Министерство образования и науки РФ
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Набережночелнинский институт (филиал)

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2018

УДК 530 (077)

Печатается по рекомендации
кафедры физики НЧИ КФУ

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. Н.Б. Юнусов

Методы обработки измерений физических величин: Учебно-методическое пособие к лабораторному практикуму по физике / Составители: А.Т. Галиакбаров, Ч.С. Страшинский, Х.К. Тазмеев - Набережные Челны: НЧИ КФУ, 2018 – 35 с.

Изложены практические методы метрологической оценки результатов измерений (прямых, косвенных, однократных и многократных). Учебно-методическое пособие предназначено в помощь студентам, проходящим лабораторный практикум по физике.

1. ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. На каждом шагу встречаются измерения таких величин, как длина, объем, вес, время и др. Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в природе закономерности. В лабораторном практикуме проводятся измерения физических величин. Необходимо уметь правильно обрабатывать и представлять результаты этих измерений.

Под измерением понимается операция, в результате которой определяется во сколько раз интересующая величина больше или меньше величины той же природы, принятой за единицу. Таким образом, измерение является актом сравнения: расстояние сравнивается с единицей расстояния, время – с единицей времени, сила электрического тока – с единицей сила электрического тока и т.д. Единицы измерения при этом должны быть предварительно определены. В лабораторном практикуме необходимо придерживаться международной системы единиц СИ.

<u>Физическая величина</u> – характеристика одного из свойств физического объекта, общая в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальная для каждого объекта (т. е. значение физической величины может быть для одного объекта в определенное число раз больше или меньше, чем для другого). В качестве примеров физических величин можно перечислить: длину, время и силу электрического тока.

<u>Единица физической величины</u> – физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение равное 1, и применяемое для количественного выражения однородных физических величин. Например, 1 м является единицей длины, 1 с – времени, 1 А – силы электрического тока.

<u>Система единиц физических величин</u> – совокупность основных и производных единиц физических величин,

образованная в соответствии с принятыми принципами для заданной системы физических величин. В 1960 году принята международная система единиц (СИ).

В системе единиц физических величин выделяют основные единицы системы единиц (в СИ – метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин). Из сочетания основных единиц образуются производные единицы (скорости - м/с, плотности – кг/м^3).

Путем добавления к основным единицам установленных приставок, образуются кратные (например, километр) или дольные (например, микрометр) единицы.

Измерения делятся на прямые и косвенные. Прямые - это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных. При прямых измерениях определяемая физическая величина сравнивается с ее единицей (единицей физической величины) непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Примерами прямых измерений служат измерения длины тела линейкой, массы при помощи весов, напряжения вольтметром и др.

Косвенные - это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям, т.е. измеряют не собственно определяемую величину, а другие, функционально с ней связанные. Примеры косвенных измерений: определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров; нахождение удельного электрического сопротивления проводника по прямым измерениям его длины и диаметра, а также напряжения, приложенного к нему, и силы электрического тока, протекающего через него.

Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно измерить непосредственно, или прямое измерение дает менее точный результат. Роль их особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например, размеров астрономического или внутриатомного порядка.

2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Измеряя какую-либо физическую величину, мы можем определить её с некоторой погрешностью. Поэтому в задачу измерения входит определение наиболее достоверного значения искомой величины и обоснованная оценка допущенных при этом ошибок.

Постоянные факторы, присутствующие при измерениях, (в каждом случае свои, причём их может быть несколько), приводят к появлению систематической погрешности. Каждый раз при измерении значения одной и той же величины в одних и тех же условиях систематическая погрешность имеет одно и то же значение. Если эти факторы учесть, введя соответствующие поправки, то можно приблизиться к реальному значению измеряемой величины. Таким образом, *в принципе систематические погрешности могут быть учтены и даже исключены,* хотя осуществление этого на практике может оказаться довольно непростой задачей. Величина систематической ошибки определяется в основном инструментальной погрешностью средства измерения. Каждый, даже новый прибор обладает погрешностью, которая с течением времени возрастает за счет появления остаточных деформаций пружин, износа трущихся частей и пр. Дополнительный вклад в величину систематической погрешности вносят ошибки, возникавшие при неправильной установке прибора (стрелка прибора не установлена на ноль, прибор не по отвесу и т.д.), при применении несовершенной методики измерения, из-за влияния неблагоприятных внешних воздействий (вибраций, магнитного поля, высокой или низкой температурой, отклонения напряжения источника тока и т.д.).

Частичное устранение этих погрешностей достигается путём установки прибора в соответствии с инструкцией, обеспечения нормальных условий эксплуатации прибора и применения правильных методов измерения. Чтобы уменьшить вклад систематической погрешности, нужно применить более совершенный прибор или изменить методику измерения.

Факторы, действующие случайным образом, приводят к появлению случайных погрешностей. Такие факторы не могут быть выявлены при измерении и, на них нельзя оказать влияние. При измерениях присутствует еще человеческий фактор, связанный с восприятием происходящих процессов и реакцией на это восприятие. В результате, при повторных измерениях одной и той же величины могут получаться различные её значения, связанные со *случайными погрешностями*. От измерения к измерению случайная погрешность может изменять как свой знак, так и свою величину. В силу случайного характера воздействий *заранее предсказать величину такой погрешности невозможно.*

Следует отметить, что всякое измерение предполагает определённую взаимосвязанную цепочку участников процедуры измерения: *наблюдатель – измерительный прибор – анализируемый объект – «внешняя среда»*.

Элементы этой цепочки связаны огромным количеством взаимодействий и движений. В процессе измерения анализируемый объект, измерительный прибор и наблюдатель могут быть подвержены различным влияниям (в том числе и взаимным), что и сказывается на результате измерений.

Безусловно, если уменьшать влияния, не имеющие непосредственного отношения к процедуре измерения, и стараться учитывать неустранимые влияния, то точность измерений будет возрастать. Но абсолютно точное измерение невозможно принципиально. И это во многом связано с природой самих измеряемых величин.

