

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. Туполева – КАИ» (КНИТУ-КАИ)

Сетевой научный журнал

ЭЛЕКТРОНИКА, ФОТОНИКА И  
КИБЕРФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 4 | №1

Выпуск 11

2024

Казань

Сетевой научный журнал "Электроника, фотоника и киберфизические системы» создан для публикации результатов оригинальных научных исследований в области электроники, фотоники и их приложений в технических и живых киберфизических системах. Журнал ставит перед собой цель повышения научного, образовательного и методического уровня специалистов в различных областях, связанных с электроникой и оптикой различных диапазонов частот и длин волн.

Журнал издается с 2021 года.

**Регистрационный номер** Эл № ФС77-82193 от 26 октября 2021г.

**Журнал индексируется в РИНЦ: Договор №109-03/2022 от 31.03.2022г., e-Library ID: 79523.**

К публикации принимаются научные статьи, аналитические обзоры, оригинальные учебно-методические материалы, обзоры научных событий, соответствующие тематике журнала по следующим научным специальностям:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
- 2.2.6. Оптические и оптико-электронные приборы и комплексы
- 2.2.7. Фотоника
- 2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды
- 2.2.9. Проектирование и технология приборостроения и радиоэлектронной аппаратуры
- 2.2.11. Информационно-измерительные и управляющие системы
- 2.2.13. Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения
- 2.2.14. Антенны, СВЧ-устройства и их технологии
- 2.2.15. Системы, сети и устройства телекоммуникаций
- 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика
- 2.3.2. Вычислительные системы и их элементы
- 2.3.3. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами
- 2.3.6. Методы и системы защиты информации, информационная безопасность
- 2.3.7. Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования
- 2.3.8. Информатика и информационные процессы

**Главный редактор** - *Морозов Олег Геннадьевич*, д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

**Заместитель главного редактора** - *Сахабутдинов Айрат Жавдатович*, д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

**Редакционный совет:**

*Виноградова Ирина Леонидовна* – д.т.н., доц., УГАТУ, Уфа

*Багманов Валерий Хусаинович* – д.т.н., проф., УГАТУ, Уфа

*Бурдин Антон Владимирович* – д.т.н., доц. НПО ГОИ им. С.И.Вавилова, СПбГУТ, г.Санкт-Петербург; ПГУТИ, Самара;

*Иванов Дмитрий Владимирович* – д.ф.-м.н., проф. ПГТУ, г. Йошкар-Ола

*Надеев Адель Фирадович* - КНИТУ-КАИ

*Раевский Алексей Сергеевич* - д.ф.-м.н., проф. НГТУ им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород

*Рябова Наталья Владимировна* - д.ф.-м.н., проф., ПГТУ, г. Йошкар-Ола

*Султанов Альберт Ханович* - д.т.н., проф. УГАТУ, Уфа

*Файзуллин Рашид Робертович* - КНИТУ-КАИ

**Редакционная коллегия:**

*Аникин Игорь Вячеславович* - д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

*Гизатуллин Зиннур Марселевич* - д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

*Данилаев Максим Петрович* - д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

*Данилаев Дмитрий Петрович* - д.т.н., доц. КНИТУ-КАИ

*Катасев Алексей Сергеевич* - д.т.н., доц. КНИТУ-КАИ

*Козлов Сергей Владимирович* - д.т.н., доц. КНИТУ-КАИ

*Муслимов Эдуард Ринатович* - д.т.н., КНИТУ-КАИ

*Нагуллин Константин Юрьевич* - д.т.н., доцент КНИТУ-КАИ

*Нуреев Ильнур Ильдарович* - д.т.н., проф. КНИТУ-КАИ

*Солдаткин Вячеслав Владимирович* - д.т.н., профессор КНИТУ-КАИ

*Спирина Елена Александровна* - д.т.н., доц. КНИТУ-КАИ

*Шалагин Сергей Викторович* - д.т.н., доц. КНИТУ-КАИ

Ответственный секретарь - *Хайрова Венера Садыйковна*, КНИТУ-КАИ

**Учредитель:**

Казанский национальный исследовательский  
технический университет им.А.Н.Туполева –КАИ

**Издатель:**

Казанский национальный исследовательский  
технический университет им.А.Н.Туполева –КАИ

Издание выходит 4 раза в год

**Адрес:** 420111, Казань, К.Маркса ул., 10

**Телефон:** +7 (843) 231 59 33

**E-mail:** vskhayrova@kai.ru

## СОДЕРЖАНИЕ

*Колонка главного редактора* 5 *Editor's column*

## ЭЛЕКТРОНИКА

*Д.А. Веденькин* 7 *D.A. Vedenkin*  
 ШИРОКОПОЛОСНЫЕ  
 СФОКУСИРОВАННЫЕ АНТЕННЫЕ  
 РЕШЕТКИ В ЗАДАЧАХ  
 РАДИОСВЯЗИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ  
 ДИАГНОСТИКИ  
 WIDEBAND FOCUSED ANTENNA  
 ARRAYS IN RADIO  
 COMMUNICATIONS AND  
 TECHNICAL DIAGNOSTIC

*Е.С. Денисов* 17 *E.S. Denisov*  
 ФЛУКТУАЦИОННО-ШУМОВЫЕ И  
 РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ  
 НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ  
 ВОЛОРОДНЫХ ТОПЛИВНЫХ  
 ЭЛЕМЕНТОВ  
 FLUCTUATION-NOISE AND  
 RELAXATION METHODS FOR  
 HYDROGEN FUEL CELLS  
 NONDESTRUCTIVE TESTING

## ФОТОНИКА

*И.В. Самохвалов, О.Ю. Локтюшин,  
 И.Д. Брюханов, К.Н. Пустовалов,  
 Е.В. Ни, А.А. Дорошкевич,  
 И.В. Животенюк* 26 *I.V. Samokhvalov, O.Yu. Loktyushin, I.D.  
 Bryukhanov, K.N. Pustovalov,  
 E.V. Ni, A.A. Doroshkevich,  
 I.V. Zhivotenyuk*  
 СОВМЕСТНАЯ ОБРАБОТКА  
 РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАЗЕРНОГО ПОЛЯ-  
 РИЗАЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ  
 ОБЛАКОВ ВЕРХНЕГО ЯРУСА С  
 ДАННЫМИ СПУТНИКОВОГО  
 СПЕКТРОРАДИОМЕТРА MODIS  
 JOINT PROCESSING OF THE  
 RESULTS OF LASER POLARIZATION  
 SENSING OF HIGH-LEVEL CLOUDS  
 WITH THE DATA FROM MODIS  
 SATELLITE SPECTRORADIOMETER

*А.В. Мальцев* 34 *A.V. Maltsev*  
 РАДИОФОТОННЫЕ СКАЛЯРНЫЕ И  
 ВЕКТОРНЫЕ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕ-  
 НИЯ МГНОВЕННОЙ ЧАСТОТЫ  
 МИКРОВОЛНОВЫХ СИГНАЛОВ НА  
 БАЗЕ ОДНОПОРТОВОГО  
 МОДУЛЯТОРА МАХА-ЦЕНДЕРА И  
 ТРЕУГОЛЬНЫХ ВОЛОКОННЫХ  
 БРЭГГОВСКИХ РЕШЕТОК  
 RADIOPHOTON SCALAR AND  
 VECTOR SYSTEMS  
 INSTANTANEOUS FREQUENCY  
 MEASUREMENTS MICROWAVE  
 SIGNALS BASED SINGLE-PORT  
 MAX-ZENDER MODULATOR AND  
 TRINGULAR FIBER BRAGG  
 GRATINGS

*Ali M. Almufti* 51 *Али М. Аль-Муфти*  
 ULTRA FLAT OPTICAL FREQUENCY  
 COMB GENERATION TAKING INTO  
 ACCOUNT DYNAMICS OF  
 CASCADED MODULATION FOR  
 ENHANCING 5G AND BEYOND  
 ГЕНЕРАЦИЯ СВЕРХПЛОСКОЙ  
 ОПТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТНОЙ  
 ГРЕБЕНКИ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ  
 КАСКАДНОЙ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ  
 УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК  
 СИСТЕМ 5G И ВЫШЕ

<i>Ali M. Almufti</i> OPTIMIZING 5G+ INFRASTRUCTURE: INNOVATIONS IN OPTICAL TRANSMISSION BASED ON HIGH ORDER QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION <i>Али М.</i>	57	<i>Аль-Муфти</i> ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФРАСТРУКТУРЫ 5G+: ИННОВАЦИИ В ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧЕ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
<i>А.А. Лустина</i> ФОТОННЫЕ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПЛЕРОВСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ РАДИОЧАСТОТ КАК ОСНОВНОЙ УЗЕЛ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ ИЗДЕЛИЙ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ	64	<i>A.A. Lustina</i> PHOTON DOPPLER DETERMINATION SYSTEMS CHANGES IN RADIO FREQUENCIES AS A MAIN UNIT OF CONTROL AND DIAGNOSTICS SYSTEMS FOR PRODUCTS AND THE NATURAL ENVIRONMENT

### КИБЕРФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

<i>Т.Л. Алибаев, В.Е. Васюк, И.И. Нуреев, Р.А. Юсупов</i> СПОРТИВНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ В КНИТУ-КАИ	85	<i>T.L. Alibaev, V.E. Vasyuk, I.I. Nureev, R.A. Yusupov</i> SPORTS ENGINEERING AT KNRTU- KAI
<i>Р.Р. Нигматуллин, А.А. Литвинов, С.И. Осокин</i> КВАЗИВОСПРОИЗВОДИМЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ: УНИВЕРСАЛЬ- НАЯ ПОДГОНОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ ДАННЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ	96	<i>R.R. Nigmatullin, A.A. Litvinov, S.I. Osokin</i> QUASI-REPRODUCIBLE EXPERIMENTS: UNIVERSAL ADJUSTMENT FUNCTION FOR A QUANTITATIVE DESCRIPTION OF COMPLEX SYSTEMS DATA

