R} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, полагая

$$\mathcal{R}x = x^1 - x^2. \tag{2.4}$$

Говорят, что оператор $\mathcal{R}$ есть *оператор отражения* пространства $\mathbb{X}$ относительно L_1 параллельно L_2. Доказать, что оператор $\mathcal{R}$ линеен.

Решение. Пусть $x,\ y \in \mathbb{X}$ и

$$x = x^1 + x^2, \quad y = y^1 + y^2, \quad x^1, y^1 \in L_1, \quad x^2, y^2 \in L_2.$$

Тогда для любых α, $\beta \in C$ в силу линейности пространства $\mathbb{X}$ имеем

$$\alpha\mathcal{R}x = \alpha(x^1 - x^2) = \alpha x^1 - \alpha x^2,$$

$$\beta\mathcal{R}y = \beta(y^1 - y^2) = \beta y^1 - \beta y^2.$$

Следовательно,

$$\alpha\mathcal{R}x + \beta\mathcal{R}y = (\alpha x^1 + \beta y^1) - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

С другой стороны,

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x^1 + x^2) + \beta(y^1 + y^2) = (\alpha x^1 + \beta y^1) + (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Вследствие того, что L_1 и L_2 есть подпространства, получаем, что

$$\alpha x^1 + \beta y^1 \in L_1, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 \in L_2,$$

поэтому

$$\mathcal{R}(\alpha x + \beta y) = (\alpha x^1 + \beta y^1) - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Таким образом, $\mathcal{R}$ — линейный оператор:

$$\mathcal{R}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{R} x + \beta \mathcal{R} y.$$

Упражнение 4. Выяснить геометрический смысл ортогонального отражения пространства $\mathbb{V}_3$ относительно двумерного подпространства π.

Решение. Пусть π — плоскость, проходящая через начало координат, натянутая на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2:

$$\pi = \{x \in \mathbb{V}_3 : x = x_1 e^1 + x_2 e^2,\, x_1, x_2 \in R\}.$$

Обозначим через e^3 некоторый вектор, ортогональный плоскости π, и проведем через начало координат прямую l в направлении вектора e^3:

$$l = \{x \in \mathbb{V}_3 : x = x_3 e^3,\, x_3 \in R\}.$$

Тогда $\mathbb{V}_3 = \pi \oplus l$, и каждому вектору

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3$$

оператор отражения $\mathcal{R}$ ставит в соответствие вектор

$$\mathcal{R} x = x_1 e^1 + x_2 e^2 - x_3 e^3.$$

Сделайте рисунок.

Упражнение 5. Доказать, что любой линейный оператор $\mathcal{A}$:

a) сохраняет линейные комбинации, т. е. переводит всякую линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$\mathcal{A}\left(x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m\right) = x_1 \mathcal{A} a^1 + x_2 \mathcal{A} a^2 + \cdots + x_m \mathcal{A} a^m,$$

где $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m \in C$; $\{a^i\}_{i=1}^m$ — система векторов пространства $\mathbb{X}$.

b) сохраняет линейную зависимость, т. е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

a) **Указание**. Применить равенство (2.2) определения линейного оператора $m-1$ раз.

b) **Решение**. Пусть $\{a^i\}_{i=1}^m$ — линейно зависимая система, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_m a^m = 0.$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{A}$, получим

$$x_1 \mathcal{A} a^1 + x_2 \mathcal{A} a^2 + \cdots + x_m \mathcal{A} a^m = 0,$$

т. е. система образов $\{\mathcal{A} a^i\}_{i=1}^m$ линейно зависима в пространстве $\mathbb{Y}$.

Упражнение 6. Верно ли утверждение: любая линейно независимая система векторов переводится произвольным линейным оператором в некоторую линейно независимую систему?

Решение. Утверждение неверно. Достаточно привести контрпример. Действительно, нулевой оператор линеен, но он любую линейно независимую систему переводит в систему, состоящую из одного нулевого вектора, следовательно, линейно зависимую систему.

Упражнение 7. Верно ли утверждение: если две системы векторов $\{c^k\}_{k=1}^m$ и $\{b^k\}_{k=1}^p$ эквивалентны, то для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ эквивалентны системы векторов $\{\mathcal{A}c^k\}_{k=1}^m$ и $\{\mathcal{A}b^k\}_{k=1}^p$?

Решение. Пусть системы векторов $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{B}_p$ эквивалентны, т. е. существуют такие матрицы X и Y, что

$$\mathcal{C}_m = \mathcal{B}_p X, \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_m Y. \tag{2.5}$$

Обозначим $\mathcal{A}\mathcal{C}_m = \{\mathcal{A}c^k\}_{k=1}^m$, $\mathcal{A}\mathcal{B}_p = \{\mathcal{A}b^k\}_{k=1}^p$. Из (2.5) заключаем, что

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_m = \mathcal{A}\mathcal{B}_p X, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}_p = \mathcal{A}\mathcal{C}_m Y,$$

а это и означает, что системы $\mathcal{A}\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}_p$ эквивалентны

Упражнение 8. В комплексном линейном пространстве $\mathbb{X}_n$ фиксирован базис e^1, e^2, …, e^n. Доказать, что соответствие, относящее каждому вектору x пространства его l-ю координату в этом базисе, будет линейным оператором, действующим из $\mathbb{X}_n$ в C (линейный оператор, действующий из $\mathbb{X}$ в C называется *линейным функционалом.*)

Указание. Пусть $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e^j$. Тогда $\mathcal{A}x = \xi_l$. Убедитесь в справедливости равенства (2.2).

Упражнение 9. Доказать, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном пространстве, сводится к умножению всех векторов пространства на фиксированное (для данного оператора) число.

Решение. Для любого $x \in \mathbb{X}_1$ имеем $x = \xi e$, где e — фиксированный ненулевой элемент (базис) пространства $\mathbb{X}_1$, а ξ — некоторое число. В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\xi e) = \xi \mathcal{A}e$. Обозначим $f = \mathcal{A}e \in \mathbb{X}_1$. Ясно, что существует некоторое ненулевое число α такое, что $f = \alpha e$. Тогда справедливы равенства $\mathcal{A}x = \xi\alpha e = \alpha\xi e = \alpha x$.

Упражнение 10. Выяснить, является ли линейным преобразование трехмерного евклидового пространства $\mathcal{A} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$, определяемое равенством

$$\mathcal{A}x = a \quad \forall\, x \in \mathbb{V}_3,$$

где a — некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{V}_3$. Поясним, что каждому вектору $x \in \mathbb{V}_3$ оператор $\mathcal{A}$ ставит в соответствие один и тот же вектор $a \in \mathbb{V}_3$.

Решение. Для любых x, $y \in \mathbb{V}_3$ и любого $\alpha \in R$ имеем

$$\mathcal{A}(x + y) = a, \quad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha a.$$

Следовательно, если $a = 0$, то условие (2.2) выполняется, и $\mathcal{A}$ является линейным оператором. При любом $a \neq 0$ условие (2.2) не выполняется.

Упражнение 11. Выяснить, является ли линейным преобразование пространства $\mathbb{R}^2$, которое задается следующим образом:

$$\mathcal{A}x = (x_1 + x_2, x_2 + 1), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение. Это преобразование не является линейным, так как оно нулевой вектор (0,0) переводит вектор (0,1), отличный от нуля, а любой линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ переводит нулевой элемент пространства $\mathbb{X}$ в $0 \in \mathbb{Y}$.

Упражнение 12. Найти, какие из приведенных ниже преобразований пространства $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами являются линейными операторами, действующими в $\mathbb{P}_n$. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный многочлен $f(t)$.

a) $\mathcal{A}f(t) = f(-t)$,
b) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1)$,
c) $\mathcal{A}f(t) = f'(t)$,
d) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - f(t)$,
e) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - g(t)$, где $g(t)$ — фиксированный ненулевой многочлен,
f) $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$.

a), *b*) **Ответ.** Линейный оператор.

c) **Решение.** Это линейный оператор. Действительно, пусть

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n.$$

Тогда

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1},$$

и для любых многочленов $f,\ g \in \mathbb{P}_n$ имеем (коэффициенты полинома g обозначены через b_k):

$$\mathcal{A}(f+g) = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)t + \cdots + n(a_n + b_n)t^{n-1} =$$

$$= \left(a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}\right) + \left(b_1 + 2b_2 t + \cdots + n b_n t^{n-1}\right) = \mathcal{A}f + \mathcal{A}g.$$

Далее, для любых $f \in \mathbb{P}_n$ и $\alpha \in R$

$$\mathcal{A}(\alpha f) = (\alpha a_1) + 2(\alpha a_2)t + \cdots + n(\alpha a_n)t^{n-1} =$$

$$= \alpha \left(a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}\right) = \alpha \mathcal{A} f.$$

Таким образом преобразование $\mathcal{A}$ является линейным оператором в пространстве $\mathbb{P}_n$. Его называют *оператором дифференцирования* и обычно обозначают буквой $\mathcal{D}$. Заметим, что каждому элементу пространства $\mathbb{P}_n$ оператор $\mathcal{D}$ ставит в соответствие полином из $\mathbb{P}_{n-1}$. Поэтому можно считать, что

$$\mathcal{D} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}. \tag{2.6}$$

d) **Ответ**. Линейный оператор.

e) **Ответ**. Не является линейным оператором.

f) **Решение**. Оператор $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$ действует из пространства $\mathbb{P}_n$ в пространство $\mathbb{P}_{n+1}$, поэтому не является линейным преобразованием пространства $\mathbb{P}_n$. Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$ является линейным.

Упражнение 13. Для каждого из следующих операторов в пространстве $\mathbb{V}_3$ определить, является ли этот оператор линейным. Все операторы описываются своим действием на произвольный вектор x. При этом a и b обозначают фиксированные векторы пространства $\mathbb{V}_3$.

a) $\mathcal{A}x = x + a$.

b) $\mathcal{A}x = \gamma x$, где γ — фиксированное вещественное число.

c) $\mathcal{A}x = (x,a)a$.

d) $\mathcal{A}x = (a,x)b$.

e) $\mathcal{A}x = (a,x)x$.

f) $\mathcal{A}x = [x,a]$.

Ответ.

a) Линейный оператор при $a = 0$, нелинейный — при $a \neq 0$.

b)–d) Линейный оператор.

e) Линейный оператор при $a = 0$, нелинейный — при $a \neq 0$.

f) Линейный оператор.

Упражнение 14. Проверить, какие из указанных ниже отображений φ пространства $\mathbb{V}_3$ в пространство R являются линейными. Все отображения описываются своим действием на произвольный вектор x. При этом a и b обозначают фиксированные векторы пространства $\mathbb{V}_3$.

a) $\varphi(x) = \gamma$, где γ — фиксированное вещественное число.

b) $\varphi(x) = (x,a)$.

c) $\varphi(x) = \cos(x,a)$.

d) $\varphi(x) = (x,x)$.

e) $\varphi(x) = ([a,x],b)$.

f) $\varphi(x) = (x,[a,x])$.

a) **Решение**. Любому вектору $x \in \mathbb{V}_3$ отображение $\varphi : \mathbb{V}_3 \to R$ ставит в соответствие фиксированное число $\gamma \in R$. Следовательно, для любых x, $y \in R$ и любых x, $y \in \mathbb{V}_3$ имеем

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \gamma.$$

С другой стороны,

$$\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = (\alpha + \beta)\gamma.$$

Из двух последних равенств заключаем, что, если $\gamma = 0$, то условие (2.1) выполняется, и φ — линейное отображение. При любом $\gamma \neq 0$ отображение φ не является линейным.

Ответ.

b) Линейное отображение.

c), d) Не является линейным отображением.

e) Линейное отображение.

f) Не является линейным отображением при $a \neq 0$, линейное — при $a = 0$.

Упражнение 15. Выяснить, являются ли линейными следующие отображения $\mathcal{A}$ пространства вещественных квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в пространство R:

a) $\mathcal{A}X = \mathrm{tr}X$,

b) $\mathcal{A}X = \det X$.

Решение.

a) Отображение $\mathcal{A}$ является линейным, так как в силу определения следа матрицы:

$$\mathcal{A}(X+Y) = \mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y,$$

$$\mathcal{A}(\alpha X) = \mathrm{tr}(\alpha X) = \alpha \mathrm{tr}X = \alpha\mathcal{A}X.$$

b) Отображение $\mathcal{A}$ является линейным лишь в случае $n = 1$, так как для любого $\alpha \in R$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}(\alpha X) = \det(\alpha X) = \alpha^n \det X = \alpha^n \mathcal{A}X,$$

что при $n \geqslant 2$ противоречит равенству $\mathcal{A}(\alpha X) = \alpha\mathcal{A}X$, которому должен удовлетворять любой линейный оператор.

Упражнение 16. Выяснить, какие из следующих преобразований трехмерного арифметического пространства являются линейными. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор x при этом компоненты вектора-образа заданы как функции компонент вектора x.

a) $\mathcal{A}x = \big(x_1, x_2, (x_3)^2\big)$,

b) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2)$,

c) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2 - 1)$,

d) $\mathcal{A}x = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$.

Ответ.

a) Не является линейным оператором.

b) Линейный оператор.

c) Не является линейным оператором.

d) Линейный оператор.

2.2 Матрица оператора (занятие 6)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/bLhiwQ0HfBHrlA

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/VbM96RDHQaw5Xg

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §6

Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ — линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbb{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в $\mathbb{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$. Представим каждый вектор $\mathcal{A}e^i$, где $i = 1,2,\ldots,n$, в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^1 = a_{11}^{(eq)} q^1 + a_{21}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{m1}^{(eq)} q^m,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a_{12}^{(eq)} q^1 + a_{22}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{m2}^{(eq)} q^m,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{A}e^n = a_{1n}^{(eq)} q^1 + a_{2n}^{(eq)} q^2 + \cdots + a_{mn}^{(eq)} q^m.$$

Построим матрицу, i-й столбец которой образуют коэффициенты разложения вектора $\mathcal{A}e^i$ по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_{eq} называют *матрицей оператора* $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

Рассмотрим частный случай линейного преобразования пространства $\mathbb{X}_n$. Матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ определяется заданием базиса пространства $\mathbb{X}_n$. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$, $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — базисы этого пространства, A_e, $A_{\widetilde{e}}$ — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах, T — матрица перехода от одного базиса к другому:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Тогда

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T. \tag{2.7}$$

Упражнение 1. Пусть $\mathbb{P}_n$ — линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$$

для любого $p_n \in \mathbb{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Решение. Фиксируем в $\mathbb{P}_n$ базис $e^k = x^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$\mathcal{A}e^0 = a \cdot 1' + b \cdot 1 = b = be^0,$$

$$\mathcal{A}e^1 = ax' + bx = a + bx = ae^0 + be^1,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a(x^2)' + bx^2 = a2x + bx^2 = 2ae^1 + be^2,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{A}e^n = a(x^n)' + bx^n = anx^{n-1} + bx^n = nae^{n-1} + be^n.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{pmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 2a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Упражнение 2. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$, описанного в предыдущем примере, полагая при этом $b = 0$, трактуя возникающий оператор как оператор из $\mathbb{P}_n$ в $\mathbb{P}_{n-1}$ и принимая за базис пространства $\mathbb{P}_k$ базис Тейлора $\{1, (x-c), \ldots, (x-c)^k\}$, c — произвольное вещественное число.

Ответ. $A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na \end{pmatrix}.$

Упражнение 3. Определим в пространстве $\mathbb{C}^n$ так называемый *оператор* $\mathcal{T}$ *циклического сдвига*, полагая $\mathcal{T}x = (x_1,x_2\ldots,x_{n-1},x_0)$ для каждого вектора $x = (x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Построить матрицу этого оператора в *базисе Фурье* $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, где

$$\varphi_j^k = q_k^j, \quad j = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

есть корни степени k из единицы, i — мнимая единица.

Решение. Имеем

$$\varphi^0 = (1,1,\ldots,1), \quad \mathcal{T}\varphi^0 = (1,1,\ldots,1) = \varphi^0 = q_0\varphi^0,$$

$$\varphi^1 = (1,q_1^1,\ldots,q_1^{n-1}), \quad \mathcal{T}\varphi^1 = (q_1,\ldots,q_1^{n-1},1) = q_1\varphi^1, \ \cdots,$$

$$\varphi^{n-1} = (1,q_{n-1}^1,\ldots,q_{n-1}^{n-1}), \quad \mathcal{T}\varphi^{n-1} = (q_{n-1},\ldots,q_{n-1}^{n-1},1) = q_{n-1}\varphi^{n-1}.$$

Следовательно,

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Пусть $\mathbb{T}_n$ — линейное пространство функций вида

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число, a_0, a_k, b_k, $k = 1,\ldots,n$ — произвольные вещественные числа, x может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Показать, что функции

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx$$

образуют базис этого пространства. Построить в этом базисе матрицу *оператора дифференцирования*, определенного равенством

$$\mathcal{D}f_n(x) = f_n'(x), \quad f_n \in \mathbb{T}_n.$$

Решение. Функции

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

образуют базис пространства $\mathbb{T}_n$. Действительно, любая функция из этого пространства является их линейной комбинацией, а сами эти функции линейно независимы, более того, они ортогональны в смысле скалярного произведения

$$(f,g) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad f,g \in \mathbb{T}_n.$$

Убедимся в этом. Пусть $k \neq l$. Положим $t = k + l$, $p = k - l$. Вычислим скалярное произведение

$$(\cos kx, \sin lx) = \int\limits_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin tx dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin px dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\cos tx \,\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{p}\cos px \,\Bigg|_0^{2\pi}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}(1-1) + \frac{1}{p}(1-1)\right) = 0.$$

Аналогично получим $(\cos kx, \cos lx) = (\sin kx, \sin lx) = 0$. Теперь построим матрицу оператора дифференцирования в этом базисе. Обозначим

$$e^0 = 1,\ e^1 = \cos x,\ e^{-1} = \sin x,\ \ldots,\ e^n = \cos nx,\ e^{-n} = \sin nx.$$

Имеем

$$\mathcal{D}e^0 = 0,$$

$$\mathcal{D}e^1 = -\sin x = -e^{-1}, \quad \mathcal{D}e^{-1} = \cos x = e^1,\ \ldots,$$

$$\mathcal{D}e^n = -n\sin nx = -ne^{-n}, \quad De^{-n} = n\cos nx = ne^n.$$

Итак,

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Здесь нумерация базисных функций, строк и столбцов матрицы начинается с числа $-n$ и заканчивается n.

Упражнение 5. Определим оператор $\mathcal{K} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$ по формуле

$$\mathcal{K}p_n(x) = \int\limits_0^x p_n(t)dt, \quad p_n \in \mathbb{P}_n.$$

Построить матрицу оператора $\mathcal{K}$, принимая $\{1, x, \ldots, x^k\}$ за базис в пространстве $\mathbb{P}_k$.

Решение. Обозначим через $\mathcal{E}_{n+1} = \{1,x,\ldots,x^n\}$ — базис в пространстве $\mathbb{P}_n$, через $\mathcal{Q}_{n+2} = \{1,x,\ldots,x^{n+1}\}$ — базис в пространстве $\mathbb{P}_{n+1}$. Построим матрицу оператора $\mathcal{K}$ в этой паре базисов. Имеем

$$\mathcal{K}1 = \int\limits_0^x 1dt = t\Big|_0^x = x,$$

$$\mathcal{K}x = \int\limits_0^x tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}, \ \ldots,$$

$$\mathcal{K}x^n = \int\limits_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Следовательно,

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n+1) \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6. Определим, так называемый, *разностный оператор* Δ_h, действующий из $\mathbb{Q}_n$ в $\mathbb{Q}_{n-1}$ по формуле

$$\Delta_h q_n(z) = q_n(z+h) - q_n(z), \quad q_n \in \mathbb{Q}_n,$$

где $\mathbb{Q}_k$ — пространство полиномов степени не выше k с комплексными коэффициентами, h — произвольным образом фиксированное комплексное число. Построить матрицу оператора Δ_h, принимая $\{1, z, \ldots, z^k\}$ за базис в пространстве $\mathbb{Q}_k$.