Если мы, например, захотим абсолютно точно измерить длину металлического стержня, то обнаружим наличие принципиально неустранимых (хотя и очень малых) колебаний кристаллической решетки. Никакой абсолютно точной «истинной» длины у стержня нет. Она постоянно случайным образом изменяется, отклоняясь в ту или иную сторону от некоторого наиболее часто встречающегося значения. Вот это значение мы можем принять за «истинное» значение длины и в дальнейшем оперировать именно с ним, говоря о длине стержня, или используя эту величину для каких-либо расчётов, например, для определения объёма стержня.

Такого рода ситуация обнаруживается во множестве других измерений. Сами измеряемые величины случайным образом могут изменяться, что обусловлено физической природой этих величин. Таким образом, *случайные факторы не могут быть устранены в принципе*. Их можно свести к минимуму, но окончательно избавиться от них нельзя. Присутствие случайных погрешностей можно обнаружить лишь при повторении измерений одной и той же величины с одинаковой тщательностью. Если при повторении измерений получаются одинаковые числовые значения, то это указывает не на отсутствие случайных погрешностей, а на недостаточную точность и чувствительность метода или средства измерения. Следовательно, *представляя результаты измерений, мы должны давать информацию, касающуюся нашей оценки «истинного» значения величины с учётом случайных погрешностей измерения* (при условии, что систематическая погрешность исключена или учтена в виде соответствующей поправки). Понятно, что наиболее полно такая информация может быть представлена по результатам многократных измерений.

Обычно проводят несколько измерений (n раз) искомой величины и в качестве результата, наиболее близкого к «истинному», принимают их среднее арифметическое значение

$$< x >= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (3)$$

Под истинным значением измеряемой величины x подразумевают

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (4)$$

Теория ошибок позволяет вычислить границы интервала, внутри которого может находиться истинное значение x_0 измеряемой величины *x*.

3. ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Допустим, что мы *n* раз измерили значение некоторой величины *x*. Вследствие случайных факторов получается совокупность *n* различных значений одной и той же величины *x*. Эта совокупность значений получила название *конечной выборки*. Пусть максимальное измеренное значение равно x_{max}, минимальное – x_{min}. Представим результаты измерений в графической форме. Для этого предварительно проведём некоторую их обработку. Разобьём полный интервал изменения величины *x* на *m* более мелких интервалов: $(x_{\max} - x_{\min})/m$. Для каждого такого интервала $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ определим количество измерений Δn_i, для которых значение величины *x* попадает в рассматриваемый интервал. Определим величину $y_i = (\Delta n_i / n)/\Delta x_i$ и построим график зависимости *y(x)*. Здесь отношение $\Delta n_i / n$ представляет вероятность того, что измеряемая величина *x* примет одно из значений в пределах от x_i до x_{i+1}. Отношение этой вероятности к ширине самого интервала Δx_i, (т.е. величина y_i) называется плотностью вероятности.

Пример возможного графика *y(x)* приведён на рис. 1. График представляет собой столбчатую диаграмму, которая называется *гистограммой.* Гистограмма достаточно наглядно демонстрирует *распределение значения результатов измерений:* одни значения величины *x* в процессе измерений получались довольно редко, другие – более часто, а какие-то – очень часто. На некоторый интервал Δx_i приходится максимальное значение величины *y*.

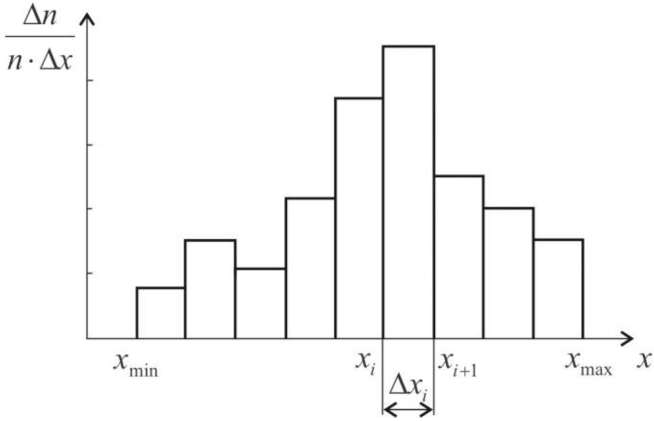

Рис. 1. Гистограмма результатов измерений величины *x*.

Из опыта следует, что при увеличении числа измерений гистограмма будет принимать простую и вполне определённую форму, которая для множества различных экспериментов оказывается универсальной. Если совершить предельный переход: $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$, то гистограмма превратится в непрерывную кривую, которая описывается функцией следующего вида:

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{x-x_0}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

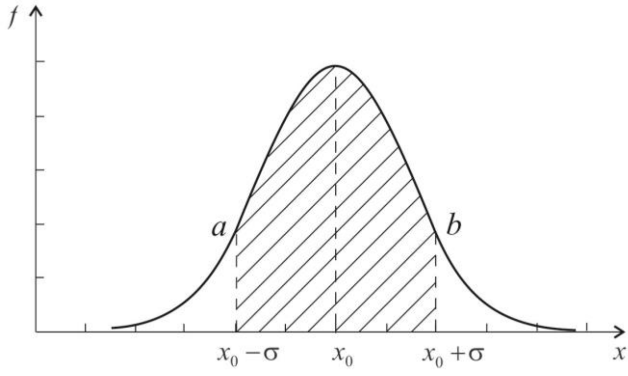

Рис. 2. Предельное распределение.

В теории ошибок x_0 называется *математическим ожиданием*, а величина σ^2 – *дисперсией* (рассеянием результатов измерений относительно их среднего значения). Дисперсия имеет размерность квадрата величины x. Более удобной характеристикой является величина σ, равная корню квадратному из дисперсии, которая имеет размерность самой x. График функции $f(x)$ изображён на рис. 2. Представленная на этом рисунке непрерывная кривая является, таким образом, *предельным распределением* или, как его ещё называют, *генеральным распределением*.