### НОВИНКИ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ. ОБЗОРЫ. КОНФЕРЕНЦИИ. ВАЖНЫЕ ДАТЫ

<i>С.Х. Сарыгулов, А.М. Ниязгульева</i> СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ В ТУРКМЕНИСТАНЕ	116	<i>S.Kh. Sarygulov, A.M. Niyazgulyeva</i> CURRENT STATE AND PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF TELECOMMUNICATIONS IN TURKMENISTAN
---	-----	---

## КВАЗИВОСПРОИЗВОДИМЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ: УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДГОНОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ ДАННЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

*Р.Р. Нигматуллин<sup>1</sup>, А.А. Литвинов<sup>1,2</sup>, С.И. Осокин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева, Кафедра радиоэлектроники и информационно-измерительной техники  
Российская Федерация, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, 10

<sup>2</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Институт информационных технологий и интеллектуальных систем,  
Россия, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18

**Аннотация.** В данной работе изложены основы оригинальной теории квазिवоспроизводимых экспериментов (КВЭ), базирующиеся на проверяемой гипотезе о существовании значительной корреляции (памяти) между последовательными измерениями. На основе этой гипотезы, которую авторы для краткости обозначают как проверяемый принцип частичной корреляции (ППЧК), можно доказать, что существует универсальная подгоночная функция (УПФ) для квазипериодических (КП) и квазिवоспроизводимых (КВ) измерений. Другими словами, существует некая общая платформа или "мост", на котором, образно говоря, встречаются истинная теория (претендующая на описание данных из первых принципов или верифицируемых моделей) и эксперимент, предлагающий эту теорию для проверки измеренных данных, максимально "очищенных" от влияния неконтролируемых факторов и аппаратной функции измерительного прибора. Предложенная теория была проверена на космических данных, представляющих собой флуктуации температуры, и измерена европейскими спутниками в космическом пространстве для ранних этапов эволюции Вселенной. В результате обработки этих данных была получена АЧХ, соответствующая этим кумулятивным/интегральным данным и вычислены в рамках КВЭ необходимые количественные характеристики, соответствующие "идеальному" эксперименту. Авторы хотят отметить, что эта теория может быть применена к широкому классу сложных систем, отклик которых может быть многократно измерен.

**Ключевые слова:** квазिवоспроизводимые эксперименты, корреляция, последовательные измерения, универсальная подгоночная функция, идеальный эксперимент.

### 1. Введение и постановка задачи

Можно ли предложить исследователю "универсальную" подгоночную функцию для нестационарного квазिवоспроизводимого эксперимента (КВЭ)? Такой вопрос покажется абсурдным и бессмысленным любому опытному эксперту, специалисту по обработке данных. Всем известно, как происходит традиционное взаимодействие теории и эксперимента. Теория предлагает модели, гипотезы, основанные на некоторых проверяемых предположениях и постулатах. Эксперимент, в свою очередь, проверяет эти гипотезы, стараясь максимально исключить влияние неконтролируемых факторов и искажений (помех), вносимых измерительной аппаратурой (обычно эти факторы определяются как аппаратная функция или функция прибора).

Что можно привнести принципиально нового в эту традиционную схему? Предположим, что если будет найден какой-то проверенный или верифицируемый принцип, которому подчиняются практически все измерения, то из его математической формулировки можно будет вывести некую "универсальную" подгоночную функцию, которая позволила бы описать все измерения. Авторы определяют этот принцип как проверяемый принцип частичной корреляции (ППЧК).

Таким образом, на основе этого принципа можно будет получить общую математическую модель (определяемую как промежуточная модель – ПМ), которой должны будут подчиняться все измерения, удовлетворяющие этому принципу. Если развернуть понятие ППЧК, то оно формулируется следующим образом: последовательные измерения сохраняют частичную корреляцию (память) между собой и остаются полностью или частично коррелированными в результате серии последовательных измерений. Конечно, здесь необходимо внести уточнения о характере и типе этих измерений и перевести эту неточную словесную формулировку на строгий математический язык. Поэтому необходимо сначала привести несколько тезисов, а затем привести этот принцип на язык математических формул.

Под «идеальным» экспериментом (ИЭ) авторы понимают такой эксперимент, когда последовательность измерений  $m$  ( $m=0,1,2,\dots,M-1$ ), осуществляемых за некоторый средний период  $T$  по отношению к управляющей внешней переменной  $x$ , приводит к одинаковому значению измеряемой функции отклика  $F(x)$ . В этом смысле все измерения, соответствующие ИЭ, полностью или абсолютно коррелируют. Математически это утверждение выглядит следующим образом:

$$F(x+mT) = F(x), m=1,2,\dots,M-1. \quad (1)$$

Здесь управляемая переменная  $x$  может совпадать с переменной времени ( $t$ ), частоты ( $\omega$ ), длины волны ( $\lambda$ ) и т.д. Поскольку эксперимент, проводимый с этим набором переменных, является *однофакторным*, предполагается, что другие контролируемые переменные, влияющие на функцию отклика, *не* изменяются в некотором диапазоне их значений во время однофакторного эксперимента. Решением этого функционального уравнения (1) является периодический отрезок соответствующего ряда Фурье. Для дискретных данных отрезок ряда Фурье обычно записывается в виде:

$$\begin{aligned} F(x) \cong Pr(x) &= A_0 + \sum_{k=1}^{K \gg 1} \left[ A c_k \cos\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) + A s_k \sin\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) \right] \\ &\equiv A_0 + \sum_{k=1}^K A m d_k \cos(\omega_k x - P h_k), \end{aligned} \quad (2)$$

$$A m d_k = \sqrt{A c_k^2 + A s_k^2}, P h_k = \tan^{-1}\left(\frac{A s_k}{A c_k}\right).$$

Параметр  $T$  определяет некоторый средний период измерения по отношению к входной переменной  $x$ . Из простого уравнения (1) следует, что выражение (2) может быть использовано в качестве аппроксимирующей функции для функции отклика в ИЭ. В этом идеализированном случае промежуточная модель (ПМ) совпадает с решением отрезка ряда Фурье, а коэффициенты этого разложения могут выступать в качестве аппроксимирующих параметров, соответствующих ИЭ. На самом деле, параметры подгонки ( $A_0, A c_k, A s_k$  [ $k=1,2,\dots,K$ ]) из (2) могут сформировать желаемую АЧХ, состоящую из модуля амплитуд  $A m d_k$  и набора фаз  $P h_k$ . Совершенно очевидно, что требование ИЭ (1) в реальности *не* реализуется, и анализ различных данных показывает, что вместо уравнения (1) следует написать более общее функциональное уравнение

$$F(x+LT) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l F(x+lT) + b. \quad (3)$$

Равенство (3) можно интерпретировать следующим образом: начиная с некоторого измерения  $L$  ( $L < M$ ), измерения становятся частично коррелированными, и реализованный эксперимент не может генерировать принципиально новые измерения. "Новые" измерения (начиная с некоторого  $L$ ,  $M > L$ ) становятся уже зависимыми (коррелированными) от "прошлых", реализованных ранее, и искомый набор коэффициентов корреляции  $a_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) можно найти с помощью линейного метода наименьших квадратов (ЛМНК). Решения этого функционального уравнения выражаются в виде обобщенного разложения Прони (ОРП). Мы считаем это *принципиальным* выводом, который следует из предыдущего рассмотрения формул (1)-(3). Этот вывод показывает *неприменимость* формального разложения Фурье для анализа реальных данных. Адекватной заменой уравнению соответствующего ИЭ (1) для измеренных данных (где множество констант  $a_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) не зависит от внешней переменной  $x$ ), является функциональное уравнение (3). Прежде чем дать общее решение уравнения (3), полезно рассмотреть частный случай.

Пусть  $l=0$ ,  $L=1$  в (3). Поэтому для этого частного случая справедливо выражение

$$F(x+T) = a_0 F(x) + b. \quad (4)$$

Решение функционального уравнения (4) можно записать в виде

$$F(x) = \begin{cases} (a_0)^{x/T} \Pr(x) + \frac{b}{1-a_0}, & a_0 > 0, a_0 \neq 1 \\ |a_0|^{x/T} \cos\left(\pi \frac{x}{T}\right) \Pr(x) + \frac{b}{1+a_0}, & a_0 < 0, a_0 \neq -1 \end{cases}, \quad (5)$$

$$F(x) = \Pr(x) + b \left(\frac{x}{T}\right), \quad a_0 = 1.$$

Здесь  $\Pr(x)$  является периодической функцией, которая определяется выражением (2). Наиболее интересный вывод следует для  $a_0 > 1$ . В этом случае экспоненциальный аргумент в (5)  $\ln(a_0) > 0$ . Это означает, что следующее измерение в (4) становится важным (решение имеет возрастающую экспоненту), в то время как для  $a_0 < 1$  следующее измерение становится экспоненциально убывающим. Даже появление константы  $b$  при  $a_0=1$  приводит к линейному возрастанию решения, пропорционального  $x/T$ . Как понять уравнение (3) с другой точки зрения? Рассмотрим следующий частный случай

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (6)$$

где функции  $f_{1,2}(x)$  в (6) являются периодическими с одинаковым периодом  $T$  (для простоты мы положили  $b=0$ ). С учётом уравнения (4) можно записать

$$E_T F(x) \equiv F(x+T) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),$$

$$(E_T)^2 F(x) \equiv F(x+2T) = (\lambda_1)^2 f_1(x) + (\lambda_2)^2 f_2(x). \quad (7)$$

Здесь мы вводим оператор сдвига  $E_T$ , связанный с периодом  $T$ . С помощью этого оператора можно переписать последнюю строку в (7) в очень компактном и понятном виде

$$(E_T - \lambda_1)(E_T - \lambda_2)F(x) = 0 \text{ or}$$

$$F(x+2T) = a_1 F(x+T) + a_0 F(x) \quad (8)$$

Поэтому уравнение (3) может быть представлено в эквивалентном виде с помощью применения операторов сдвига  $E_T$  в виде

$$F(x + LT) = \prod_{l=0}^{L-1} (E_T - \lambda_l) F(x) + b. \quad (9)$$

Перемножив члены в (9), легко связать множество корней  $\lambda_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) с коэффициентами  $a_l$ , используя теорему Виета, соотнося коэффициенты многочлена с его корнями.

