§ 7.3 НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Теорма. Для того, чтобы ограниченная на $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $\varepsilon > 0$ существовало разбиение Δ отрезка $[a,b]$, для которого

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Обозначим $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. По определению 2 (см. § 7.1) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\forall \Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$:

$$d(\Delta) < \delta \Rightarrow |\,\mathrm{S}_\Delta(\xi_i) - I| < \varepsilon/4, \tag{1}$$

при любых $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (1) (здесь $\mathrm{S}_\Delta(\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$). Зафиксируем одно разбиение, для которого справедливо (1). По свойству 1^0 для данного разбиения Δ можно указать такие две точки ξ_i' и ξ_i'' на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \mathrm{S}_\Delta(\xi_i') \le \varepsilon/4,\ \mathrm{S}_\Delta(\xi_i'') - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le \varepsilon/4. \tag{2}$$

Отметим, что обе интегральные суммы $\mathrm{S}_\Delta(\xi_i')$, $\mathrm{S}_\Delta(\xi_i'')$ удовлетворяют неравенству (1). Запишем

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = (\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \mathrm{S}_\Delta(\xi_i')) + (\mathrm{S}_\Delta(\xi_i') - I) + (I - \mathrm{S}_\Delta(\xi_i'')) + (\mathrm{S}_\Delta(\xi_i'') - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta).$$

Отсюда и из неравенств (1), (2) вытекает, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon.$$

Достаточность. Для любого разбиения Δ справедливы неравенства $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$, и для $\forall \varepsilon > 0$, согласно условию теоремы, $\exists$ разбиение Δ такое, что $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le \varepsilon$. Поэтому $0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $\overline{I} = \underline{I}$. Обозначим $\overline{I} = \underline{I} = I$. Докажем, что $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. По лемме Дарбу имеем

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = I = \lim_{d(\Delta)\to 0} \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta .$$

Поэтому для $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ такое, что при $d(\Delta) < \delta$ справедливы неравенства $I - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon/2$, $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - I < \varepsilon/2$, т. е. при $d(\Delta) < \delta$, $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon$, причем

$$\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le I \le \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta . \tag{3}$$

Для любого разбиения Δ справедливы неравенства $\underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta \le \mathrm{S}_\Delta(\xi_i) \le \overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta$, при любых $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому из (3) следует, что $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ такое, что при $d(\Delta) < \delta$ $(|\,\mathrm{S}_\Delta(\xi_i) - I| < \varepsilon)$ при $\forall\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Согласно определению 2 (интегрируемой функции) это означает, что $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. ∎