Числовые характеристики распределений

Интеграл Лебега

гр. 09-853

ИВМИТ ФГОУВПО К(П)ФУ

29 марта 2020 г.

Интеграл Лебега по мере

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, т.е.:
$(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ — борелевская прямая

$$\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ для } \forall B \in \mathcal{B}.$$

μ — сигма-конечная мера на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Схема определения интеграла Лебега из трёх шагов:

1. для простых ξ, принимающих конечное число значений;
2. для неотрицательных ξ, как предел интегралов от возрастающей последовательности неотрицательных простых функций;
3. для произвольной ξ через представление в виде разности двух неотрицательных функций $\xi = \xi^+ - \xi^-$, где $\xi^\pm = \max(0, \pm\xi)$.

Интеграл Лебега по мере

1. ξ — простая функция, принимает конечное число n значений

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}(A_k) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mu(A_k),$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор A, $\biguplus_1^n A_k = \Omega$.

Интеграл Лебега по мере

1. ξ — простая функция, принимает конечное число n значений

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}(A_k) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mu(A_k),$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор A, $\biguplus_1^n A_k = \Omega$.

2. $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная функция.
Идея: приблизить ξ возрастающей послед. простых функций

$$\Big[X_{n-1} \leqslant X_n \nearrow \xi\Big] \Rightarrow \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \lim_n \int_\Omega X_n \, d\mu$$

Для любой функции интеграл существует (может быть $+\infty$).

Интеграл Лебега по мере

1. ξ — простая функция, принимает конечное число n значений

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}(A_k) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \xi \, d\mu \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mu(A_k),$$

где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор A, $\biguplus_1^n A_k = \Omega$.

2. $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная функция.
Идея: приблизить ξ возрастающей послед. простых функций

$$\left[X_{n-1} \leqslant X_n \nearrow \xi\right] \;\Rightarrow\; \int_\Omega \xi \, d\mu \stackrel{def}{=} \lim_n \int_\Omega X_n \, d\mu$$

Для любой функции интеграл существует (может быть $+\infty$).

3. $\xi = \xi^+ - \xi^-$ — произвольная функция в виде разности двух неотрицательных $\xi^+ = \max(0, \xi), \xi^- = \max(0, -\xi)$, тогда

$$\int_\Omega \xi \, d\mu \stackrel{def}{=} \int_\Omega \xi^+ \, d\mu - \int_\Omega \xi^- \, d\mu,$$

если не возникает неопределённости $\infty - \infty$.

Интеграл Лебега по мере

1. ξ — простая функция, принимает конечное число n значений
$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}(A_k) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mu(A_k),$$
где $\mathbb{I}(A)$ — индикатор A, $\biguplus_1^n A_k = \Omega$.

2. $\xi \geqslant 0$ — неотрицательная функция.
Идея: приблизить ξ возрастающей послед. простых функций
$$\left[X_{n-1} \leqslant X_n \nearrow \xi\right] \;\Rightarrow\; \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \lim_n \int_\Omega X_n \, d\mu$$
Для любой функции интеграл существует (может быть $+\infty$).

3. $\xi = \xi^+ - \xi^-$ — произвольная функция в виде разности двух неотрицательных $\xi^+ = \max(0, \xi), \xi^- = \max(0, -\xi)$, тогда
$$\int_\Omega \xi(\omega) \, \mu(d\omega) = \int_\Omega \xi \, d\mu \overset{def}{=} \int_\Omega \xi^+ \, d\mu - \int_\Omega \xi^- \, d\mu,$$
если не возникает неопределённости $\infty - \infty$.

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
   - для неотрицательных функций определён всегда;
   - если $\int_\Omega \xi^\pm < \infty$, то ξ **интегрируема**;

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
2. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int_\Omega \xi \, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.

Т.е. функция ξ почти всюду равна нулю!

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
2. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int_\Omega \xi \, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.
3. ξ интегрируема $\quad\Leftrightarrow\quad |\xi|$ интегрируем, при этом

$$\Big|\int_\Omega \xi d\mu\Big| \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu$$

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad |\xi| = \xi^+ + \xi^-$$

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
2. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int_\Omega \xi \, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.
3. ξ интегрируема $\quad\Leftrightarrow\quad |\xi|$ интегрируем, при этом
$$\Big|\int_\Omega \xi d\mu\Big| \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu$$
4. Если ξ_1, ξ_2 интегрируемы и $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\int_\Omega \big(a\xi_1 + b\xi_2\big) d\mu \;=\; a \int_\Omega \xi_1 \, d\mu + b \int_\Omega \xi_2 \, d\mu$$

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
2. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int_\Omega \xi\, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.
3. ξ интегрируема $\quad\Leftrightarrow\quad |\xi|$ интегрируем, при этом
$$\Big| \int_\Omega \xi d\mu \Big| \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu$$
4. Если ξ_1, ξ_2 интегрируемы и $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\int_\Omega \big(a\xi_1 + b\xi_2\big) d\mu \;=\; a \int_\Omega \xi_1\, d\mu + b \int_\Omega \xi_2\, d\mu$$
5. Обозначения $\displaystyle\int_A \xi\, d\mu = \int_\Omega \xi \cdot \mathbb{I}(A)\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$
   - $\displaystyle\int_A d\mu \;=\; \int_\Omega \mathbb{I}(A)\, d\mu \;=\; \mu(A)$
   - Если μ — мера Лебега–Стилтьеса на $\mathbb{R}^1$ с генерирующей функцией (ф.распределения) $F(x), x \in \mathbb{R}^1$
$$\int_{\mathbb{R}} \xi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \xi\, dF$$