Имеет смысл привести решение (3) полностью, посвященное рассмотрению этой нетривиальной задачи. Решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned} (A) \sum_{l=0}^{L-1} a_l \neq 1, F(x) &= \sum_{l=1}^L [\lambda_l]^{x/T} \text{Pr}_l(x) + \frac{b}{1 - \sum_{l=0}^{L-1} a_l}, \\ (B) \sum_{l=0}^{L-1} a_l = 1, F(x) &= \sum_{l=1}^L [\lambda_l]^{x/T} \text{Pr}_l(x) + \frac{b}{L - \sum_{l=0}^{L-1} la_l} x. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь функции  $\text{Pr}_l(x)$  являются множеством периодических функций (2), множество констант  $\lambda_l$  ( $l=1,2,\dots,L$ ) находится в качестве корней полинома из уравнения

$$P_L(\lambda) \equiv \lambda^L - \sum_{l=0}^{L-1} a_l \lambda^l = 0. \quad (11)$$

Здесь мы не приводим решений для комплексно-сопряженных корней и вырожденного случая (когда многочлен  $P_L(\lambda)$  имеет вырожденные корни); эти решения приведены в процитированных выше публикациях [4-5]. Отметим лишь, что для случая отрицательного корня ( $\lambda_s < 0$ ) периодическая функция  $\text{Pr}_s(x)$  становится уже антипериодической, и решение для этого случая может быть аппроксимировано в виде выражения

$$F(x) = \left[ |\kappa_s| \right]^{x/T} \cos\left(\pi \frac{x}{T}\right) \text{Pr}_s(x). \quad (12)$$

Таким образом, для случая измерений, удовлетворяющих уравнению (4), отрезок ОРП (не Фурье!), записанный в виде (4), выступает в качестве ПМ. Дальнейшее развитие этой идеи и ее проверка на имеющихся данных были приведены в работе [5]. В частности, было показано, как выйти за пределы допустимого интервала наблюдения, задаваемого переменной  $x$ , и подавить частичное влияние памяти, возникающее между измерениями, чтобы извлечь из решений (4) только чисто периодические функции, которые могут соответствовать ИЭ и быть предъявлены теоретической модели (гипотезе) для проверки. Конечно, гипотеза (3) имеет некоторый предел применимости, заключающийся в том, что набор параметров  $a_l$  ( $l=0,1,\dots,L-1$ ) не изменяется в ходе эксперимента. В действительности, во многих экспериментах это множество может изменяться с изменением внешней переменной  $x$ , и число измерений во многих экспериментах не может быть большим. Поэтому для того, чтобы выйти за пределы уравнения (3), необходимо получить аналитические решения для случая, когда  $a_l \rightarrow a_l(x)$  и найти минимальный предел числа



измерений, когда для нахождения приближения, следующей из ПМ, важна дополнительная информация, выраженная в виде определенной повторяемости измерений.

Необходимо сделать следующий шаг и обобщить предложенную выше теорию и сделать её более гибкой и адаптируемой для описания широкого класса нестационарных экспериментов, когда влияние неконтролируемых факторов в процессе измерения может быть значительным. Поэтому имеет смысл внести следующие различия в используемую терминологию. Под квазипериодическими (КП) измерениями мы понимаем такие измерения, когда экспериментальные условия позволяют удерживать неконтролируемые параметры строго в заданных пределах допустимых интервалов и, следовательно, их можно считать приближенно стационарными (*все* они остаются постоянными). Под квазипроизводимыми (КВ) измерениями будем понимать такие измерения, когда влияние неконтролируемых факторов становится *значительным* (т.е. параметры  $a_l(x)$  начинают зависеть от текущей переменной  $x$ ) и условия эксперимента становятся нестационарными. В этом случае возникает необходимость найти решения более общего функционального уравнения

$$F(x + LT) = \sum_{l=0}^{L-1} \langle a_l(x) \rangle F(x + lT). \quad (13)$$

Оказывается, что можно найти аналитические решения уравнения (13) для широкого класса функций, удовлетворяющих условию периодичности. Именно изложению основ этой более общей теории, основанной на серии последовательных измерений, применимых к описанию КВ-экспериментов, её возможным обобщениям и проверке на доступных данных, и посвящена, преимущественно, данная статья. Конечно, любая теория будет неполной, если она не проверена экспериментом. Поэтому авторы приводят нетривиальный пример, основанный на описании космологических данных, связанных с температурными флуктуациями реликтового излучения ранней Вселенной. Более того, предложенные алгоритмы являются достаточно общими, их можно применить и для анализа многих подобных КВ-экспериментов.

## 2. Основы КВ-экспериментов

### 2.1. Самосогласованные решения уравнения (13).

Оказывается, возможно получить решения функционального уравнения (13) при условии, что "длина"  $L$ , характеризующая память между измерениями, *предполагается* известной. Итак, предположим, что все последовательные измерения удовлетворяют уравнению

$$F_{L+m}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} \langle a_l(x) \rangle F_{l+m}(x), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (14)$$

Для нахождения неизвестных функций  $\langle a_l(x) \rangle$  ( $l = 0, 1, \dots, L; L < M$ ) можно обобщить ЛМНК и потребовать, чтобы *функциональная дисперсия*, усредненная по всем измерениям из интервала ( $m=0, 1, \dots, M-(L-1)$ ) принимала минимальное значение:

$$\sigma_L(x) = \frac{1}{M-L} \sum_{m=0}^{M-(L-1)} \left[ F_{L+m}(x) - \sum_{l=0}^{L-1} \langle a_l(x) \rangle F_{l+m}(x) \right]^2 = \min. \quad (15)$$

Взяв функциональные производные по неизвестным функциям  $\langle a_l(x) \rangle$ , получим

$$-\frac{\delta\sigma_L(x)}{\delta\langle a_l(x)\rangle} = \frac{1}{M-L} \sum_{m=0}^{M-(L-1)} \left[ F_{l+m}(x) \left( F_{L+m}(x) - \sum_{s=0}^{L-1} \langle a_s(x)\rangle F_{s+m}(x) \right) \right] = 0. \quad (16)$$

Здесь применяется процедура усреднения по всему множеству допустимых измерений, предполагая, что множество функций  $\langle a_l(x)\rangle$  ( $l = 0, 1, \dots, L$ ;  $L < M$ ) не зависит от показателя  $m$ . Определим парные корреляционные функции следующими соотношениями

$$\begin{aligned} K_{L,l} &= \frac{1}{M-L} \sum_{m=0}^{M-(L-1)} F_{L+m}(x) F_{l+m}(x), \\ K_{s,l} &= \frac{1}{M-L} \sum_{m=0}^{M-(L-1)} F_{s+m}(x) F_{l+m}(x), \\ s, l &= 0, 1, \dots, L-1, \end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнения (16) можно получить систему линейных уравнений для вычисления неизвестных функций  $\langle a_l(x)\rangle$

$$\sum_{s=0}^{L-1} K_{s,l}(x) \langle a_s(x)\rangle = K_{L,l}(x). \quad (18)$$

Имеет смысл определить эту процедуру как функциональный линейный метод наименьших квадратов (ФЛМНК), который включает в себя обычный ЛМНК в качестве частного случая. Вернемся теперь к уравнению (13). Решение этого уравнения ищется в виде

$$F_0(x) = [\kappa(x)]^{x/T} \Pr(x), \quad F_m(x) = [\kappa(x)]^{m+x/T} \Pr(x). \quad (19)$$

Функции  $\langle a_l(x)\rangle$ ,  $\kappa(x \pm T) = \kappa(x)$ ,  $\Pr(x \pm T) = \Pr(x)$  в соответствии с сделанными выше предположениями могут быть приближенно выражены отрезком ряда Фурье по полной аналогии с выражением (2)

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= A_0 + \sum_{k=1}^{K \gg 1} \left[ A c_k \cos\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) + A s_k \sin\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) \right] = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^K A m d_k \cos(\omega_k x - P h_k), \\ A m d_k &= \sqrt{A c_k^2 + A s_k^2}, \quad P h_k = \tan^{-1}\left(\frac{A s_k}{A c_k}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что коэффициенты разложения  $A c_k$ ,  $A s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) и эквивалентные им модуль  $A m d_k$  и фаза  $P h_k$  зависят от конкретного вида разлагаемой функции  $\Phi(x)$ . Подставив пробное решение (19) в уравнение (14), получим уравнение для вычисления неизвестных функций  $\kappa(x)$ , фигурирующих в пробном решении (19)

$$[\kappa(x)]^L - \sum_{l=0}^{L-1} \langle a_l(x)\rangle [\kappa(x)]^l = 0. \quad (21)$$