Решение. Обозначим через $\mathcal{E}_{n+1} = \{1,z,\ldots,z^n\}$ — базис в пространстве $\mathbb{Q}_n$, через $\mathcal{Q}_n = \{1,z,\ldots,z^{n-1}\}$ — базис в пространстве $\mathbb{Q}_{n-1}$. Имеем

$$\Delta_h 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\Delta_h z = z + h - z = h \cdot 1,$$

$$\Delta_h z^2 = (z+h)^2 - z^2 = h^2 \cdot 1 + 2h \cdot z,$$

$$\ldots,$$

$$\Delta_h z^n = (h+z)^n - z^n = h^n \left(1 + \frac{z}{h}\right)^n - z^n =$$

$$= h^n \left[1 + n\frac{z}{h} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} + 1\left(\frac{z}{h}\right)^n\right] - z^n =$$

$$= h^n \cdot 1 + nh^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}z^2 + \cdots + nhz^{n-1}.$$

Следовательно,

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & h & h^2 & \cdots & h^n \\ 0 & 0 & 2h & \cdots & nh^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n(n-1)h^{n-2}/2! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & nh \end{pmatrix}.$$

Упражнение 7. Пусть пространство $\mathbb{X}_n$ является прямой суммой подпространств L_1 и L_2. Базис e^1, e^2, …, e^n всего пространства $\mathbb{X}_n$ выбран таким образом, что векторы e^1, e^2, …, e^k образуют базис подпространства L_1, а векторы e^{k+1}, e^{k+2}, …, e^n — базис подпространства L_2. Составить матрицы следующих операторов в базисе e^1, e^2, …, e^n.

a) Оператора $\mathcal{P}$ проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, определенного равенством (2.3).

b) Оператора $\mathcal{R}$ отражения относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2, определенного равенством (2.4).

Ответ. a) Первые k элементов главной диагонали матрицы равны 1, все остальные элементы равны 0:

$$P_e = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

b) Матрица диагональная, первые k элементов ее главной диагонали равны 1, остальные элементы главной диагонали равны -1:

$$R_e = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0-1 \end{pmatrix}. \qquad (2.11)$$

Упражнение 8. Пусть в пространстве $\mathbb{V}_3$ задана прямоугольная декартова система координат. В декартовом базисе i^1, i^2, i^3 найти матрицы следующих операторов.

a) Оператора $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования на ось x_2.

b) Оператора $\mathcal{R}$ ортогонального отражения относительно координатной плоскости $x_1 = 0$.

Указание. a) Представить $\mathbb{V}_3$ в виде

$$\mathbb{V}_3 = L_1 \oplus L_2,$$

где L_1 — ось x_2 с базисом i^2, а подпространство L_2 есть координатная плоскость x_1x_3 с базисом i^1, i^3. Должна получится матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 9. Пусть в пространстве $\mathbb{V}_3$ задана прямоугольная декартова система координат. Для линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$, действующего по правилу

$$\mathcal{A}x = [x,a],$$

где $a = (a_1,a_2,a_3)$ — фиксированный ненулевой вектор, найти матрицу в декартовом базисе i^1, i^2, i^3.

Указание. Использовать формулу $[b,a] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

Ответ. Матрица оператора $\mathcal{A}x = [x,a]$ в декартовом базисе имеет следующий вид:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Упражнение 10. Построить матрицу оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ умножения квадратных матриц второго порядка слева на заданную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{E}_4$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{A}E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + cE_3,$$

$$\mathcal{A}E_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_2 + cE_4,$$

$$\mathcal{A}E_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_1 + dE_3,$$

$$\mathcal{A}E_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_2 + dE_4.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathcal{E}_4$ имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Упражнение 11. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в пространство $\mathbb{R}$ по правилу $\mathcal{A}X = \mathrm{tr}X$. В пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ использовать базис (2.13), а в пространстве $\mathbb{R}$ — базис, состоящий из одного вектора $q^1 = 1$.

Решение. Имеем

$$\mathcal{A}E_1 = 1 = 1q^1, \quad \mathcal{A}E_2 = 0 = 0q^1, \quad \mathcal{A}E_3 = 0 = 0q^1, \quad \mathcal{A}E_4 = 1 = 1q^1,$$

следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 12. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в пространстве $\mathbb{P}_2$, определенный равенством $\mathcal{D}f = f'$. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{D}$ в следующем базисе этого пространства: $1 + t$, $t + 2t^2$, $3t^2 - 1$.

Решение. Обозначим $\mathcal{E}_n = \{1,t,t^2\}$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{1 + t,t + 2t^2,3t^2 - 1\}$. Тогда имеем $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу D_e. Вычислим производные от элементов стандартного базиса $\mathcal{E}_n$:

$$\mathcal{D}1 = 0, \quad \mathcal{D}t = 1, \quad \mathcal{D}t^2 = 2t,$$

следовательно, $D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь вычислим матрицу T^{-1}. В данном случае это удобно сделать следующим способом. Обозначим $X = T^{-1}$ и найдем X из матричного уравнения $TX = I$. Столбцы матрицы X являются решениями систем уравнений с матрицей T и векторами правой части, являющимися соответствующими столбцами матрицы I. Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью обратного хода метода Гаусса получаем

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, воспользуемся формулой (2.7):

$$D_e T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{\widetilde{e}} = T^{-1} D_e T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 13. Оператор $\mathcal{A}$ в базисе e^1, e^2, e^3, e^4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе e^1, e^1+e^2, $e^1+e^2+e^3$, $e^1+e^2+e^3+e^4$.

Указание. Построить матрицу перехода от исходного базиса к новому. Вычислить к ней обратную и воспользоваться формулой (2.7).

Ответ. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

Покажем, как выполнить это упражнение в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1FZKrDjLnISjqh5iKtuE1fJ9EbKUPx1KJ?usp=sharing

Упражнение 14. Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $x = (x_1,x_2,x_3)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Построить матрицу этого оператора: в естественном базисе i^1, i^2, i^3 и в базисе $e^1 = i^1 + i^2$, $e^2 = i^2 + i^3$, $e^3 = i^1 + i^3$.

a) $\mathcal{A}x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$,

b) $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$,

c) $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

Указание. Для того, чтобы построить матрицу A_i, надо представить векторы $\mathcal{A}i^1$, $\mathcal{A}i^2$, $\mathcal{A}i^3$ в виде разложения по базису i^1, i^2, i^3. Далее можно действовать двумя способами.

Первый способ. Чтобы найти первый столбец матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e^1 = i^1 + i^2$, $e^2 = i^2 + i^3$, $e^3 = i^1 + i^3$, необходимо решить относительно элементов a_{11}, a_{21}, a_{31} этого столбца следующую систему трех линейных алгебраических уравнений: $\mathcal{A}e^1 = \mathcal{A}(1,1,0) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,1,1) + a_{31}(1,0,1)$. Элементы остальных столбцов матрицы оператора $\mathcal{A}$ находятся аналогично.

Второй способ. Построить матрицу перехода от базиса i^1, i^2, i^3 к базису $e^1 = i^1 + i^2$, $e^2 = i^2 + i^3$, $e^3 = i^1 + i^3$. Вычислить к ней обратную и воспользоваться формулой (2.7).

Ответ. *a*) $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) $A_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Покажем, как выполнить упражнение 14 *b*) в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1ZC3iJErW7S-PRL979GyvWIp1VLAMOELT?usp=sharing

2.3 Образ оператора, ядро оператора, ранг матрицы (занятие 7)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/Bj2iy0ybq4U_mg
https://disk.yandex.ru/i/vhp415OJblCLAA
https://disk.yandex.ru/i/laB4M6gc78xh9g
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/IfipgqWjoNx9WA
https://disk.yandex.ru/i/8C-XWaYVGLjkjg
https://disk.yandex.ru/i/dKP22MWnO4jP7w
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §5, 9, 10

Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ — линейный оператор. Множество всех векторов y из пространства $\mathbb{Y}$ таких, что $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in \mathbb{X}$, называется *областью значений или образом* оператора и обозначается через $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Это множество — линейное подпространство пространства $\mathbb{Y}$. Размерность подпространства $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ называется *рангом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

Множество всех векторов $x \in \mathbb{X}$ таких, что $\mathcal{A}x = 0$, называется *ядром* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Это множество — линейное подпространство пространства $\mathbb{X}$. Размерность подпространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ называется *дефектом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathrm{def}(\mathcal{A})$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) + \mathrm{def}(\mathcal{A}) = n. \tag{2.14}$$

Пусть в пространстве $\mathbb{X}$ дана некоторая система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема векторов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых векторов, называется *максимальной*, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе. Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же количество векторов. *Рангом системы векторов* называется количество векторов ее максимальной линейно независимой подсистемы.

Пусть $A(m,n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем *рангом матрицы* $A(m,n)$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\operatorname{rank}(A)$.

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Для любой матрицы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы ее столбцов.

Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$, A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно произвольным образом фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{X}_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{Y}_m$. Тогда $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(A_{eq})$. Ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

Упражнение 1. Найти максимальную линейно независимую подсистему следующей системы векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Найти базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4.

Решение. Рассмотрим систему векторов a^1, a^2, a^3, a^4 пространства $\mathbb{R}^3$. Векторы a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители, составленные из компонент векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соответственно, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.16}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.17}$$

Следовательно, векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единственная максимальная линейно независимая подсистема. Таким же свойством обладают, например, пары векторов a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар линейно независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой системы векторов равен двум.

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ — линейный оператор. Обозначим через e^1, …, e^n базис пространства $\mathbb{X}_n$. Доказать, что

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}e^1,\ldots,\mathcal{A}e^n), \tag{2.18}$$

где через $L(\mathcal{A}e^1,\ldots,\mathcal{A}e^n)$ обозначено подпространство пространства $\mathbb{Y}_m$, натянутое на векторы $\mathcal{A}e^1$, …, $\mathcal{A}e^n$.

Решение. Пусть $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Тогда, по определению, $y = \mathcal{A}x$ для некоторого вектора $x \in \mathbb{X}_n$. Разложим вектор x по базису e^1, …, e^n, получим

$$y = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\mathcal{A}e^i\right) \in L(\mathcal{A}e^1,\ldots,\mathcal{A}e^n).$$

С другой стороны, если $y \in L(\mathcal{A}e^1,\ldots,\mathcal{A}e^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\mathcal{A}e^i\right) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \mathcal{A}x,$$

где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т. е. $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Значит, $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}e^1,\ldots,\mathcal{A}e^n)$.

Упражнение 3. Для следующих линейных преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ построить базис образа, найти ранг и дефект:

a) $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$,

b) $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$,

c) $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

Указание. Построить векторы $\mathcal{A}i^1$, $\mathcal{A}i^2$, $\mathcal{A}i^3$. Найти среди них максимальную линейно независимую подсистему и воспользоваться результатом предыдущего упражнения. Дефект вычислить по формуле (2.14).

Ответ. *a*) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = 1$, базис образа — $(1,1,1)$; $\mathrm{def}(\mathcal{A}) = 2$.

b) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = 2$, базис образа — $(2,1,1)$, $(-1,-2,1)$; $\mathrm{def}(\mathcal{A}) = 1$.

c) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = 3$, базис образа — $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$; дефект оператора равен нулю.

Упражнение 4. Описать образ и ядро оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathbb{P}_n$ полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами, определенный в (2.6).

Решение. Решение. Каждому элементу пространства $\mathbb{P}_n$ оператор $\mathcal{D}$ ставит в соответствие полином из $\mathbb{P}_{n-1}$. Поэтому $\mathrm{Im}(\mathcal{D}) = \mathbb{P}_{n-1}$, и можно считать, что $\mathcal{D} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещественное число) оператор $\mathcal{D}$ обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате дифференцирования не могут обратиться в функцию, тождествено равную нулю. Поэтому $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}) = \mathbb{P}_0$.

Упражнение 5. Описать образ и ядро оператора проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{X}$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, определенного равенством (2.3).

Ответ. $\mathrm{Im}(\mathcal{P}) = L_1$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{P}) = L_2$.

Упражнение 6. Описать образ и ядро оператора отражения $\mathcal{R}$ пространства $\mathbb{X}$ относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2, определенного равенством (2.4).

Ответ. $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{X}$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}) = \{0\}$.

Упражнение 7. Найти образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в геометрическом пространстве $\mathbb{V}_3$ по правилу: $\mathcal{A}x = [x,a]$, где a — фиксированный ненулевой вектор.

Указание. Образ этого оператора — плоскость $(x,a) = 0$, а ядро — прямая $[x,a] = 0$. Для определения образа воспользуйтесь равенством (2.18). Постройте базис пространства $\mathbb{V}_3$: в качестве первого вектора выберите a, второго — любой вектор e^1, ортогональный a, третьего — вектор $e^2 = [e^1,a]$. Найдите векторы $[e^1,a]$ и $[e^2,a]$, убедитесь, что они ортогональны, и проведите через начало координат натянутую на них плоскость.

Упражнение 8. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ ранга r, если в базисе $e^1, \ldots, e^n$ пространства $\mathbb{X}_n$ векторы $e^{r+1}, \ldots, e^n$ принадлежат ядру этого оператора?

Ответ. Последние $n - r$ столбцов матрицы A_e нулевые, в то время как первые r — линейно независимы.

Упражнение 9. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Опишем метод *окаймляющих миноров*, который можно применять для вычисления ранга матрицы.

1. Просматриваем элементы матрицы. Если все они — нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2. Если найден элемент матрицы, отличный от нуля, то, окаймляем его, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит ранг матрицы равен единице.

3. Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем окаймления строим определители третьего порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от нуля, и т. д. Если на k-ом шаге описанного алгоритма получен определитель, не равный нулю, а все определители порядка $k+1$, построенные его окаймлением, — нули, то ранг матрицы равен k.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

составлена из столбцов a^1, a^2, a^3, a^4, определенных в (2.15). Следовательно, ее ранг равен двум. Покажем на примере этой матрицы, как работает метод окаймляющих миноров. Заметим, что в матрице A содержится минор $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, не равный нулю. Оба минора третьего порядка (2.16) и (2.17), окаймляющие минор d, равны нулю. Следовательно, и этим методом мы получили $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Покажем, как вычислить ранг матрицы в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1tziu4vosPuqaDE1-HhNmnjaYCe-Bsd2P?usp=sharing

Упражнение 10. Найти ранг следующей матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

Решение. Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно предварительно выполнить элементарные преобразования над ее строками, или столбцами (аналогичными тем, что используются в прямом ходе метода Гаусса). Такие преобразования не нарушают линейной зависимости и линейной независимости систем векторов. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

Сразу искать ранг этой матрицы методом окаймляющих миноров трудоемко, поэтому сначала ее упростим. Выполним следующие преобразования:

1) из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на два;

2) из третей строки матрицы вычтем первую, умноженную на три;

3) из последней строки матрицы вычтем первую, умноженную на два. Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем вторую строку из третей строки, и прибавим вторую строку к четвертой строке, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в получившейся матрице минор третьего порядка

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Оба окаймляющих его минора четвертого порядка равны нулю, так как четвертая строка преобразованной матрицы состоит из нулей. Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

Упражнение 11. Найти ранги матриц методом окаймляющих миноров:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)$ 2, $b)$ 2.

Упражнение 12. Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

Ответ. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 3.

Упражнение 13. Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

$$a)\ \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)\,3,\quad b)\,2.$

Упражнение 14. Найти ранг матриц методом окаймляющих миноров:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)\,3,\quad b)\,3.$

Упражнение 15. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных λ?

Ответ. При $\lambda = 3$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

Упражнение 16. Вычислить ранг следующей матрицы при помощи элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ответ. 3.

Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1 Фундаментальная система решений однородной системы уравнений (занятие 8)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/xsVkV5auI7azBA

https://disk.yandex.ru/i/xdz7t4CKe86f5w

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/LNjyMhfTI-mJlA

https://disk.yandex.ru/i/TsjLS-xtTWwguQ

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 10, §1, 3, п. 2

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = 0 \tag{3.1}$$

с матрицей A размера $m \times n$. Будем трактовать матрицу A как линейный оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Пусть x^1, $x^2, \ldots, x^p$ — некий базис в $\mathrm{Ker}(A)$. Тогда любое решение системы (3.1) имеет вид

$$\widetilde{x} = c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_px^p,$$

где c_1, c_2, ..., $c_p \in C$. Векторы x^1, $x^2, \ldots, x^p$ принято называть *фундаментальной системой решений* системы (3.1), а вектор $\widetilde{x}$ — ее *общим решением.*

Опишем метод, который можно применять для построения фундаментальной системы решений. Пусть $\mathrm{rank}(A) = r$. Тогда необходимо найти любые $n-r$ линейно независимых решений системы (3.1).

1. Применяя использованные в предыдущем параграфе приемы вычисления ранга матрицы, приведем матрицу A к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы, начиная с $(r+1)$-й, есть линейные комбинации первых r строк. Система уравнений с преобразованной матрицей эквивалентна исходной. Отбросим последние $(m - r)$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. Перенесем слагаемые преобразованной системы, содержащие *свободные переменные* $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, в правую часть и зададим свободным переменным следующие значения:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0.$$

Иными словами, положим вектор $y = (x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$, составленный из свободных переменных, равным вектору $i^1 \in \mathbb{C}^{n-r}$. Получим неоднородную крамеровскую систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, ..., x_r. Решим ее и образуем первый вектор

$$x^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 1, 0, \ldots, 0)$$

искомой фундаментальной системы решений.

3. Для поиска оставшихся векторов x^2, ..., x^{n-r} фундаментальной системы решений системы (3.1) необходимо выполнить второй шаг алгоритма, фиксируя другие значения свободных переменных: $y = i^2$, ..., $y = i^{n-r}$.

В описанном алгоритме вместо векторов i^1, i^2, ..., i^{n-r} можно использовать любой базис пространства $\mathbb{C}^{n-r}$.

Во всех упражнениях этого параграфа надо найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

Упражнение 1.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array} \tag{3.2}$$

Решение. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений (3.2). Главный минор второго порядка матрицы системы (3.2) не равен нулю:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.3}$$

Все окаймляющие его миноры равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому ранг матрицы системы (3.2) равен двум, причем последнее уравнение есть следствие первых двух уравнений.

Нужно построить три ($n-r=5-2=3$) линейно независимых решения данной системы. Используем стандартный базис пространства $\mathbb{C}^3$, а именно, векторы $i^1=(1{,}0{,}0)$, $i^2=(0{,}1{,}0), i^3=(0{,}0{,}1)$. Положим в первых двух уравнениях системы (3.2) $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=0$, получим

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -1. \end{array}$$

Решим эту систему и найдем $x_1=1/4$, $x_2=7/4$.

Теперь зададим $x_3=0$, $x_4=1, x_5=0$. Первые два уравнения системы (3.2) примут вид

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -4, \end{array}$$

откуда $x_1=-3/4$, $x_2=7/4$.

Наконец, положим $x_3=0$, $x_4=0, x_5=1$, и из первых двух уравнений системы (3.2), преобразованных к виду

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & -1, \\ 3x_1 & - & x_2 & = & -3, \end{array}$$

найдем $x_1=-1$, $x_2=0$.

Таким образом, векторы

$$x^1=(1/4,7/4,1,0{,}0),$$

$$x^2=(-3/4,7/4,0,1,0),$$

$$x^3=(-1{,}0{,}0{,}0{,}1)$$

образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (3.2). Вектор

$$x=c_1(1/4{,}7/4{,}1{,}0{,}0)+c_2(-3/4{,}7/4,0{,}1{,}0)+c_3(-1{,}0{,}0{,}0{,}1), \tag{3.4}$$

где c_1,c_2,c_3 — произвольные числа, есть общее решением системы (3.2).

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1f68SAS7g-5iCpk9alefLjXCp6f7anFaI?usp=sharing

Упражнение 2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0. \end{array}$$

Ответ. Фундаментальная система решений

$x^1 = (8, -6, 1, 0)$,

$x^2 = (-7, 5, 0, 1)$.

Упражнение 3.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 0, \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0, \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 9x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 0. \end{array}$$

Ответ. Фундаментальная система решений

$x^1 = (1, 0, 0, -9/4, 3/4)$,

$x^2 = (0, 1, 0, -3/2, 1/2)$,

$x^3 = (0, 0, 1, -2, 1)$.