Свойства интеграла Лебега

1. Если интеграл определён (нет $\infty - \infty$), то определён однозначно.
2. Если $\xi \geqslant 0$ и $\int_\Omega \xi \, d\mu = 0$, то $\mu(\xi > 0) = 0$.
3. ξ интегрируема $\Leftrightarrow$ $|\xi|$ интегрируем, при этом
$$\left| \int_\Omega \xi d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |\xi| d\mu$$
4. Если ξ_1, ξ_2 интегрируемы и $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\int_\Omega \big(a\xi_1 + b\xi_2\big) d\mu \; = \; a \int_\Omega \xi_1 \, d\mu + b \int_\Omega \xi_2 \, d\mu$$
5. Обозначения $\displaystyle\int_A \xi \, d\mu = \int_\Omega \xi \cdot \mathbb{I}(A) \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$
   - $\displaystyle\int_A d\mu \; = \; \int_\Omega \mathbb{I}(A) \, d\mu \; = \; \mu(A)$
   - Если μ — мера Лебега–Стилтьеса на $\mathbb{R}^1$ с генерирующей функцией (ф.распределения) $F(x), x \in \mathbb{R}^1$
$$\int_\mathbb{R} \xi(x) \, \mu(dx) = \int_\mathbb{R} \xi \, d\mu = \int_\mathbb{R} \xi \, dF = \int_\mathbb{R} \xi(x) \, dF(x)$$

2. По определению интеграла Лебега найдётся возрастающая последовательность простых функций $0 \leqslant X_n \nearrow \xi$, что при $n \to \infty$

$$0 \leqslant \int_\Omega X_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{K_n} x_{nj} \mu(X_n = x_{nj}) \nearrow \int_\Omega \xi \, d\mu = 0.$$

Следовательно, мера значений X_n, отличных от нуля для $\forall n \geqslant 1$

$$\mu(X_n > 0) = \sum_{x_{nj} > 0}^{K_n} \mu(X_n = x_{nj}) = 0.$$

Ввиду монотонности $X_n \leqslant X_{n+1}$ событие $(X_n > 0) \subset (X_{n+1} > 0)$ и при этом $(X_n > 0) \nearrow (\xi > 0)$. По свойству непрерывности меры получаем $\mu(\xi > 0) = \lim_n \mu(X_n > 0) = 0$.

Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и мера $\mu = \lambda$ — мера Лебега.

5. Если ξ интегрируема по Риману на замкнутом отрезке $A = [a; b]$ (например, ξ непрерывна или имеет не более чем счётное число точек разрыва и ограничена), то она интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают:
$$\int\limits_a^b \xi(x)\, dx \;=\; \int_A \xi\, d\lambda,$$

Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

5. Если ξ интегрируема по Риману на замкнутом отрезке $A = [a; b]$ (например, ξ непрерывна или имеет не более чем счётное число точек разрыва и ограничена), то она интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают:
$$\int\limits_a^b \xi(x)\,dx \;=\; \int_A \xi\,d\lambda,$$
   - функция $\xi(x)$, равная 1 для рациональных x и 0 — для иррациональных, интегрируема по Лебегу на $A = [0; 1]$ (т.к. измерима и ограничена), но не интегрируема по Риману;

Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

5. Если ξ интегрируема по Риману на замкнутом отрезке $A = [a; b]$ (например, ξ непрерывна или имеет не более чем счётное число точек разрыва и ограничена), то она интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают:

$$\int\limits_a^b \xi(x)\, dx \;=\; \int_A \xi\, d\lambda,$$

6. Пусть ξ интегрируема по Риману в несобственном смысле на каком-то B (например, $B = [0; \infty), B = (0; 1)$);
a) если на B интегрируема по Риману функция $|\xi|$, то функция ξ интегрируема на B по Лебегу и интегралы совпадают;

b) если функция $|\xi|$ не интегрируема по Риману на B, то функция ξ не интегрируема на B по Лебегу.

Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

5. Если ξ интегрируема по Риману на замкнутом отрезке $A = [a; b]$ (например, ξ непрерывна или имеет не более чем счётное число точек разрыва и ограничена), то она интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают:
$$\int\limits_a^b \xi(x)\,dx \;=\; \int_A \xi\,d\lambda,$$
6. Пусть ξ интегрируема по Риману в несобственном смысле на каком-то B (например, $B = [0; \infty), B = (0; 1)$);
а) если на B интегрируема по Риману функция $|\xi|$, то функция ξ интегрируема на B по Лебегу и интегралы совпадают;

   b) если функция $|\xi|$ не интегрируема по Риману на B, то функция ξ не интегрируема на B по Лебегу.
   - функция $\xi(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, условно интегрируема по Риману на $B = [0; \infty)$, поэтому она не интегрируема по Лебегу на B. Более того, интеграл Лебега даже не определён.

Теорема Радона–Никодима. Производная Радона–Никодима

Определение. Мера μ_1 называется абсолютно непрерывной относительно меры μ_2 (обозначается $\mu_1 \ll \mu_2$), если

$$\mu_2(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1(A) = 0. \tag{1}$$

$\mu_1 \ll \mu_2$ — равенство нулю в правой части влечёт нулевое значение в левой

Теорема Радона–Никодима. Производная Радона–Никодима

Определение. Мера μ_1 называется абсолютно непрерывной относительно меры μ_2 (обозначается $\mu_1 \ll \mu_2$), если

$$\mu_2(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1(A) = 0. \tag{1}$$

Теорема (Радон–Никодим) Если $\mu_1 \ll \mu_2$, то найдётся такая неотрицательная функция $\eta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, что для любой неотрицательной функции ξ

$$\int_\Omega \xi(\omega)\, \mu_1(d\omega) \;=\; \int_\Omega \xi(\omega)\eta(\omega)\, \mu_2(d\omega). \tag{2}$$

.

Функция η — производная Радона–Никодима; обозначение $\eta = \dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}$

Пример I.

