Ю.А. Альпин, В.С. Альпина

Темпоральные компоненты полугруппы неотрицательных матриц. Обобщение теоремы Минка о структуре неприводимой матрицы.

§1. Введение

Напомним, что неотрицательная матрица A порядка n называется неприводимой, если для любых индексов i, j из множества $N=\{1,\ldots,n\}$ существует такой показатель l, что (i,j)-элемент матрицы A^l положителен.

Неотрицательная матрица вида

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

с квадратными диагональными нулевыми блоками называется наддиагональной блочной матрицей. Если A неприводима и имеет индекс импримитивности $r(A)=k$, то матрица (1) есть не что иное, как известная форма Фробениуса неприводимой импримитивной неотрицательной матрицы (см., например, [1]). В общем случае неотрицательная матрица в форме (1) может быть приводимой, либо, будучи неприводимой, может иметь индекс импримитивности, не равный её блочному порядку k.

Х. Минк [2,3] установил следующий критерий неприводимости наддиагональной блочной матрицы:

Теорема 1. Пусть неотрицательная матрица A без нулевых строк и столбцов находится в форме (1). Тогда A неприводима в том, и только том, случае, когда произведение $A_{12}A_{23}\ldots A_{k1}$ является неприводимой матрицей.

Для доказательства автор привлёк спектральные свойства матрицы (1), известные из теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц. Позднее были предложены различные комбинаторные (и более простые) доказательства теоремы 1 [4–6]. Мы сформулируем и докажем обобщение теоремы 1 на полугруппы неотрицательных матриц. В определениях и доказательствах используются лишь комбинаторные свойства неотрицательных матриц. Вначале введём подходящую терминологию.

Несложное вычисление показывает, что при возведении матрицы (1) в степень k получается блочно-диагональная матрица

$$A^k=\operatorname{diag}(A_{11}^{(k)},A_{22}^{(k)},\ldots,A_{kk}^{(k)}). \qquad (2)$$

Пусть матрица (1) — стохастическая, следовательно, определяет периодическую цепь Маркова. Если мы наблюдаем цепь лишь в моменты времени $k,2k,3k,\ldots$, то получим новую цепь Маркова с матрицей (2) переходных вероятностей. Эта цепь распадается на k цепей, управляемых диагональными стохастическими подматрицами матрицы (2) (подробнее о периодических цепях см., например, [7]). Поэтому представляется естественным назвать матрицы $A_{11}^{(k)},A_{22}^{(k)},\ldots,A_{kk}^{(k)}$ темпоральными компонентами матрицы A. Далее будем использовать этот термин и тогда, когда неотрицательная матрица (1) не является стохастической.

Нетрудно видеть, что $A_{11}^{(k)} = A_{12}A_{23}\ldots A_{k1}$. Значит, теорема 1 допускает следующую переформулировку: неотрицательная матрица (1) без нулевых строк и столбцов неприводима в точности тогда, когда неприводима её первая темпоральная компонента. Вместо первой можно взять, разумеется, любую другую компоненту.

Теперь пусть $\mathcal{P}$ — мультипликативная полугруппа неотрицательных матриц порядка n. Полугруппа $\mathcal{P}$ называется неприводимой, если для любых индексов i,j из множества $N=\{1,\ldots,n\}$ в полугруппе найдётся матрица с положительным (i,j)-элементом. Заметим, что переход от единственной неприводимой матрицы к неприводимой полугруппе матриц совершается естественно, так как моногенная полугруппа, порожденная неприводимой матрицей A и состоящая из матриц A^l $(l=1,2,\ldots)$, неприводима.

Обобщая понятие наддиагональной блочной матрицы, назовём матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

с квадратными диагональными блоками блочно-мономиальной, если в каждой блочной строке и каждом блочном столбце имеется ровно один ненулевой блок.