Упражнение 4.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_3 & & & = & 0, \\ x_2 & - & x_4 & & & = & 0, \\ -x_1 & + & x_3 & - & x_5 & = & 0, \\ -x_2 & + & x_4 & - & x_6 & = & 0, \\ -x_3 & + & x_5 & & & = & 0, \\ -x_4 & + & x_6 & & & = & 0. \end{array}$$

Решение. Эта система имеет только нулевое решение. Действительно, вычислим ранг матрицы системы. Он равен шести. Число неизвестных тоже равно шести. Следовательно, число векторов в фундаментальной системе решений равно нулю ($n - r = 6 - 6 = 0$).

Этих рассуждений уже достаточно для решения задачи, однако, заметим, что в данном случае число уравнений в системе тоже равно шести, матрица системы квадратная и невырожденная. Следовательно, мы имеем дело с однородной крамеровской системой линейных уравнений. Еще из первого семестра мы знаем, что такая система имеет только тривиальное решение.

Покажем, как выполнить это упражнение в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1o5LZA9IZyc_8xFxrajwhhR93jqyTCM6D?usp=sharing

Упражнение 5.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 17x_3 & + & 11x_4 & = & 0, \end{array}$$

Ответ. Фундаментальная система решений

$x^1 = (1{,}0, -5/2{,}7/2)$,

$x^2 = (0{,}1{,}5, -7)$.

Упражнение 6.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

Ответ. Система имеет только нулевое решение.

Упражнение 7.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 6x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0, \\ 9x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0. \end{array}$$

Ответ. Фундаментальная система решений

$x^1 = (1{,}0{,}0, -9/11, -3/11)$,

$x^2 = (0{,}1{,}0{,}3/11, 1/11)$,

$x^3 = (0, 0{,}1, -10/11{,}4/11)$.

3.2 Общее решение системы линейных уравнений (занятие 9)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/xsVkV5auI7azBA
https://disk.yandex.ru/i/xdz7t4CKe86f5w
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/LNjyMhfTI-mJlA
https://disk.yandex.ru/i/TsjLS-xtTWwguQ
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 10, §1, 3, п. 1

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{3.5}$$

где A — матрица размера $m \times n$, b — заданный вектор, x — искомый вектор.

По теореме Кронекера — Капелли система (3.5) имеет решение (говорят: *совместна*) тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (A,b). Будем считать, что решение существует, ранги совпадают, и положим $r = \operatorname{rank}(A,b)$. Зафиксируем некоторое решение x^0 системы (3.5). Его называют *частным решением* неоднородной системы (3.5). *Общее решение* системы (3.5) имеет вид

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k\, x^k,$$

где c_1, c_2, …, c_p — произвольные числа, x^1, x^2, …, x^p — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений (см. §3.1).

Если $r = n$, то $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, и x^0 — единственное решение системы (3.5). Таким образом, система (3.5) может вовсе не иметь решений, иметь одно, или бесконечно много решений.

Опишем метод, который можно применять для построения частного решения системы линейных уравнений (3.5).

1. Приведем матрицу (A, b) к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A,b) начиная с $(r + 1)$-й есть линейные комбинации ее первых r строк. Система

уравнений с преобразованной матрицей эквивалентна исходной. Отбросим последние $m-r$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. В оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n в правую часть. Придадим свободным переменным любые значения (чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем x_1, x_2, …, x_r. Таким образом, будет построен вектор $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$, являющийся частным решением системы (3.5).

Во всех упражнениях этого параграфа надо исследовать совместность, найти частное и общее решение систем уравнений.

Упражнение 1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 4, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array} \tag{3.6}$$

Решение. Общее решение однородной системы, отвечающей (3.6), мы уже нашли, решив задачу (3.2). В ходе решения системы (3.2) мы выяснили, что $\mathrm{rank}(A) = 2$. Вычислим $\mathrm{rank}(A,b)$. Заметим, что минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор Δ_2 (см. равенство (3.3)) в расширенной матрице, равен нулю. Поэтому $\mathrm{rank}(A,b) = 2$. Ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы, следовательно система совместна. Более того, система (3.6) имеет бесконечно много решений, причем последнее уравнение — следствие первых двух уравнений системы.

Таким образом, чтобы найти частное решение исходной системы уравнений, надо решить систему из двух ее первых уравнений. Перенесем в них слагаемые, содержащие переменные x_3, x_4, x_5, в правую часть. Положим их равными нулю, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, получим $x_1 = 5/4$, $x_2 = -1/4$.

Итак, вектор $x^0 = (5/4, -1/4, 0, 0{,}0)$ — частное решение системы уравнений (3.6), общее решение имеет вид

$$x = (5/4, -1/4, 0, 0{,}0)+$$

$$+c_1(1/4{,}7/4{,}1{,}0{,}0) + c_2(-3/4{,}7/4, 0{,}1{,}0) + c_3(-1{,}0{,}0{,}0{,}1).$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные числа (см. задачу (3.2)).

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1D-a4lU5V44OSOpSJXwqrCZ7UgZ7VSk5H?usp=sharing

Упражнение 2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7, \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (0{,}0{,}1{,}1)$. Общее решение

$$x = c_1(1{,}0, -3{,}0) + c_2(0{,}1, -4{,}0) + (0{,}0{,}1{,}1).$$

Упражнение 3.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7, \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12. \end{array}$$

Ответ. Система имеет единственное решение $x = (3{,}2{,}1)$.

Упражнение 4.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 & = & 2. \end{array}$$

Ответ. Система не имеет решений (говорят: *несовместна*).

Упражнение 5.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 10x_1 & + & 23x_2 & + & 17x_3 & + & 44x_4 & = & 25, \\ 15x_1 & + & 35x_2 & + & 26x_3 & + & 69x_4 & = & 40, \\ 25x_1 & + & 57x_2 & + & 42x_3 & + & 108x_4 & = & 65, \\ 30x_1 & + & 69x_2 & + & 51x_3 & + & 133x_4 & = & 95. \end{array}$$

Ответ. Система несовместна.

Упражнение 6.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 5, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 11, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 6. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (0, -15/8, -3/4, -5, 0)$, общее —

$$x = c_1(1, -1/2,0,0,0) + c_2(0,1/4,3/2,3,1)+$$

$$+(0, -15/8, -3/4, -5,0).$$

Упражнение 7.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 24x_1 & + & 14x_2 & + & 30x_3 & + & 40x_4 & + & 41x_5 & = & 28, \\ 36x_1 & + & 21x_2 & + & 45x_3 & + & 61x_4 & + & 62x_5 & = & 43, \\ 48x_1 & + & 28x_2 & + & 60x_3 & + & 82x_4 & + & 83x_5 & = & 58, \\ 60x_1 & + & 35x_2 & + & 75x_3 & + & 99x_4 & + & 102x_5 & = & 69. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (-1/2,0,0,1,0)$. Общее решение

$$x = c_1(-7/12,1,0,0,0) + c_2(-5/4,0,1,0,0) + c_3(-7/8,0,0, -1/2,1)+$$

$$+(-1/2,0,0,1,0).$$

Упражнение 8.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 1, \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 11x_3 & - & 15x_4 & = & 1. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (0,0, -11,8)$. Общее решение

$$x = c_1(1,0,22, -16) + c_2(0,1, -33,24) + (0,0, -11,8).$$

Упражнение 9.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3. \end{array}$$

Ответ. Система несовместна.

Упражнение 10.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 3, \\ 9x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (0{,}0{,}6, -7)$. Общее решение

$$x = c_1(1{,}0, -15{,}18) + c_2(0{,}1{,}10, -12) + (0{,}0{,}6, -7).$$

Упражнение 11.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 12x_1 & + & 14x_2 & - & 15x_3 & + & 23x_4 & + & 27x_5 & = & 5, \\ 16x_1 & + & 18x_2 & - & 22x_3 & + & 29x_4 & + & 37x_5 & = & 8, \\ 18x_1 & + & 20x_2 & - & 21x_3 & + & 32x_4 & + & 41x_5 & = & 9, \\ 10x_1 & + & 12x_2 & - & 16x_3 & + & 20x_4 & + & 23x_5 & = & 4. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (20/9, -5/3, -1/9{,}0{,}0)$. Общее решение

$$x = c_1(1, -5/2{,}0{,}1{,}0) + c_2(-53/18{,}5/6{,}2/9{,}0{,}1)+$$

$$+(20/9, -5/3, -1/9{,}0{,}0).$$

Упражнение 12.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1. \end{array}$$

Ответ. Частное решение $x^0 = (0{,}0{,}0, -1{,}2)$, общее решение

$$x = c_1(1{,}0{,}4/3, -14/3{,}4/3) + c_2(0{,}1{,}2/3, -7/3{,}2/3) + (0{,}0{,}0, -1{,}2).$$

Глава 4. Собственные числа и собственные векторы

4.1 Операторы в комплексном пространстве (занятие 10)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/-B8QsbLEnrVryg
https://disk.yandex.ru/i/fSiKOmXt73oE7g
https://disk.yandex.ru/i/4rla-dk2cXqY8g
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/M_OOmQMTYqK1vA
https://disk.yandex.ru/i/sYaZr-3KSXfOqQ
https://disk.yandex.ru/i/PICNSOiW9VTakw
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §2, 3, 5

Пусть $\mathbb{X}$ — комплексное линейное пространство, $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ — линейный оператор. Говорят, что вектор $x \in \mathbb{X}$ — *собственный вектор оператора* $\mathcal{A}$, если $x \neq 0$ и существует число λ такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Число λ при этом называется *собственным числом оператора* $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор x соответствует (отвечает) собственному числу λ. Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют также *собственной парой оператора* $\mathcal{A}$.

Пусть x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$. Тогда

$$\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x \quad \forall \alpha \in C,$$

т. е., если x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ, то αx, для любого $\alpha \in C$, также является собственным вектором этого оператора, отвечающим λ.

Пусть λ — собственное число оператора $\mathcal{A}$. Ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ будем обозначать через L_λ и называть *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$. Всякий ненулевой вектор из L_λ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ.

Всякий оператор $\mathcal{A}$, действующий в конечномерном комплексном пространстве $\mathbb{X}_n$, имеет собственные векторы. Фиксируем в пространстве $\mathbb{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\det(A_e - \lambda I)$ — полином порядка n относительно λ. Поэтому уравнение (4.1) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Всякий корень λ_k уравнения (4.1) — собственное число оператора $\mathcal{A}$, которому отвечает собственный вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$, где ξ^k — нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0. \tag{4.2}$$

Полином $\det(A-\lambda I)$ называется *характеристическим полиномом матрицы* A. Корни характеристического полинома называются *характеристическими (собственными) числами матрицы* A. Для любого характеристического числа λ существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, не равный нулю, и такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется *собственным вектором матрицы* A, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

Характеристические полиномы, а следовательно, и *спектры* (множества всех характеристических чисел) подобных матриц совпадают. Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbb{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора*.

Характеристические числа матрицы оператора называются *характеристическими числами этого оператора*. Они, таким образом, являются инвариантами оператора. Для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbb{X}_n$, понятия характеристического и собственного числа, фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

Кратность числа λ как корня характеристического полинома оператора $\mathcal{A}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ.

Упражнение 1. Найти все собственные числа и собственные векторы следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель методом *выделения линейных множителей*:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{прибавим к 1-му столбцу} \\ \text{2-й столбец, умноженный} \\ \text{на } (3-\lambda) \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2 - 3 & -3-\lambda & 2 \\ 6\lambda - 10 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 3 & 2 \\ 6\lambda - 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{прибавим к 1-му столбцу} \\ \text{2-й столбец} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2 \\ 5\lambda - 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{вынесем из 1-го столбца} \\ \text{общий множитель} \end{array} \right\} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 4\lambda + 5 - 10\right) = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 4\lambda - 5\right).$$

Получили характеристическое уравнение

$$(\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 4\lambda - 5\right) = 0.$$

Корни этого уравнения есть собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + i, \quad \lambda_3 = 2 - i.$$

Компоненты собственного вектора, отвечающего $\lambda_1 = 1$, есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 0, \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 8x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0. \end{array} \tag{4.3}$$

Это однородная система уравнений с матрицей $A - \lambda I$, где $\lambda = \lambda_1$.

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг матрицы системы (4.3) равен двум и, следовательно, эта система может иметь лишь одно линейно независимое решение. Положим $x_3 = 1$ и найдем x_1, x_2, решая систему уравнений (4.3). Получим $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Таким образом, вектор $(1{,}2{,}1)$ — решение системы уравнений (4.3). Отсюда вытекает, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 1$, есть множество векторов вида $c(1{,}2{,}1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Компоненты собственного вектора, отвечающего $\lambda_2 = 2 + i$, есть решение однородной системы уравнений

$$\begin{array}{ccccccc} (1+i)x_1 & - & x_2 & = & 0, & & \\ 6x_1 & + & (-5-i)x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 8x_1 & - & 6x_2 & + & (3-i)x_3 & = & 0. \end{array} \tag{4.4}$$

Это однородная система уравнений с матрицей $A - \lambda I$, где $\lambda = \lambda_2$.

Определитель $\begin{vmatrix} (1-i) & -1 \\ 6 & -5-i \end{vmatrix} = 4i \neq 0$. Поэтому координаты собственного вектора найдем, решая систему уравнений (4.4) при $x_3 = 1$. Получим $x_1 = i/2$, $x_2 = (1+i)/2$. Таким образом, множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_2 = 2 + i$, есть множество векторов вида $c(i{,}i+1{,}2)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Аналогичные вычисления показывают, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 2 - i$, есть множество векторов вида $c(-i{,}1-i{,}2)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

На примере этого упражнения покажем, как вычислить характеристический полином матрицы, программируя в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1Nhjvv5c5QNSc62GZzZsiyQAu9BjJa23v?usp=sharing

Покажем, как вычислить собственные числа матрицы в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1xj1_CqB98YCrEQSMXEaEUpYE5KeyGa5C?usp=sharing

Покажем, как вычислить сразу и собственные числа, и собственные векторы матрицы в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1nZ9t5DsOo1lnr-J9krGJgx5FFXHSNZO-?usp=sharing

Упражнение 2. Найти все собственные числа и собственные векторы следующих матриц:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

$d)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad e)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. *a*) Единственное собственное число $\lambda = 1$ (его алгебраическая кратность равна 2). Этому собственному числу отвечают собственные векторы вида $c(1,-1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

b) Собственные числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_1 = 0$, имеют вид $c(1,-1)$, отвечающие $\lambda_2 = 2$, имеют вид $c(1,1)$, где c — произвольное комплексное число, отличное от нуля.

c) Единственное собственное число $\lambda = 0$ (его алгебраическая кратность равна 2), ему отвечают собственные векторы вида $c(1,-1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

d) Собственные числа: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Собственные векторы, отвечающие числу $\lambda_1 = -2+i$ имеют вид $c(1,i)$, отвечающие числу $\lambda_2 = -2-i$, имеют вид $c(1,-i)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

e) Собственные числа: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы, отвечающие числу $\lambda_1 = i$, имеют вид $c(1,1+i)$, отвечающие $\lambda_2 = -i$, имеют вид $c(1,1-i)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

f) Собственные числа: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 2i$, имеют вид $c(1,i)$, отвечающие $\lambda_2 = -2i$, имеют вид $c(i,1)$, где c — произвольное комплексное число, не равное нулю.

Упражнение 3. Найти все собственные числа и собственные векторы следующих матриц:

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$d)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $\quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad f)\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. a) Единственное собственное число $\lambda = -1$ имеет алгебраическую кратность, равную трем. Ему отвечают собственные векторы вида $c(1,1,-1)$, где c — любое комплексное число, не равное нулю.

b) Единственное собственное число $\lambda = 2$ его алгебраическую кратность 3. Ему отвечают собственные векторы вида $c_1(1,2,0) + c_2(0,0,1)$, где c_1 и c_2 произвольные комплексные числа не обращающиеся в нуль одновременно.

c) Два собственных числа: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ (его алгебраическая кратность равна двум). Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 1$, имеют вид $c(1,1,1)$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_2 = 0$, имеют вид $c(1,2,3)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

d) Одно собственное число: $\lambda = 1$. Его алгебраическая кратность равна трем. Ему отвечают собственные векторы вида $c(3,1,1)$, где c — любое комплексное число, не равное нулю.

e) Два собственных числа: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$ (его алгебраическая кратность равна двум). Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 3$, имеют вид $c(1,2,2)$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_2 = -1$, имеют вид $c(1,2,1)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

f) Собственные числа: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы, отвечающие $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1,-1,1)$, отвечающие $\lambda_1 = 3$, — вид $c(1,1,-1)$, отвечающие $\lambda_1 = 1$, — вид $c(1,1,1)$. Здесь c — любое комплексное число, не равное нулю.

Упражнение 4. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{P} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2.

Указание. Для построения характеристического полинома использовать матрицу оператора $\mathcal{P}$, построенную в (2.10). Для поиска собственных пар подействовать оператором на векторы из подпространств L_1 и L_2.

Ответ. Характеристический полином имеет вид $f(\lambda) = (\lambda)^{n-k}(1-\lambda)^k$, где число $k = \dim(L_1)$. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = 1$, является любой ненулевой вектор из L_1. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = 0$, является любой ненулевой вектор из подпространства L_2.

Упражнение 5. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{R} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ отражения относительно подпространства L_1 параллельно подпространству L_2.

Указание. Для построения характеристического полинома использовать матрицу оператора $\mathcal{R}$, построенную в (2.11). Для поиска собственных пар подействовать оператором на векторы из подпространств L_1 и L_2.

Ответ. Характеристический полином $f(\lambda) = (-1)^{n-k}(1+\lambda)^{n-k}(1-\lambda)^k$, где $k = \dim(L_1)$. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = 1$, является любой ненулевой вектор из L_1. Собственным вектором, отвечающим собственному числу $\lambda = -1$, является любой ненулевой вектор из подпространства L_2.

4.2 Операторы в вещественном пространстве (занятие 11)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/-B8QsbLEnrVryg
https://disk.yandex.ru/i/fSiKOmXt73oE7g
https://disk.yandex.ru/i/4rla-dk2cXqY8g
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/M_OOmQMTYqK1vA
https://disk.yandex.ru/i/sYaZr-3KSXfOqQ
https://disk.yandex.ru/i/PICNSOiW9VTakw
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §2, 3, 5

Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в вещественном конечномерном пространстве $\mathbb{X}_n$. Матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе $\mathcal{E}_n$ вещественна. Уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \tag{4.5}$$

т. е. *характеристическое уравнение* матрицы A_e, — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Оно, вообще говоря, имеет как вещественные, так и комплексные корни.

Если λ_k — вещественный корень уравнения (4.5), то система уравнений

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0 \tag{4.6}$$

имеет нетривиальное вещественное решение ξ^k, и вектор $x^k = \mathcal{E}_n \xi^k$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. Таким образом, все вещественные характеристические числа матрицы A_e — собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Если характеристическое число λ_k комплексное, то система уравнений (4.6) не имеет нетривиальных вещественных решений, только — комплексные. Поэтому, ни одно комплексное характеристическое число матрицы A_e не может быть собственным числом оператора $\mathcal{A}$. Если все корни уравнения (4.5) комплексные, то оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных векторов.

Упражнение 1. Пусть $\mathbb{X}_2$ — двумерное вещественное пространство, в этом пространстве фиксирован базис e^1, e^2, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0,2\pi)$. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1.$$

Рассмотрим три случая: $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$; $\varphi \neq 0, \pi$.

Пусть $\varphi = 0$. Тогда $\det(A_e - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, и из характеристического уравнения $(\lambda - 1)^2 = 0$ находим характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет собственное число $\lambda = 1$. Его алгебраическая кратность равна двум. Матрица A_e при $\varphi = 0$ становится единичной, следовательно, $\mathcal{A} = I$, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathbb{X}_n$. Любой ненулевой вектор x этого пространства есть собственный вектор оператора I, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$:

$$Ix = 1\,x.$$

При $\varphi = \pi$ характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda + 1)^2 = 0$, его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Оператор $\mathcal{A}$ в этом случае равен $-I$, и любой ненулевой вектор x пространства $\mathbb{X}_n$ — собственный вектор этого оператора, отвечающий собственному $\lambda = -1$:

$$-Ix = (-1)x.$$

Алгебраическая кратность этого собственного числа равна двум.