$\mu_2 = \lambda$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^1$,
$\mu_1 = \mu_F$ — мера Лебега–Стилтьеса с ограниченной генерирующей функцией F. Тогда

1. $\mu_F \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \quad F$ — абсолютно непрерывная функция
   - например, F непрерывно дифференцируемая или кусочно-гладкая
2. $\mu_F \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu_F}{d\lambda} = F'$, где в точках недифференцируемости F можно положить $F' = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x)\, dF(x) \; = \; \int_{\mathbb{R}} \xi(x) F'(x)\, dx, \qquad (*)$$

и интеграл может быть вычислен как римановский, если он сходится абсолютно

Пример I.

$\mu_2 = \lambda$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^1$,
$\mu_1 = \mu_F$ — мера Лебега–Стилтьеса с ограниченной генерирующей функцией F. Тогда

1. $\mu_F \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \quad F$ — абсолютно непрерывная функция
   - например, F непрерывно дифференцируемая или кусочно-гладкая
2. $\mu_F \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu_F}{d\lambda} = F'$, где в точках недифференцируемости F можно положить $F' = 0$,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x) \; = \; \int_a^b F'(x)\, dx \qquad (*)$$

Теорема Радона–Никодима. Производная Радона–Никодима

Пример I.

$\mu_2 = \lambda$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^1$,
$\mu_1 = \mu_F$ — мера Лебега–Стилтьеса с ограниченной генерирующей функцией F. Тогда

1. $\mu_F \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \quad F$ — абсолютно непрерывная функция
   - например, F непрерывно дифференцируемая или кусочно-гладкая
2. $\mu_F \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu_F}{d\lambda} = F'$, где в точках недифференцируемости F можно положить $F' = 0$,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x) = \int_a^b F'(x)\,dx \qquad (*)$$

   - существует пример почти всюду дифференцируемой функции F, для которой равенство $(*)$ не выполняется.

Пример II.
$\mu_2(A) = \#(A \cap \mathbb{Z})$ — «считающая» мера — количество целых чисел $z \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, попавших в множество A.

$$\mu_1(A) \;=\; \sum_{z \in A \cap \mathbb{Z}} w(z),$$

где $w(z),\; z \in \mathbb{Z},$ — некоторая неотрицательная функция.

Легко проверить, что $\mu_1 \ll \mu_2$

Пример II.
$\mu_2(A) = \#(A \cap \mathbb{Z})$ — «считающая» мера — количество целых чисел $z \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, попавших в множество A.

$$\mu_1(A) \;=\; \sum_{z \in A \cap \mathbb{Z}} w(z),$$

где $w(z)$, $z \in \mathbb{Z}$, — некоторая неотрицательная функция.

Для любой функции $\xi \geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \, d\mu_1 = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \xi(z) w(z) = \int_{\mathbb{R}} \xi w \, d\mu_2,$$

Очевидный факт, не требующий обращения к теореме Радона–Никодима

Пример II.
$\mu_2(A) = \#(A \cap \mathbb{Z})$ — «считающая» мера — количество целых чисел $z \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, попавших в множество A.

$$\mu_1(A) \ = \sum_{z \in A \cap \mathbb{Z}} w(z),$$

где $w(z),\ z \in \mathbb{Z}$, — некоторая неотрицательная функция.

Для любой функции $\xi \geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \, d\mu_1 = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \xi(z) w(z) = \int_{\mathbb{R}} \xi w \, d\mu_2,$$

т.о. производная Радона–Никодима $\dfrac{d\mu_1}{d\mu_2} = w.$

Замена переменной

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция в борелевскую прямую,
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция.

Замена переменной

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция в борелевскую прямую,
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция.
Тогда суперпозиция $h \circ \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ измерима и можно вычислить

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \; = \; \int_\Omega h(\xi(\omega)) \, \mu(d\omega)$$

Замена переменной

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция в борелевскую прямую,
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция.
Тогда суперпозиция $h \circ \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ измерима и можно вычислить

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \;=\; \int_\Omega h(\xi(\omega))\, \mu(d\omega)$$

ξ генерирует меру на борелевской прямой:

$$\mu_\xi(B) \;=\; \mu(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Замена переменной

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция в борелевскую прямую,
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция.
Тогда суперпозиция $h \circ \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ измерима и можно вычислить

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \;=\; \int_\Omega h(\xi(\omega))\, \mu(d\omega)$$

ξ генерирует меру на борелевской прямой:

$$\mu_\xi(B) \;=\; \mu(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Теорема (О замене переменной).

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \;=\; \int_\mathbb{R} h \, d\mu_\xi \;=\; \int_\mathbb{R} h(x)\, \mu_\xi(dx). \qquad \text{(Ex1)}$$

Замена переменной

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция в борелевскую прямую,
$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция.
Тогда суперпозиция $h \circ \xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ измерима и можно вычислить

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \; = \; \int_\Omega h(\xi(\omega)) \, \mu(d\omega)$$

ξ генерирует меру на борелевской прямой:

$$\mu_\xi(B) \; = \; \mu(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Теорема (О замене переменной).

$$\int_\Omega h \circ \xi \, d\mu \; = \; \int_\mathbb{R} h \, d\mu_\xi \; = \; \int_\mathbb{R} h(x) \, \mu_\xi(dx). \qquad \text{(Ex1)}$$

$$\int_\Omega \xi \, d\mu \; = \; \int_\mathbb{R} x \, \mu_\xi(dx). \qquad \text{(Ex2)}$$

Математическое ожидание случайной величины

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — пространство с вероятностной мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — случайная величина,
F — функция распределения ξ
мера μ_ξ, генерируемая ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, совпадает с мерой Лебега–Стилтьеса μ_F, порождённой F.

Для интервалов $\mu_\xi[a;b) = \mathbb{P}\{\, a \leqslant \xi < b \,\} = F(b) - F(a) = \mu_F[a;b)$

Математическое ожидание случайной величины

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — пространство с вероятностной мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — случайная величина,
F — функция распределения ξ
мера μ_ξ, генерируемая ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, совпадает с мерой Лебега–Стилтьеса μ_F, порождённой F.