Если функциональные корни  $\kappa_q(x)$ ,  $q=1,2,\dots,L$  удастся вычислить из (21), то общее решение для функции  $F_m(x)$  записывается в виде

$$F_0(x) = \sum_{q=1}^L [\kappa_q(x)]^{x/T} Pr_q(x), F_m(x) = \sum_{q=1}^L [\kappa_q(x)]^{m+(x/T)} Pr_q(x), \quad (22)$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Число периодических функций  $Pr_q(x)$  должно совпадать с числом функций  $\kappa_q(x)$ ,  $q=1,2,\dots,L$ , входящих в последнее выражение (22). Именно это выражение можно рассматривать как общее решение функционального уравнения (13). Это решение можно интерпретировать следующим образом: если последовательные измерения частично коррелируют друг с другом ("запоминают" друг друга) и могут изменяться в течение среднего периода измерения  $T$ , то подгоночная функция для описания этих измерений является самосогласованной и определяется всей совокупностью случайных измерений, участвующих в этом процессе. Очевидно, что этот новый результат обобщает предыдущие результаты [5], полученные для случая, когда функции  $\langle a_l(x) \rangle$  могут быть аппроксимированы константами  $a_l$ . Было бы желательно получить решения уравнения (14) для случая, когда функции  $\langle a_l(x) \rangle$  не являются полностью периодическими или получены *априори* из других условий. Но, насколько известно авторам, математическая теория решений функциональных уравнений практически не развита [6] по сравнению, например, с полноценной теорией решений дифференциальных или интегральных уравнений. Таким образом, предложенная теория определяет новое направление для математиков, работающих в области функционального анализа и лично нацеленных на приложения их результатов в физике, химии и технике. Для практических приложений имеет смысл более подробно рассмотреть случай короткой памяти с ( $L=2$ ), так как количество аппроксимирующих параметров для этого случая минимально. Как видно ниже, случай длинной памяти  $L > 2$  может быть сведен также к случаю короткой памяти. Именно результаты для этого случая понадобятся для описания реальных измерений, которые приведены в следующем разделе. Для случая короткой памяти при  $L = 2$  получим:

$$F_{2+m}(x) = \langle a_1(x) \rangle F_{1+m} + \langle a_0(x) \rangle F_m$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (23)$$

Уравнение (18) для этого случая принимает вид

$$K_{00}(x) \langle a_0(x) \rangle + K_{10}(x) \langle a_1(x) \rangle = K_{20}(x),$$

$$K_{10}(x) \langle a_0(x) \rangle + K_{11}(x) \langle a_1(x) \rangle = K_{21}(x). \quad (24)$$

Решение уравнения (23) записывается в виде

$$F_0(x) = [\kappa_1(x)]^{x/T} Pr_1(x) + [\kappa_2(x)]^{x/T} Pr_2(x),$$

$$\kappa_{1,2}(x) = \frac{\langle a_1(x) \rangle}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\langle a_1(x) \rangle}{2}\right)^2 + \langle a_0(x) \rangle}. \quad (25)$$

Если один из корней в (25) становится отрицательным (например,  $\kappa_2(x) < 0$ ), то общее решение для этого случая записывается в виде

$$F_0(x) = [\kappa_1(x)]^{x/T} \text{Pr}_1(x) + [|\kappa_2(x)|]^{x/T} \cos\left(\pi \frac{x}{T}\right) \text{Pr}_2(x). \quad (26)$$

Если порядок измерений для оценки влияния нестационарности процесса в целом существенен, то предложенная теория позволяет восстановить всю нестационарную последовательность по соотношениям:

$$F_m(x) = [\kappa_1(x)]^{m+(x/T)} \text{Pr}_1(x) + [\kappa_2(x)]^{m+(x/T)} \cos\left(\pi \cdot \left(\frac{x}{T} + m\right)\right) \text{Pr}_2(x),$$

$$\text{Pr}_{1,2}(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{K_m} \left[ A c_{k,1,2}^{(m)} \cos\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) + A s_{k,1,2}^{(m)} \sin\left(2\pi k \frac{x}{T}\right) \right], \quad (27)$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

При этом функции  $\text{Pr}_{1,2}(x \pm T) = \text{Pr}_{1,2}(x)$  сохраняют свою периодичность в течение среднего периода  $T$ , однако коэффициенты разложения  $A c_{k,1,2}^{(m)}, A s_{k,1,2}^{(m)}$  ( $k=1, 2, \dots, K_m$ ), фигурирующие в (27), могут отличаться от случая  $m=0$  и отражать влияние возможной неустойчивости в течение всего процесса измерения. Если истинная последовательность измерений не существенна и результаты измерений остаются инвариантными по отношению к перестановкам всех измерений друг с другом, то можно сгруппировать все измерения в три независимые группы (образующую специфическая триаду), и случай длинной памяти снова сводится к рассмотренному выше случаю короткой памяти. Эта простая идея позволяет значительно сократить количество параметров и снова получить подгоночную функцию с минимальным числом параметров. Процедура, связанная с формированием необходимой триады, описана в следующем подразделе.

## 2.2. Процедура кластеризации и сведение к "ИЭ".

Как было подчеркнуто ранее в [5], оценка "истинного" значения  $L$  на основе общего критерия или принципа является пока *нерешенной* задачей. Если предположение о перестановках измерений друг с другом может быть обосновано, то тогда можно предложить следующую процедуру кластеризации и разбиения всех измерений на три группы (создание специфической триады). Для этого рассмотрим распределение наклонов (угловых касательных) каждого измерения по отношению к их среднему измерению, тангенс угла которого равен или близок к единице:

$$Sl_m = slope(\langle y \rangle, y_m) \equiv \frac{(y_m \cdot \langle y \rangle)}{(\langle y \rangle \cdot \langle y \rangle)}, \quad (28)$$

$$\langle y \rangle = \left(\frac{1}{M}\right) \sum_{m=0}^{M-1} y_m, \quad (A \cdot B) = \sum_{j=1}^N A_j B_j.$$

Скобка в (28) определяет скалярное произведение между двумя функциями, имеющими  $j=1, 2, \dots, N$  точек измерения данных. Будем считать, что случайные измерения  $y_m(x)$  для  $m = 0, 1, \dots, M-1$ , аппроксимируют функции  $F_m(x)$  ( $y_m(x) \cong F_m(x)$ ), фигурирующие в уравнении (27). Если построить случайное распределение функции наклона  $Sl_m$  в зависимости от числа измерений  $m$ , то удобно разложить их на графике в порядке убывания  $Sl_0 > Sl_1 > \dots > Sl_{M-1}$ . Эту функцию наклона распределения можно разделить на три группы. Верхняя группа измерений  $Y_{up}$  имеет наклоны, локализованные в интервале  $(1+\Delta, \max(Sl_m))$ ; средняя группа (определяемая как  $Y_{mn}$ ) содержит измерения с наклонами в

интервале  $(1-\Delta, 1+\Delta)$ ; и, наконец, нижняя группа (обозначаемая как  $Ydn$ ) содержит измерения с наклонами  $(1-\Delta, \min(Sl_m))$ . Значение  $\Delta$  для каждого набора КВ измерений определяется независимо в каждом конкретном случае. Эта упорядоченная кривая  $Sl_m$  важна и отражает качество выполненных измерений и используемого оборудования.

Как найти  $\Delta$  на основе выражения (28)? Упорядоченную кривую  $Sl_m$  можно разделить (после вычитания единичного значения) на две части – положительную часть  $(0, \max(Sl_m))$  и отрицательную часть  $(0, \min(Sl_m))$ . В каждой части берётся 1/3 от нулевого значения, т.е.  $\Delta_1 = \max(Sl_m)/3$  и  $\Delta_2 = \min(Sl_m)/3$ . Эти значения можно использовать для деления на три нужные части/кластера. Причем 2/3 отрезка наклонов будут отнесены к значениям, близким к единичному значению. Разумеется, это всего лишь одна такая возможность. Оптимальное деление должно быть обосновано и пока такой критерий выбора параметров  $\Delta_{1,2}$  не найден.

Для понимания деталей процедуры кластеризации распишем эту процедуру более подробно. Первая группа формируется следующим образом: (а) расстояние от начальной точки оси  $XOY$   $(0,0)$  до первой точки пересечения  $(m_1, \Delta_1)$  определяет число измерений  $Nup$  ( $m=1,2,\dots,m_1=Nup$ ), попадающих в первую (верхнюю) группу, они характеризуются средней кривой  $Yup(x)$ ; (б) расстояние между двумя точками  $(m_1, \Delta_1)$ ,  $(m_2, \Delta_2)$  пересечения прямой с упорядоченным распределением наклонов определяет по оси  $OX$  число измерений  $Nmn$  ( $m_1, m_2$ ), попадающих в среднюю группу "mn" с наклонами, близкими к единице; и, наконец, (с)  $(m_2, \Delta_2)$ ,  $(M -1,0)$  последняя группа измерений, равная  $Ndn$ , попадает в нижнюю группу "dn" и характеризуется последней частью кривой  $Ydn(x)$ .

Если число измерений  $Nmn > Nup + Ndn$ , то такой цикл измерений оценивается как "хороший" и является относительно стабильным. В случае, когда  $Nmn \approx Ndn \approx Nup$ , то такие измерения оцениваются как "приемлемые" (с оценкой «удовлетворительно») и, наконец, случай, когда  $Nmn < Nup + Ndn$  оценивается на оценку "плохо" и такие измерения в целом оцениваются как неудовлетворительные.

