§ 3. Образ оп-ра. Ядро оп-ра. Ранг м-цы.

Пусть $A: X \to Y$ – лин-й оп-р. Мн-во всех в-в y из пр-ва Y таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$, наз-ся обл-ю значений или обр-м оп-ра и обозн-ся через $Im(A)$. Мн-во $Im(A)$ – лин-е подпр-во пр-ва Y. Размерность подпр-ва $Im(A)$ наз-ся рангом оп-ра A и об-ся через $rank(A)$.

Мн-во всех в-в $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, наз-ся ядром оп-ра A и об-ся через $Ker(A)$. Это мн-во — лин-е подпр-во пр-ва X. Разм-ть подпр-ва $Ker(A)$ наз-ся дефектом оп-ра A и об-ся $def(A)$

Для любого лин-го оп-ра $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n \qquad (1)$$

Пусть в пр-ве X дана некоторая с-ма в-в $\{a^i\}_{i=1}^{m}$. Будем сч-ть, что не все в-ры этой с-мы нулевые. Тогда ук-я с-ма обяз-но сод-т лин-но незав-ю подс-му в-в. В частности, она сама м-б. лин-но незав-й.

Подс-ма в-в $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{a^i\}_{i=1}^{m}$, сост-я из лин-но незав-х в-в, наз-ся максимальной, если добавление к ней любого нового в-ра из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ приводит к лин-но зав-й с-ме.

Любые 2 макс-е лин-но незав-е подс-мы данной с-мы содержат одно и то же кол-во в-в. Рангом с-мы в-в наз-ся кол-во в-в ее макс-й лин-но незав-й подс-мы

Пусть $A(m, n)$ - произ-я прямоуг-я м-ца. Будем трактовать ее ст-цы как с-му в-в пр-ва C^m. Ранг этой с-мы в-в назовем рангом м-цы $A(m, n)$. Ранг м-цы A будем об-ть через $rank(A)$

М-цу $A(m, n)$ можно трактовать и как с-му строк из пр-ва C^n. Для любой м-цы $A(m, n)$ ранг этой с-мы строк равен рангу с-мы ее столбцов

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} - м-ца оп-ра A отн-но произв-м образом фикс-х базисов

$\{e_k\}_{k=1}^n \subset X$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset Y_m$. Тогда $rank(A) = rank(A_{eq})$

Ранг м-цы оп-ра инвариантен по отн-ю к выбору базисов, выбираемых при ее постр-ии, и можно вводить эквив-е опр-е ранга оп-ра как ранга его матрицы.

Упр-я.

1) Согласно опр-ю $Ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$

Пусть x, y — произв-е в-ры из $Ker(A)$, α, β — любые числа. Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$, т.е. лин-я комб-я $\alpha x + \beta y$ принадлежит мн-ву $Ker(A)$

2) Об-м $C = AB$. Ст-цы м-цы C лин-но выр-ся через ст-цы м-цы A, которы в свою очередь лин-но выр-ся через макс-ю подс-му лин-но незав-х ст-цов м-цы A.

Число ст-цов в этой подс-ме равно $rank(A)$ назовем ст-цы этой подс-мы базисными. Ст-цы м-цы C принадл-т подпр-ву, натянулому но бу-е ст-цы м-цы A. След-но, число лин-но незав-х ст-цов м-цы C не может превышать rank(A). С др-й стороны, строки м-цы C лин-но выр-ся через строки м-цы B. Проводя ан-е рассужд-я, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$

3) $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

В-ры a^1, a^2 лин-но незав-мы. Они обр-ют макс-ю лин-но незав-ю подс-му, т.к. опр-ли, сост-е из компонент в-в a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 равны нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

След-но, в-ры a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 лин-но зав-мы. Это не единств-я макс-я лин-но незав-я подс-ма. Таким же св-м обл-ют, напр-р, пары в-в a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар лин-но незав-х в-в обр-ет базис подпр-ва, натянутого на в-ры a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой с-мы в-в равен двум.

4) Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого в-ра $x \in X_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$$

С др-й стороны, если $y \in L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит,

$$Im(A) = L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$$

5) a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

$rank(A) = 1$, базис образа – $(1, 1, 1)$; $def(A) = 2$

b) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$

$rank(A) = 2$, базис образа – $(2, 1, 1), (-1, -2, 1)$

$def(A) = 1$.

c) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$

rank(A) = 3, базис образа - (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1); дефект оп-ра равен 0.

6) К-му эл-ту пр-ва P_n оп-р D ставит в соотв-е полином из P_{n-1}. Поэтому $Im(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени оп-р D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в рез-те диф-я не могут обр-ся в ф-ю, тождественно равную нулю. Поэтому $Ker(D) = P_0$

7) $Im(P) = L_1$, $Ker(P) = L_2$

8) $Im(R) = X$, $Ker(R) = \{0\}$

9) Образ - пл-ть $(x, a) = 0$, ядро - прямая $[x, a] = 0$

10) Последние $n-r$ столбцов м-цы A_e нулевые, в то время как первые r - лин-но незав-мы

11)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в м-це A сод-ся минор $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Оба минора 3-го п-ка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

окаймляющие минор d, равны $0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$

12)

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$$

13) a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

в) $$A=\begin{pmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&-3&0&4\\0&0&6&0&-8\\0&0&9&0&-12\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{vmatrix}-5&3\\3&-4\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=2$$

14) $$A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$$

При $\lambda=0$ $\operatorname{rank}(A)=2$;
при $\lambda\neq0$ $\operatorname{rank}(A)=3$!

15) а) $$A=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&1&3&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{vmatrix}31&17&43\\1&2&3\\0&0&2\end{vmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=3$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & \frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{1162}{17} \\ 0 & \frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{2144}{17} \\ 0 & \frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{2794}{17} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

16) а)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -3 & -\frac{1}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$

17) $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

При $\lambda=3$ $\operatorname{rank}(A)=2$, при $\lambda\neq 3$ $\operatorname{rank}(A)=3$

18) $A=\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & \frac{6348}{47} & \frac{171}{47} & -\frac{19044}{47} & \frac{12}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=3.$