Определение. Матем.ожидание ξ есть интеграл Лебега

$$\mathbb{E}[\,\xi\,] \stackrel{def}{=} \int_\Omega \xi \, d\mathbb{P} \tag{E}$$

Математическое ожидание случайной величины

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — пространство с вероятностной мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — случайная величина,
F — функция распределения ξ
мера μ_ξ, генерируемая ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, совпадает с мерой Лебега–Стилтьеса μ_F, порождённой F.

Определение. Матем.ожидание ξ есть интеграл Лебега

$$\mathbb{E}[\,\xi\,] \overset{def}{=} \int_\Omega \xi \, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x \, dF(x) \tag{E}$$

По формуле замены переменной (Ex2)

Математическое ожидание случайной величины

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — пространство с вероятностной мерой
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — случайная величина,
F — функция распределения ξ
мера μ_ξ, генерируемая ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, совпадает с мерой Лебега–Стилтьеса μ_F, порождённой F.

Определение. Матем.ожидание ξ есть интеграл Лебега

$$\mathbb{E}[\,\xi\,] \overset{def}{=} \int_\Omega \xi \, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x \, dF(x) \qquad \text{(E)}$$

Если матем.ожидание $m = \mathbb{E}[\,\xi\,]$ конечно, то дисперсия ξ

$$\mathbb{D}[\,\xi\,] \overset{def}{=} \mathbb{E}[\,(\xi - m)^2\,] \qquad \text{(D)}$$

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] = 0$, то $\mathbb{P}\{\,\xi \neq 0\,\} = 0$

Т.е. сл.величина ξ почти наверное (п.н.) равна нулю!

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] = 0$, то $\mathbb{P}\{\,\xi \neq 0\,\} = 0$

(E2) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то

$$\mathbb{E}[\,\xi_1\,] \leqslant \mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

причём знак равенства возможен только, если $\xi_1 = \xi_2$ (п.н.)

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] = 0$, то $\mathbb{P}\{\,\xi \neq 0\,\} = 0$

(E2) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то

$$\mathbb{E}[\,\xi_1\,] \leqslant \mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

причём знак равенства возможен только, если $\xi_1 = \xi_2$ (п.н.)

(E3) Если $\mathbb{E}[\,|\xi_j|\,] < \infty, \quad j = 1, 2, \quad a, b \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathbb{E}[\,a\xi_1 + b\xi_2\,] = a\mathbb{E}[\,\xi_1\,] + b\mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\big[\,\xi\,\big] = 0$, то $\mathbb{P}\left\{\,\xi \neq 0\,\right\} = 0$

(E2) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то

$$\mathbb{E}\big[\,\xi_1\,\big] \leqslant \mathbb{E}\big[\,\xi_2\,\big]$$

причём знак равенства возможен только, если $\xi_1 = \xi_2$ (п.н.)

(E3) Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi_j|\,\big] < \infty, \quad j = 1, 2, \quad a, b \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathbb{E}\big[\,a\xi_1 + b\xi_2\,\big] = a\mathbb{E}\big[\,\xi_1\,\big] + b\mathbb{E}\big[\,\xi_2\,\big]$$

(E4 – Неравенство Маркова) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\big[\,\xi\,\big] < \infty$, то для $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\,\xi \geqslant a\,\right\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\big[\,\xi\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,\big]}{a} \leqslant \frac{\mathbb{E}\big[\,\xi\,\big]}{a}$$

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] = 0$, то $\mathbb{P}\{\,\xi \neq 0\,\} = 0$

(E2) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то
$$\mathbb{E}[\,\xi_1\,] \leqslant \mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$
причём знак равенства возможен только, если $\xi_1 = \xi_2$ (п.н.)

(E3) Если $\mathbb{E}[\,|\xi_j|\,] < \infty, \quad j = 1, 2, \quad a, b \in \mathbb{R}^1$, то
$$\mathbb{E}[\,a\xi_1 + b\xi_2\,] = a\mathbb{E}[\,\xi_1\,] + b\mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

(E4 – Неравенство Маркова) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] < \infty$, то для $\forall a > 0$
$$\mathbb{P}\{\,\xi \geqslant a\,\} \leqslant \frac{\mathbb{E}[\,\xi\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,]}{a} \leqslant \frac{\mathbb{E}[\,\xi\,]}{a}$$

(E5 – Неравенство Йенсена) Если $\mathbb{E}[\,\xi\,] < \infty$ и функция $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ выпукла книзу, то
$$\mathbb{E}[\,h(\xi)\,] \geqslant h\left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)$$

Свойства математического ожидания

(E1) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] = 0$, то $\mathbb{P}\{\,\xi \neq 0\,\} = 0$

(E2) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2$, то

$$\mathbb{E}[\,\xi_1\,] \leqslant \mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

причём знак равенства возможен только, если $\xi_1 = \xi_2$ (п.н.)

(E3) Если $\mathbb{E}[\,|\xi_j|\,] < \infty, \quad j = 1, 2, \quad a, b \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathbb{E}[\,a\xi_1 + b\xi_2\,] = a\mathbb{E}[\,\xi_1\,] + b\mathbb{E}[\,\xi_2\,]$$

(E4 – Неравенство Маркова) Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}[\,\xi\,] < \infty$, то для $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}\{\,\xi \geqslant a\,\} \leqslant \frac{\mathbb{E}[\,\xi\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,]}{a} \leqslant \frac{\mathbb{E}[\,\xi\,]}{a}$$

(E5 – Неравенство Йенсена) Если $\mathbb{E}[\,\xi\,] < \infty$ и функция $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ выпукла книзу, то

$$\mathbb{E}[\,h(\xi)\,] \geqslant h\left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)$$

(E6 – Теорема Лебега) Если $\xi_n \to \xi$, причём $|\xi_n| \leqslant \eta, \forall n \geqslant 1$, и $\mathbb{E}[\,\eta\,] < \infty$, то

$$\lim_n \mathbb{E}[\,\xi_n\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi\,]$$