Количественно все три случая можно оценить с помощью соотношения:

$$Rt = \left( \frac{Nmn}{Nup + Ndn + Nmn} \right) \cdot 100\% = \left( \frac{Nmn}{M} \right) \cdot 100\% \quad (29)$$

В выражении (29) параметр  $M$  определяет полное число измерений. На основе этой оценки могут быть введены следующие критерии: поставить оценку "отлично" и "хорошо" можно экспериментам, когда  $60\% < Rt < 100\%$ ; оценка "удовлетворительно" ставится эксперименту при  $30\% < Rt < 60\%$ ; и, наконец, "плохая" оценка ставится, когда  $Rt < 30\%$ . Поэтому, создав эту триаду из исходных измерений, можно ввести следующие определения:

$$\begin{aligned} F_0(x) &\equiv \langle a_1(x) \rangle F_1(x) + \langle a_2(x) \rangle F_2(x), \\ F_0(x) &\equiv Yup(x) = \frac{1}{Nup} \sum_{m=0}^{Nup-1} y_m^{(up)}(x), \quad 1 + \Delta_1 < Sl_m < \max(Sl_m), \\ F_2(x) &\equiv Ydn(x) = \frac{1}{Ndn} \sum_{m=0}^{Ndn-1} y_m^{(dn)}(x), \quad \min(Sl_m) < Sl_m < 1 - \Delta_2, \\ F_1(x) &\equiv Ymn(x) = \frac{1}{Nmn} \sum_{m=0}^{Nmn-1} y_m^{(mn)}(x), \quad 1 - \Delta_2 < Sl_m < 1 + \Delta_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь функция  $Sl_m$  определяет распределение наклонов, расположенных в порядке убывания; параметры  $\Delta_{1,2}$ , связанные со значением доверительного интервала,

выбираются независимо для каждой серии измерений. Здесь мы добавили три "искусственно" созданных измерения  $F_{2,1,0}(x)$  к предыдущему набору  $u_m(x)$ . В результате этой процедуры независимые от индекса  $m$  функции  $\langle a_{1,2}(x) \rangle$  остаются практически неизменными (при достаточно больших значениях  $M$ ) по сравнению со случаем, когда к исходным измерениям такая процедура кластеризации не применялась. Предположим также, что усредненная функция  $Y_{mn}(x)$  отождествляется с исходным измерением  $F_1(x)$ , а два других измерения  $F_{0,2}(x)$  совпадают с функциями  $Y_{up}(x)$ ,  $Y_{dn}(x)$ , соответственно. Решение уравнения (30) определяется выражениями (26) и (27). Эта процедура кластеризации оказывается очень эффективной и может быть применена к широкому набору случаев. Детали этой процедуры описаны на нетривиальном примере, обсуждаемом ниже.

Следующий вопрос, который будет рассмотрен в этом разделе, связан со сведением реальных измерений к ИЭ. Согласно определению, данному в [5] (см. также определение (1)), под ИЭ мы понимаем ситуацию, когда

$$F_m(x) \equiv F(x+mT) = F_{m+1}(x) \equiv F(x+(m+1)T). \quad (31)$$

Функция отклика (результат измерения) остается неизменной для всей серии измерений, включенных в один цикл. Как было сказано выше, в этом случае ИЭ совпадает с отрезком ряда Фурье (2). В связи с этим возникает вопрос: можно ли из общего решения (22) выделить чисто периодические Фурье-компоненты  $Pr_q(x)$  ( $q=1,2,\dots,L$ ) и представить теоретикам для сравнения *очищенную* функцию, которую следует сравнить с гипотезой, претендующей на количественное описание экспериментальных результатов с микроскопической точки зрения? Имеет смысл подробно показать эту процедуру для случая «короткой» памяти ( $L=2$ ), имея в виду эту ситуацию как наиболее *вероятную*. Как будет показано выше, случай большого числа измерений  $2 < L < M$  при некоторых разумных предположениях может быть сведен к случаю короткой памяти.

1.  $L=2$ , случай, когда  $\kappa_{1,2}(x) > 0$

$$\begin{aligned} F_0(x) &= [\kappa_1(x)]^{x/T} Pr_1(x) + [\kappa_2(x)]^{x/T} Pr_2(x) \\ F_1(x) &= \kappa_1(x)^{1+(x/T)} Pr_1(x) + \kappa_2(x)^{1+(x/T)} Pr_2(x) \end{aligned} \quad (32)$$

Из этой системы уравнений можно легко найти искомую периодическую функцию  $Pr(x)$ , которая будет представлена в виде линейной комбинации функций  $Pr_{1,2}(x)$

$$\begin{aligned} Pr_1(x) &= [\kappa_1(x)]^{-(x/T)} \frac{F_0(x)\kappa_2(x) - F_1(x)}{\kappa_2(x) - \kappa_1(x)}, \\ Pr_2(x) &= [\kappa_2(x)]^{-(x/T)} \frac{F_1(x) - F_0(x)\kappa_1(x)}{\kappa_2(x) - \kappa_1(x)}, \\ Pr(x) &= w_1 Pr_1(x) + w_2 Pr_2(x). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь, для "страховки", мы ввели неизвестные весовые константы  $w_{1,2}$ , чтобы использовать их в качестве подгоночных параметров на заключительном этапе сравнения подгоночной функции ИЭ с гипотезой, полученной из конкурирующей модели или микроскопической теории. Очевидно, что нули функций  $\kappa_{1,2}$  в (33) не определяют искомые периодические функции, и вырожденный случай должен рассматриваться отдельно.

2.  $L=2$ , Случай, когда  $\kappa_1(x) > 0$ ,  $\kappa_2(x) < 0$

$$\begin{aligned}
 F_0(x) &= [\kappa_1(x)]^{x/T} \text{Pr}_1(x) + [|\kappa_2(x)|]^{x/T} \cos\left(\pi \frac{x}{T}\right) \text{Pr}_2(x) \\
 F_1(x) &= \kappa_1(x)^{1+(x/T)} \text{Pr}_1(x) - |\kappa_2(x)|^{1+(x/T)} \cos\left(\pi \frac{x}{T}\right) \text{Pr}_2(x),
 \end{aligned} \tag{34}$$

Решение в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \text{Pr}_1(x) &= [\kappa_1(x)]^{-(x/T)} \frac{F_1(x) + |\kappa_2(x)| F_0(x)}{\kappa_1(x) + |\kappa_2(x)|}, \\
 \text{Pr}_2(x) &= [|\kappa_2(x)|]^{-(x/T)} \frac{F_0(x)\kappa_1(x) - F_1(x)}{\kappa_1(x) + |\kappa_2(x)|} \\
 \text{Pr}(x) &= w_1 \text{Pr}_1(x) + w_2 \text{Pr}_2(x).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Случаи, когда вырожденные "корни" одинаково совпадают друг с другом  $\kappa_1(x) \equiv \kappa_2(x)$  и случай комплексно-сопряженных "корней" ( $\kappa_{1,2}(x) = \text{Re}(\kappa(x)) \pm i \text{Im}(\kappa(x))$ ), опущены. Авторы предлагают пытливому и продвинутому читателю получить их в качестве упражнения.

### 3. Проверка предложенной теории на реальных данных

3.1. Описание алгоритма обработки и его применение к космологическим данным.

Вначале следует добавить небольшой абзац, связанный с описанием этих интересных данных и их особенностях. Один из авторов (РРН), благодаря неоценимой помощи проф. Думитру Балеану из Бухарестского Института космических исследований (Румыния) получил для анализа интересные данные, связанные с микроволновыми температурными флуктуациями (МТФ) реликтового излучения, связанного с зарождением ранней Вселенной.

Спутник "Макс Планк" (СМП) – последний из серии европейских космических спутников по астрофизике, основной целью которого было измерение температуры и поляризационной анизотропии МТФ фона ранней стадии зарождения Вселенной с точностью, задаваемой только фундаментальными астрофизическими ограничениями. СМП картографировал все небо с угловым разрешением от 31 до 5 угл/мин в девяти частотных диапазонах, охватывающих 30-857 ГГц. Предварительный анализ данных МТФ привел к сильнейшим ограничениям на параметры стандартной космологической модели [7, 8], на сценарии инфляции [9] и на негауссовость изначальных космологических возмущений [10]. Измеренные данные, (полученные РРН) представляют собой МТФ вблизи средней температуры 2,725К и на частотах 100, 143, 217 и 353 GHz. Причем измерения на каждой частоте были сделаны с разрешением 0-10 пикселей выделенного участка звездного неба. Каждый такой двумерный участок звездного неба по определенному алгоритму преобразуется в матрицу  $N=2048 \times M=2048$ . Читателей, интересующихся деталями такого рода измерений и преобразованиями таких измеренных данных к одномерному случаю, можно отослать к статье [11]. Совершенно очевидно, что анализ всего массива данных *не* является целью данной статьи. Поэтому мы выбрали частоту 143 GHz с самым грубым разрешением карты звездного неба, содержащей условно "0" пикселей (хотя такое разрешение включает в себя 12 изначальных пикселей) и матрицу  $N=2048 \times M=205$  (примерно 1/10 часть от исходной матрицы) для последующего

анализа методом, описанным выше. Прежде чем показать исходные данные, которые приготовлены в виде прямоугольной матрицы, полезно показать так называемую трубу доверия (ТД), которая включает в себя только 3 точки, выделенные из каждого столбца: максимальное ( $T_{max}$ ), среднее ( $T_{mean}$ ) и минимальные значения ( $T_{min}$ ), соответственно. Сразу заметим, что эти три замечательные точки инвариантны относительно перестановок всех других точек в фиксированном столбце матрицы. Труба доверия для начальных данных показана на рис.1. Стрелками указаны столбцы матрицы, содержащие максимальное значение ( $m=28$ ) и минимальное значения ( $m=85$ ), соответственно