Кривая распределения симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку с абсциссой x_0. Следовательно, появление разных по величине, но противоположных по знаку случайных погрешностей равновероятно. В средней части кривая имеет выпуклость, по обе стороны от которой находятся точки перегиба a и b, ниже которых кривая становится вогнутой, асимптотически приближаясь к оси абсцисс. Промежутки между точками перегиба и осью ординат равны $\pm\sigma$. Для неограниченно большого числа измерений ($n\to\infty$) 68,3% результатов измерений лежат в интервале от ($x_0 - \sigma$) до ($x_0 + \sigma$) и 31,7% – вне его. В интервал от ($x_0 - 2\sigma$) до ($x_0 + 2\sigma$) попадают 95% результатов измерений.

Предельное распределение – это *теоретическая идеализация*, к которой никогда нельзя абсолютно точно приблизиться в эксперименте. Чем больше количество измерений, тем ближе гистограмма к предельному распределению. *Теоретическая идеализация*, хотя и не достижима, очень важна: она *демонстрирует предельные возможности распределения результатов в данном эксперименте*. Если бы могли получить в эксперименте предельное распределение, то информация, содержащаяся в нём, была бы максимально возможной и полной.

Для описания универсального, не относящегося к какому-либо конкретному эксперименту, предельного распределения используется функция

$$\varphi(\Delta x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}} \quad . \qquad (2)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$ – отклонение измеряемой величины от её истинного значения (математического ожидания).

Функция $\varphi(\Delta x)$ представляет собой плотность вероятности при $n \to \infty$ и называется функцией распределения Гаусса или законом нормального распределения Гаусса.

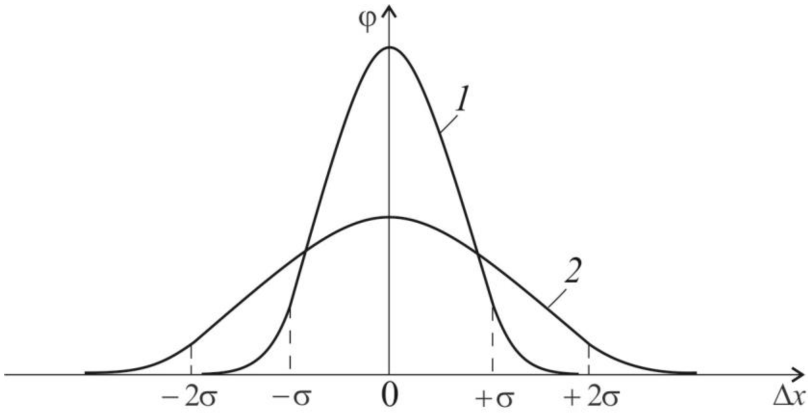

Рис. 3. Кривые распределения Гаусса (нормального распределения).

На рис. 3 показаны кривые нормального распределения случайных ошибок, построенные по формуле (2) для двух значений σ. Причём, у кривой *1* эта величина в два раза меньше, чем у кривой *2*. Ордината $\varphi(\Delta x)$, соответствующая $\Delta x = 0$, обратно пропорциональна σ.

Функция $f(x)$ позволяет рассчитать вероятность того, что измеряемая величина x примет одно из значений в выбранном интервале от x_1 до x_2:

$$\Delta n / n = \int_{x_1}^{x_2} f dx \ , \tag{3}$$

где x_1 – нижняя граница выбранного интервала значений величины x,

x_2 – верхняя граница выбранного интервала значений величины x.

Вероятность нахождения измеренного значения x в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ равна единице. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx = 1 \, . \tag{4}$$

Выражение (4) называется условием нормировки функции $f(x)$. Аналогичное условие накладывается и на функцию распределения Гаусса. Из геометрического смысла интеграла следует, что площадь под кривой нормального распределения согласно интегралу (4) всегда (независимо от значения σ) численно равна единице. При увеличении σ кривая распределения становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс и, наоборот, при уменьшении σ кривая вытягивается вверх (см. рис. 3). Таким образом, малому значению σ соответствует преобладание малых случайных погрешностей и большая точность измерения, при большом же значении σ большие случайные погрешности встречаются чаще, следовательно, точность измерений меньше.

Используя вероятностный смысл функции $f(x)$, можно показать, что среднее значение измеряемой величины определяется как

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f dx \, . \tag{5}$$

В случае нормального распределения результат совпадает с x_0, т.е. $<x> = x_0$. Поэтому величина $<x>$ и получила название *среднего значения нормального (генерального) распределения или генерального среднего.*

Аналогично можно показать, что значение σ совпадает с величиной *стандартного* или *среднеквадратичного отклонения*, квадрат которого для нормального распределения определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-<x>)^2\cdot\varphi\cdot dx\,. \qquad (6)$$

Поэтому σ называется *среднеквадратичным (стандартным) отклонением нормального (генерального) распределения* или среднеквадратичной ошибкой. Среднеквадратичное отклонение характеризует среднюю меру разброса (отклонения) случайной величины x от среднего значения $<x>$. Чем меньше значение σ, тем быстрее уменьшается значение функции Гаусса, тем уже кривая нормального распределения, меньше разброс значений измеряемой величины и, следовательно, точнее измерение. Следует обратить внимание на то, что сначала суммируются (интегрируются) значения величины $(x - <x>)^2$ - квадраты всех отклонений от среднего. Квадратный корень из этой суммы и даёт величину среднеквадратичного отклонения (с таким определением связано название величины σ). Если бы суммировались сами отклонения, т.е. величины $(x - <x>)$, то в силу симметрии нормального распределения Гаусса результат был бы равен нулю. Это обусловлено тем, что отрицательные и положительные по знаку отклонения являются равновероятными. По этой причине *в качестве средней меры отклонения случайной величины от среднего используется именно среднеквадратичное отклонение.*

Возьмём интервал от $(x_0 - \Delta x)$ до $(x_0 + \Delta x)$, границы которого симметричны по отношению к математическому ожиданию (генеральному среднему). Пользуясь (3), можно определить вероятность α попадания «истинного» значения измеряемой величины в этот интервал. Если вероятность определена, то интервал называется доверительным интервалом измерения, а вероятность α называют доверительной вероятностью или *надёжностью измерения*. Доверительная вероятность выражается или в долях единицы или в процентах и зависит от величины выбранного интервала.