Аналог теоремы Вейерштрасса для интеграла Римана

Свойства дисперсии

(D1) $$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)^2$$

Среднее квадрата минус квадрат среднего

Свойства дисперсии

(D1)
$$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)^2$$

(D2) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{D}[\,a + b\xi\,] = b^2 \mathbb{D}[\,\xi\,]$$

Дисперсия не изменяется при сдвиге; константа умножения выносится за знак дисперсии с квадратом

Свойства дисперсии

(D1) $$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \big(\mathbb{E}[\,\xi\,]\big)^2$$

(D2) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{D}[\,a + b\xi\,] = b^2\mathbb{D}[\,\xi\,]$$

(D3) Дисперсия $\mathbb{D}[\,\xi\,] = 0$ только, если сл.в. ξ п.н. равна константе

Свойства дисперсии

(D1)
$$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)^2$$

(D2) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{D}[\,a + b\xi\,] = b^2\mathbb{D}[\,\xi\,]$$

(D3) Дисперсия $\mathbb{D}[\,\xi\,] = 0$ только, если сл.в. ξ п.н. равна константе

(D4 – Неравенство Чебышёва) Если $\mathbb{E}[\,|\xi|\,] < \infty$, то для $\forall a > 0$
$$\mathbb{P}\left\{\,|\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]| \geqslant a\,\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}[\,\xi\,]}{a^2}$$

Свойства дисперсии

(D1) $$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \big(\mathbb{E}[\,\xi\,]\big)^2$$

(D2) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{D}[\,a + b\xi\,] = b^2\mathbb{D}[\,\xi\,]$$

(D3) Дисперсия $\mathbb{D}[\,\xi\,] = 0$ только, если сл.в. ξ п.н. равна константе

(D4 – Неравенство Чебышёва) Если $\mathbb{E}[\,|\xi|\,] < \infty$, то для $\forall a > 0$
$$\mathbb{P}\left\{\,|\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]| \geqslant a\,\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}[\,\xi\,]}{a^2}$$

- Величина $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}[\,\xi\,]}$ называется стандартным отклонением
- Правило 3-х сигм:
$$\mathbb{P}\left\{\,|\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]| \geqslant 3\sigma\,\right\} \leqslant \frac{1}{9}$$

— почти 90% реализаций сл.в. лежат в интервале плюс-минус 3 станд.отклонения от среднего

Свойства дисперсии

(D1) $$\mathbb{D}[\,\xi\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi^2\,] - \big(\mathbb{E}[\,\xi\,]\big)^2$$

(D2) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\mathbb{D}[\,a + b\xi\,] = b^2\mathbb{D}[\,\xi\,]$$

(D3) Дисперсия $\mathbb{D}[\,\xi\,] = 0$ только, если сл.в. ξ п.н. равна константе

(D4 – Неравенство Чебышёва) Если $\mathbb{E}[\,|\xi|\,] < \infty$, то для $\forall a > 0$
$$\mathbb{P}\left\{\,\big|\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]\big| \geqslant a\,\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}[\,\xi\,]}{a^2}$$

- Величина $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}[\,\xi\,]}$ называется стандартным отклонением
- Правило 3-х сигм:
$$\mathbb{P}\left\{\,\big|\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]\big| \geqslant 3\sigma\,\right\} \leqslant \frac{1}{9}$$

  — почти 90% реализаций сл.в. лежат в интервале плюс-минус 3 станд.отклонения от среднего

(D5) Если $\mathbb{E}[\,\xi^2\,] < \infty$, то
$$\min_c \mathbb{E}[\,(\xi - c)^2\,] \;=\; \mathbb{E}\big[\,\big(\xi - \mathbb{E}[\,\xi\,]\big)^2\,\big] \;=\; \mathbb{D}[\,\xi\,]$$

Наилучший прогноз сл.в. с помощью константы равен её среднему значению

Доказательства свойств

(E1, E3, E6) Выводятся при изучении интеграла Лебега

Доказательства свойств

(E2) Следует из (E3), (E1)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[\,\xi_2 - \xi_1\,\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\,\xi_2\,\right] - \mathbb{E}\left[\,\xi_1\,\right]$$

Доказательства свойств

(E2) Следует из (E3), (E1)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[\,\xi_2 - \xi_1\,\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\,\xi_2\,\right] - \mathbb{E}\left[\,\xi_1\,\right]$$

(E4) В силу $\xi\mathbb{I}(\xi \geqslant a) \geqslant a\mathbb{I}(\xi \geqslant a)$

$$\mathbb{E}\left[\,\xi\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,\right] \geqslant a\,\mathbb{E}\left[\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,\right] = a\,\mathbb{P}\left\{\,\xi \geqslant a\,\right\}$$

Второе неравенство (E4) очевидно.

Доказательства свойств

(E2) Следует из (E3), (E1)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[\,\xi_2 - \xi_1\,\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\,\xi_2\,\right] - \mathbb{E}\left[\,\xi_1\,\right]$$

(E4) В силу $\xi \mathbb{I}(\xi \geqslant a) \geqslant a \mathbb{I}(\xi \geqslant a)$

$$\mathbb{E}\left[\,\xi \mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,\right] \geqslant a\,\mathbb{E}\left[\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,\right] = a\,\mathbb{P}\left\{\,\xi \geqslant a\,\right\}$$

Второе неравенство (E4) очевидно.

(E5) Упрощая, будем предполагать, что функция h всюду дифференцируема.
График выпуклой функции лежит выше любой касательной:

$y = h'(m)(x - m) + h(m)$ — касательная в точке $m = \mathbb{E}\left[\,\xi\,\right]$.