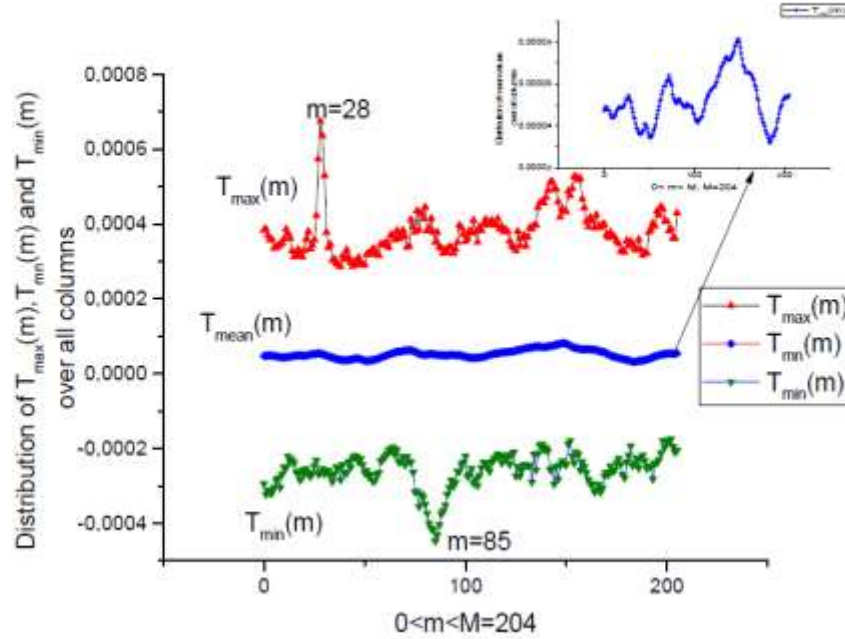


Рис.1. Труба доверия, построенная для выбранной матрицы  $N=2048 \times M=205$ . Здесь количество столбцов  $M=205$  соответствует примерно 1/10 части от полного набора данных, где количество столбцов  $M_{tot}=2048$ . Заметим, что на этом рисунке и не всех последующих данные *безразмерные*, так как предварительно нормированы на единичный градус

Для того, чтобы уменьшить влияние высокочастотных (ВЧ) случайных флуктуаций, мы интегрируем исходные данные методом трапеций, предварительно нормируя их в соответствии со следующими выражениями:

$$Y_j = \frac{y_j - \text{mean}(y)}{\text{stdev}(y)}, j = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

$$J_j = J_{j-1} + \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})(Y_j + Y_{j-1}), J_0 = 0.$$

Эти выражения делают исходные данные  $y_j$ : (а) безразмерными и (б) отфильтрованными. Подчеркнем, что процедура интегрирования подавляет высокочастотные колебания, возможные выбросы и, дополнительно к фильтрации ВЧ данных, выделяет НЧ тренд, что представлено на рис.2.



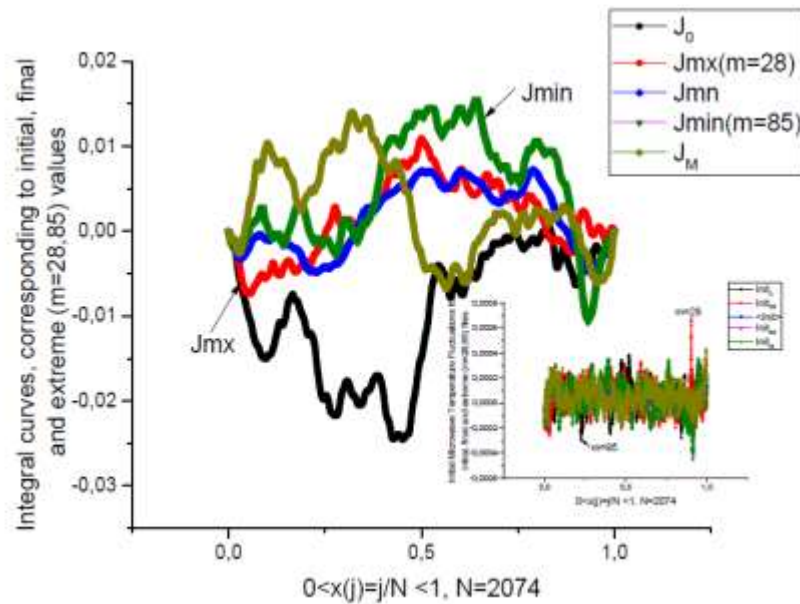


Рис.2. Результаты интегрирования исходных данных методом трапеций в соответствии с формулой (36). Здесь для понимания показаны интегральные кривые, соответствующие максимальному значению ( $m=28$ ) и минимальному значению ( $m=85$ ). Интегральные кривые  $J_0$ ,  $J_M$ , показанные на рисунке, соответствуют начальному ( $m=0$ ) и конечному значениям ( $M=205$ ), соответственно

Отметим также, что на врезке рис.2 показаны ВЧ флуктуации, соответствующие вычисленным интегралам, показанным на его центральной части.

Предполагая, что эти подготовленные данные, составленные из интегральных кривых, могут быть классифицированы как КВ-эксперименты, можно получить три нормированные интегральные кривые  $J_r$ , ( $r = up, mn, dn$ ) в соответствии с процедурой кластеризации, описанной в предыдущем разделе. Дальнейшая цель состоит в том, чтобы описать эти 3 кривые для исходной матрицы  $N=2048 \times M=205$ , используя минимальное количество аппроксимирующих параметров. Внимательный анализ показывает, что, не нарушая границ предложенной общей теории, можно предположить, что периодические функции в (34) совпадают  $Pr_1(x)=Pr_2(x)=Pr(x)$ . Из выражений (17) и (18) находятся неизвестные функции  $\langle a_{1,2}(x) \rangle$  служащие для вычисления искомых корней  $\kappa_{1,2}(x)$ . Функции  $\kappa_{1,2}(x)$  определены выражением (25). Неизвестный нелинейный параметр в виде величины максимального периода  $T$ , фигурирующего в определении периодической функции (2), может быть вычислен из минимизации величины относительной погрешности

$$RelErr(T_{mx}, K_{min}) = \min \left( \frac{stdev(J_r(x) - F_0(x, T_{mx}, K_{min}))}{mean|J_r(x)|} \right) \cdot 100\% . \quad (37)$$

Здесь упрощенная подгоночная функция  $F_0(x, T_{mx}, K_{min})$ , содержащая минимальное число подгоночных параметров, определяется выражением

$$\begin{aligned}
 F_0(x, T_{mx}, K_{\min}) &= A_0 + G(x, T_{mx})Ac_0 + \\
 &+ G(x, T_{mx}) \sum_{k=1}^{K_{\min}} \left[ Ac_k \cos\left(2\pi k \frac{x}{T_{mx}}\right) + As_k \sin\left(2\pi k \frac{x}{T_{mx}}\right) \right], \\
 G(x, T_{mx}) &= (\kappa_1(x)^{x/T_{mx}} + \kappa_2(x)^{x/T_{mx}}).
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

В последнем выражении удобно использовать входную переменную  $x_j=j/N$ , локализованную в интервале  $[0,1]$ . Поэтому наиболее вероятный интервал, на котором может находиться значение  $T_{mx}$ , определяется как  $(0.5, 1.75)$ . Это предположение подтвердилось и численно. Из упрощенной подгоночной функции (38) легко найти периодическую функцию (2), соответствующую ИЭ

$$\Pr(x) \cong A_0 - Ac_0 + \frac{F_0(x, T_{mx}, K_{\min}) - A_0}{G(x, T_{mx})}.
 \tag{39}$$

Упрощенная подгоночная функция (38) (содержащая минимальное число параметров аппроксимации  $Prm = [(T_{mx}, A_0, Ac_0) + 2K_{\min}]$ ) позволяет получить искомую АЧХ (амплитудно-частотную характеристику), содержащую ведущую минимальную частоту  $\omega_{\min}=2\pi/T_{mx}$  и суммарный отрезок частот  $\omega_k = \omega_{\min}k$ , расположенный в интервале  $[1, K_{\min}]$ . На рис.3 показано распределение наклонов (после исключения единичного значения).

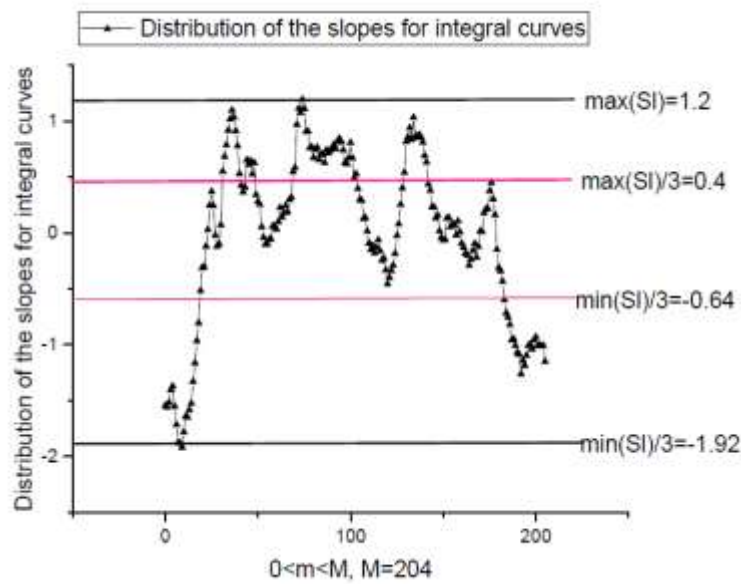


Рис.3. Распределение наклонов, вычисленных для интегральных кривых по формуле (28). Именно эти распределения, попадающие в каждой из этих трех областей, используются для получения трех усредненных кривых по формуле (30)

Далее, эти распределения наклонов разделяем на отрезки с границами  $(\min(SI), \max(SI))$  почти на равные три отрезка:  $(1/3\max(SI), \max(SI))$  для  $F_0(x)$ ,  $(1/3\min(SI), 1/3\max(SI))$  для  $F_1(x)$  и  $(\min(SI), 1/3\min(SI))$  для  $F_2(x)$ . Количество измерений в каждом выбранном сегменте показано на рис.4.