Пусть угол φ не равен ни 0, ни π. Тогда дискриминант характеристического уравнения — отрицательное число:

$$D = 4\cos^2\varphi - 4 = -4\sin^2\varphi < 0, \quad \varphi \in [0,2\pi), \quad \varphi \neq 0,\, \pi.$$

Характеристическое уравнение не имеет вещественных корней. У оператора $\mathcal{A}$ нет собственных чисел и собственных векторов.

Упражнение 2. Пусть $\mathbb{X}_3$ — трехмерное вещественное пространство, в этом пространстве фиксирован базис e^1, e^2, e^3, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0{,}2\pi)$. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Решение. Характеристический полином имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1\right).$$

При любом $\varphi \in [0{,}2\pi)$ у оператора $\mathcal{A}$ есть собственное число $\lambda = 1$.

Если $\varphi = 0$, то $A_e = I$, $\mathcal{A} = I$, и любой ненулевой вектор пространства $\mathbb{X}_n$ является собственным вектором этого оператора, отвечающим собственному числу $\lambda = 1$.

Пусть $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Координаты собственного вектора x, отвечающего собственному числу $\lambda = 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{array}{lclclcl} 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & (\cos\varphi - 1)\,x_2 & - & \sin\varphi\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & \sin\varphi\,x_2 & + & (\cos\varphi - 1)\,x_3 & = & 0. \end{array} \tag{4.7}$$

Вычислим минор второго порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы A этой системы:

$$\Delta = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi).$$

Ясно, что $\Delta \neq 0$ при $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Следовательно, ранг матрицы A равен двум, фундаментальная система решений системы (4.7) состоит из одного вектора (1,0,0). В этом случае любой собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$, имеет вид $x = \alpha e^1$, где α — произвольное ненулевое вещественное число.

В предыдущем упражнении было установлено, что уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$$

при $\varphi = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (этот случай мы уже рассмотрели), а при $\varphi = \pi$ — корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Других корней у этого уравнения нет. Найдем собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda = -1$. Их координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0, \\ 0\,x_1 & + & 0\,x_2 & + & 0\,x_3 & = & 0. \end{array}$$

Фундаментальная система решений этой системы уравнений состоит из двух векторов (0,1,0) и (0,0,1). Следовательно, любой собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу $\lambda = -1$ при $\varphi = \pi$ имеет вид $x = \alpha e^2 + \beta e^3$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

Упражнение 3. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, действующего в пространстве $\mathbb{V}_3$ геометрических векторов по правилу $\mathcal{A}x = [x,a]$, где a — заданный ненулевой вектор.

Указание. Использовать матрицу (2.12) этого оператора.

Ответ. Характеристический полином $f(\lambda) = -\lambda^3 - |a|^2\lambda$. Собственное число $\lambda = 0$, соответствующие собственные векторы $x = \alpha a$, где α — произвольное вещественное число, не равное нулю.

Упражнение 4. Пусть $\mathbb{P}_n$ — вещественное линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + bp_n$$

для любого $p_n \in \mathbb{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Указание. Использовать матрицу (2.8) этого оператора.

Ответ. Характеристический полином $f(\lambda) = (b - \lambda)^{n+1}$. Собственное число $\lambda = b$, отвечающим ему собственным вектором является любой ненулевой многочлен нулевой степени.

Упражнение 5. Пусть $\mathbb{T}$ — линейное пространство функций вида

$$t(x) = c + a\cos x + b\sin x,$$

где a, b, c — произвольные вещественные числа, x может принимать любые вещественные значения. Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом. Найти характеристический полином, собственные числа и собственные векторы оператора дифференцирования:

$$\mathcal{D}f(x) = f'(x), \quad f \in \mathbb{T}.$$

Указание. Использовать матрицу (2.9). Построить матрицу оператора $\mathcal{D}$ в базисе $\{\sin x, 1, \cos x\}$.

Ответ. Характеристический полином $f(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1)$. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающим ему собственным вектором является произвольное вещественное число, отличное от нуля.

Упражнение 6. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ переводит векторы естественного базиса

$$(1{,}0{,}0{,}0), \quad (0{,}1{,}0{,}0), \quad (0{,}0{,}1{,}0), \quad (0{,}0{,}0{,}1), \tag{4.8}$$

соответственно, в векторы

$$(-1{,}0{,}1, -1), \quad (3{,}1, -2{,}3), \quad (-3, -1{,}2, -3), \quad (-2, -1{,}1, -2).$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Указание. Построим матрицу A_i оператора $\mathcal{A}$ в базисе (4.8). В соответствии с определением, для того, чтобы получить первый столбец матрицы A_i, надо подействовать оператором на первый вектор базиса (4.8). Получится вектор $(-1{,}0{,}1,-1)$. Далее, этот вектор надо разложить по базису (4.8). Так как мы работаем с естественным базисом, то коэффициенты этого разложения будут просто совпадать с элементами данного вектора. Коэффициенты этого разложения образуют первый столбец матрицы A_i. Поэтому вектор $(-1{,}0{,}1,-1)$ надо просто записать в качестве первого столбца матрицы A_i. Остальные ее столбцы строятся аналогично.

Ответ. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающие ему собственные векторы имеют вид $\alpha(1{,}1{,}0{,}1) + \beta(0{,}1{,}1{,}0)$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

Упражнение 7. Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ переводит векторы

$$(1{,}0{,}0{,}0), \quad (1{,}1{,}0{,}0), \quad (1{,}1{,}1{,}0), \quad (1{,}1{,}1{,}1), \tag{4.9}$$

соответственно, в векторы

$$(0{,}2{,}1{,}0),\quad (1{,}2{,}1,-1),\quad (-1{,}2{,}1{,}1),\quad (-1{,}4{,}2{,}1).$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Указание. Векторы (4.9) образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$, так как они линейно независимы, и их четыре в четырехмерном пространстве. Постройте матрицу A_e оператора $\mathcal{A}$ в базисе (4.9). Действуйте по определению. Чтобы получить первый столбец матрицы A_e, надо представить вектор $(0{,}2{,}1{,}0)$ в виде линейной комбинации векторов базиса (4.9) и из ее коэффициентов составить элементы первого столбца. Остальные столбцы строятся аналогично.

Ответ. Собственное число $\lambda = 0$, отвечающие ему собственные векторы имеют вид $\alpha(1{,}0{,}0,-1)+\beta(0,-1{,}2{,}0)$, где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

Упражнение 8. Действие оператора $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\cdot 2} \to \mathbb{R}^{2\cdot 2}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Указание. Постройте матрицу A_e оператора $\mathcal{A}$ в базисе (2.13). Сначала подействуйте оператором $\mathcal{A}$ на первый базисный элемент. Получится матрица второго порядка. Представьте ее в виде линейной комбинации четырех базисных матриц (2.13). Из коэффициентов этой линейной комбинации составьте первый столбец матрицы A_e. Остальные столбцы этой матрицы четвертого порядка постройте аналогично.

Ответ. Собственное число $\lambda = 2$. Ему отвечают собственные векторы вида

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль.

Упражнение 9. В пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше трех с вещественными коэффициентами линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит многочлены естественного базиса 1, t, t^2, t^3, соответственно, в многочлены

$$1-t+6t^2-6t^3,\quad 1-t+t^2-t^3,\quad 1-t-4t^2+4t^3,\quad 1-t-t^2+t^3. \qquad (4.10)$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$.

Указание. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе. Пространства $\mathbb{P}_3$. Благодаря тому что базис естественный, фактически, столбцы матрицы будут состоять из коэффициентов полиномов (4.10).

Ответ. Собственных чисел два: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$. Собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_1 = 0$, имеют вид

$$\alpha(1 - 2t + t^2) + \beta(2 - 7t + 5t^3),$$

где α и β — произвольные вещественные числа, не обращающиеся одновременно в нуль. Собственному числу $\lambda_2 = -3$ отвечают собственные векторы вида

$$\alpha(t^2 - t^3),$$

где α — любое не равное нулю вещественное число.

Упражнение 10. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве $\mathbb{P}_3$ многочленов степени не выше трех с вещественными коэффициентами, по правилу

$$(\mathcal{A}f)(t) = 2f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) + f(t).$$

Для построения матрицы оператора $\mathcal{A}$ взять естественный базис в пространстве $\mathbb{P}_3$: $1, t, t^2, t^3$.

Ответ. Собственное число $\lambda = 1$, отвечающий ему собственный вектор — произвольный ненулевой полином нулевой степени.

Глава 5. Квадратичные формы. Кривые и поверхности второго порядка

5.1 Квадратичные формы (занятие 12)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/LRNbYM5XlcUs-Q
https://disk.yandex.ru/i/Rhh6SF73gTDFEg
https://disk.yandex.ru/i/ETqUdrPs-GAiUA
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/70Pl_TDjLjUZtA
https://disk.yandex.ru/i/E1u6kFQMIZK-dw
https://disk.yandex.ru/i/7LT1JiwSYQ9uOA
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §1–3

Квадратичной формой называют вещественную функцию F от n вещественных переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ вида

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \tag{5.1}$$

Заданные вещественные числа a_{ij} называют *коэффициентами* квадратичной формы. Предполагается, что они удовлетворяют условиям симметрии: $a_{ij}=a_{ji}$, где $i,j=1,\ 2,\ \dots,\ n$, а в записи (5.1) наряду со слагаемыми $a_{ij}x_ix_j$ содержатся слагаемые $a_{ji}x_jx_i$.

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть A — симметричная матрица с элементами a_{ij}, $i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n$. Вектор

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

будем считать элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$F(x)=(Ax,x),$$

где скобки означают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Каноническим называют специальный вид квадратичной формы, в котором матрица A диагональна: $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Пусть в квадратичной форме выполнена *линейная замена переменных*, т. е. введены новые переменные $y = (y_1,y_2, \ldots, y_n)$, связанные со старыми переменными $x = (x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ соотношением $x = Qy$, где Q — невырожденная матрица, называемая *матрицей преобразования переменных.* Получим

$$F = (AQy,Qy) = (Q^T AQy,y) = (By,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j,$$

где через B обозначена матрица $Q^T AQ$.

Всякую квадратичную форму невырожденным ортогональным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, существует ортогональная матрица Q такая, что

$$Q^T AQ = \Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n матрицы A. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2. \tag{5.2}$$

Каждой симметричной матрице A соответствует три целых числа: $n_0(A)$ — количество нулевых характеристических чисел матрицы A, $n_+(A)$ — количество положительных характеристических чисел, $n_-(A)$ — количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности). Тройка чисел $n_0(A),n_+(A),n_-(A)$ называется *инерцией матрицы* A, или *инерцией* соответствующей ей *квадратичной формы.*

Количества положительных и отрицательных слагаемых в (5.2) определяются инерцией матрицы A, соответствующей квадратичной форме (5.1), и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы (5.1) к каноническому виду. Поэтому две квадратичные формы переводятся друг в друга невырожденным преобразованием тогда и только тогда, когда инерции их матриц совпадают.

Квадратичная форма (5.1) называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица A положительно определена, т. е. $(Ax,x) > 0$ для всех не равных нулю $x \in \mathbb{R}^n$.

Чтобы матрица A была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны.

Упражнение 1. Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

вычислив собственные числа ее матрицы.

Решение. Этой квадратичной форме соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический полином:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2+\lambda & -\lambda-1/2 & 0 \\ 1/2+\lambda & 0 & -1/2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1/2)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1/2)^2 (-\lambda + 1/2 + 1/2) =$$

$$= (\lambda+1/2)^2 (1-\lambda).$$

Корнями этого полинома являются числа

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1/2,$$

следовательно, существует такое невырожденное ортогональное преобразование переменных $x = Qy$, что в новых переменных y квадратичная форма имеет следующий канонический вид:

$$F = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1UOY-MA_h7tkIQWpe_JQFgETSWW0gkLkp?usp=sharing

Упражнение 2. Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

вычислив собственные числа ее матрицы.

Ответ. $F = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

Упражнение 3. Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

методом Лагранжа. Найти невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

Решение. Опишем *метод Лагранжа*, или *метод выделения полных квадратов*, приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть в квадратичной форме (5.1) коэффициент при квадрате какой-либо переменной отличен от нуля, предположим для определенности, что $a_{11} \neq 0$. Выполним замену переменных

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \quad y_2 = x_2, \ \dots, \quad y_n = x_n. \tag{5.3}$$

Если в квадратичной форме коэффициенты при квадратах всех переменных нули, и, например, $a_{12} \neq 0$, предварительно выполним замену

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_3, \ \dots, \quad x_n = z_n.$$

Затем выполним замену переменных (5.3). Выполняя эти преобразования переменных, приведем квадратичную форму (5.1) к виду

$$F = \alpha y_1^2 + G(y_2, \dots, y_n),$$

где G — квадратичная форма от переменных $y_2, \dots, y_n$. Продолжая аналогичные преобразования переменных для формы G и далее, в конце концов приведем квадратичную форму к каноническому виду.

Найдем канонический вид и преобразование перменных, приводящее к этому виду квадратичную форму

$$F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Это та же квадратичная форма, что и в предыдущем упражнении. Сейчас будем применять метод Лагранжа, поэтому канонический вид формы может получиться иным. Поскольку в этой форме отсутствуют квадраты переменных, выполним следующее преобразование переменных:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Матрица преобразования $x = Q_1 y$ имеет вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$F = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 =$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1(\underline{y_1 + y_3}) + y_3y_1 - y_2^2.$$

Переменные сгруппированы так, чтобы легче было выписать следующее преобразование метода Лагранжа. Теперь положим

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3,$$

т. е.

$$y_1 = z_1 - z_3, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_3.$$

В переменных z квадратичная форма принимает канонический вид (обратите внимание, что подчеркнутые слагаемые сокращаются):

$$F = (z_1 - \underline{z_3)z_1} + \underline{z_3(z_1} - z_3) - z_2^2 =$$

$$= z_1^2 - \underline{z_1z_3} + \underline{z_1z_3} - z_3^2 - z_2^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Запишем матрицу преобразования переменных $y = Q_2 z$:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу преобразования переменных $x = Qz$. Имеем

$$x = Q_1 y = Q_1 Q_2 z,$$

следовательно,

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем преобразование переменных $x = Qz$ в координатной форме:

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3,$$

$$x_2 = z_1 + z_2 - z_3,$$

$$x_3 = z_3.$$

Упражнение 4. Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

методом Лагранжа и невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

Решение. Запишем исходную квадратичную форму, сгруппировав переменные так, чтобы удобнее было найти первую замену переменных метода Лагранжа:

$$F = \underline{2x_1^2} + 3x_2^2 + 4x_3^2 - \underline{2x_1x_2} + \underline{4x_1x_3} - 3x_2x_3 =$$
$$= 2x_1 \left(\underline{x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3} \right) - \underline{x_2x_1} + \underline{2x_3x_1} + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3.$$

Обратите внимание на наличие в этой записи слагаемых $-x_2x_1$ и $2x_3x_1$. Теперь положим

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$

т. е.

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Следовательно (подчеркнутые слагаемые взаимно сокращаются),

$$F = 2y_1 \left(y_1 + \underline{\frac{1}{2}y_2} - \underline{\underline{y_3}} \right) - y_2 \left(\underline{y_1} + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \right) +$$

$$+ 2y_3 \left(\underline{\underline{y_1}} + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \right) + 3y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_2y_3 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_2y_3 - 2y_3^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2.$$

Сгруппируем слагаемые для следующей замены переменных:

$$F = 2y_1^2 + \underline{\frac{5}{2}y_2^2} - \underline{y_2y_3} + 2y_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 + 5y_2\left(\underline{\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{10}y_3}\right) - \underline{\frac{1}{2}y_3y_2} + 2y_3^2.$$

Сделаем вторую замену переменных:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{10}y_3, \quad z_3 = y_3,$$

т. е.

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = 2z_2 + \frac{1}{5}z_3, \quad y_3 = z_3.$$

Теперь квадратичная форма имеет канонический вид:

$$F = 2z_1^2 + 5z_2\left(2z_2 + \underline{\frac{1}{5}z_3}\right) - \frac{1}{2}z_3\left(\underline{2z_2} + \frac{1}{5}z_3\right) + 2z_3^2 =$$

$$= 2z_1^2 + 10z_2^2 - \frac{1}{10}z_3^2 + 2z_3^2 = 2z_1^2 + 10z_2^2 + \frac{19}{10}z_3^2.$$

Приведем эту квадратичную форму к более удобному и красивому каноническому виду с целыми коэффициентами. Сделаем еще одну замену переменных:

$$z_1 = t_1, \quad z_2 = t_2, \quad z_3 = 10t_3.$$

Окончательно имеем

$$F = 2t_1^2 + 10t_2^2 + 190t_3^2.$$

Осталось найти выражение неизвестных x через t:

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 = z_1 + z_2 + \frac{1}{10}z_3 - z_3 = t_1 + t_2 + t_3 - 10t_3 = t_1 + t_2 - 9t_3,$$

$$x_2 = y_2 = 2z_2 + \frac{1}{5}z_3 = 2t_2 + 2t_3,$$

$$x_3 = y_3 = z_3 = 10t_3.$$

Упражнение 5. Найти канонический вид квадратичной формы

$$F = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$$

методом Лагранжа и невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму к этому виду.

Ответ. $F = 2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $x_1 = z_1 - 2z_2 - 9z_3$, $x_2 = z_2 + 4z_3$, $x_3 = z_3$.

Упражнение 6. Проверить, существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$F = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

в форму

$$G = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3,$$

вычислив инерции этих квадратичных форм.

Решение. Квадратичные формы переводятся друг в друга невырожденным преобразованием тогда и только тогда, когда инерции их матриц совпадают. Найдем инерции матриц заданных квадратичных форм. Форме

$$F = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем все корни характеристического полинома методом выделения линейных множителей:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 9-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ -2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1-2\lambda \\ 0 & -7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1-2\lambda \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda[(1+\lambda)(1-\lambda) - 7(1-2\lambda)] = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 6).$$

Ясно, что первое собственное число равно нулю, два других — решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 14\lambda + 6 = 0.$$

Имеем

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7 + \sqrt{43} > 0, \quad \lambda_3 = 7 - \sqrt{43} > 0.$$

Матрица квадратичной формы

$$G(y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа:

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2\lambda & \lambda \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(7-\lambda)(2-\lambda) - 2(1+\lambda)] = -\lambda(\lambda^2 - 11\lambda + 12),$$

и

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{11 + \sqrt{73}}{2} > 0, \quad \lambda_3 = \frac{11 - \sqrt{73}}{2} > 0.$$

Итак, инерции матриц A и B совпадают:

$$n_0(A) = n_0(B) = 1, \quad n_+(A) = n_+(B) = 2, \quad n_-(A) = n_-(B) = 0.$$

Следовательно, существует преобразование переводящее квадратичную форму F в форму G.

Упражнение 7. Проверить, существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

в форму

$$G = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3,$$

вычислив инерции этих квадратичных форм.

Ответ. $n_0(A) = n_0(B) = 1$, $n_+(A) = n_+(B) = 2$, $n_-(A) = n_-(B) = 0$, следовательно, искомое преобразование существует.

Упражнение 8. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы A:

$$M_1 = 5 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$M_3 = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра. Главные миноры первого и второго порядка не зависят от λ и положительны. Для того, чтобы эта квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно чтобы и главный минор третьего порядка был положительным: $\lambda - 2 > 0$. Таким образом, данная квадратичная форма положительно определена при $\lambda > 2$.

Упражнение 9. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3.$$

Ответ. *a*) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$.

Упражнение 10. Найти канонический вид квадратичных форм, вычислив собственные числа их матриц:

a) $F = x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

b) $F = 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Ответ. *a*) $F = -2y_2^2 + 4y_3^2$, *b*) $F = y_1^2 - 3y_2^2 + 15y_3^2$.

Упражнение 11. Найти канонический вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду каждую из следующих квадратичных форм методом Лагранжа:

a) $F = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$,

b) $F = 8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Ответ. *a*) $F = z_1^2$, $x_1 = \dfrac{1}{3}z_1 + \dfrac{2}{3}z_2 + \dfrac{1}{3}z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$;

b) $F = 8z_1^2 + \dfrac{1}{2}z_3^2$, $x_1 = z_1 - z_2 - \dfrac{1}{4}z_3$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$.