Мы будем рассматривать полугруппы блочно-мономиальных матриц. Подразумевается, что все матрицы полугруппы разбиты на блоки одним и тем же способом, так что умножение матриц можно производить поблочно. Один пример полугруппы блочно-мономиальных матриц у нас уже есть: это полугруппа, порожденная наддиагональной блочной матрицей. Вообще, полугруппы блочно-мономиальных матриц возникают естественным образом: как доказано в [8], всякая неприводимая полугруппа неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов либо содержит положительную матрицу, либо посредством некоторого перестановочного подобия все матрицы полугруппы преобразуются к блочно-мономиальному виду.

В §2 будет введено понятие темпоральной компоненты полугруппы блочно-мономиальных матриц и приведены соответствующие примеры. В §3 доказывается обобщение теоремы Минка на полугруппы блочно-мономиальных матриц. Оно представлено в виде теорем 2 и 3.

§2. Темпоральные компоненты.

Обозначим символом P_n полугруппу всевозможных неотрицательных матриц порядка n. Пусть $\mathcal{P} \subseteq P_n$ — полугруппа блочно-мономиальных матриц блочного порядка k. Множество матриц из $\mathcal{P}$, у которых (s,s)-блок ненулевой, образует подполугруппу в $\mathcal{P}$. Следовательно, множество $\mathcal{P}_s$ диагональных (s,s)-блоков матриц этой полугруппы тоже образует мультипликативную полугруппу матриц. Эту полугруппу и будем называть s-й темпоральной компонентой полугруппы $\mathcal{P}$.

В следующих двух примерах полагаем, что диагональные блоки имеют размеры $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$.

Пример 1. Полугруппа $\mathcal{D}_n \subseteq P_n$ всевозможных блочно-диагональных матриц. Темпоральными компонентами $\mathcal{D}_n$ служат, очевидно, полугруппы $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_k}$.

Пример 2. Полугруппа $\mathcal{B}_n \subseteq P_n$ всевозможных блочно-мономиальных матриц. Темпоральные компоненты полугруппы $\mathcal{B}_n$ те же, что у полугруппы $\mathcal{D}_n$.

Действительно, поскольку $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{B}_n$, то s-ая темпоральная компонента полугруппы $\mathcal{D}_n$ содержится в s-й темпоральной компоненте полугруппы $\mathcal{B}_n$, т. е. имеет место вложение $P_{n_s} \subseteq (\mathcal{B}_n)_s$ $(s = 1, \ldots, k)$. Но это вложение на самом деле является равенством, так как в P_{n_s} входят всевозможные неотрицательные матрицы порядка n_s.

Пусть $M \subseteq P_n$ — некоторое семейство блочно-мономиальных матриц с одинаковым разбиением на блоки. Обозначим через $\langle M \rangle$ мультипликативную полугруппу всевозможных произведений матриц из M. Говорят, что она порождена семейством M. Покажем, что темпоральные компоненты полугруппы $\langle M \rangle$ можно наглядно представить с помощью графа. Сопоставим семейству M нагруженный ориентированный мультиграф с вершинами $1, \ldots, k$. Положим, что дуга $s \to t$ с весом A_{st} существует, если (s,t)-блок матрицы $A \in M$ ненулевой. Весом пути в этом графе называется произведение весов дуг, составленное в том порядке, в каком расположены дуги пути. Нетрудно видеть, что темпоральной компоненте $\mathcal{M}_v$ принадлежат в точности те матрицы, которые являются весами замкнутых путей, начало и конец которых лежат в вершине v. Приведём простой пример, иллюстрирующий графовое представление темпоральных компонент.

Пример 3. Рассмотрим полугруппу, порождённую матрицами

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в которых все блоки — квадратные матрицы одного порядка. Граф семейства $\{F, G\}$ имеет вершины 1 и 2, причем вокруг вершины 1 есть петля веса A, вокруг вершины 2 есть петля веса B, из каждой вершины в другую вершину ведёт дуга единичного веса E. Из рисунка графа видно, что обе темпоральные компоненты рассматриваемой полугруппы совпадают с полугруппой $\langle A, B, E \rangle$.