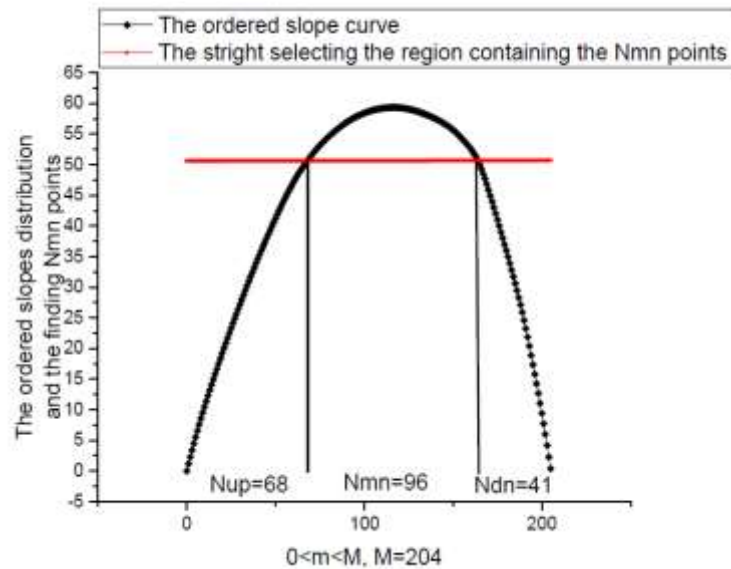


Рис.4. Интегральное распределение наклонов, полученное с помощью проинтегрированной и упорядоченной кривой наклонов с использованием формулы (28) и областей, указанных на предыдущем рисунке

Таким образом, пересечение кривой (рис. 4) с прямыми  $\max(Sl)/3$  и  $\min(Sl)/3$ , показанными на рис.3. позволяет найти необходимое число измерений ( $N_{up}$ ,  $N_{mn}$ ,  $N_{dn}$ ) для получения трех усредненных интегральных кривых, вычисляемых по формуле (38). Эти усредненные интегральные кривые показаны на следующем рисунке. Величина  $Rt=(96/205)\times 100\%=47\%$  и поэтому эти измерения ставим "тройку" и их можно квалифицировать как удовлетворительные.

Эта информация помогает в получении искомым усредненных функций  $F_{0,1,2}$  из выражения (30). На рис.5 показан окончательный результат.

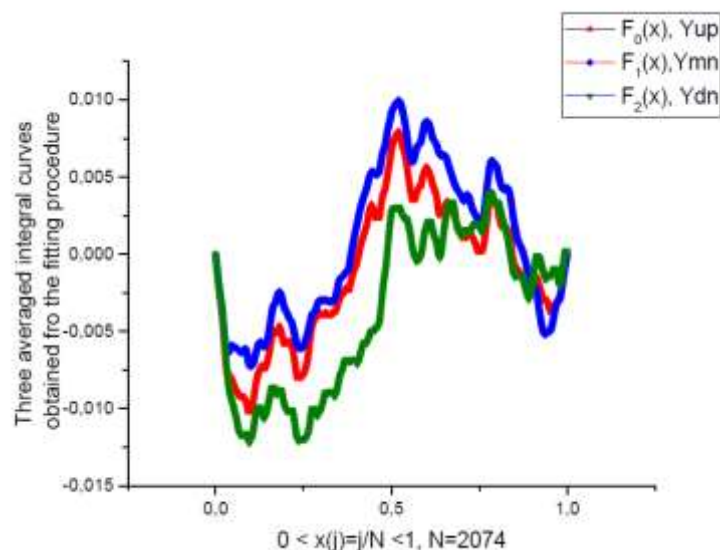


Рис.5. Три усредненные интегральные кривые, полученные с использованием формулы (30). Затем эти кривые подвергаются дальнейшей подгонке по формуле (38)

Анализ величин  $N_{mx}$ ,  $N_{mn}$ ,  $N_{min}$  показывает, что величина  $Rt=47\%$  (см. выражение (29)) и поэтому эти измерения, как уже упоминалось выше, можно квалифицировать как удовлетворительные. Эти три кривые могут быть подогнаны с помощью упрощенной

подгоночной функции (38). Из минимизации относительной погрешности (37) можно найти только один нелинейный параметр аппроксимации, такой как  $T_{mx}$ , предполагая, что этот параметр находится в интервале  $[0.5T, 1.75T]$ . Другие параметры аппроксимации ( $A_0, A_{c0}, A_{ck}, A_{sk}, (k=1,2,\dots,K_{\min})$ ) находятся с помощью ЛМНК. Подгонка этих трех кривых показана на Рис.6. Можно заметить, что в подгоночных кривых существуют некие неустранимые выбросы, происхождение которых остается не до конца непонятым. Причины их появления требуют отдельного исследования.

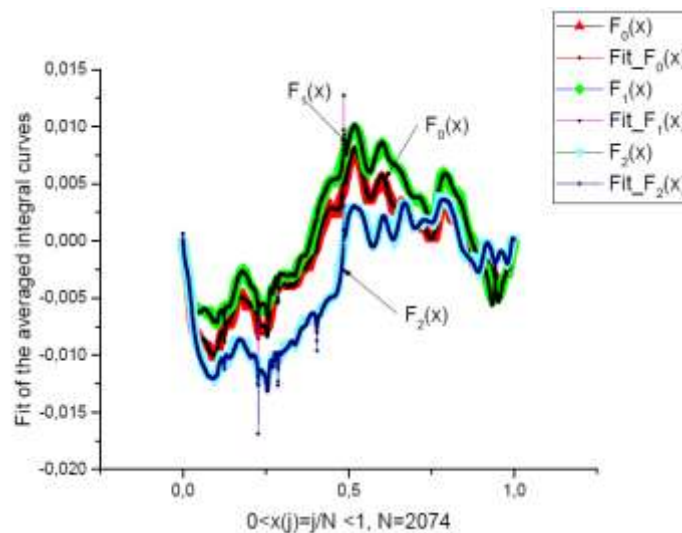


Рис.6. Подгон усредненных интегральных кривых, изображенных на рис.5, осуществлённых с помощью выражения (38)

Распределения АЧХ, взятые в виде модулей и фаз  $Amd_k = (Ac_k^2 + As_k^2)^{1/2}$ ,  $Ph_k = \tan^{-1} \left( \frac{As_k}{Ac_k} \right)$  для трех усредненных функций  $F_{0,1,2}(x)$  показаны на рис.7,8.

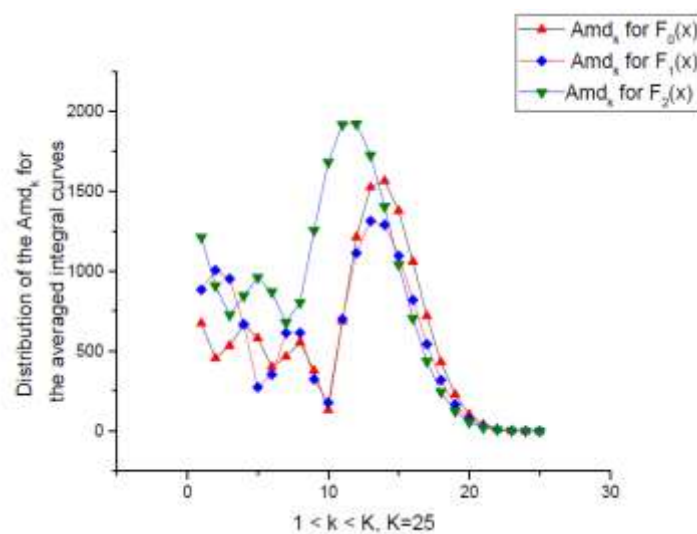


Рис.7. Распределение модулей  $Amd_k$  для всех трех усредненных интегральных кривых, вычисляемых по формуле (38). Величина  $K=25$  определяет число мод, необходимых для подгона усредненных интегральных кривых. Величина ошибки при этом не превышает нескольких процентов

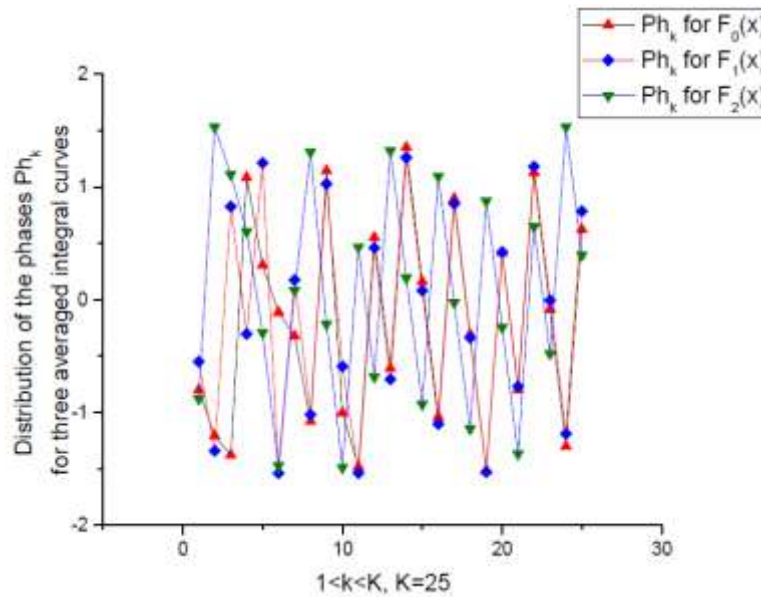


Рис.8. Распределение фазовых компонент  $Ph_k$  для всех 3-х усредненных интегральных кривых, определяющих подгон функций  $F_{0,1,2}(x)$ , входящих в выражение (38)

Наиболее интересный результат этого исследования показан на рис.6-8. Можно исключить влияние неконтролируемых факторов и получить периодические функции  $Pr_{0,1,2}(x)$  для всех трех усредненных интегральных кривых на основе выражения (39). Они также существенно различаются по своим масштабам и показаны на рис.9.