Упражнение 12. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определена следующая квадратичная форма:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Ответ. $-0{,}8 < \lambda < 0$.

5.2 Эллипс, гипербола и парабола (занятие 13)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/dUP4yezzOCQIxw
https://disk.yandex.ru/i/jwgXl7jF2gtehA
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/DvQQ6RmMBQWkPg
https://disk.yandex.ru/i/fpXJsH1ad99WEQ
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 15, §1, 2

В этом параграфе будем изучать геометрические свойства кривых второго порядка на плоскости, отнесенной к декартовой системе координат x, y, предполагая, что эти кривые задаются уравнениями *канонического вида*.

Эллипсом называют кривую, которая описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для всех точек эллипса справедливы неравенства: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике (см. рис. 5.1).

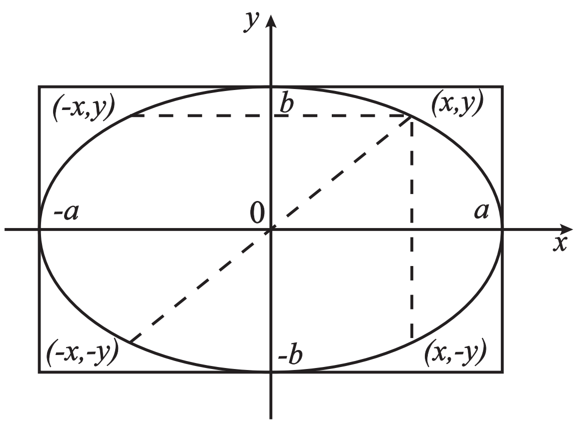


Рисунок 5.1 — К описанию геометрических свойств эллипса

Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то точки

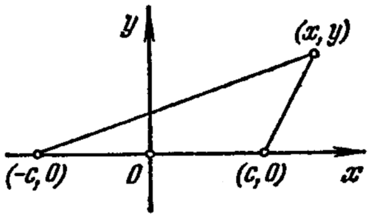


Рисунок 5.2 — К определению эллипса и гиперболы

$(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе. Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.

Числа a, b называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса a).

Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0,1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $(-c,0)$, $(c,0)$ называются *фокусами* эллипса. Пусть (x, y) — произвольная точка эллипса. Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это равенство означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 5.2). Указанное свойство эллипса можно было бы принять за его определение.

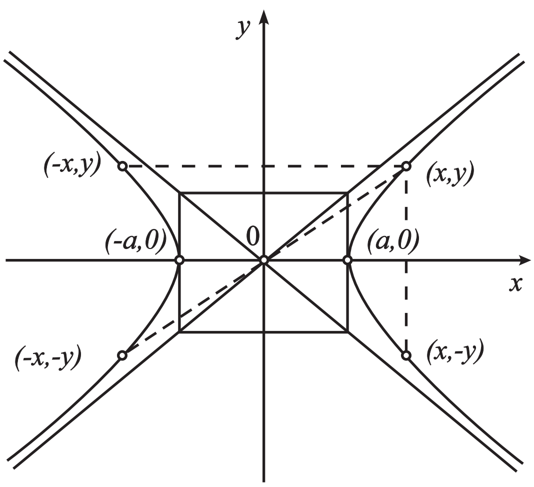


Рисунок 5.3 — К описанию геометрических свойств гиперболы

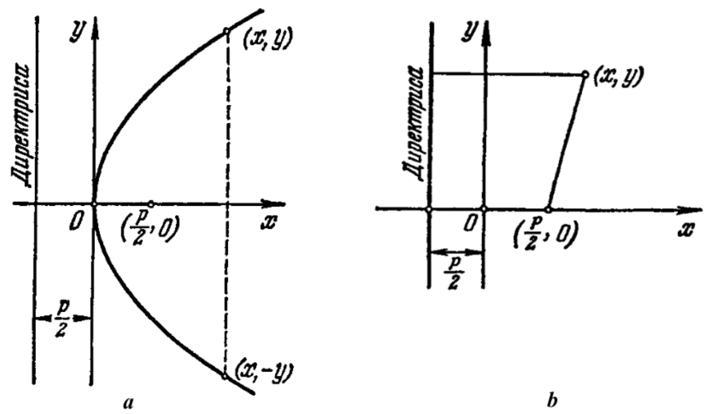


Рисунок 5.4 — К описанию геометрических свойств (a) и определению параболы (b)

Гиперболой называют кривую, описываемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если точка (x,y) лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2x^2/a^2$, т. е. гипербола лежит вне полосы $|x| < a$ и внутри соответствующих углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$ (см. рис. 5.3).

Кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат есть *центр симметрии* кривой. Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ пересечения с осью x называются *вершинами* гиперболы. Прямые $y = \pm(b/a)x$ — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (см. рис. 5.3).

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $(-c,0)$, $(c,0)$ называются *фокусами* гиперболы. Для любой точки (x,y), лежащей на гиперболе,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 5.2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Параболой называют кривую, описываемую уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Будем считать, что $p > 0$. Парабола расположена в правой полуплоскости (см. рис. 5.4, a), симметрична относительно оси x. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот.

Точка $(p/2{,}0)$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 5.4, a). Для любой точки $(x{,}y)$, принадлежащей параболе,

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = x + p/2,$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 5.4, b). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

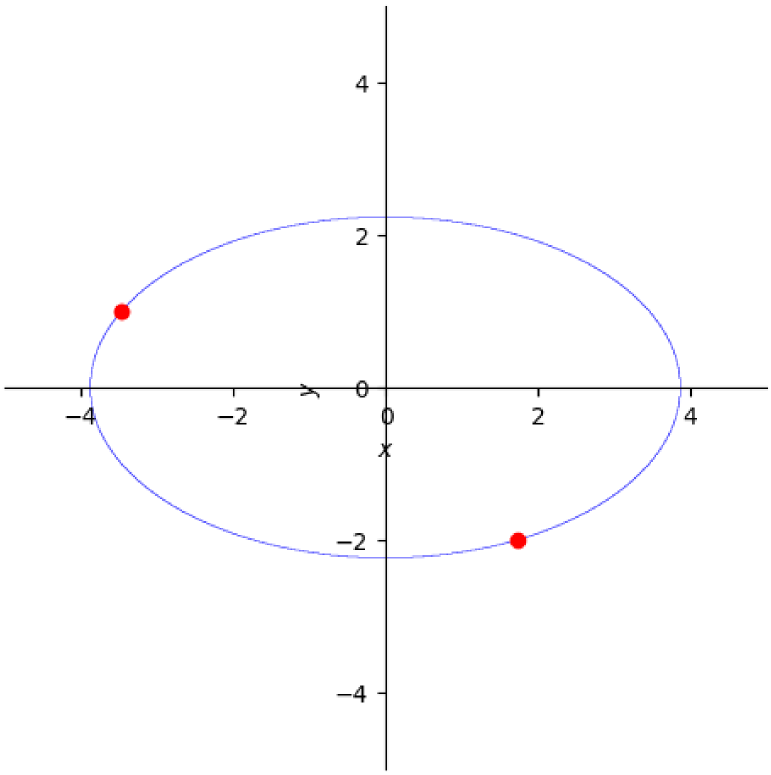


Рисунок 5.5 — К упражнению 1: эллипс, проходящей через две точки

Упражнение 1. Построить уравнение эллипса, проходящего через две точки: $(\sqrt{3}, -2)$ и $(-2\sqrt{3}, 1)$. Сделать рисунок.

Решение. Найдем a^2 и b^2 — квадраты длин большой и малой полуосей эллипса, проходящего через точки $(\sqrt{3}, -2)$ и $(-2\sqrt{3}, 1)$. Их координаты удовлетворяют искомому уравнению, поэтому имеем два уравнения для определения параметров a^2 и b^2:

$$\frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \quad \frac{12}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Выразим из второго уравнения $1/b^2$:

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{12}{a^2}.$$

Подставим найденное выражение в первое уравнение:

$$\frac{3}{a^2} + 4 - \frac{48}{a^2} = 1, \quad -\frac{45}{a^2} = -3, \quad a^2 = 15.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{12}{15}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{5}, \quad b^2 = 5.$$

Теперь запишем уравнение эллипса (см. рис. 5.5):

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Покажем, как сделать рисунок 5.5 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1zt4nAPew3gkRYUtFol1oExgC_a5JuPk9?usp=sharing

Упражнение 2. Найти длины полуосей, фокусы и эксцентриситеты следующих эллипсов и сделать рисунки:

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, *b*) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Ответ. *a*) $a = 4$, $b = 2$, $(-2\sqrt{3}{,}0)$, $(2\sqrt{3}{,}0)$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $a = 5$, $b = 2$, $(-\sqrt{21}{,}0)$, $(\sqrt{21}{,}0)$, $e = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Упражнение 3. Найти точки эллипса $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, находящиеся на расстоянии пяти единиц от его малой оси. Сделать рисунок.

Ответ. $(\pm 5, \pm 2)$.

Упражнение 4. В эллипс $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника. Сделать рисунок.

Указание. Сделаем рисунок (см. рис. 5.6). Искомый треугольник расположен симметрично относительно большой оси эллипса, и одна из его вершин совпадает с ее правой вершиной. Пусть h — высота треугольника, $\pm y$ — ординаты искомых вершин треугольника, где $y > 0$. Треугольник равносторонний, следовательно, $h^2 + y^2 = 4y^2$. Абсциссы искомых вершин совпадают и равны $x = 6 - h$. Выразите x через y. Подставьте найденное для x выражение в уравнение эллипса. Найдите y из полученного уравнения. Вычислите x, используя построенное ранее представление x.

Ответ. $\left(\dfrac{6}{7}, \pm\dfrac{12\sqrt{3}}{7}\right)$.

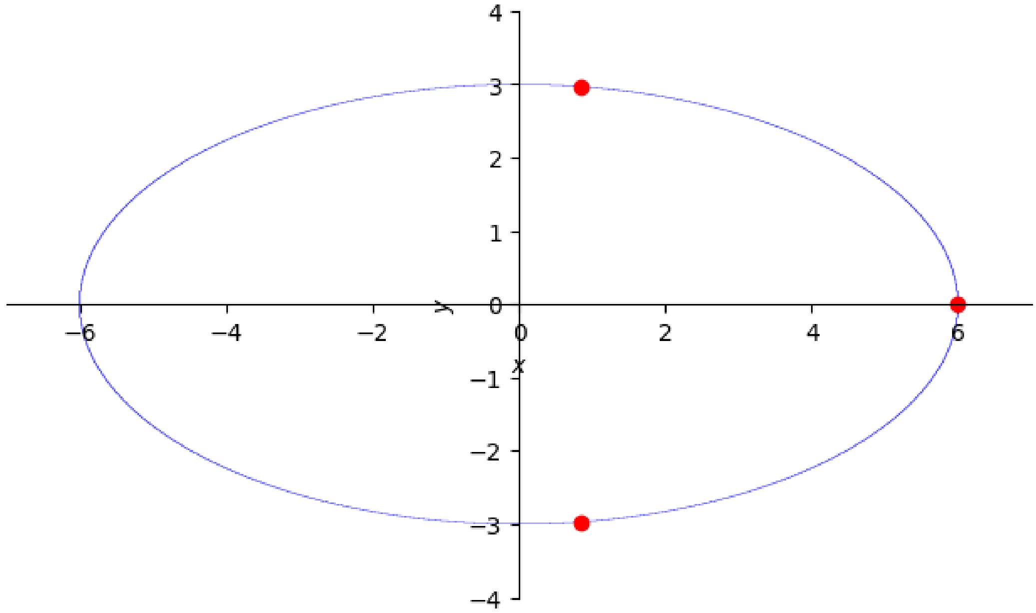


Рисунок 5.6 — К упражнению 4: вершины треугольника, вписанного в эллипс

Покажем, как сделать рисунок 5.6 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1AchB1--awvGkTf-t3fD774sTCdbciNWh?usp=sharing

Упражнение 5. Написать уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 8/10, а длина большой полуоси больше длины малой на две единицы. Сделать рисунок.

Ответ. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Упражнение 6. В эллипс $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника. Сделать рисунок.

Ответ. $S = 480/7.$

Упражнение 7. Написать уравнение эллипса, сумма длин полуосей которого равна 8, и расстояние между фокусами равно 8. Сделать рисунок.

Ответ. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Упражнение 8. Построить уравнение гиперболы, проходящей через точку $(-5, 3)$ и имеющей общие фокусы с гиперболой $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$. Сделать рисунок.

Решение. Искомая гипербола имеет общие фокусы с гиперболой

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

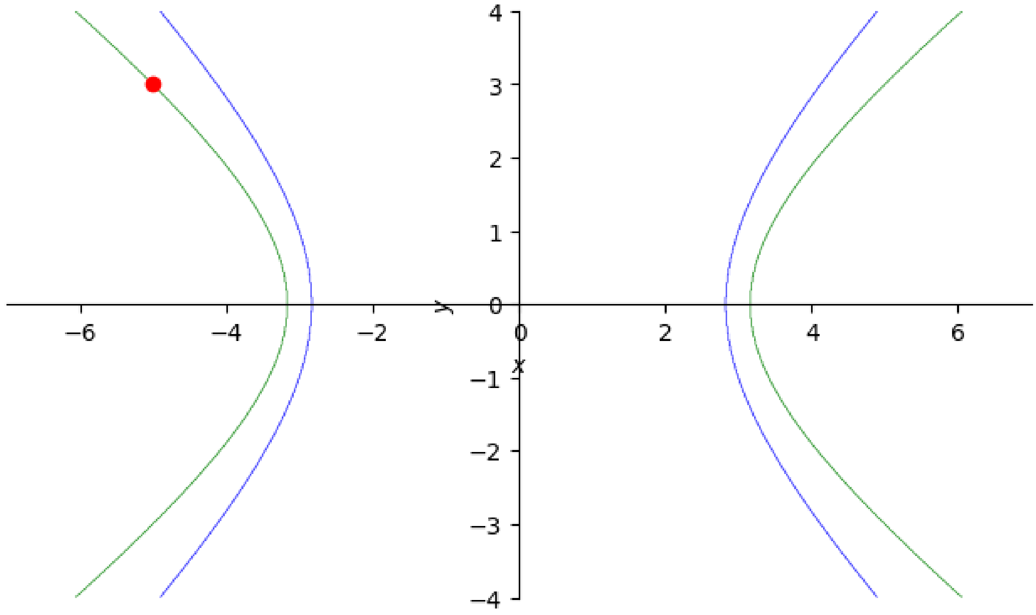


Рисунок 5.7 — К упражнению 8: две гиперболы и точка, через которую проходит найденная гипербола

Имеем $a^2 = b^2 = 8$, следовательно, $c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Гипербола проходит через точку $(-5, 3)$, координаты этой точки удовлетворяют ее уравнению:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$$

Подставим в это уравнение $b^2 = 16 - a^2$ и найдем уравнение для a^2:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{16 - a^2} = 1, \quad \frac{25}{a^2} - 1 = \frac{9}{16 - a^2}, \quad \frac{25 - a^2}{a^2} = \frac{9}{16 - a^2},$$

$$(25 - a^2)(16 - a^2) = 9a^2, \quad a^4 - 50a^2 + 400 = 0.$$

Решим полученное квадратное (относительно a^2) уравнение:

$$D = 25^2 - 400 = 225, \quad a^2 = 25 \pm 15, \quad a_1^2 = 40, \quad a_2^2 = 10.$$

Если $a^2 = 40$, то $b^2 = 16 - 40 = -24$, чего не может быть, и эта пара значений нам не подходит. Если $a^2 = 10$, то $b^2 = 16 - 10 = 6$. Таким образом, искомое уравнение:

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

Сделаем рисунок двух гипербол и точки, через которую проходит найденная гипербола (см. рис. 5.7).

Покажем, как сделать рисунок 5.7 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/11YNf_lXviL6SqJe1Pc7tzd0v2PfIn2Fi?usp=sharing

Упражнение 9. Найти вершины, фокусы и асимптоты следующих гипербол, сделать рисунки:

$a)\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1, \quad b)\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Ответ. $a)$ Вершины $(\pm 2{,}0)$, фокусы $(\pm 2\sqrt{5}{,}0)$, асимптоты $y = \pm 2x$; $b)$ вершины $(\pm 3, 0)$, фокусы $(\pm\sqrt{13}{,}0)$, асимптоты $y = \pm\dfrac{2}{3}x$.

Упражнение 10. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(\sqrt{40}{,}2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{3}x$. Сделать рисунок.

Ответ. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4/9} = 1.$

Упражнение 11. Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ и имеющий фокусы в вершинах этого эллипса. Сделать рисунок.

Ответ. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1.$

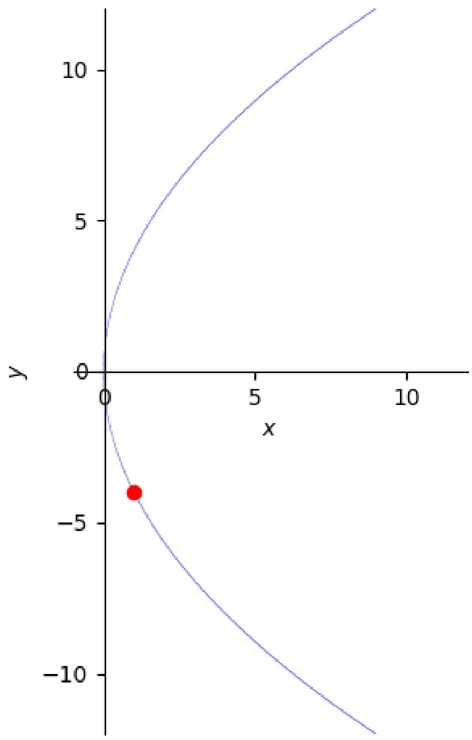


Рисунок 5.8 — К упражнению 12: парабола, проходящая через точку

Упражнение 12. Построить уравнение параболы, зная что она проходит через точку $(1, -4)$. Сделать рисунок.

Решение. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2p\,x$. Найдем p. Точка $(1, -4)$ принадлежит параболе: $(-4)^2 = 2p \cdot 1$, следовательно, $p = 8$. Искомое уравнение: $y^2 = 16x$ (см. рис. 5.8).

Покажем, как сделать рисунок 5.8 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1WTgpgSYD_Y6BnZtJ08QP6Mb80ZKfsf9m?usp=sharing

Упражнение 13. Написать уравнение параболы, зная, что расстояние от фокуса до вершины равно 3. Сделать рисунок.

Ответ. $y^2 = 12x$.

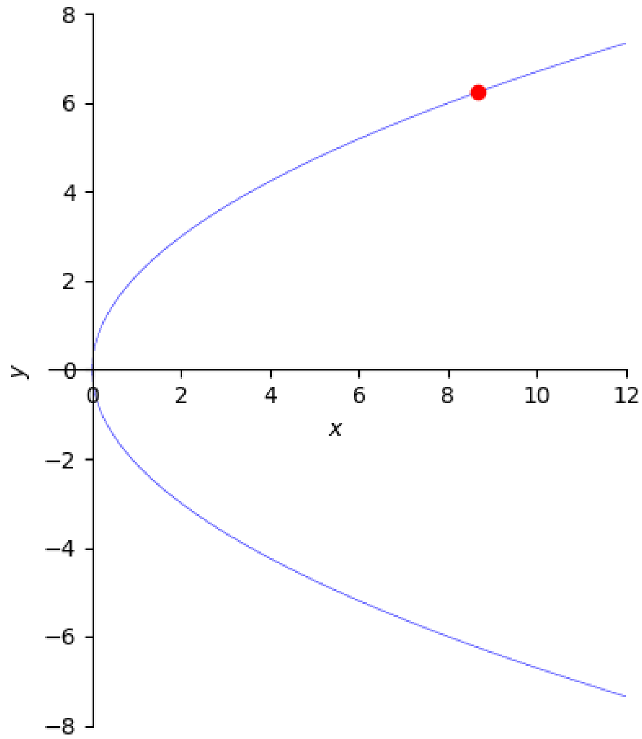


Рисунок 5.9 — К упражнению 14: парабола и искомая точка на ней

Упражнение 14. На параболе $y^2 = 4{,}5x$ выбрана точка, находящаяся от директрисы на расстоянии $d = 9{,}125$. Вычислить расстояние l от вершины параболы до этой точки. Сделать рисунок.