§3. Обобщение теоремы Минка

Теорема 1 относится к полугруппе, порождённой единственной наддиагональной блочной матрице. Переход к полугруппам блочно-мономиальных матриц общего вида так изменяет ситуацию, что обобщение теоремы 1 представлено ниже в виде двух теорем, доказываемых при различных условиях.

Вначале докажем полезный критерий неприводимости:

Лемма 1. Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц неприводима тогда и только тогда, когда некоторая конечная сумма матриц полугруппы является положительной матрицей.

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n неприводима. Согласно определению неприводимости это значит, что для любой пары индексов $i, j \in N$ существует матрица $A(i,j) \in \mathcal{P}$, такая, что $(A)_{ij} > 0$. Суммируя матрицы $A(i,j)$ по всевозможным $i, j \in N$, получим положительную матрицу. Обратно, пусть полугруппа $\mathcal{P}$ содержит конечный набор матриц $A_1, \ldots, A_m$, сумма которых является положительной матрицей. Ясно, что в этом наборе для любых i, j найдётся матрица с положительным (i,j)-элементом, следовательно, полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.

Теорема 2. Темпоральные компоненты неприводимой полугруппы $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц неприводимы.

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. Согласно лемме 1 некоторая конечная сумма $A+B+\ldots+C$ матриц из $\mathcal{P}$ является положительной матрицей. В частности, при любом s сумма диагональных блоков этих матриц, расположенных на s-й позиции, т. е. сумма матриц из s-й компоненты полугруппы $\mathcal{P}$, является положительной матрицей. Следовательно, по лемме 1, s-я темпоральная компоненты $\mathcal{P}$ при любом s неприводима.

Замечание 1. Теорема 2 обобщает ту часть теоремы 1, которая утверждает (если пользоваться терминологией, введённой в §1), что из неприводимости наддиагональной блочной матрицы вытекает неприводимость её темпоральных компонент. Отметим отличие, возникающее при переходе к полугруппам блочно-мономиальных матриц общего вида. Если неотрицательная матрица A неприводима, то она, очевидно, не может содержать нулевых строк и столбцов. То же верно и для всех матриц полугруппы, порождённой этой матрицей. Но в общем случае неприводимые полугруппы могут содержать матрицы с нулевыми рядами и для доказательства теоремы 2 отсутствие нулевых рядов не требуется.

Пример 4. Положим, что в матрице A примера 3 первый столбец положителен, а остальные столбцы нулевые; пусть в матрице B первая строка положительная, а другие строки нулевые. Тогда матрица F имеет нулевые строки и столбцы. Темпоральная компонента $\langle A, B, E\rangle$ полугруппы $\langle F, G\rangle$ содержит положительную матрицу AB и по лемме 1 неприводима. Следовательно, по теореме 2 неприводима и полугруппа $\langle F, G\rangle$.

Следующая лемма приводится без доказательства.

Лемма 2. Произведение двух неотрицательных матриц, одна из которых положительная, а другая не содержит нулевых строк и столбцов, является положительной матрицей.

Теорема 3. Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц блочного порядка k удовлетворяет условиям:

1) матрицы полугруппы не имеют нулевых строк и столбцов;

2) для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ полугруппа содержит матрицу с ненулевым (s,t)-блоком.

Тогда, если некоторая темпоральная компонента полугруппы $\mathcal{P}$ неприводима, то и полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.