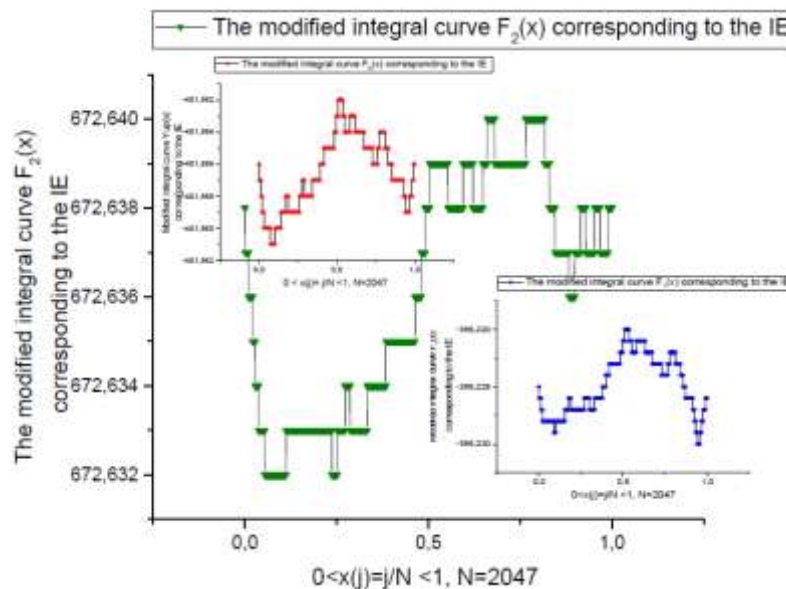


Рис.9. Три интегральные кривые, которые соответствуют ИЭ.

Как видно из этих рисунков, очищенные от влияния неконтролируемых факторов, периодические функции имеют различные масштабы и могут существенно отличаться от исходных функций  $F_{0,1,2}(x)$ , показанных на рис.6. На наш взгляд, такое существенное различие по амплитудам связано с тем фактом, что влияние неконтролируемых факторов является весьма *значимым*, и предлагаемая теория существенно выходит за свои рамки



предположений, когда влияние неконтролируемых факторов не должно выходить за рамки анализируемых измерений. Такое различие по амплитудам показано на рис.10.

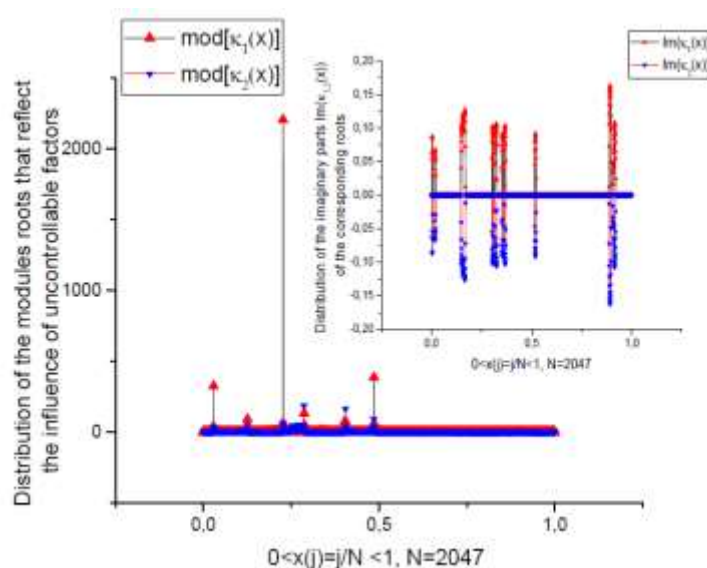


Рис.10. Распределение корней (модулей) – центральная часть рисунка, и их фаз – врезка

Интересно отметить, что поведение корней имеет характер "всплесков". По-видимому, эти всплески объясняют и выбросы в подгоночных функциях, показанные на рис.6, и существенное увеличение амплитуд у редуцированных функций, показанных на рис.9.

#### 4. Результаты и обсуждение

Подводя итоги важно подчеркнуть следующие моменты, которые могут быть использованы исследователями при анализе своих собственных данных.

1. Предлагаемая теория КВЭ носит достаточно общий характер и может быть применена к данным, которые представлены в виде прямоугольных матриц  $N \times M$ .

2. Теория предлагает подгоночную функцию, представленную в форме (32), (34) или в более упрощенной форме (38), которая содержит минимальное число подгоночных параметров.

3. Из этой теории следует важный вывод, связанный с тем, что каждый набор квазипериодических измерений может иметь две подгоночные функции: (а) связанную с предлагаемой моделью и (б) связанную с учетом влияния неконтролируемых факторов. Эта теория особенно будет интересна для случаев описания и сравнения различных сложных систем, когда специфические модели для их описания отсутствуют.

4. Предлагаемая теория будет полезной для предварительной обработки данных искусственным интеллектом, когда гигантский массив данных с помощью предлагаемых функций может быть "сжат" до приемлемого уровня с помощью подгоночных функций по оптимальному алгоритму без вмешательства человека.

5. Авторы видят ещё одно полезное приложение: сравнение "идеальных" кривых, измеренных для эталонного образца и набора кривых, полученных для тестируемого образца. Если измеренные кривые сильно коррелированы и близки к эталонным, то зажигается "зеленый цвет", если сравнительные корреляции по своим параметрам сильно отличаются, то они попадают в "красную зону". Понятно, что некоторые промежуточные

случаи могут быть отнесены в "желтую зону" и потребуют более детального выяснения причин при появлении такой неопределенной ситуации.

## 5. Финансирование

*Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2024-0004.*

*Часть работ была выполнена авторами этой статьи за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").*

## Список литературы

1. Nigmatullin R. Detection of quasi-periodic processes in repeated-measurements: New approach for the fitting and clusterization of different data / R. Nigmatullin, R. Rakhmatullin // Communications of Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2014. - V. 19, Iss.12. – P. 4080-4093.
2. Nigmatullin R.R. Detection of quasi-periodic processes in complex systems: how do we quantitatively describe their properties? / R.R. Nigmatullin, A.A. Khamzin and J. T. Machado // Physica Scripta. – 2014. - V.89. - 015201 (11pp). DOI:10.1088/0031-8949/89/01/015201.
3. Nigmatullin R. R. The First Observation of Memory Effects in the InfraRed (FT-IR) Measurements: Do Successive Measurements Remember Each Other? / R. R. Nigmatullin, S. I. Osokin, D. Baleanu, S. Al-Amri, A. Azam, A. Memic // PLoS ONE (Open access journal), April 9 (4). – 2014. - e94305. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0094305>.
4. Nigmatullin R.R. How to reduce reproducible measurements to an ideal experiment? / R.R. Nigmatullin, R.M. Rakhmatullin, S.I. Osokin // Magnetic Resonance in Solids, Electronic Journal, 2014. - 16 (2). - P.1-19. <http://mrsej.kpfu.ru>.
5. Nigmatullin R.R. General theory of experiment containing reproducible data: The reduction to an ideal experiment / R.R. Nigmatullin, W. Zhang and D. Striccoli // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – 27. - P.175-192.
6. Kuczma M. A survey of the theory of functional equations / Publications de la Faculté d'électrotechnique de L'université Belgrade. – 1964. – 130. - pp. 1-64.
7. Planck Collaboration, Planck 2015 results I. Overview of products and scientific results, Astronomy & Astrophysics. – 2016. – 594, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527101>.
8. Planck Collaboration, Planck 2018 results I. Overview and the cosmological legacy of Planck / Astronomy & Astrophysics. – 2020. – 641, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>.
9. Planck Collaboration, Planck 2018 results X. Constraints on inflation / Astronomy & Astrophysics. -2020. – 641, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833887>.
10. Planck Collaboration, Planck 2018 results IX. Constraints on primordial non-Gaussianity/ Astronomy & Astrophysics. – 2020. – 641, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935891>.
11. Gorsky et al, HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere, The Astrophysical Journal. – 2005. - 622(2), 759-771, DOI: 10.1086/427976.

## QUASI-REPRODUCIBLE EXPERIMENTS: UNIVERSAL ADJUSTMENT FUNCTION FOR A QUANTITATIVE DESCRIPTION OF COMPLEX SYSTEMS DATA

*R.R. Nigmatullin<sup>1</sup>, A.A. Litvinov<sup>1,2</sup>, S.I. Osokin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,  
Department of Radio Electronics and Information and Measuring Technology  
10, st. K. Marx, Kazan, 420111, Russian Federation

<sup>2</sup> Kazan (Volga region) Federal University,  
Institute of Information Technologies and Intelligent Systems,  
18, st. Kremlevskaya, 420008, Kazan, Russian Federation

**Annotation.** This paper outlines the foundations of the original theory of quasi-reproducible experiments (QRE), based on the testable hypothesis of the existence of a significant correlation (memory) between successive measurements. Based on this hypothesis, which the authors refer to for brevity as the verified partial correlation principle (VPCP), it can be proven that there is a universal fitting function (UPF) for quasi-periodic (QP) and quasi-reproducible (QR) measurements. In other words, there is a certain common platform or “bridge” on which, figuratively speaking, there meet a true theory (claiming to describe data from first principles or verifiable models) and an experiment that proposes this theory to test measured data, as much as possible “cleansed” of influence uncontrollable factors and hardware functions of the measuring device. The proposed theory was tested on space data representing temperature fluctuations and measured by European satellites in space for the early stages of the evolution of the Universe. As a result of processing these data, the frequency response corresponding to these cumulative/integral data was obtained and the necessary quantitative characteristics corresponding to the “ideal” experiment were calculated within the framework of the QE. The authors want to point out that this theory can be applied to a wide class of complex systems whose response can be measured repeatedly.

**Keywords:** quasi-reproducible experiment, correlation, sequential measurements, universal fitting function, ideal experiment.

Статья представлена в редакцию 16 мая 2024г.