Указание. Сделаем рисунок параболы и искомой точки на ней (см. рис. 5.9). Найдите p. Абсциссу упомянутой точки можно вычислить по формуле $x = d - p/2$ (проверьте, что она справедлива), ординату — из уравнения параболы, искомое расстояние — по теореме Пифагора.

Ответ. $l = 10$.

Покажем, как сделать рисунок 5.9 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1hK3arxUXi8QbXNCa7-dIQqotYmrfv_zs?usp=sharing

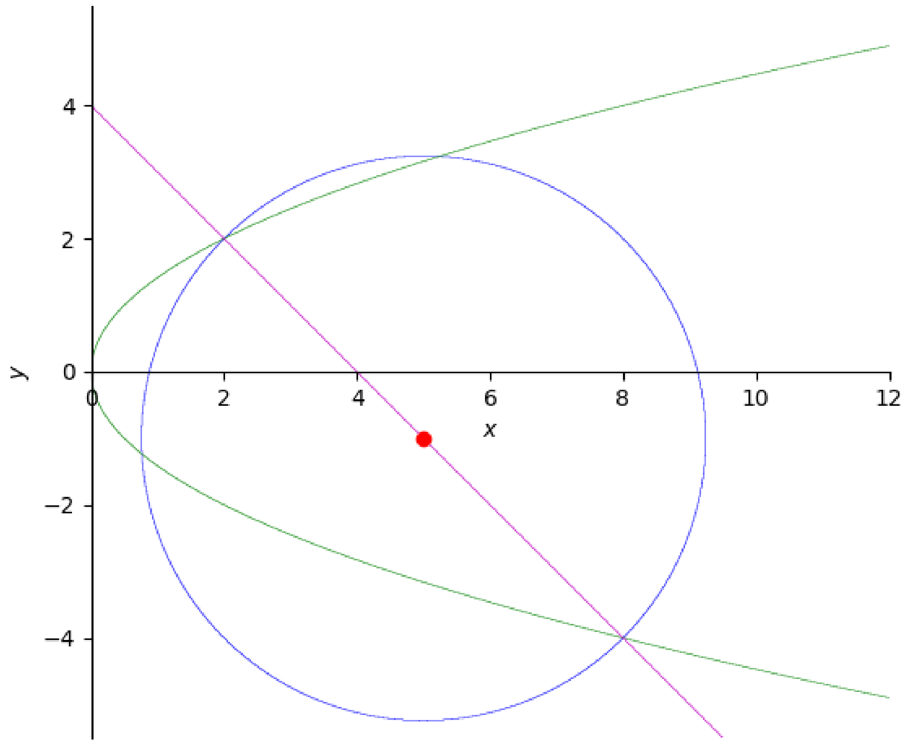


Рисунок 5.10 — К упражнению 15: парабола, прямая и искомая окружность

Упражнение 15. Найти окружность, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$. Сделать рисунок.

Решение. Нарисуем параболу, прямую и искомую окружность (см. рис. 5.10). Окружность радиуса R с центром в точке (x_0,y_0) задается следующим уравнением:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Найдем центр окружности и ее радиус. Ординаты точек пересечения заданной прямой $x + y = 4$ и параболы $y^2 = 2x$ удовлетворяют квадратному уравнению $y^2 + 2y - 8 = 0$: $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Абсциссы этих точек найдем из уравнения прямой: $x_1 = 4-y_1 = 8$, $x_2 = 4-y_2 = 2$. Диаметр окружности равен расстоянию между этими точками:

$$2R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \quad R^2 = 18.$$

Центр окружности совпадает с серединой отрезка, концами которого служат найденные точки. Вычислим его координаты:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8+2}{2} = 5,$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

Запишем уравнение искомой окружности:

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 18.$$

Покажем, как сделать рисунок 5.10 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1nRYC_vOAZEksOdqtHkZtFDC8LrvPQ4xd?usp=sharing

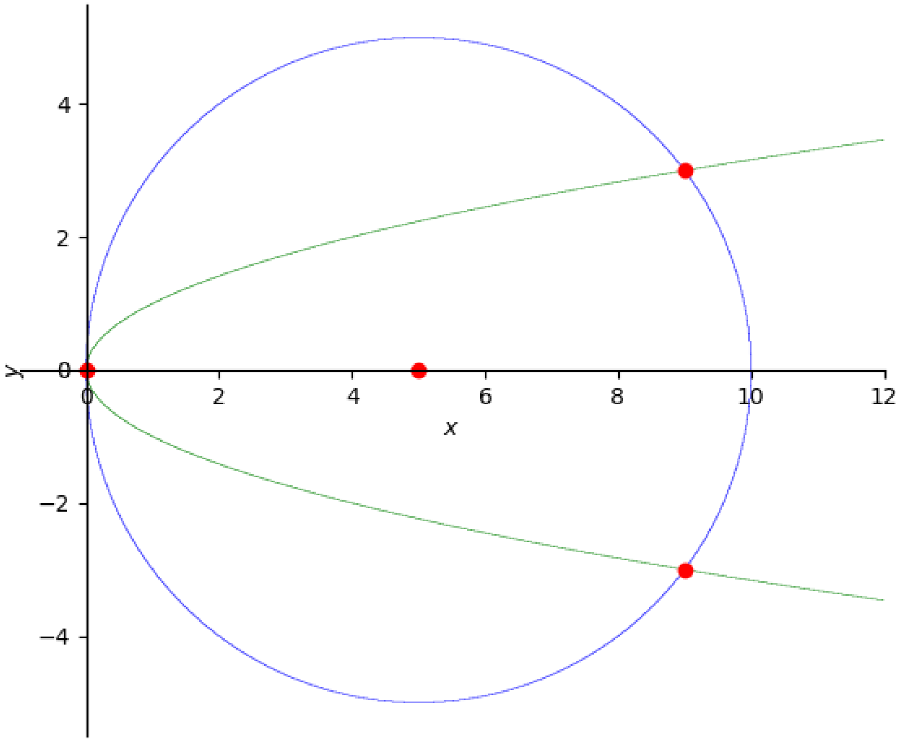


Рисунок 5.11 — К упражнению 16: парабола и искомая окружность

Упражнение 16. Найти общие точки параболы $y^2 = x$ и окружности, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси x и радиус, равный 5. Сделать рисунок.

Указание. Сделаем рисунок параболы и искомой окружности (см. рис. 5.11). Напишите уравнение окружности. Замените в этом уравнении y^2 на x (почему это надо сделать?). Координаты x искомых точек найдите, решив получившееся квадратное уравнение. Ординаты точек найдите из уравнения параболы.

Ответ. Три общих точки: (0,0), (9, ± 3).

Покажем, как сделать рисунок 5.11 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/17ndAlYgOkDYZDrCCZA_bNjuc8wnnX1DR?usp=sharing

Упражнение 17. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что парабола проходит через точку пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 = 9$. Сделать рисунок.

Ответ. $p = 3/(2\sqrt{2})$.

Упражнение 18. Построить уравнение эллипса, который проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой) и имеет эксцентриситет, равный $6/10$. Сделать рисунок.

Ответ. $\dfrac{x^2}{29/4} + \dfrac{y^2}{116/25} = 1.$

5.3 Поворот координатных осей и перенос начала системы координат (занятие 14)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/dUP4yezzOCQIxw

https://disk.yandex.ru/i/jwgXl7jF2gtehA

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/DvQQ6RmMBQWkPg

https://disk.yandex.ru/i/fpXJsH1ad99WEQ

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 15, §1, 2

В этом параграфе предлагаются упражнения на приведение к простейшему виду уравнения кривой второго порядка. Будем рассматривать плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x, y. Множество всех точек плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{5.4}$$

называют *кривой второго порядка*. Здесь a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения*.

Упрощение этого уравнения (или, как говорят, приведение его к *каноническому виду*) будем выполнять с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

где T — ортогональная матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол φ, если считать при этом, что исходная декартова система координат правая, т. е. поворот от оси x к оси y — поворот против часовой стрелки, и последующий перенос начала системы координат в точку (x_0,y_0).

Выбирая соответствующим образом начало новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу T, уравнение (5.4) можно преобразовать к уравнению эллипса, гиперболы, или параболы. Кривая может выродится в точку, совпасть с одной из координатных осей, распасться на две прямые. Кроме того, уравнение может быть приведено к одному из видов, не имеющих вещественных решений. Приведем сводку уравнений и названий кривых второго порядка:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a \geqslant b > 0$, — эллипс,
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллипс,
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся прямых,
4. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гипербола,
5. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся прямых,
6. $y^2=2px$, $p>0$, — парабола,
7. $y^2=a^2$, $a>0$, — пара параллельных прямых,
8. $y^2=-a^2$, $a>0$, — пара мнимых параллельных прямых,
9. $y^2=0$ — пара прямых, совпадающих с осью x.

Если в уравнении (5.4) $a_{12}=0$, то достаточно выполнить только перенос начала системы координат: $x_1=x-x_0$, $y_1=y-y_0$. При этом $T=I$. Начнем с этого более простого случая.

Используя перенос начала системы координат, привести следующие уравнения к каноническому виду и выяснить расположение кривых по отношению к исходной системе координат. Сделать рисунки.

Упражнение 1. $x^2+y^2-2x+6y-5=0$.

Решение. Сгруппируем переменные так, чтобы легче было найти замену переменных:

$$x^2+y^2-2x+6y-5=0,$$

$$(x^2-2x)+(y^2+6y)-5=0,$$

$$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9-5=0,$$

$$(\underline{x-1})^2+(\underline{y+3})^2-15=0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1=\underline{x-1},\quad y_1=\underline{y+3}.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат x_1, y_1 в точку $(1, -3)$ на плоскости x, y. Сделаем рисунок (см. рис. 5.12). В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$x_1^2 + y_1^2 = 15, \quad \frac{x_1^2}{15} + \frac{y_1^2}{15} = 1.$$

Это уравнение эллипса с равными полуосями — окружности радиуса $R = \sqrt{15}$. Центр окружности совпадает с началом новой системы координат, т. е. находится в точке $(1, -3)$. Нарисуем эту окружность.

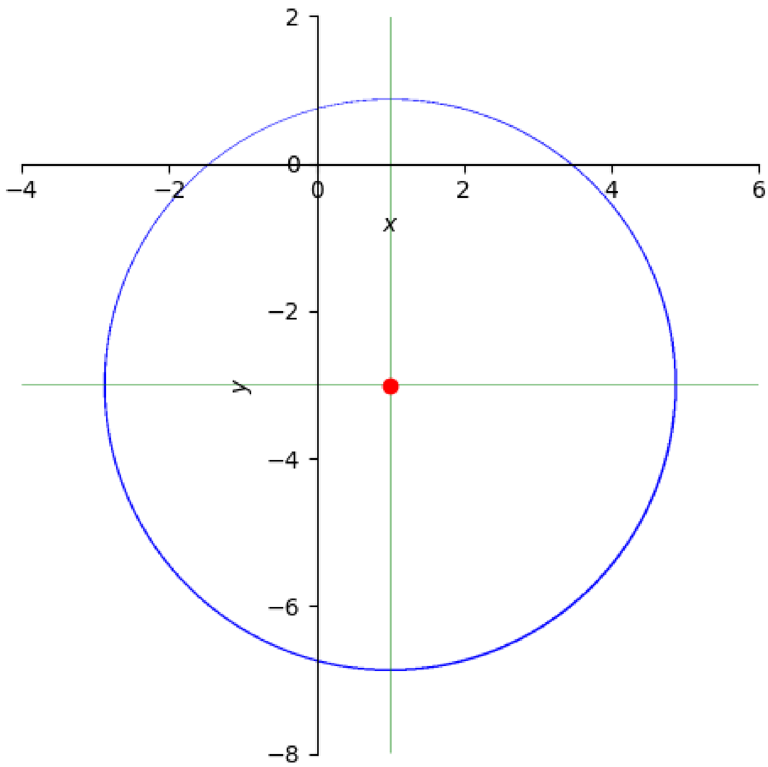


Рисунок 5.12 — К упражнению 1: искомая окружность

Покажем, как сделать рисунок 5.12 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1GTTPTQxk89UtLp8iRWrFr032jzUxrMvQ?usp=sharing

Упражнение 2. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1$. Эллипс, длины его полуосей $a = 4$ и $b = 2$, центр симметрии находится в точке $(-2{,}1)$, большая полуось параллельна оси x. Сделайте рисунок.

Упражнение 3. $2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$.

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{6} + \dfrac{y_1^2}{3} = 1$. Эллипс, длины полуосей которого $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, центр симметрии находится в точке $(1, -2)$, большая полуось параллельна оси y. Сделайте рисунок.

Упражнение 4. $9x^2 - y^2 - 18x - 20y - 316 = 0$.

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{25} - \dfrac{y_1^2}{225} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(1, -10)$. Продольная ось симметрии гиперболы (на которой лежат ее вершины) параллельна оси x; $a = 5$, $b = 15$. Сделайте рисунок.

Упражнение 5. $6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$.

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{6} - \dfrac{y_1^2}{5} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(-1, -1)$. Продольная ось симметрии гиперболы (на которой лежат ее вершины) параллельна оси y; $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$. Сделайте рисунок.

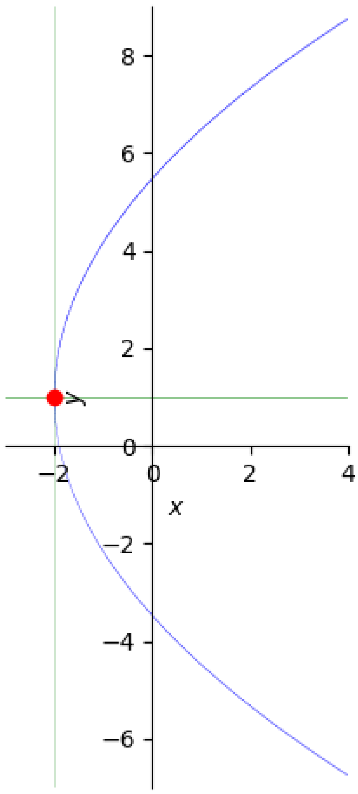


Рисунок 5.13 — К упражнению 6: искомая парабола

Упражнение 6. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.

Решение. Последовательно будем группировать переменные так, чтобы легче было найти их замену:

$$y^2 - 10x - 2y - 19 = 0,$$

$$(y^2 - 2y) - 10x - 19 = 0,$$
$$(y-1)^2 - 1 - 10x - 19 = 0,$$
$$(y-1)^2 - 10(x+2) = 0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1 = x + 2, \quad y_1 = y - 1.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат x_1, y_1 в точку $(-2{,}1)$ на плоскости x, y. Сделаем рисунок (см. рис 5.13). В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$y_1^2 = 10x_1.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $(-2{,}1)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси x; $p = 5$. Нарисуем эту параболу (см. рис 5.13).

Покажем, как сделать рисунок 5.13 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1wIeKsV-LhSzDFloqpBdn89eZn5q-gr0f?usp=sharing

Упражнение 7. $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

Ответ. $y_1^2 = 4x_1$. Парабола с вершиной в точке $(3{,}5)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси y; $p = 2$. Сделайте рисунок.

Упражнение 8.

$$6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0. \tag{5.5}$$

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{1/(6\cdot 8)} + \dfrac{y_1^2}{1/8^2} = -1$. Мнимый эллипс.

Упражнение 9.

$$2x^2 + 9y^2 - 12x - 6y + 19 = 0. \tag{5.6}$$

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{1/2} + \dfrac{y_1^2}{1/9} = 0$. Пара мнимых пересекающихся прямых.

Упражнение 10.

$$3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0. \tag{5.7}$$

Ответ. $\dfrac{x_1^2}{1/3} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 0$. Пара прямых $y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}(x+1)+1$, пересекающихся в точке $(-1{,}1)$. Сделайте рисунок.

Упражнение 11.

$$x^2 + x - 6 = 0. \tag{5.8}$$

Ответ. $y_1^2 = \dfrac{25}{4}$. Это две параллельные прямые: $x = 2$ и $x = -3$. Сделайте рисунок.

Упражнение 12.

$$y^2 - 5y + 11 = 0. \tag{5.9}$$

Ответ. $y_1^2 = -\dfrac{19}{4}$. Пара мнимых параллельных прямых.

Упражнение 13.

$$25x^2 - 30x + 9 = 0. \tag{5.10}$$

Ответ. $y_1^2 = 0$. Пара совпадающих прямых $5x - 3 = 0$. Сделайте рисунок.

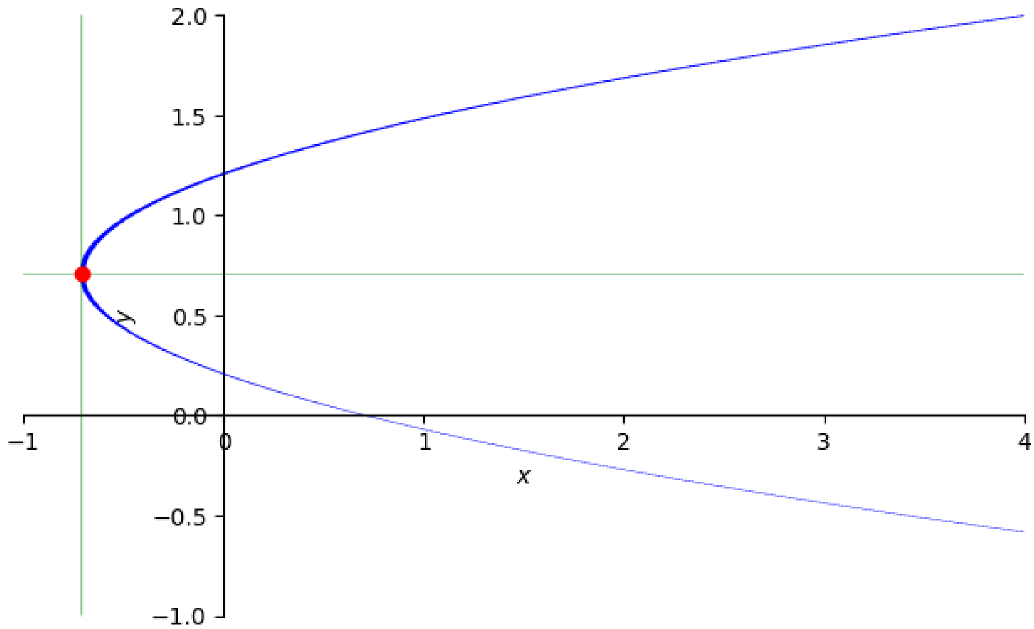


Рисунок 5.14 — К упражнению 14: искомая парабола

Упражнение 14.

$$4y^2 - \sqrt{2}x - \frac{8}{\sqrt{2}}y + 1 = 0. \tag{5.11}$$

Решение. Последовательно будем группировать переменные так, чтобы легче было найти их замену:

$$4y^2 - \sqrt{2}x - \frac{8}{\sqrt{2}}y + 1 = 0,$$

$$4\left(y^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y\right) - \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$4\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{2} - \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$4\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Выполним замену переменных

$$x_1 = x + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = y - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эта замена переменных переносит начало системы координат x_1, y_1 в точку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ на плоскости x, y. Сделаем рисунок (см. рис. 5.14). В новых переменных уравнение имеет канонический вид:

$$y_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x_1.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, направление оси ее симметрии совпадает с положительным направлением оси x; $p = \sqrt{2}/8$. Нарисуем эту параболу (см. рис. 5.14).

Покажем, как сделать рисунок 5.14 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1lZEFQs_KnI_JREgr9NSe7QNB7QI-KxSt?usp=sharing

С помощью поворота координатных осей и переноса начала системы координат привести следующие уравнения к каноническому виду и выяснить расположение данных кривых по отношению к исходной системе координат. Сделать рисунки.