Доказательство. Пусть некоторая темпоральная компонента неприводима. Для простоты обозначений будем считать, что неприводима компонента $\mathcal{P}_1$. Тогда по условию 2) теоремы для любых $s,t \in \{1,2,\dots,k\}$ существуют матрицы $B,C \in \mathcal{P}$ такие, что $B_{s1} \neq 0, C_{1t} \neq 0$. Поскольку полугруппа $\mathcal{P}_1$ неприводима, то полугруппа $\mathcal{P}$ содержит такие матрицы $X,\dots,Y$, что в их сумме $Z = X + \ldots + Y$ блок $Z_{11} = X_{11} + \ldots + Y_{11}$ положителен. По условию 1) блочно-мономиальные матрицы B и C не имеют нулевых строк и столбцов. Тем же свойством, очевидно, обладают их ненулевые блоки B_{s1} и C_{1t}. Значит, по лемме 2 матрица $B_{s1}Z_{11}C_{1t}$ положительная. Отсюда и из равенств

$$B_{s1}Z_{11}C_{1t} = B_{s1}X_{11}C_{1t} + \ldots + B_{s1}Y_{11}C_{1t} = (BXC)_{st} + \ldots + (BYC)_{st}$$

следует, что в полугруппе $\mathcal{P}$ найдутся такие матрицы $BXC,\dots,BYC$, что их сумма BZC имеет положительный (s,t)-блок. Суммируя матрицы типа BZC по всевозможным $s,t \in \{1,2,\dots,k\}$, получим положительную матрицу. По лемме 1 это означает неприводимость полугруппы $\mathcal{P}$.

Замечание 2. Теорема 3 обобщает положение теоремы 1, утверждающее, что неприводимость темпоральной компоненты наддиагональной блочной матрицы A влечёт неприводимость матрицы A. Заметим, что без условий 1) и 2) обойтись нельзя. Если опустить условие 1), то утверждение теоремы становится неверным. Действительно, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_{11}^{(2)} = A_{12}A_{21}$ — положительная матрица, то по лемме 1 первая темпоральная компонента полугруппы $\langle A \rangle$ неприводима. Однако сама полугруппа $\langle A \rangle$ приводима, поскольку у всех матриц полугруппы четвёртый столбец нулевой.

Без условия 2) утверждение теоремы 3 также перестаёт быть верным. Действительно, если при некоторых s и t во всех матрицах полугруппы (s,t)-блок нулевой, то это явно противоречит определению неприводимой полугруппы.

Следствие 1. Пусть полугруппа $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 3. Если одна из матриц полугруппы содержит положительный блок, то полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.

Доказательство. Пусть (s,t)-блок матрицы $A \in \mathcal{P}$ положителен. Из условия 2) следует, что существуют матрицы $B,C \in \mathcal{P}$ такие, что $B_{1s} \neq 0, C_{t1} \neq 0$. Тогда $(1,1)$-блок матрицы BAC равен $B_{1s}A_{st}C_{t1}$. Он положителен по причинам, уже приведённым в доказательстве теоремы 3. Следовательно, темпоральная компонента $\mathcal{P}_1$ неприводима по лемме 1, как содержащая положительную матрицу. Применяя теорему 3, заключаем, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967.

2. H. Minc, *The structure of irreducible matrices.* – Linear and Multilinear Algebra. **2** (1974), 85-90.

3. H. Mink, *Nonnegative Matrices.*— Wiley, New York etc., 1988.

4. N.J. Pullman, *A note on a theorem of Minc on irreducible nonnegative matrices.* – Linear and Multilinear Algebra. **2** (1974), 335-336.

5. L. EIsner, *Another note on a theorem of Minc on irreducible nonnegative matrices.* – Linear and Multilinear Algebra. **6** (1978), 61-62.

6. R.A. Brualdi, M. Lewin, *On powers of nonnegative matrices.* – Linear Algebra Appl. **43** (1982), 87-97.

7. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и её приложения, т. 1 Мир, 1967.

8. V.Yu. Protasov, A.S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl., 437 (2012), 749-765.

Al‘pin Yu. A., Al‘pina V.S. This paper gives a combinatorial proof of the Protasov – Voynov theorem about an irreducible semigroup of nonnegative matrices without positive matrices.

Казанский федеральный университет
E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

Казанский национальный исследовательский технологический университет
420015, Казань, ул. К.Маркса, 68.