Доказательства свойств

(E2) Следует из (E3), (E1)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[\, \xi_2 - \xi_1 \,\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\, \xi_2 \,\right] - \mathbb{E}\left[\, \xi_1 \,\right]$$

(E4) В силу $\xi \mathbb{I}(\xi \geqslant a) \geqslant a \mathbb{I}(\xi \geqslant a)$

$$\mathbb{E}\left[\, \xi \mathbb{I}(\xi \geqslant a) \,\right] \geqslant a\, \mathbb{E}\left[\, \mathbb{I}(\xi \geqslant a) \,\right] = a\, \mathbb{P}\left\{\, \xi \geqslant a \,\right\}$$

Второе неравенство (E4) очевидно.

(E5) Упрощая, будем предполагать, что функция h всюду дифференцируема.
График выпуклой функции лежит выше любой касательной:

$y = h'(m)(x - m) + h(m)$ — касательная в точке $m = \mathbb{E}\left[\, \xi \,\right]$.
Т.о., $h(\xi) \geqslant h'(m)(\xi - m) + h(m)$, следовательно

$$\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] \geqslant h'(m) \mathbb{E}\left[\, (\xi - m) \,\right] + h(m) = h(m) \;=\; h\left(\mathbb{E}\left[\, \xi \,\right]\right)$$

Доказательства свойств

(E2) Следует из (E3), (E1)

$$0 \leqslant \mathbb{E}[\,\xi_2 - \xi_1\,] \;=\; \mathbb{E}[\,\xi_2\,] - \mathbb{E}[\,\xi_1\,]$$

(E4) В силу $\xi\mathbb{I}(\xi \geqslant a) \geqslant a\mathbb{I}(\xi \geqslant a)$

$$\mathbb{E}[\,\xi\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,] \geqslant a\,\mathbb{E}[\,\mathbb{I}(\xi \geqslant a)\,] = a\,\mathbb{P}\{\,\xi \geqslant a\,\}$$

Второе неравенство (E4) очевидно.

(E5) Упрощая, будем предполагать, что функция h всюду дифференцируема.
График выпуклой функции лежит выше любой касательной:

$y = h'(m)(x - m) + h(m)$ — касательная в точке $m = \mathbb{E}[\,\xi\,]$.
Т.о., $h(\xi) \geqslant h'(m)(\xi - m) + h(m)$, следовательно

$$\mathbb{E}[\,h(\xi)\,] \geqslant h'(m)\mathbb{E}[\,(\xi - m)\,] + h(m) = h(m) \;=\; h\left(\mathbb{E}[\,\xi\,]\right)$$

Причём, если функция h строго выпукла, то в последнем неравенстве будет достигаться знак равенства только, если $\xi = m$ п.н. (см. свойство (E2))

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)
(D4) Следует из неравенства Маркова (E4) — в левой части (D4) под знаком вероятности возвести неравенство в квадрат

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)
(D4) Следует из неравенства Маркова (E4) — в левой части (D4) под знаком вероятности возвести неравенство в квадрат

(D5) 1-й способ:

$$\mathbb{E}\left[\,(\xi - c)^2\,\right] \;=\; c^2 - 2c\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right] + \mathbb{E}\left[\,\xi^2\,\right]$$

— квадратическая функция аргумента c достигает минимального значения в точке $c = -(-2\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right])/2 = m$.

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)
(D4) Следует из неравенства Маркова (E4) — в левой части (D4) под знаком вероятности возвести неравенство в квадрат

(D5) 1-й способ:

$$\mathbb{E}\left[\, (\xi - c)^2 \,\right] \;=\; c^2 - 2c\mathbb{E}\left[\, \xi \,\right] + \mathbb{E}\left[\, \xi^2 \,\right]$$

— квадратическая функция аргумента c достигает минимального значения в точке $c = -(-2\mathbb{E}\left[\, \xi \,\right])/2 = m$.

(D5) 2-й способ:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\, (\xi - c)^2 \,\right] \;&=\; \mathbb{E}\left[\, \big((\xi - m) - (c - m)\big)^2 \,\right] \;= \\ &=\; \mathbb{E}\left[\, (\xi - m)^2 \,\right] + (c - m)^2 - 2(c - m)\mathbb{E}\left[\, (\xi - m) \,\right] \end{aligned}$$

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)
(D4) Следует из неравенства Маркова (E4) — в левой части (D4) под знаком вероятности возвести неравенство в квадрат

(D5) 1-й способ:

$$\mathbb{E}\left[\,(\xi-c)^2\,\right] \;=\; c^2 - 2c\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right] + \mathbb{E}\left[\,\xi^2\,\right]$$

— квадратическая функция аргумента c достигает минимального значения в точке $c = -(-2\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right])/2 = m$.

(D5) 2-й способ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\,(\xi-c)^2\,\right] &= \mathbb{E}\left[\,\big((\xi-m)-(c-m)\big)^2\,\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\,(\xi-m)^2\,\right] + (c-m)^2 - 2(c-m)\underbrace{\mathbb{E}\left[\,(\xi-m)\,\right]}_{0} \\
&= \mathbb{E}\left[\,(\xi-m)^2\,\right] + (c-m)^2
\end{aligned}$$

Доказательства свойств

(D1, D2) Самостоятельно.
(D3) Следует из свойства (E1)
(D4) Следует из неравенства Маркова (E4) — в левой части (D4) под знаком вероятности возвести неравенство в квадрат

(D5) 1-й способ:

$$\mathbb{E}\left[\,(\xi - c)^2\,\right] \;=\; c^2 - 2c\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right] + \mathbb{E}\left[\,\xi^2\,\right]$$

— квадратическая функция аргумента c достигает минимального значения в точке $c = -(-2\mathbb{E}\left[\,\xi\,\right])/2 = m$.

(D5) 2-й способ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\,(\xi - c)^2\,\right] \;&=\; \mathbb{E}\left[\,\big((\xi - m) - (c - m)\big)^2\,\right] \;= \\
&=\; \mathbb{E}\left[\,(\xi - m)^2\,\right] + (c - m)^2 - 2(c - m)\underbrace{\mathbb{E}\left[\,(\xi - m)\,\right]}_{0} \\
&=\; \mathbb{E}\left[\,(\xi - m)^2\,\right] + (c - m)^2
\end{aligned}$$

— минимум по c, очевидно, достигается при $c = m$.