Упражнение 15. $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Решение. Из старших коэффициентов уравнения

$$\underline{2x^2 - 4xy + 2y^2} + 3x - 5y + 1 = 0$$

составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это матрица квадратичной формы, подчеркнутой в исходном уравнении. Наша ближайшая цель — привести эту квадратичную форму к каноническому виду невырожденным ортогональным преобразованием переменных, которое определяется матрицей вращения T. Вычислим собственные числа матрицы A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda+2) = -\lambda(4-\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.$$

Два возможных угла поворота координатных осей определяются по следующей формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{a_{11} - \lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1, 2.$$

Найдем их:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2-0}{-2} = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{2-4}{-2} = -1.$$

Выберем первый угол и обозначим его φ. Имеем

$$\varphi = \varphi_1 = \pi/4.$$

Квадратичная форма в новых переменных принимает следующий канонический вид:

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = \underline{4y_1^2}.$$

Отметим, что если бы мы выбрали второй угол, то надо было бы изменить нумерацию собственных чисел λ_1 и λ_2. Тогда квадратичная форма приняла бы вид $4x_1^2$.

Теперь необходимо выяснить, как изменятся младшие слагаемые исходного уравнения в результате выбранной нами замены переменных. Выпишем ее подробнее:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\pi/4 - y_1 \sin\pi/4 \\ x_1 \sin\pi/4 + y_1 \cos\pi/4 \end{pmatrix},$$

$$x = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1}}, \quad y = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1}}.$$

В переменных x_1 и y_1 уравнение принимает следующий вид:

$$\underline{4y_1^2} + 3\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)}} - 5\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)}} + 1 = 0,$$

$$4y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0.$$

Это уравнение с точностью до обозначения переменных совпадает с уравнением (5.11). Выполним замену переменных $x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получим уравнение параболы: $y_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x_2$.

Выясним расположение этой параболы по отношению к исходной системе координат. Вершина параболы совпадет с началом системы координат x_2, y_2. Найдем эту точку на плоскости x, y:

$$x_2 = 0 \implies x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = 0 \implies y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = -1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = 0.$$

Итак, вершина параболы лежит в точке $(-1{,}0)$. Первая сделанная нами замена переменных интерпретируется как поворот координатных осей против часовой стрелки (от x к y) на угол $\pi/4$. Следовательно, ось параболы лежит на прямой, проходящей через точку $(-1{,}0)$ под углом $\pi/4$ к оси x. Уравнение этой прямой: $y = x + 1$. Ветви параболы направлены в первую четверть плоскости x, y. Сделаем рисунок (см. рис. 5.15).

Покажем, как сделать рисунок 5.15 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1ZFEmGL8xZfSqE5qN399LVJGbUsMDkj0L?usp=sharing

Упражнение 16. $xy + x + y = 0$.

Ответ. $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1$. Гипербола с центром симметрии в точке $(-1, -1)$, асимптоты параллельны осям координат, одна вершина лежит в точке $(0{,}0)$, вторая — в точке $(-2, -2)$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Сделайте рисунок.

Упражнение 17.

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0. \tag{5.12}$$

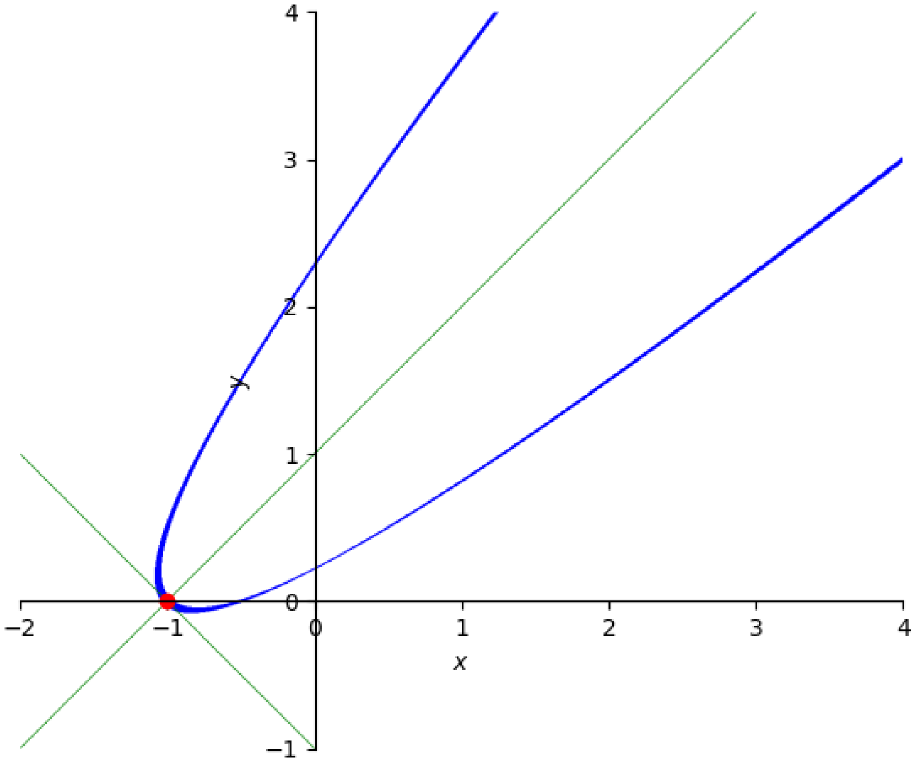


Рисунок 5.15 — К упражнению 15: искомая парабола

Ответ. $\dfrac{x_2^2}{9} + \dfrac{y_2^2}{1} = 1$. Эллипс с центром симметрии в точке (1,1), длины полуосей $a = 3$, $b = 1$. Большая полуось лежит на прямой $y = 2 - x$. Сделайте рисунок.

5.4 Метод инвариантов (занятие 15)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/dUP4yezzOCQIxw

https://disk.yandex.ru/i/jwgXl7jF2gtehA

https://disk.yandex.ru/i/zYVU4nxn1z8QNQ

https://disk.yandex.ru/i/B9_H-y4g3j7U9w

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/DvQQ6RmMBQWkPg

https://disk.yandex.ru/i/fpXJsH1ad99WEQ

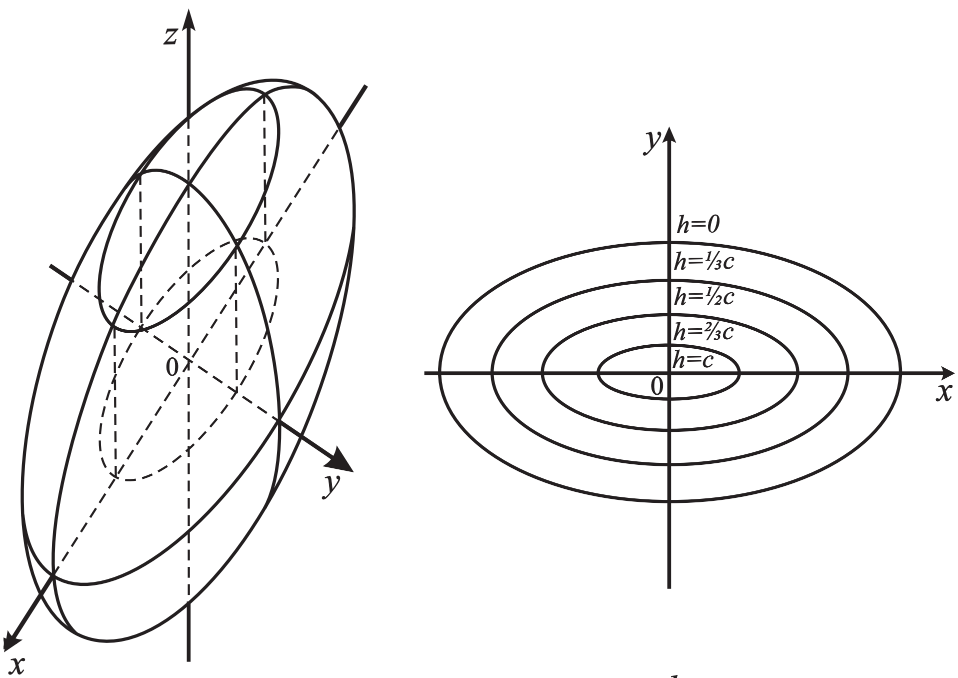
https://disk.yandex.ru/i/QoENDfRmh_1aLA

https://disk.yandex.ru/i/VoCCX3GjTZprhw

Учебник:

https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg

Глава 15, §1, 2, Глава 16, §1, 2



a *b*

Рисунок 5.16 — Эллипсоид (a), сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ (b)

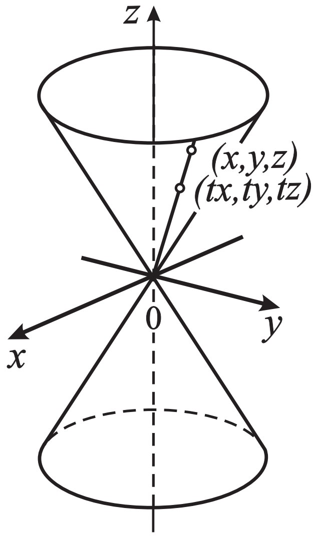


Рисунок 5.17 — Эллиптический конус

Общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{5.13}$$

невырожденной заменой переменных может быть преобразовано к уравнению в одной из следующих *приведенных форм*:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \frac{\det(B)}{\det(A)} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{5.14}$$

$$\lambda_2 y_1^2 + 2\widehat{a}_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0, \tag{5.15}$$

$$\lambda_2 y_1^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 = 0. \tag{5.16}$$

Здесь λ_1, λ_2 — характеристические числа матрицы A,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{a}_1 = \sqrt{-\det(B)/\mathrm{tr}(A)},$$

$$\widehat{a}_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{\mathrm{tr}(A)}, \quad \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Уравнение в приведенной форме легко преобразовать к каноническому виду. В этом параграфе мы не будем интересоваться, какой именно заменой переменных общее уравнение приводится к каноническому виду. Наша задача — записать уравнение в каноническом виде непосредственно с использованием указанных формул. Этот метод называется *методом инвариантов*.

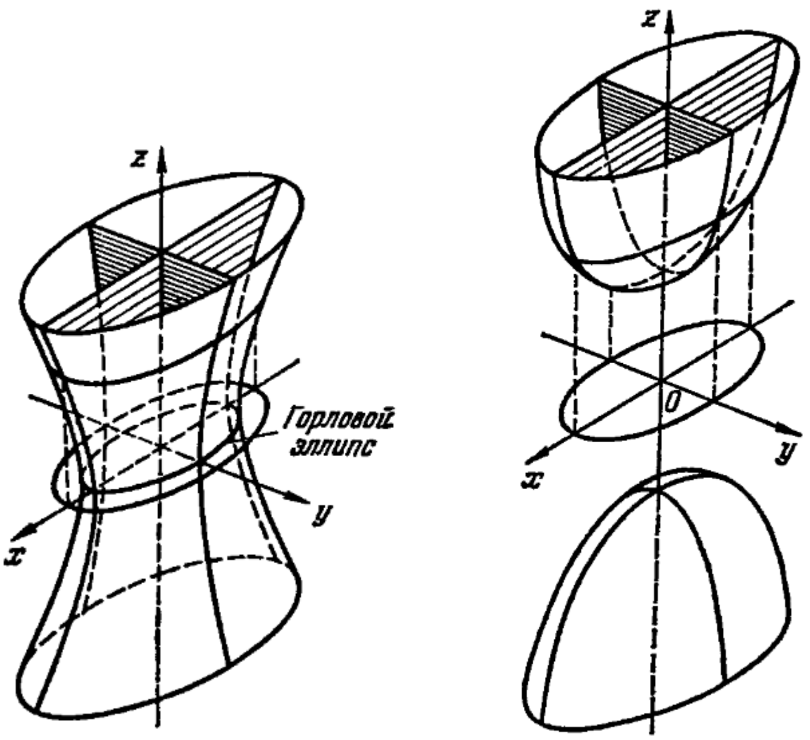


Рисунок 5.18 — Однополостный (слева) и двуполостный (справа) гиперболоиды

Метод инвариантов можно применять и при исследовании поверхностей второго порядка. Опишем его применительно к случаю трех переменных.

Отнесем трехмерное евклидово пространство к декартовой системе координат x, y, z. *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+ \tag{5.17}$$

$$+2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Составим из коэффициентов этого уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — характеристические числа матрицы A. С помощью некоторой невырожденной замены переменных уравнение (5.17) можно преобразовать к одной из *приведенных форм*:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \neq 0, \tag{5.18}$$

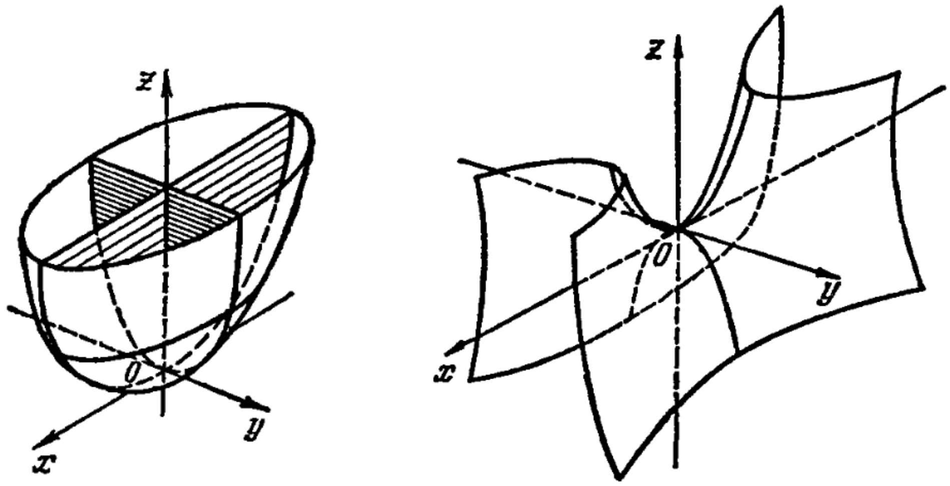


Рисунок 5.19 — Эллиптический (слева) и гиперболический (справа) параболоиды

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2\widehat{a}_3 z_1 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\, \lambda_3 = 0, \tag{5.19}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\, \lambda_3 = 0, \tag{5.20}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 y_1 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\, \lambda_2,\; \lambda_3 = 0, \tag{5.21}$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\, \lambda_2,\; \lambda_3 = 0. \tag{5.22}$$

Если оставить в стороне вопрос о преобразовании системы координат, то аналогично случаю кривых второго порядка коэффициенты уравнений (5.18)–(5.22) могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения (5.17) с помощью метода инвариантов:

$$\widehat{a}_0 = \det(B)/\det(A), \quad \widehat{a}_3 = \sqrt{-\det(B)/\mathcal{I}_2(A)}$$

$$\widehat{a}_{0,1} = \mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_2(A), \quad \widehat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathrm{tr}(A)}, \quad \widehat{a}_{0,2} = \mathcal{I}_2(B)/\mathrm{tr}(A).$$

Здесь

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

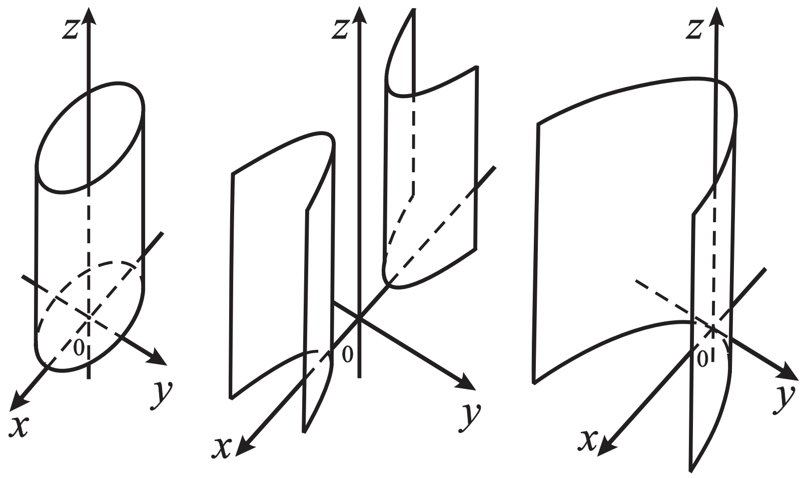


Рисунок 5.20 — Цилиндры

Уравнение в приведенной форме может быть легко преобразовано к уравнению в одном из *канонических видов*. Приведем сводку этих уравнений и названий соответствующих поверхностей второго порядка (кроме указанных ниже возможны случаи вырождения, аналогичные возникающим при рассмотрении кривых второго порядка):

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид (см. рис. 5.16),
2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — эллиптический конус (см. рис. 5.17),
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный гиперболоид (см. рис. 5.18, слева),
4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — двуполостный гиперболоид (см. рис. 5.18, справа),
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ — эллиптический параболоид (см. рис. 5.19, слева),
6. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ — гиперболический параболоид (см. рис. 5.19, справа),
7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (см. рис. 5.20),
8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр (см. рис. 5.20),
9. $y^2=2px$ — параболический цилиндр (см. рис. 5.20).

Используя метод инвариантов, найти приведенную форму и преобразовать следующие уравнения кривых второго порядка к каноническому виду. Определить, к какому типу относится каждая кривая.

Упражнение 1. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$.

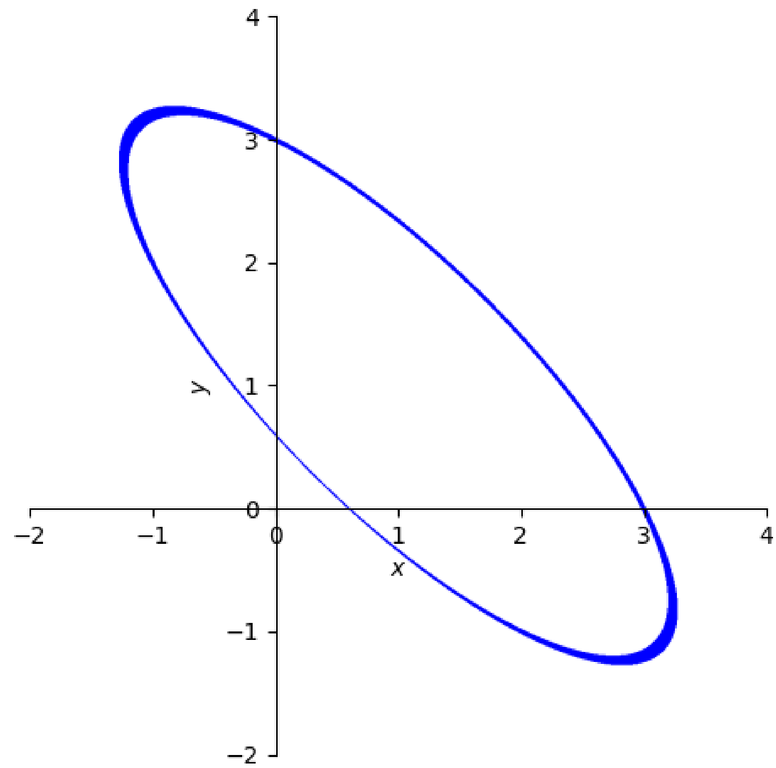


Рисунок 5.21 — К упражнению 1: искомый эллипс

Решение. Запишем матрицы A и B, составленные из коэффициентов данного уравнения:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристические числа и определитель матрицы A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)(5-\lambda-4) = (9-\lambda)(1-\lambda),$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9, \quad |A| = \lambda_1\lambda_2 = 9.$$

Вычислим определитель матрицы B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9(16-25) = -9^2.$$

Определитель матрицы A не равен нулю, следовательно, исходное уравнение имеет приведенную форму (5.14), т. е. $1x_1^2+9y_1^2-9=0$. Отсюда легко находится канонический вид уравнения:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{1}=1.$$

Это уравнение эллипса (сравните с уравнением (5.12) и его преобразованием). Сделаем рисунок (см. рис. 5.21).

Покажем, как сделать рисунок 5.21 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1iUAgQVx2OuDHd8llJCkWD6pyGbq-n3ZU?usp=sharing

Упражнение 2. $xy+x+y=0$.

Ответ. Гипербола $\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}=1$, приведенная форма $\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}y_1^2-1=0$.