Если задан доверительный интервал с указанием доверительной вероятности α, то информация о результатах измерения считается представленной с учётом случайных погрешностей измерения. Величина Δx, характеризующая ширину доверительного интервала, называется *доверительной погрешностью.*

В качестве доверительного интервала для нормального распределения чаще всего используется интервал от ($x_0 - \sigma$) до ($x_0 + \sigma$), связанный со стандартным отклонением. Величина доверительной вероятности для такого интервала составляет приблизительно 0,683 (или 68,3%).

Если взять $\Delta x = 2\sigma$, то α =0,955 (или 95,5%). При $\Delta x = 3\sigma$ величина α =0,997 (или 99,7%). Последнее, например, означает, что вероятность обнаружить результат измерения величины х за пределами интервала ($x_0 - 3\sigma$) до ($x_0 + 3\sigma$) составляет всего 0,3%. Можно считать, что «истинное» значение измеряемой величины практически находится в этом интервале.

Нормальное распределение ошибок измерений наблюдается только в том случае, если число измерений очень велико (n > 200). На практике, как правило, ограничиваются 10 – 15 измерениями. Как в этом случае определяется доверительный интервал, и представляются результаты измерений?

Аналогом величины x_0 выступает величина *выборочного среднего значения* (среднеарифметического для конечной выборки):

$$< x >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (6)$$

Аналогом величины σ является величина *выборочного среднеквадратичного отклонения* (среднеквадратичной погрешности отдельных измерений):

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2 / (n-1)}\ . \qquad (7)$$

Для оценки достоверности окончательного результата измерений, используют величину, называемую средней квадратичной ошибкой среднего арифметического:

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}\ . \qquad (8)$$

Чтобы получить оценку доверительного интервала для конечного числа измерений приходится вводить величину t_s – коэффициент Стьюдента (псевдоним английского математика В.С. Госсета). Только введение этого коэффициента позволяет определить доверительную вероятность для заданного интервала значений или определить интервал для заданной величины вероятности. Последняя из этих двух операций более простая, поэтому в большинстве случаев поступают именно так.

Значения t_s для наиболее употребительных доверительных вероятностей при n→ ∞ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициента Стьюдента t_s для наиболее употребительных доверительных вероятностей при $n \to \infty$.

α	0,683	0,9	0,95	0,98	0,99	0,997
t_s	1,0	1,645	2,0	2,33	2,58	3,0

Согласно табл. 1 при доверительной вероятности α = 0,683 коэффициент t_s = 1, при этом доверительный интервал равен

$\pm\sigma_{<x>}$. Доверительной вероятности α = 0,95 соответствует коэффициент t_s = 2, что дает доверительный интервал равный $\pm 2\sigma_{<x>}$ и т. д.. И наконец, при α = 0,997, t_s = 3, а доверительный интервал при этом равен $\pm 3\sigma_{<x>}$. Для практических измерений ограничиваются обычно доверительной вероятностью 0,9 или 0,95.

Измерения при малом числе измерений дают уменьшенное значение среднеквадратичной погрешности по сравнению со случаем большого числа тех же измерений. Это обстоятельство учитывается путем введения поправки с помощью коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n}$. Для коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha,n}$ имеются подробные таблицы, фрагмент из них приведена в табл. 5.

Таблица 2

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha,n}$.

$n\backslash\alpha$	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
2	2,0	6,3	12,7	63,7	-
3	1,3	2,9	4,3	9,9	31,6
4	1,3	2,4	3,2	5,8	12,9
5	1,2	2,1	2,8	4,6	8,6
6	1,2	2,0	2,6	4,0	6,9
7	1,2	1,9	2,4	3,5	5,4
10	1,1	1,8	2,3	3,3	4,8
12	1,1	1,8	2,2	3,1	4,5
20	1,1	1,7	2,1	2,9	3,9
∞	1,0	1,6	2,0	2,6	3,3

Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$ берётся из таблицы на основании выбранной доверительной вероятности α и числа измерений *n*. Например, задаваясь α = 0,95 по числу измерений $n = 5$, находим $t_{\alpha,n}$ = 2,8.

Определив предварительно $\sigma_{<x>}$ по формуле (8), вычислим случайную погрешность Δx_α

$$\Delta x_\alpha = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_{<x>} \qquad (9)$$

Следует отметить, что чем большее значение доверительной вероятности α выбирается, тем больше значение коэффициента Стьюдента и тем больше получается ширина доверительного интервала. С ростом числа измерений n величина $t_{\alpha,n}$ уменьшается и доверительный интервал сужается..

Результат измерения можно представить в виде

$$x = < x > \pm \Delta x_\alpha ; \qquad \alpha = \quad , \ n = \quad . \qquad (10)$$

В записи результата измерений *указывается количество измерений и значение доверительной вероятности.* Такая форма записи является наиболее информативной, т.к. она содержит данные не только о среднем значении измеренной величины и погрешности измерения, но и оценку надёжности результата. Однако приведенная в форме (10) оценка еще не дает представления о полной погрешности измерения, поскольку в окончательный результат должна войти и систематическая ошибка измерений.

4. СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ИЗМЕРЕНИЙ

Наиболее весомый вклад в систематическую ошибку вносят инструментальные (приборные) погрешности. В настоящее время существует огромное количество разнообразных измерительных приборов, отличающихся конструкцией, принципом работы и точностью. Точность прибора либо задаётся классом точности, либо указывается в паспорте, прилагаемом к прибору

Измерительные приборы вносят свой вклад в погрешность измерения, зависящий от точности прибора. Соответствующую величину принято называть приборной (*инструментальной*) погрешностью.

За приборную погрешность принимают основную погрешность средства измерения измерительного прибора. Эту величину можно установить только при сравнении данного средства (измерительного прибора) с более точным средством измерения (такие операции выполняются при поверке). Когда основная погрешность известна, её можно устранить, вводя поправку. Однако при измерениях, как правило, известен только предел допускаемой основной погрешности, т.е. наибольшая (без учета знака) погрешность средства измерения.

Пределы допускаемых основных погрешностей задаются в нормативных документах метрологического обеспечения: ОСТ, ГОСТ, ГОСТ Р и др. Погрешность электроизмерительных приборов и манометров (приборов для измерения давления газов и жидкостей) определяется их классом точности. Класс точности K этих приборов равен пределу допускаемой относительной погрешности, выраженной в процентах, и определяется по формуле

$$K = \frac{100 \cdot \delta}{x_N}, \qquad (11)$$

где δ – предел допускаемой абсолютной погрешности прибора;

x_N – номинальное значение шкалы прибора.

Величина x_N согласно ГОСТ 8.401 – 80 принимается равной:

а) для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю шкалы – конечному значению шкалы;

б) для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится внутри рабочей части шкалы – абсолютному значению сумме абсолютных конечных значений шкалы;

Класс точности приборов обозначается одним из чисел: 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 4,0 и указывается на лицевой стороне прибора.

Зная класс точности прибора, легко вычислить предел допускаемой абсолютной погрешности прибора. Например, если класс точности мановакуумметра равен 2,5, а конечные значения шкалы (пределы измерения) равны – 1Н/м^2 и 1,5 Н/м^2, то предел допускаемой абсолютной погрешности будет равен:

$$\delta = \frac{(1+1{,}5)\cdot 2{,}5}{100} = 0{,}0625 \text{ Н/м}^2. \qquad (12)$$

Такая погрешность устанавливается по всему диапазону измерений, т.е. по всей шкале.

В расчетные формулы, используемые при косвенных измерениях, кроме результатов прямых измерений, могут входить табличные величины, константы и т.д., точность определения которых влияет на точность косвенных измерений. В качестве абсолютной погрешности табличных данных принимается половина единицы наименьшего разряда, представленного в числе.

Например, табличному значению теплоемкости меди С = 385 Дж/(кг·К), соответствует абсолютная погрешность ΔС = 0,5 Дж/(кг·К), а значению плотности стали ρ = 7,8·10^3 кг/м^3 соответствует Δρ = 0,05·10^3 кг/м^3.

Погрешность числа π зависит от числа взятых десятичных знаков (см. табл.3).

Таблица 3

Значения погрешностей числа π**.**

№ п/п	Значение	Абсолютная ошибка	Относительная ошибка
1.	3	+0,14	4,5%
2.	3,1	+0,042	1,3%
3.	3,14	+0,0016	0,05%
4.	3,142	+0,00041	0,013%

Принято, что если *прибор не имеет класса точности*, то *приборная погрешность определяется половиной цены деления шкалы прибора.*

При оценке доверительного интервала для инструментальной погрешности предполагают, что инструментальная погрешность подчиняется закону нормального распределения и, что предел абсолютной допускаемой погрешности соответствует $3\sigma_и$, т.е. $\delta = 3\sigma_и$. Откуда $\sigma_и = \dfrac{\delta}{3}$.

Граница доверительного интервала инструментальной погрешности для доверительной вероятности α равна

$$\Delta x_и = t_{\alpha,\infty} \cdot \frac{\delta}{3}. \qquad (14)$$

Здесь $t_{\alpha,\infty}$ - коэффициент Стьюдента при для числа измерений $n \to \infty$ и при доверительной вероятности α.

Совместный учет случайной Δx_α и инструментальной погрешностей $\Delta x_и$ можно свести к выражению

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_\alpha^2 + \Delta x_и^2}\ . \qquad (15)$$

Окончательный результат измерения записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x\ ; \quad \text{при} \quad \alpha = \ \dots \quad \text{и} \quad n = \ \dots\ . \qquad (16)$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Часто для практических целей достаточно произвести однократное измерение интересующей величины. В этом случае невозможно оценить погрешность, связанную со всеми случайными факторами «внешней среды», но мы должны быть уверены, что она достаточно мала. Чтобы убедиться в этом необходимо хотя бы раз произвести многократное измерение величины и определить случайную погрешность. Но в любом случае остаются погрешности, связанные с использованием для измерения конкретных приборов.

Поэтому *результат однократного измерения представляется в виде*:

$$x \pm \delta x, \tag{17}$$

где x – значение величины, полученное в процессе однократного прямого или косвенного измерения;

δx – погрешность однократного измерения.

Количество измерений (одно) и доверительная вероятность α = 1 (или 100%) в этом случае не указываются, в отличие от результата многократного измерения.

Величина *δx в случае прямого однократного измерения представляет собой приборную погрешность* (см. п.4).

Возникает закономерный вопрос об определении *погрешности косвенного измерения* в этой ситуации. Перед тем как дать общий рецепт рассмотрим достаточно простой *частный случай* такого определения.

Пусть стоит задача измерения объёма куба. Самый простой способ решения задачи связан с измерением L - длины ребра куба. После того как она определена, величина объёма куба рассчитывается по формуле $V = L^3$.

Если измерение L производилось однократно с помощью линейки, то *результат* такого *прямого измерения* представляется так:

$$L \pm \delta L, \tag{18}$$

где L – значение длины ребра, полученное в процессе однократного измерения;

δL – погрешность прямого измерения, равная погрешности линейки.