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, то*

$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Медиана даёт наилучший прогноз сл.в., когда ошибка вычисляется как среднее абсолютное отклонение

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если* $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, *то*

$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Доказательство.

Можно считать, что медиана $M = 0$. Рассмотрим произвольное $c > 0$ и определим функцию

$$H(x) = |x| - |x - c| = \begin{cases} -c & \text{, если } x \leqslant 0, \\ 2x - c & \text{, если } 0 < x \leqslant c, \\ c & \text{, если } x > c \end{cases}$$

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, то*

$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Доказательство.

Можно считать, что медиана $M = 0$. Рассмотрим произвольное $c > 0$ и определим функцию

$$H(x) = |x| - |x - c| = \begin{cases} -c & \text{, если } x \leqslant 0, \\ 2x - c & \text{, если } 0 < x \leqslant c, \\ c & \text{, если } x > c \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\big[\,H(\xi)\,\big] = \; - c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > c\,\right\} + \mathbb{E}\big[\,(2\xi - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] \leqslant$$

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, то*

$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Доказательство.

Можно считать, что медиана $M = 0$. Рассмотрим произвольное $c > 0$ и определим функцию

$$H(x) = |x| - |x - c| = \begin{cases} -c & \text{, если } x \leqslant 0, \\ 2x - c & \text{, если } 0 < x \leqslant c, \\ c & \text{, если } x > c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\,H(\xi)\,\big] = & \; -c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > c\,\right\} + \mathbb{E}\big[\,(2\xi - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] \leqslant \\ \leqslant & \; -c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > c\,\right\} + \mathbb{E}\big[\,(2c - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] = \end{aligned}$$

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, то*

$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\,H(\xi)\,\big] = &\; -c\mathbb{P}\{\,\xi \leqslant 0\,\} + c\mathbb{P}\{\,\xi > c\,\} + \mathbb{E}\big[\,(2\xi - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] \leqslant \\
\leqslant &\; -c\mathbb{P}\{\,\xi \leqslant 0\,\} + c\mathbb{P}\{\,\xi > c\,\} + \mathbb{E}\big[\,(2c - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] = \\
= &\; -c\mathbb{P}\{\,\xi \leqslant 0\,\} + c\mathbb{P}\{\,\xi > 0\,\} \leqslant -\tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{2} = 0.
\end{aligned}$$

По определению медианы $\mathbb{P}\{\,\xi > 0\,\} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}\{\,\xi \leqslant 0\,\}$

Связь с медианой

Теорема. *Пусть M — медиана распределения сл.в. ξ. Если $\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] < \infty$, то*
$$\min_c \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \;=\; \mathbb{E}\big[\,|\xi - M|\,\big]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\,H(\xi)\,\big] &= \; -c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > c\,\right\} + \mathbb{E}\big[\,(2\xi - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] \leqslant \\
&\leqslant \; -c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > c\,\right\} + \mathbb{E}\big[\,(2c - c)\mathbb{I}(0 < \xi \leqslant c)\,\big] = \\
&= \; -c\mathbb{P}\left\{\,\xi \leqslant 0\,\right\} + c\mathbb{P}\left\{\,\xi > 0\,\right\} \leqslant -\tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $0 \geqslant \mathbb{E}\big[\,H(\xi)\,\big] = \mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] - \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big]$, т.е.
$$\mathbb{E}\big[\,|\xi|\,\big] \leqslant \mathbb{E}\big[\,|\xi - c|\,\big] \text{ при } \forall c > 0 \;\; (= M).$$
Аналогично (?!) рассматривается случай $c < 0$.

Интерпретация

Математическое ожидание — центр распределения случайной величины

Медиана — центр распределения случайной величины

Дисперсия — мера разброса возможных значений сл.в.

Стандартное отклонение — мера разброса в исходных единицах.

Интерквартильная широта $(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$ (т.е. расстояние между квартилями) — мера разброса возможных значений сл.в.

Способы вычисления мат.ожидания

Пусть сл.в. $\xi \sim F$, тогда матем.ожидание любой функции $h(\xi)$

$$\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] \;=\; \int_{\mathbb{R}} h(x)\, F(dx)$$

Способы вычисления мат.ожидания

Пусть сл.в. $\xi \sim F$, тогда матем.ожидание любой функции $h(\xi)$

$$\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] \; = \; \int_{\mathbb{R}} h(x)\, F(dx)$$

Теорема (Жордан–Лебег). *Любая ф.р.*

$$F(x) = F_d(x) + F_a(x) + F_s(x)$$

F_d — *функция дискретного типа,*
F_a — *функция абсолютно непрерывного типа,*
F_s — *непрерывная функция, порождающая сингулярную меру*

Если слагаемых больше одного, то эти функции будут ненормированными, т.е. $F_*(+\infty) \neq 1$. Матем.ожидание
$\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] \; = \; \int_{\mathbb{R}} h(x)\, F_d(dx) + \int_{\mathbb{R}} h(x)\, F_a(dx) + \int_{\mathbb{R}} h(x)\, F_s(dx)$

Способы вычисления мат.ожидания

Теорема (Жордан–Лебег). *Любая ф.р.*

$$F(x) = F_d(x) + F_a(x) + F_s(x)$$

F_d — *функция дискретного типа,*
F_a — *функция абсолютно непрерывного типа,*
F_s — *непрерывная функция, порождающая сингулярную меру*

1. $\xi \sim F_d$ — дискретный тип распределения, если найдётся $\mathfrak{X} = \{x_j, j = 1, 2, \ldots, N,\ N \leqslant \infty\}$:

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = 1, \quad p_j = \mathbb{P}\{\,\xi = x_j\,\}$$

Т.к. $\xi = \sum_1^N x_j \mathbb{I}(\xi = x_j)$, то $\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] = \sum_{j=1}^{N} h(x_j) p_j,$

и матем.ожидание конечно, если ряд сходится абсолютно.