Упражнение 3. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

Решение. Запишем матрицы A и B, составленные из коэффициентов исходного уравнения:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

Имеем

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ -5 & -3 & 25\end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристические числа матрицы A:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -\lambda & \lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda+1)=-\lambda(2-\lambda),$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2.$$

Вычислим определитель матрицы B:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ -5 & -3 & 25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & -8 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -8\\ -8 & 0\end{vmatrix}=-8^2.$$

Только одно характеристическое число матрицы A не равно нулю, следовательно, исходное уравнение имеет либо приведенную форму (5.15), либо (5.16). Определитель матрицы B отличен от нуля, поэтому уравнение имеет форму (5.15). Вычислим коэффициент

$$\widehat{a}_1 = \sqrt{-\det(B)/\mathrm{tr}(A)} = \sqrt{8^2/2} = 4\sqrt{2}.$$

Запишем приведенную форму уравнения: $2y_1^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2}x_1 = 0$. Ясно, какая замена переменных приводит приведенную форму уравнения к его каноническому виду:

$$y_2^2 = 4\sqrt{2}x_2.$$

Это уравнение параболы (см. рис. 5.22).

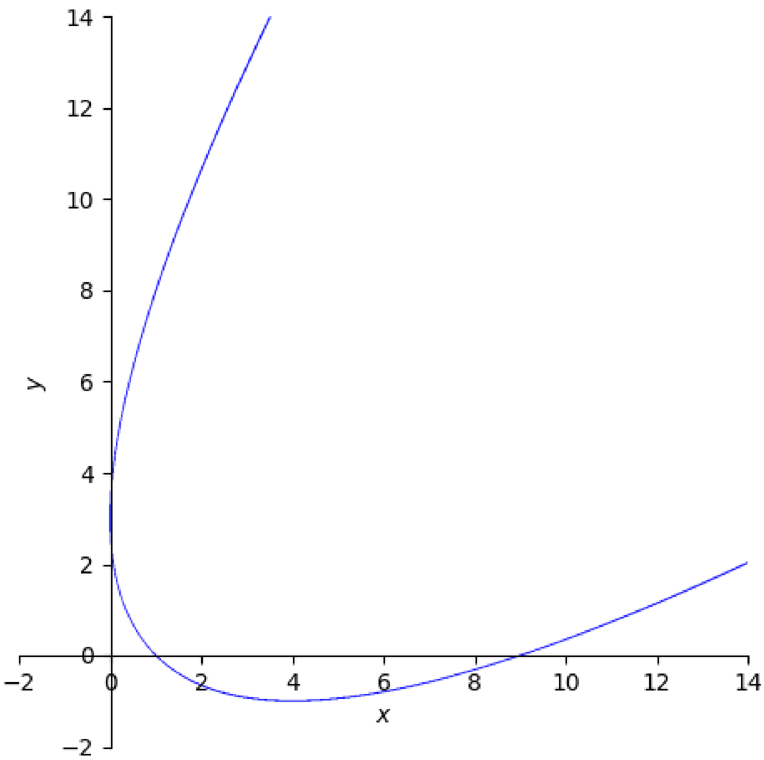


Рисунок 5.22 — К упражнению 3: искомая парабола

Покажем, как сделать рисунок 5.22 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1X7Z7zGiT2m-umXlwLZsY-z-sF9PNoeBZ?usp=sharing

Упражнение 4. $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$.

Ответ. Мнимый эллипс $\dfrac{x_1^2}{1/(6 \cdot 8)} + \dfrac{y_1^2}{8^2} = -1$. Уравнение в приведенной форме: $6x_1^2 + 8y_1^2 + \dfrac{1}{8} = 0$. Сравните с уравнением (5.5).

Упражнение 5. $2x^2 + 9y^2 - 12x - 6y + 19 = 0$.

Ответ. Пара мнимых пересекающихся прямых $\dfrac{x_1^2}{1/2} + \dfrac{y_1^2}{1/9} = 0$. Приведенная форма уравнения: $2x_1^2 + 9y_1^2 = 0$. Сравните с уравнением (5.6).

Упражнение 6. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$.

Ответ. Пара пересекающихся прямых $\dfrac{x_1^2}{1/3} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 0$. Приведенная форма уравнения: $3x_1^2 - 2y_1^2 = 0$. Сравните с уравнением (5.7).

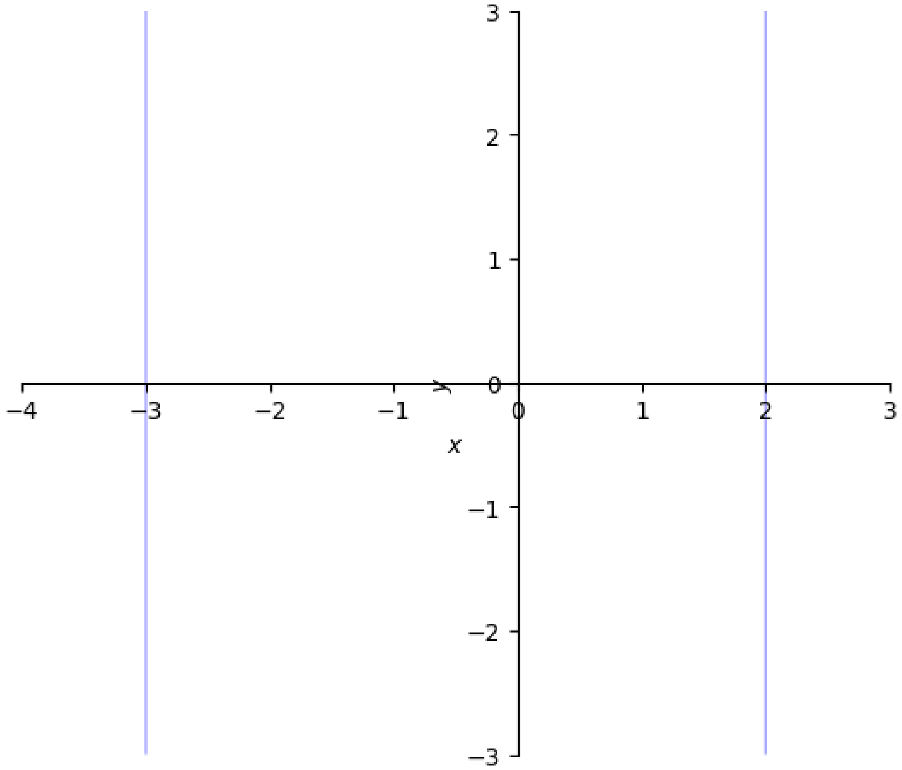


Рисунок 5.23 — К упражнению 7: искомые параллельные прямые

Упражнение 7. $x^2 + x - 6 = 0$.

Решение. Одно из собственных чисел матрицы A уравнения

$$x^2 + x - 6 = 0$$

равно нулю, второе — единице. Обозначим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Для того, чтобы решить, какую приведенную форму имеет это уравнение — (5.15) или (5.16), вычислим определитель матрицы B:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, уравнение приводится к виду (5.16). Имеем

$$\widehat{a}_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{\operatorname{tr}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}}{1+0} =$$

$$= -6 - \frac{1}{4} = -\frac{25}{4}.$$

Запишем уравнение в приведенной форме и каноническом виде:

$$y_1^2 - \frac{25}{4} = 0, \quad y_1^2 = \frac{25}{4}.$$

Этому уравнению удовлетворяют две параллельные прямые (сравните с (5.8)). Сделаем их рисунок (см. рис. 5.23).

Покажем, как сделать рисунок 5.23 в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1fjEf3e9kHP_xO16wgNM7IBRnE6ZyQ3Ov?usp=sharing

Упражнение 8. $y^2 - 5y + 11 = 0$.

Ответ. Пара мнимых параллельных прямых $y_1^2 = -\dfrac{19}{4}$. Приведенная форма уравнения: $y_1^2 + \dfrac{19}{4} = 0$. Сравните с уравнением (5.9).

Упражнение 9. $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

Ответ. Пара совпадающих прямых $y_1^2 = 0$. Приведенная форма уравнения: $25y_1^2 = 0$. Сравните с уравнением (5.10).

С помощью метода инвариантов найти приведенную форму и преобразовать следующие уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду. Определить, к какому типу относится каждая поверхность.

Упражнение 10. $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$.

Решение. Вычислим характеристические числа матрицы A, составленной из старших коэффициентов уравнения

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)^2\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2(2-\lambda), \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 6.$$

Следовательно, $\det(A) = 72$. Вычислим определитель матрицы B:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 72.$$

Оба определителя отличны от нуля, следовательно, приведенная форма уравнения записывается следующим образом:

$$2x_1^2 + 6y_1^2 + 6z_1^2 = 1.$$

Это эллипсоид (см. рис. (5.24))

$$\frac{x_1^2}{1/2} + \frac{y_1^2}{1/6} + \frac{z_1^2}{1/6} = 1.$$

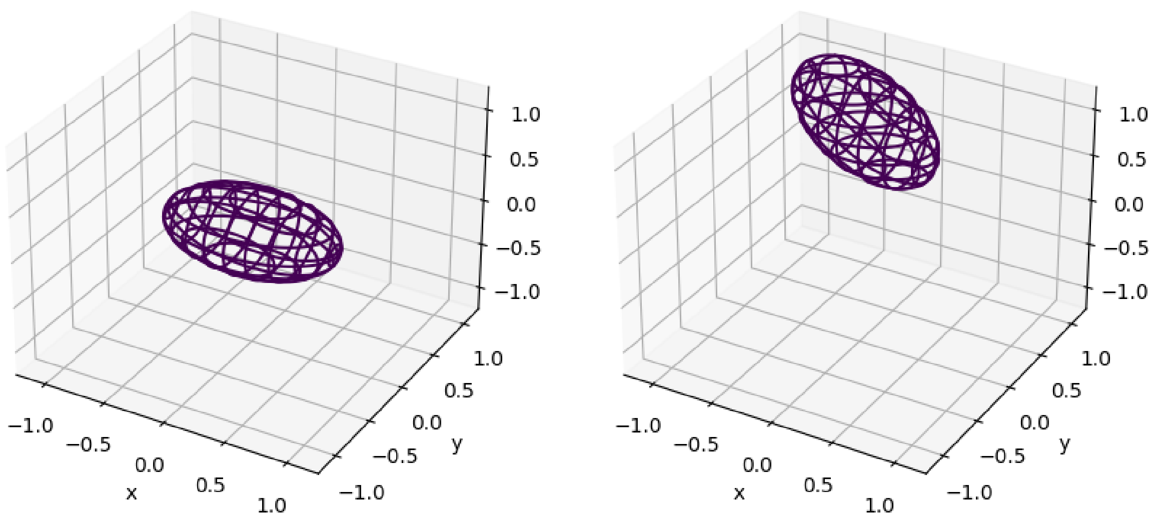


Рисунок 5.24 — К упражнению 10: эллипсоид, заданный уравнением в приведенной форме (слева) и исходным уравнением (справа)

Упражнение 11. $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$.

Ответ. Гиперболический параболоид $\dfrac{x_1^2}{3} - \dfrac{y_1^2}{3} = z_1$. Уравнение в приведенной форме: $-2x_1^2 + 2y_1^2 + 6z_1 = 0$ (см. рис. (5.25)).

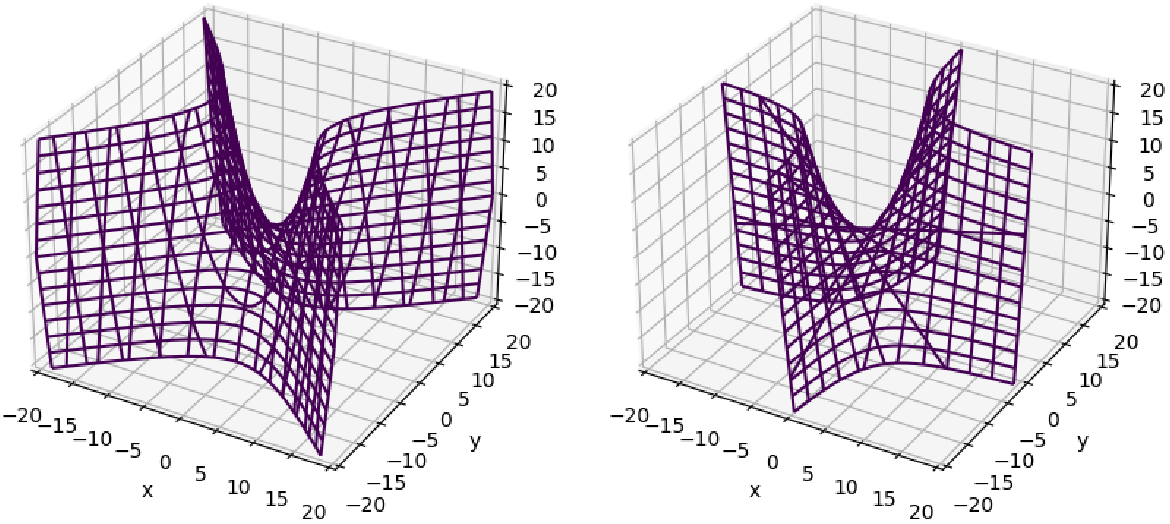


Рисунок 5.25 — К упражнению 11: гиперболический параболоид, заданный уравнением в приведенной форме (слева) и исходным уравнением (справа)

Упражнение 12. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 1 = 0$.

Ответ. Гиперболический цилиндр $\dfrac{x_1^2}{1} - \dfrac{y_1^2}{1/2} = 1$. Уравнение в приведенной форме: $-1x_1^2 + 2y_1^2 + 1 = 0$ (см. рис. (5.26)).

Упражнение 13. $-z^2 + 3x + 4y = 0$.

Ответ. Параболический цилиндр $y_2^2 = \sqrt{13}x_2$. Уравнение в приведенной форме: $-x_1^2 + \sqrt{13}y_1 = 0$ (см. рис. (5.27)).

Упражнение 14. $z = xy$.

Ответ. Гиперболический параболоид $x_1^2 - y_1^2 = z_1$ (см. рис. (5.28)).

Покажем, как сделать рисунки 5.24–5.28 в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1Mpg-Jf6HDb5GYxUMiikCecv8nhKJaJWd?usp=sharing

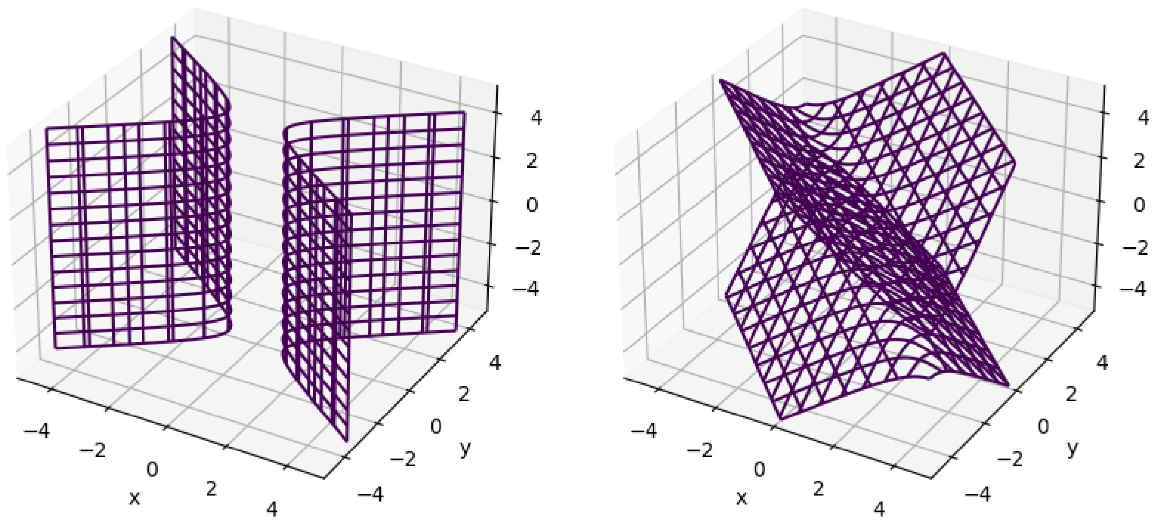


Рисунок 5.26 — К упражнению 12: гиперболический цилиндр, заданный уравнением в приведенной форме (слева) и исходным уравнением (справа)

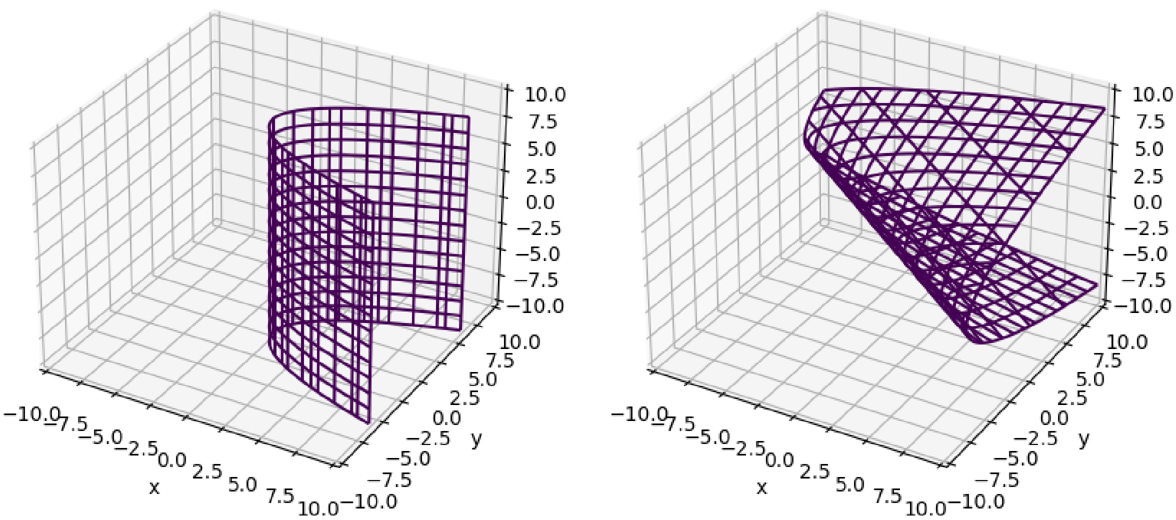


Рисунок 5.27 — К упражнению 13: параболический цилиндр, заданный уравнением в приведенной форме (слева) и исходным уравнением (справа)

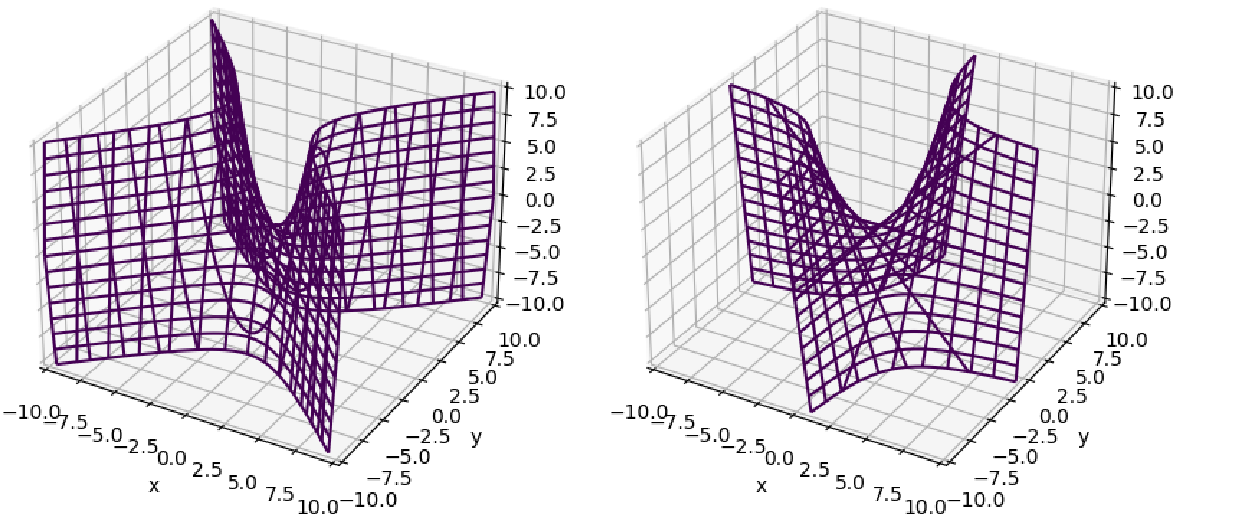


Рисунок 5.28 — К упражнению 14: гиперболический параболоид, заданный уравнением в приведенной форме (слева) и исходным уравнением (справа)