Логично потребовать, чтобы *результат косвенного измерения* объёма имел вид:

$$V \pm \delta V. \tag{19}$$

Значение объёма V рассчитывается по формуле, связывающей его со значением длины ребра L. Остаётся определить величину δV - погрешность для косвенного измерения объёма. Очевидно, эта величина каким-то образом должна быть связана с величиной δL. Чтобы обнаружить эту связь нам придётся снова обратиться к процедуре многократного измерения, но результат, который мы при этом получим, будет справедлив и для однократных измерений.

Пусть в процессе многократных измерений мы получили для одного и того же куба множество значений величины L, измеренной прямым способом, и соответствующее множество величины V, рассчитанной по формуле. Каждому значению L_i первого множества соответствует вполне определенное значение V_i второго множества.

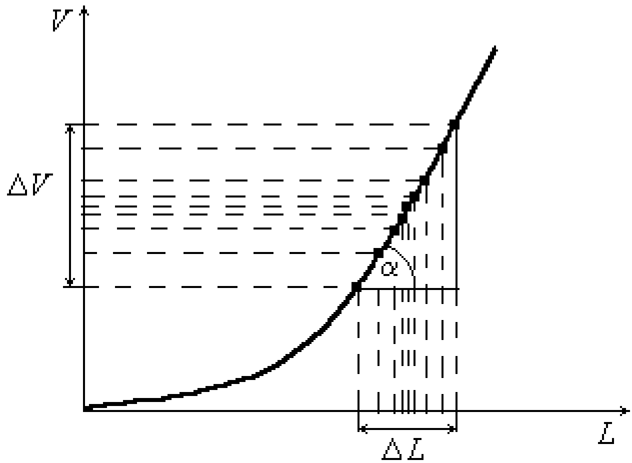

Рис. 4. Экспериментально полученная зависимость объёма куба от длины его ребра (разброс экспериментальных точек сильно преувеличен).

На рис. 4 представлен график зависимости $V = L^3$, на котором изображены точки, соответствующие результатам многократных измерений, произведённых для одного и того же куба (разброс значений очень сильно преувеличен). На оси L выделен интервал ΔL, характеризующий разброс значений длины ребра, полученный в процессе многократных прямых измерений. На оси V выделен соответствующий интервал ΔV, характеризующий разброс значений объёма, полученный в процессе вычислений. Эти интервалы определяют погрешности измерений величин L и V. Будем считать, что ΔL и ΔV достаточно малые величины по сравнению со значениями L и V. Тогда их очень просто можно связать между собой. Из треугольника (см. рис. 4) следует

$$\Delta V = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot \Delta L = \frac{\partial V}{\partial L}\cdot \Delta L.$$

Очевидно, для однократного измерения роль ΔL играет погрешность линейки δL, а роль ΔV – интересующая нас величина δV. Поэтому в случае однократного измерения получаем:

$$\delta V = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot \delta L = \frac{\partial V}{\partial L}\cdot \delta L\ , \tag{20}$$

где значение производной $\frac{\partial V}{\partial L} = 3L^2$ определяется при значении L, полученном в результате однократного прямого измерения.

6. ПОГРЕШНОСТЬ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Рассмотрим общий случай, когда величина y является функцией нескольких независимых величин (независимых переменных), которые в свою очередь измерены либо прямо, либо косвенно. В качестве таких «переменных» могут, в частности, выступать и константы, значения которых определяются и используются при вычислениях с определённой точностью, следовательно, сами константы также, как и другие величины, характеризуются погрешностью.

Обозначим независимые величины x_1, x_2, x_3, ... Явный вид функции

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ...) \tag{21}$$

должен быть известен. Будем считать, что каждая величина x_i вносит свой независимый вклад в погрешность величины y.

В общем случае предполагается, что ошибки измерения величин x_1, ..., x_n независимы друг от друга и распределены по нормальному закону со средними квадратичными ошибками средних арифметических $\sigma_{<x_1>}$, $\sigma_{<x_2>}$, $\sigma_{<x_3>}$, … . Задача обработки косвенных измерений заключается в том, чтобы по полученным значениям $<x_1>$, $<x_2>$, $<x_3>$, … и Δx_1, Δx_2, Δx_3, … (из обработки прямых измерений) определить $<U>$ и ΔU .

В математической статистике получен закон сложения средних квадратичных отклонений среднего арифметического

$$\sigma_{<y>} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma^2_{<x_1>} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{<x_2>} + ...}\ , \tag{22}$$

где частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, … вычисляются при средних значениях $x_1 = <x_1>$, $x_2 = <x_2>$, $x_3 = <x_3>$, и т.д.

Если величины $<x_1>$, $<x_2>$, $<x_3>$, … и $\sigma_{<x_1>}$, $\sigma_{<x_2>}$, $\sigma_{<x_3>}$, … определяются по одинаковому числу измерений n, то для выбранной доверительной вероятности α обе части соотношения умножаются на коэффициент Стьюдента

$$\sigma_{<y>} \cdot t_{\alpha,n} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma^2_{<x_1>} \cdot t^2_{\alpha,n} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{<x_2>} \cdot t^2_{\alpha,n} + \ldots} \,. \quad (23)$$

С учетом (9), данная формула приводится к виду

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta x_1{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta x_2{}^2 + \ldots} \,. \quad (24)$$

Используя выражения:

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial \ln f}{\partial x_1};$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \text{ и т.д.}$$

формулу (24) можно преобразовать и вычислить относительную погрешность:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{< y >} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta x_1{}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta x_2{}^2 + \ldots} \,. \quad (25)$$

Далее определяется погрешность косвенного измерения величины y

$$\Delta y = \varepsilon_y \cdot < y > . \quad (26)$$

7. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Определяется среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$<x> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (27)$$

2. Находятся ошибки отдельных измерений

$$\Delta x_i = x_i - <x> . \qquad (28)$$

3. Вычисляется средняя квадратичная ошибка отдельных измерений

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - <x>)^2 / (n-1)} \ . \qquad (29)$$

Отбрасываются промахи, если $\Delta x_i \geq 3\,\sigma_x$. После этого <*x*> и σ_x определяются без использования измерений, подозреваемых на промах. Вместо промахов проводят новые измерения.