Способы вычисления мат.ожидания

1. $\xi \sim F_d$ — дискретный тип распределения, если найдётся $\mathfrak{X} = \{x_j, j = 1, 2, \ldots, N,\ N \leqslant \infty\}$:

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = 1, \quad p_j = \mathbb{P}\{\,\xi = x_j\,\}$$

Т.к. $\xi = \sum_1^N x_j \mathbb{I}(\xi = x_j)$, то $\mathbb{E}\left[\,h(\xi)\,\right] \;=\; \sum_{j=1}^{N} h(x_j) p_j,$

и матем.ожидание конечно, если ряд сходится абсолютно.

2. $\xi \sim F_d$ — абсолютно-непрерывного типа, если найдётся функция $f \geqslant 0$ (плотность распределения) такая, что

$$F_a(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

f есть производная Радона–Никодима меры Лебега–Стилтьеса μ_F относительно меры Лебега — можно взять $f = F'$.

Способы вычисления мат.ожидания

2. $\xi \sim F_d$ — абсолютно-непрерывного типа, если найдётся функция $f \geqslant 0$ (плотность распределения) такая, что

$$F_a(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,$$

тогда матем.ожидание

$$\mathbb{E}\big[\,h(\xi)\,\big] \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx$$

и матем.ожидание конечно, если интеграл сходится абсолютно — в этом случае матем.ожидание можно вычислять как интеграл Римана.

Способы вычисления мат.ожидания

2. $\xi \sim F_d$ — абсолютно-непрерывного типа, если найдётся функция $f \geqslant 0$ (плотность распределения) такая, что

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

тогда матем.ожидание

$$\mathbb{E}\left[\, h(\xi) \,\right] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

и матем.ожидание конечно, если интеграл сходится абсолютно — в этом случае матем.ожидание можно вычислять как интеграл Римана.

3. К классу непрерывных функций, порождающих сингулярную меру, относятся, например, сингулярные ф.р., которые всюду непрерывны и почти всюду (по мере Лебега) не возрастают.

Функция Кантора сингулярна. В «жизни» не встречается

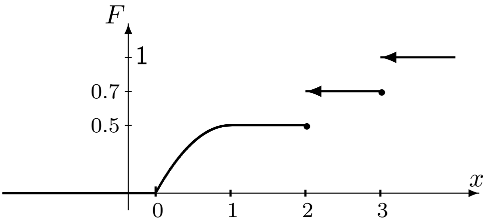
Способы вычисления мат.ожидания

Дискретные распределения абсолютно непрерывны относительно некоторой считающей меры μ (чаще всего, меры, считающей целые числа). В этом случае функция вероятностей $f(x) = \mathbb{P}\{\xi = x_j\}$, если $x \in \mathfrak{X}$, и $f(x) = 0$, если $x \notin \mathfrak{X}$, есть производная Радона–Никодима $\frac{d\mu_F}{d\mu}$. Поэтому всегда можно записать матем.ожидание в интегральном виде

$$\mathbb{E}[h(\xi)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, d\mu,$$

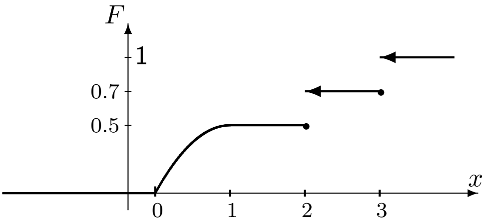
где в случае дискретного распределения ξ интеграл есть простая сумма с плотностью f, равной функции вероятностей ξ, а в случае абсолютно непрерывного распределения мера μ есть мера Лебега ($d\mu = dx$), в качестве плотности f можно взять производную F', и интеграл можно вычислять как римановский (несобственный).

Пример вычисления мат.ожидания



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin(\pi x/2) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0.5 & \text{, если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0.7 & \text{, если } 2 < x \leqslant 3. \\ 1 & \text{, если } 3 < x. \end{cases}$$

Пример вычисления мат.ожидания



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin(\pi x/2), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0.5 & \text{, если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0.7 & \text{, если } 2 < x \leqslant 3. \\ 1 & \text{, если } 3 < x. \end{cases}$$

Сингулярная часть отсутствует

Пример вычисления мат.ожидания

Абсолютно непрерывная часть:

$$F_a(x) = \begin{cases} \quad 0 & \text{, если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \quad 0.5 & \text{, если } 1 \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

Обобщённая ф.р.: $F(+\infty) = 0.5$

Пример вычисления мат.ожидания

Абсолютно непрерывная часть:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0.5 & \text{, если } 1 \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

с плотностью

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x < 0, \\ \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{, если } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

В точках $x = 0, x = 1$ плотность выбирается любым удобным способом

Пример вычисления мат.ожидания

Абсолютно непрерывная часть:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0.5 & \text{, если } 1 \leqslant x < \infty, \end{cases}$$

с плотностью

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x < 0, \\ \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{, если } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Т.о.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, F_a(dx) = \int\limits_{0}^{1} x\, \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,.$$

Пример вычисления мат.ожидания

Дискретная функция (функция скачков)

$$F_d(x) = \begin{cases} \ 0 \ , \text{ если } x \leqslant 2, \\ 0.2, \text{ если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0.5, \text{ если } 3 < x < \infty. \end{cases}$$

Следовательно, функция вероятностей $f_d(x) = 0.2$ при $x = 2$ и $f_d(x) = 0.3$ при $x = 3$ (— совпадает с величиной скачка в точке). Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, F_d(dx) \ = \ 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 = 1.3.$$

Таким образом, математическое ожидание

$$\mathbb{E}[\,\xi\,] \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + 1.3 \approx 1.482$$