4. Определяется средняя квадратичная ошибка среднего арифметического

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (x_i - <x>)^2} \ . \qquad 30)$$

По числу измерений *n* и выбранной доверительной вероятности α по табл. 5 определяется коэффициент Стьюдента.

5. Находятся границы доверительного интервала (случайная ошибка измерений)

$$\Delta x_\alpha = t_{\alpha,n} \cdot \sigma_{<x>} . \qquad (31)$$

6. Определяется инструментальная (приборная) погрешность

$$\Delta x_{и} = t_{\alpha,\infty} \cdot \frac{\delta}{3} \,. \qquad (32)$$

7. Вычисляется полная погрешность измерений

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\alpha}^2 + \Delta x_{и}^2} \,. \qquad (33)$$

9. Записывается окончательный результат в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \ ; \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% \qquad (34)$$

при $\alpha =$ … и $n =$ … .

8. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Проводятся прямые измерения величин x_1, x_2, x_3, ... , входящих в формулу функциональной зависимости искомой величины y от этих величин

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ...). \qquad (35)$$

Находятся полные погрешности Δx_1, Δx_2, Δx_3, … по правилам обработки результатов прямых измерений. При этом для всех величин x_1, x_2, x_3, ... (измеряемых одинаковое число раз), задается одно и то же значение доверительной вероятности α. Соответственно, одинаковыми будут и коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и $t_{\alpha,\infty}$.

2. Вычисляется среднее значение искомой величины y . При этом в исходную формулу подставляются средние значения $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle$, $\langle x_3 \rangle$, …:

$$y = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, \ldots) \qquad (36)$$

3. Логарифмируется исходная формула (35) для искомой величины y

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, x_{3,} ...) . \quad (37)$$

4. Находятся частные производные по всем аргументам x_1, x_2, x_3, ...

$$\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}; \ \frac{\partial \ln f}{\partial x_2}; \ \frac{\partial \ln f}{\partial x_3} \text{ и т.д.}$$

при средних значениях $x_1 = <x_1>$, $x_2 = <x_2>$, $x_3 = <x_3>$ ....

5. Вычисляется относительная ошибка косвенного измерения

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \Delta x_1^{\ 2} + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \Delta x_2^{\ 2} + ...} . \quad (38)$$

6. Определяется доверительный интервал результата косвенных измерений

$$\Delta y = \varepsilon_y \cdot < y > . \quad (39)$$

7. Записывается окончательный результат

$$y =< y > \pm \Delta y ; \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta y}{< y >} \cdot 100\% \quad (40)$$

при $\alpha =$ … и $n =$ … .

9. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.

При оформлении результатов измерений необходимо придерживаться нескольких простых общепринятых правил. Это сделает записи в отчете наглядными и понятными.

1. *Запись результата измерения какой-либо величины требует предварительного округления значений самой величины и её погрешности.* Сначала производится *округление погрешности до первой значащей цифры* (расчёт погрешности должен быть произведён с точностью до двух значащих цифр). При этом окажется, что первая значащая цифра будет соответствовать определённому порядку или разряду (например, десяткам, единицам, десятым долям и т.п.). После этого производится *округление значения измеренной величины до того же самого порядка (разряда)*. Например, если погрешность составляет единицы, то значение измеренной величины округляется до единиц.

Примеры правильных записей результатов:

$$L = (125 \pm 3)\ \text{м};$$
$$t = (0{,}067 \pm 0{,}002)\ \text{с};$$
$$g = (9{,}83 \pm 0{,}01)\ \text{м/с}^2.$$

2. *Если значения измеренной величины и её погрешности очень малы или велики, то используется показательная форма записи*, в которой за скобки выносится общий десятичный множитель, например,:

$$e = (1{,}6 \pm 0{,}5)\cdot 10^{-19}\ \text{Кл},$$
$$m = (9 \pm 1)\cdot 10^{-31}\ \text{кг}.$$

3. *Результаты большого количества измерений принято заносить в таблицы*. В этом случае информация представляется наглядно и компактно. Предварительно *необходимо продумать структуру таблицы и последовательность расположения информации в ней*.

Таблицы могут быть горизонтального или вертикального исполнения. В первом случае значения одной и той же величины располагаются в строке, во втором – в столбце. При большом количестве измерений чаще используется второй вариант. В начале каждой строки (столбца) пишется название или символ (обозначение) соответствующей величины и указывается единица измерения. Если измеряемые величины очень малы или велики, то используется показательная форма записи чисел. В этом случае десятичный множитель не ставится у каждого значения величины, а выносится в начало строки или столбца и записывается перед единицей измерения.

В качестве примера приведём таблицу, для записи результатов многократного измерения линейного размера x твердого тела:

Таблица 4

Результаты измерений величины x.

i	x_i, 10^{-3} м	$(x_i - \langle x \rangle)$, 10^{-3} м	$(x_i - \langle x \rangle)^2$, 10^{-6} м^2
1	2,1	0,16	0,0256
2	2,2	0,26	0,0676
3	1,8	– 0,14	0,0196
4	1,7	– 0,24	0,0578
5	1,9	– 0,04	0,0016
	$\langle x \rangle = \ldots$	$\sum_{i=1}^{5} \Delta x_i = 0$	$\sum_{i=1}^{5} \Delta x_i^2 = \ldots$

Приступая к измерениям, *необходимо сразу заносить результаты измерений в заранее подготовленную таблицу.*

4. *Функциональная зависимость одной величины от другой должна быть представлена графиком.* График – это самый наглядный способ представления информации в этом случае. Для более надёжного построения графиков следует пользоваться миллиметровой бумагой Принято по горизонтальной оси графика откладывать значения независимой переменной. По вертикальной – значения функции этой переменной. Прежде чем строить график, определите, что в анализируемой ситуации является причиной (ей соответствуют значения независимой переменной), а что – следствием (ей соответствуют значения функции).

В качестве примера на рис. 5 изображён график зависимости фототока от приложенного к фотоэлементу напряжения.

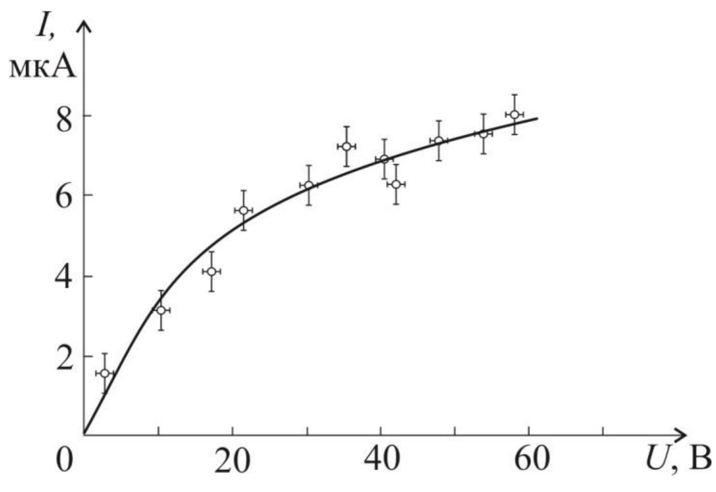

Рис. 4. Зависимость фототока от напряжения.

По каждой оси графика через равные интервалы наносятся масштабные метки. Масштаб для каждой оси выбирается индивидуально. Сначала необходимо определить диапазон изменения значений представляемых величин. Масштаб выбирается так, чтобы экспериментальные точки максимально распределились вдоль каждой из осей. При этом в частности, необходимо решить – являются ли важными для представления результатов нулевые значения аргумента и функции. Последнее определит значения масштабных меток начала координат (если нули важны, то это будут нулевые метки, если нет – то не обязательно).

Около координатных осей указываются символы (обозначения) величин и единицы их измерений. При необходимости применения показательной формы записи у единиц измерений ставятся десятичные множители.

Экспериментальные точки наносятся только после того, как поставлены масштабные метки и указаны обозначения осей с единицами измерений. *Численные значения величин, соответствующие экспериментальным точкам, на осях не указываются*. Сами точки должны быть достаточно выделяющимися.

Если на одних и тех же осях представляется несколько экспериментальных графиков, то для обозначения разных наборов точек рационально использовать разные символьные изображения, например, ●, ○, ■, □, ▲, Δ. *При необходимости кроме самих значений величин на графиках указываются соответствующие им погрешности*. Это делается с помощью горизонтальных и вертикальных чёрточек, пересекающих экспериментальные точки (см. рис. 4). Длина каждой чёрточки определяется погрешностью измерения соответствующей величины.

По массиву экспериментальных точек проводят «наилучшую» плавную кривую. Не должно быть простого соединения точек ломаной линией. Эти изломы, как правило, не соответствуют действительности.

Существуют специальные математические методы определения «наилучшей» кривой. В лабораторном практикуме придётся это делать «на глазок», используя три простых принципа:

1) ожидаемая зависимость в лабораторном практикуме чаще всего известна, следовательно, понятно кривую какого вида надо проводить;

2) кривая должна быть плавной, без изломов (если это не какой-либо специальный случай):

3) кривая должна проходить по массиву экспериментальных точек так, чтобы отклонения разных точек от кривой наилучшим образом компенсировали друг друга (например, точкам, лежащим выше кривой, должны соответствовать точки, лежащие ниже).

Если предварительно рассчитана теоретическая зависимость, то имеет смысл представить график этой зависимости в тех же осях, что и график экспериментальной. Это позволит провести сравнительный анализ ожидаемых и полученных результатов.

10. ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЁННЫМИ ЧИСЛАМИ.

Обрабатывая результаты измерений, необходимо применять следующие правила:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближённых данных.

2. При умножении следует округлять сомножители так, чтобы общее число значащих цифр в каждом из них соответствовало сомножителю с наименьшим числом таких цифр; в результате следует оставлять такое же число значащих цифр.

3. При возведении в степени в результате надо брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

4. При извлечении корня число значащих цифр в результате должно быть равно их числу в подкоренном выражении.

5. В промежуточных результатах следует сохранять на однозначную цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

6. В окончательном результате необходимо оставлять такое число значащих цифр, которое соответствует пунктам 1-4.

ПРИМЕЧАНИЕ: Значащими цифрами называются все цифры, кроме нулей, стоящих с левой стороны числа.

Пример. Требуется вычислить приближённое значение выражения

$$B = \frac{(3,2+17,062)\cdot\sqrt{3,7}}{5,1\cdot 2,007\cdot 10^3}.$$

Из сомножителей наименьшее число значащих цифр – две содержат число 5,1. Поэтому результаты промежуточных вычислений необходимо округлять до трех цифр, а окончательный результат до двух, т.е.

$$B = \frac{(3,2+17,062)\cdot\sqrt{3,7}}{5,1\cdot 2,007\cdot 10^3} = \frac{20,26\cdot 1,92}{10,2\cdot 10^3} = 3,8\cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $B = 3{,}8\cdot 10^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ленинград: Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1991. – 304 с.

2. Сарваров Ф.С., Страшинский Ч.С. Методы обработки физических величин: Учебное пособие к лабораторному

практикуму по физике. –Набережные. Челны: Изд-во ИНЭКА, 2009. – 30 с.

3. Баранов А.В. Введение. // В сб. методических указаний к лабораторным работам «Механика и термодинамика». – Новосибирск: НГТУ, 2006. – С. 3-2.